# Τεχνικές Βελτιστοποίησης - Εργασία 3

Ονοματεπώνυμο: Τσαμήτρος Νικόλαος

ΑΕΜ: 10781

Σε αυτήν την εργασία, το ζητούμενο είναι η μελέτη της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$, $x = [x_1\ x_2]^T$ ακολουθώντας την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου, αρχικά χωρίς περιορισμούς και έπειτα με τους περιορισμούς:

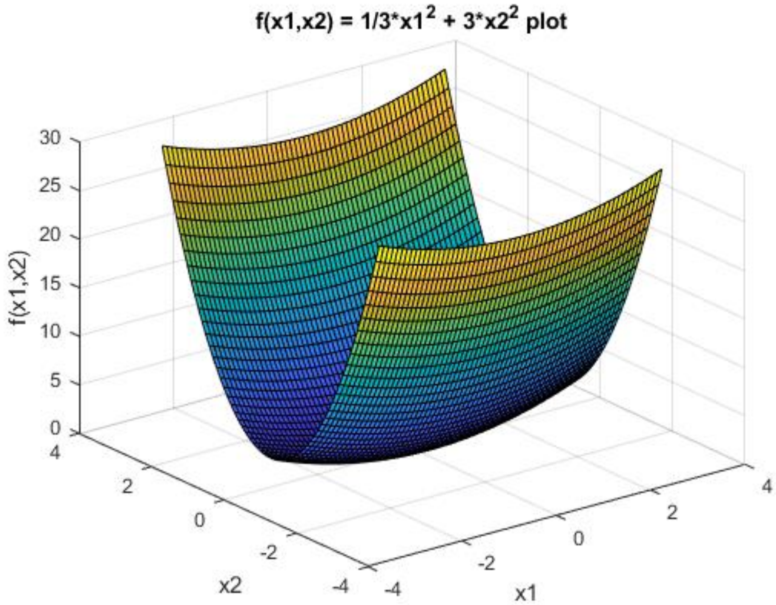
$$-10 \leq x_1 \leq 5 \text{ και } -8 \leq x_2 \leq 12$$

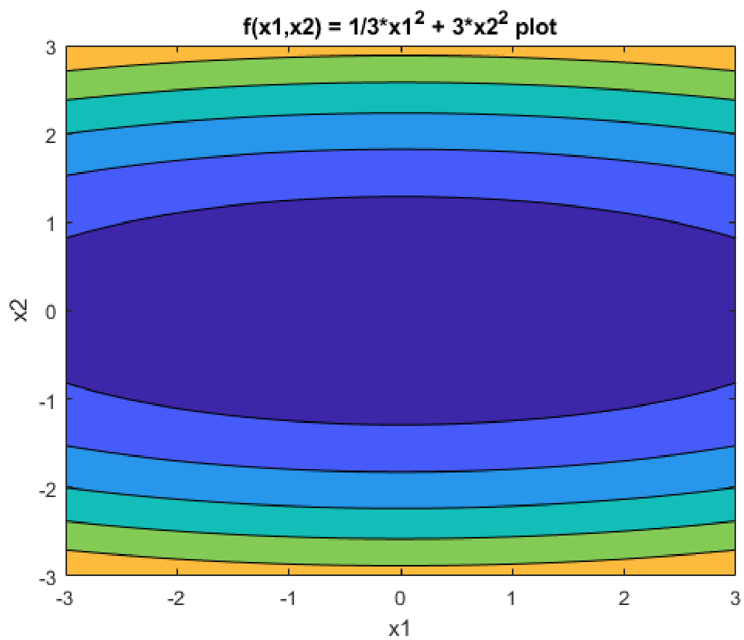
ακολουθώντας την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με Προβολή.

Γενικά, ο αλγόριθμος της μέγιστης καθόδου, όπως είδαμε και στην 2η εργασία, βασίζεται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα $x_1,\ x_2, \dots$ έτσι ώστε $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, $k = 1,2, ..$

## Σχεδίαση της συνάρτησης

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο διαγράμματα της αντικειμενικής συνάρτησης, ώστε να πάρουμε μια γενική εικόνα για την μορφή της. Το πρώτο διάγραμμα είναι στον $\mathbb{R}^3$, ενώ το δεύτερο είναι *contour plot*. Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο το $f(0,0) = 0$.



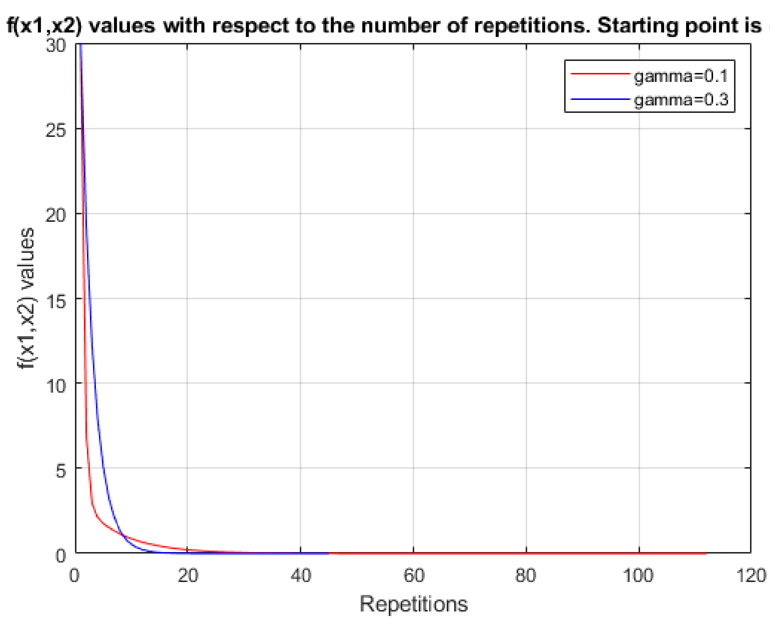
# Θέμα 1

Στο πρώτο θέμα ζητείται η χρήση της Μεθόδου της Μέγιστης Καθόδου χωρίς περιορισμούς με ακρίβεια $\varepsilon = 0.001$. Ως αρχικό σημείο $(x_0,\ y_0)$, μπορούμε να διαλέξουμε ένα τυχαίο της επιλογής μας. Προτιμήθηκε το $(-3,\ 3)$. Το βήμα $\gamma_k$ διατηρείται σταθερό και παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

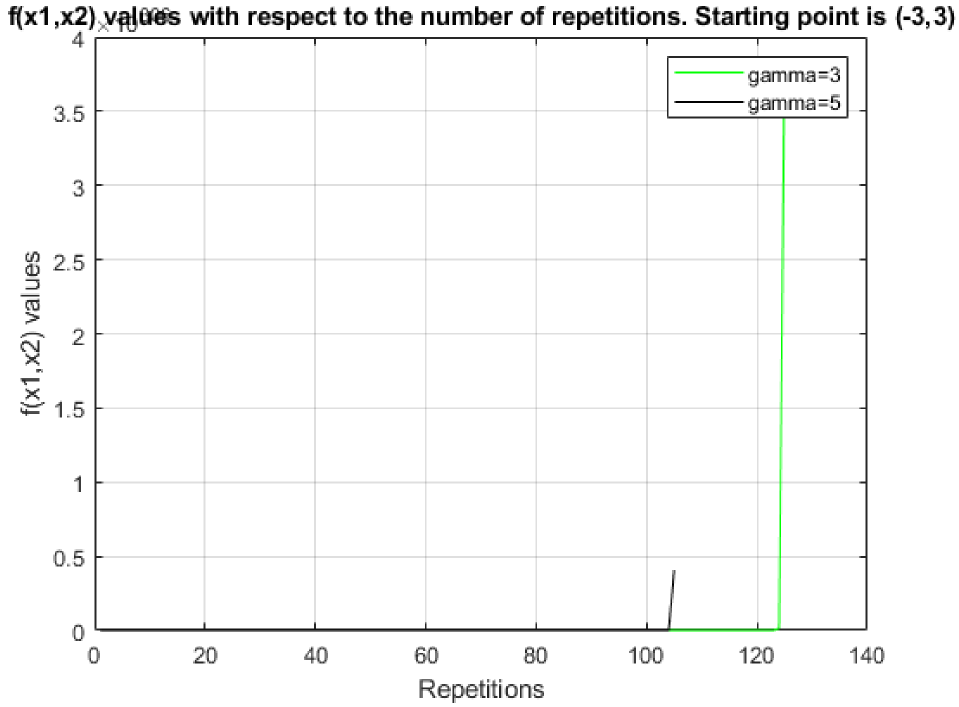
- $\gamma_k = 0.1$
- $\gamma_k = 0.3$
- $\gamma_k = 3$
- $\gamma_k = 5$

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο διαγράμματα της σύγκλισης της αντικεμενικής συνάρτησης με βάση τις επαναλήψεις. Το πρώτο αφορά την περίπτωση που ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο, που συμβαίνει όταν $\gamma_k = 0.1$ και $\gamma_k = 0.3$. Το δεύτερο αφορά την περίπτωση που ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει και καταλήγει μακριά από το ολικό ελάχιστο λόγω του μεγάλου βήματος $\gamma_k$. Η ανάλογη μαθηματική μελέτη παρουσιάζεται μετά τα διαγράμματα.

1. Για σταθερό $\gamma_k = 0.1$, ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο $f(0{,}0) = 0$ σε *112 επαναλήψεις*, ενώ για $\gamma_k = 0.3$ σε *45 επαναλήψεις*.



2. Για σταθερό $\gamma_k = 3$, ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει και τερματίζει μετά από *125 επαναλήψεις*, ενώ για $\gamma_k = 5$ μετά από *105 επαναλήψεις.*



## Μαθηματική Μελέτη

Γνωρίζουμε από την θεωρία πως για να συγκλίνει ο αλγόριθμος το βήμα $\gamma_k$ δεν πρέπει να επιλεχθεί ούτε πολύ μεγάλο, ούτε πολύ μικρό(κυρίως για να αποφύγουμε τον μεγάλο αριθμό επαναλήψεων). Επίσης πρέπει:

$f(x_{k+1}) < f(x_k) \rightarrow \frac{|f(x_{k+1})|}{|f(x_k)|} < 1$, (1) δηλαδή οι τιμές της $f$ να μικραίνουν.

Υπολογίζουμε το $\nabla f(x_1,\, x_2) = \left[\frac{2}{3}x_1 \; 6x_2\right]^T$(2)

Έχουμε πως $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)$ και από την σχέση (2) προκύπτει πως
$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \left[\frac{2}{3}x_{k,1} \; 6x_{k,2}\right]^T$

Δηλαδή $x_{1,k+1} = x_{1,k} - \frac{2}{3}\gamma_k x_{1,k}$ και $x_{2,k+1} = x_{2,k} - 6\gamma_k x_{2,k}$

Από την (1) για το $x_{1,k}$:

$$-1 < \frac{\left(x_{1,k} - \frac{2}{3}\gamma_k x_{1,k}\right)}{x_{1,k}} < 1 \;\Rightarrow\; -1 < 1 - \frac{2}{3}\gamma_k < 1 \;\Rightarrow\; -2 < -\frac{2}{3}\gamma_k < 0 \;\Rightarrow\; 0 < \gamma_k < 3$$

Από την (1) για το $x_{2,k}$:

$$-1 < \frac{\left(x_{2,k} - 6\gamma_k x_{2,k}\right)}{x_{2,k}} < 1 \;\Rightarrow\; -1 < 1 - 6\gamma_k < 1 \;\Rightarrow\; -2 < -6\gamma_k < 0 \;\Rightarrow\; 0 < \gamma_k < \frac{1}{3}$$

Συνεπώς, για να συγκλίνει ο αλγόριθμος θέλουμε $0 < \gamma_k < \frac{1}{3}$.

Στην επόμενη σελίδα ακολουθεί μαθηματική μελέτη για κάθε βήμα $\gamma_k$.

1. Για $\gamma_\kappa = 0.1$ και σημείο το $(-3,3)$ έχουμε: $x_{1,k+1} = \frac{14}{15}x_{1,k}$
$$x_{2,k+1} = 0.4x_{2,k}$$
Υπάρχει σύγκλιση του αλγορίθμου στο 0, απλά για το $x_1$ είναι πιο αργή από το $x_2$. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την εφαρμογή, καθώς ο αλγόριθμος συγκλίνει σε 112 επαναλήψεις.

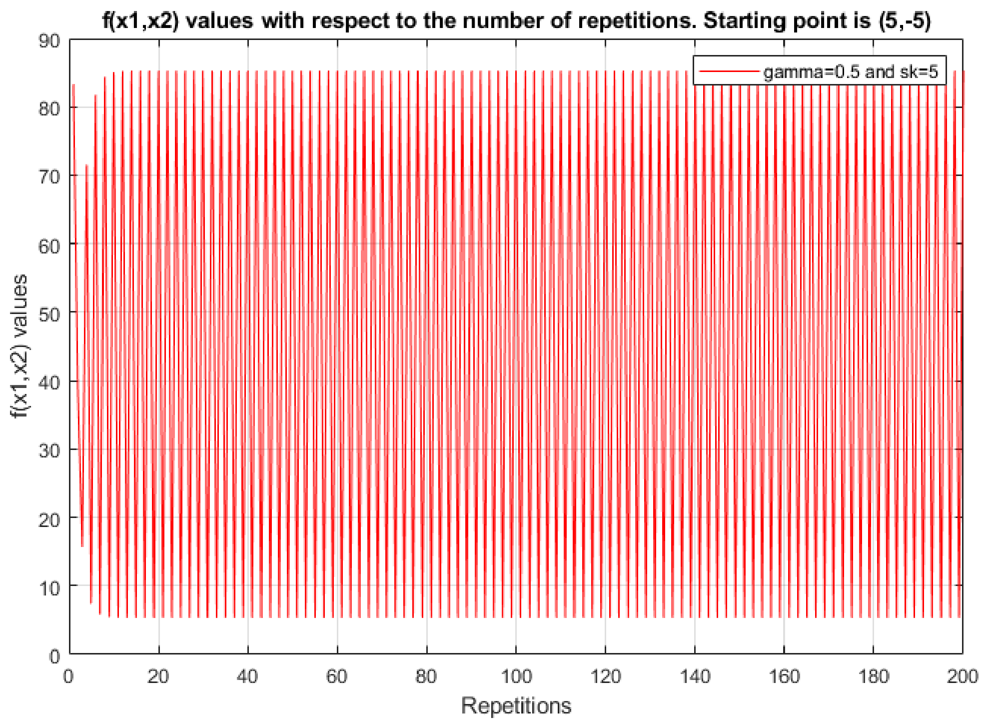
2. Για $\gamma_k = 0.3$ και σημείο το $(-3,3)$ έχουμε: $x_{1,k+1} = \frac{4}{5}x_{1,k}$
$$x_{2,k+1} = -0.8x_{2,k}$$
Υπάρχει σύγκλιση του αλγορίθμου στο 0 και τα $x_1$, $x_2$ συγκλίνουν με τον ίδιο ρυθμό, απλά το $x_2$ αλλάζει πρόσημο σε κάθε επανάληψη.Επαληθεύεται με βάση την εφαρμογή και ο αλγόριθμος συγκλίνει σε 45 επαναλήψεις.

3. Για $\gamma_k = 3$ και σημείο το $(-3,3)$ έχουμε: $x_{1,k+1} = -x_{1,k}$
$$x_{2,k+1} = -17x_{2,k}$$
Ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει. Το $x_1$ εναλλάσεται μεταξύ -3 και 3, ενώ το $x_2$ απειρίζεται μετά από κάποιες επαναλήψεις. Αυτό επαληθεύεται και από την εφαρμογή.

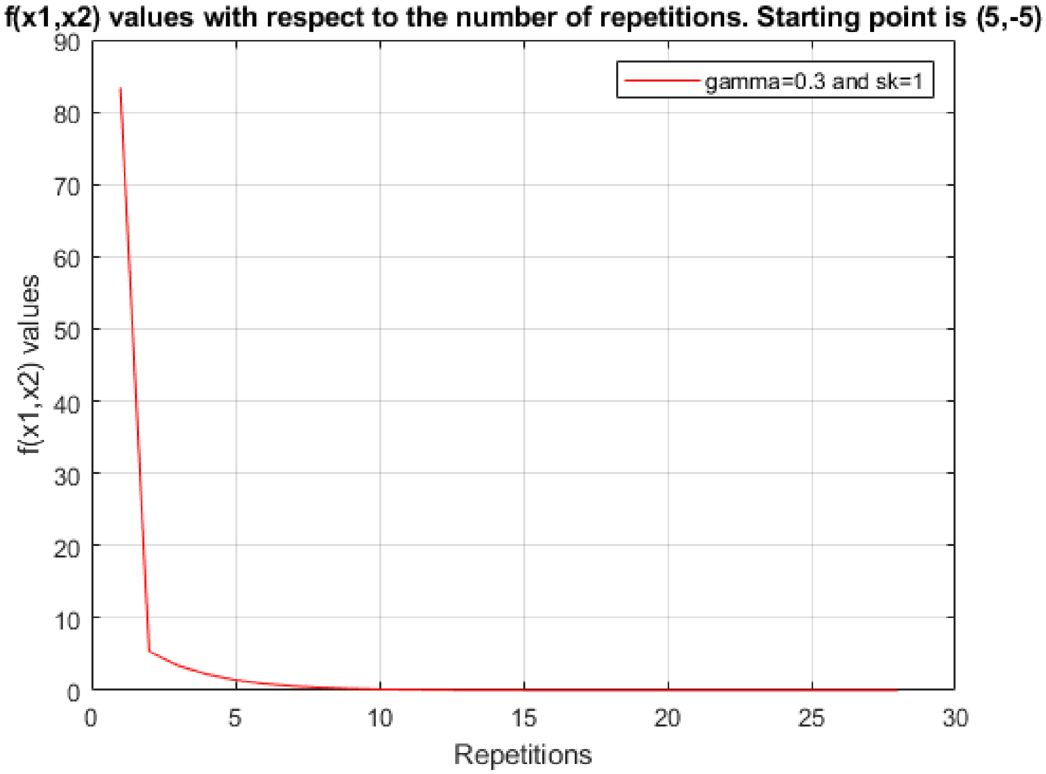
4. Για $\gamma_k = 5$ και σημείο το $(-5,5)$ έχουμε: $x_{1,k+1} = -\frac{7}{3}x_{1,k}$
$$x_{2,k+1} = -29x_{2,k}$$
Ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει. Και οι δύο συντεταγμένες αλλάζουν πρόσημο σε κάθε επανάληψη και τελικά απειρίζονται. Αυτό επαληθεύεται και από την εφαρμογή.

## Θέμα 2

Στο δεύτερο θέμα ζητείται η υλοποίηση της μεθόδου της *Μέγιστης Καθόδου με Προβολή* για $s_k = 5$, $\gamma_k = 0.5$ και σημείο εκκίνησης το $(5, -5)$, το οποίο είναι εφικτό, με ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται λόγω των περιορισμών $-10 \leq x_1 \leq 5$ και $-8 \leq x_2 \leq 12$. Περιμένουμε πως ο αλγόριθμος δεν θα συγκλίνει, διότι το $s_k$ είναι ίδιο με την τιμή του $\gamma_k$ στο 4ο υποερώτημα του 1ου θέματος και το $\gamma_k > \frac{1}{3}$.

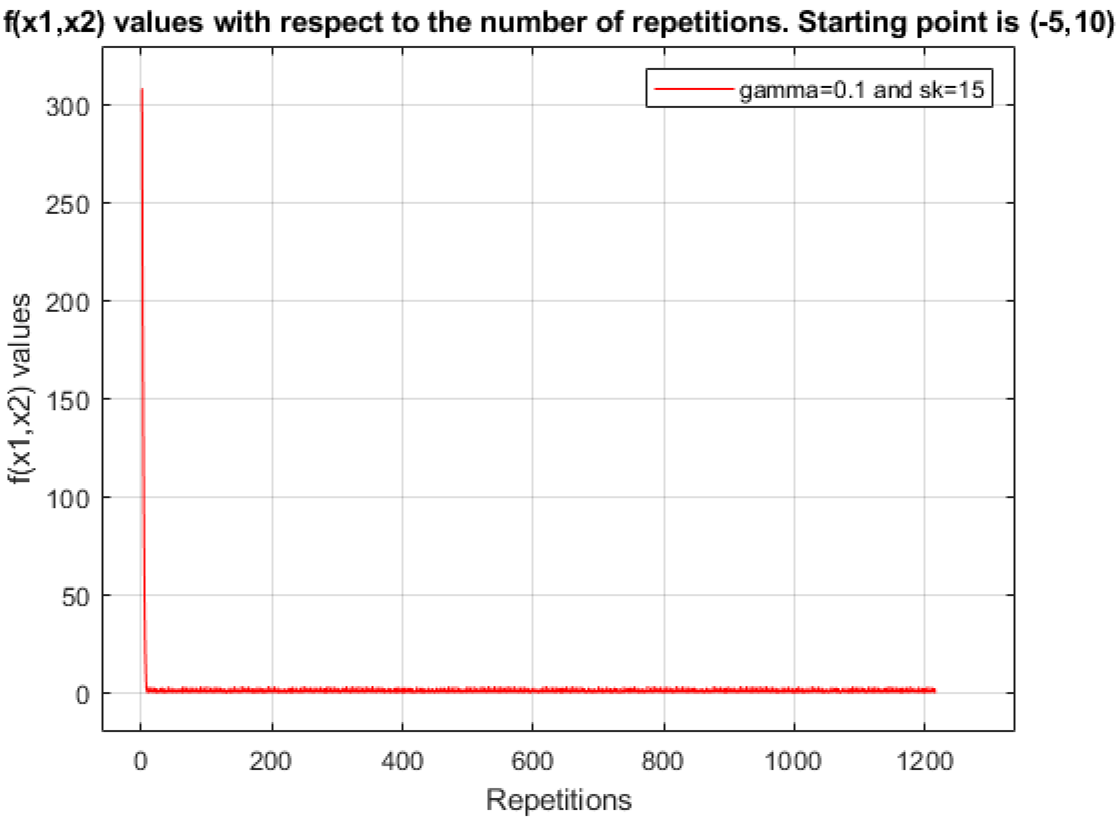



Πράγματι, παρατηρώντας το διάγραμμα των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, βλέπουμε πως ο αλγόριθμος παγιδεύεται σε έναν ατέρμονα βρόγχο και ταλαντώνεται. Για να διορθωθεί αυτό, μπορούμε να συγχρονίσουμε το $\gamma_k$ και το $s_k$ μειώνοντας και τα δύο. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα διάγραμμα για $\gamma_k = 0.3$ και $s_k = 1$, τιμές για τις οποίες ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο σε *28 επαναλήψεις*.

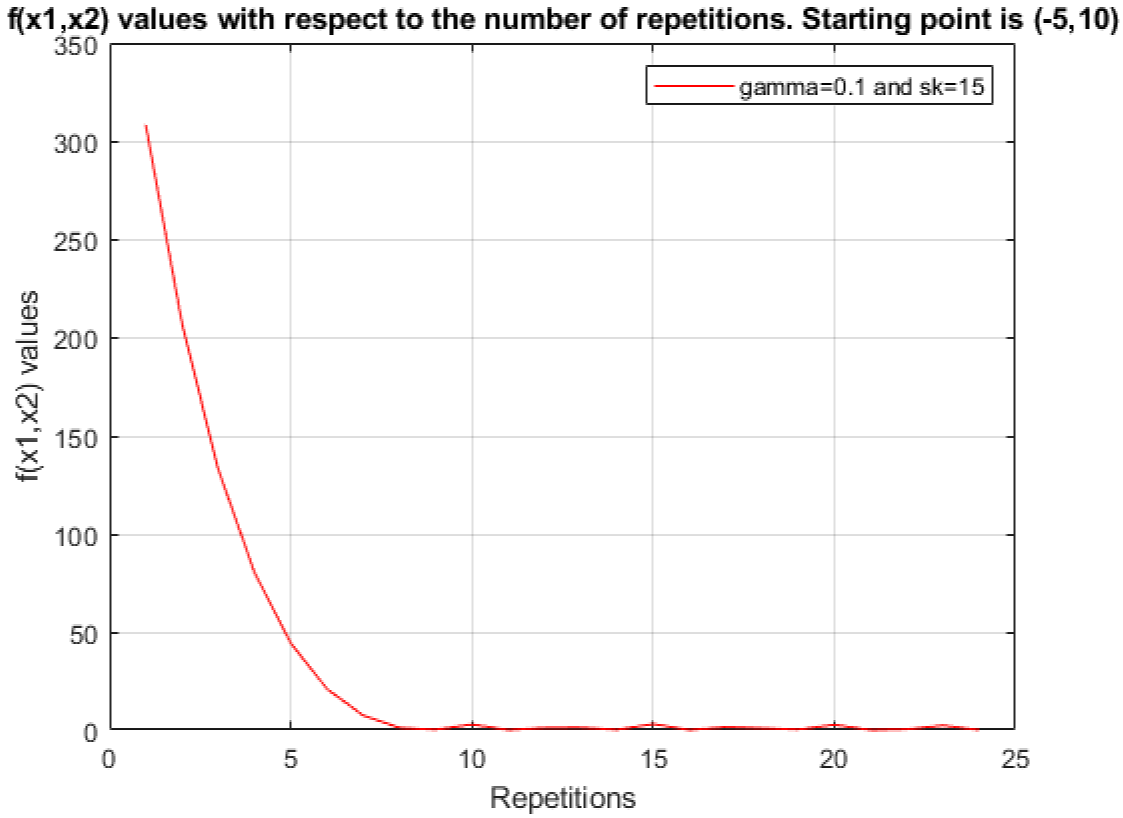

f(x1,x2) values with respect to the number of repetitions. Starting point is (5,-5)
gamma=0.3 and sk=1
f(x1,x2) values
Repetitions
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
5
10
15
20
25
30

## Θέμα 3

Στο τρίτο θέμα υλοποιούμε την ίδια μέθοδο με $s_k = 15$, $\gamma_k = 0.1$, σημείο εκκίνησης το $(-5,10)$, το οποίο είναι εφικτό, και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$. Περιμένουμε ο αλγόριθμος να μην συγκλίνει εξαιτίας του μεγάλου $s_k$.



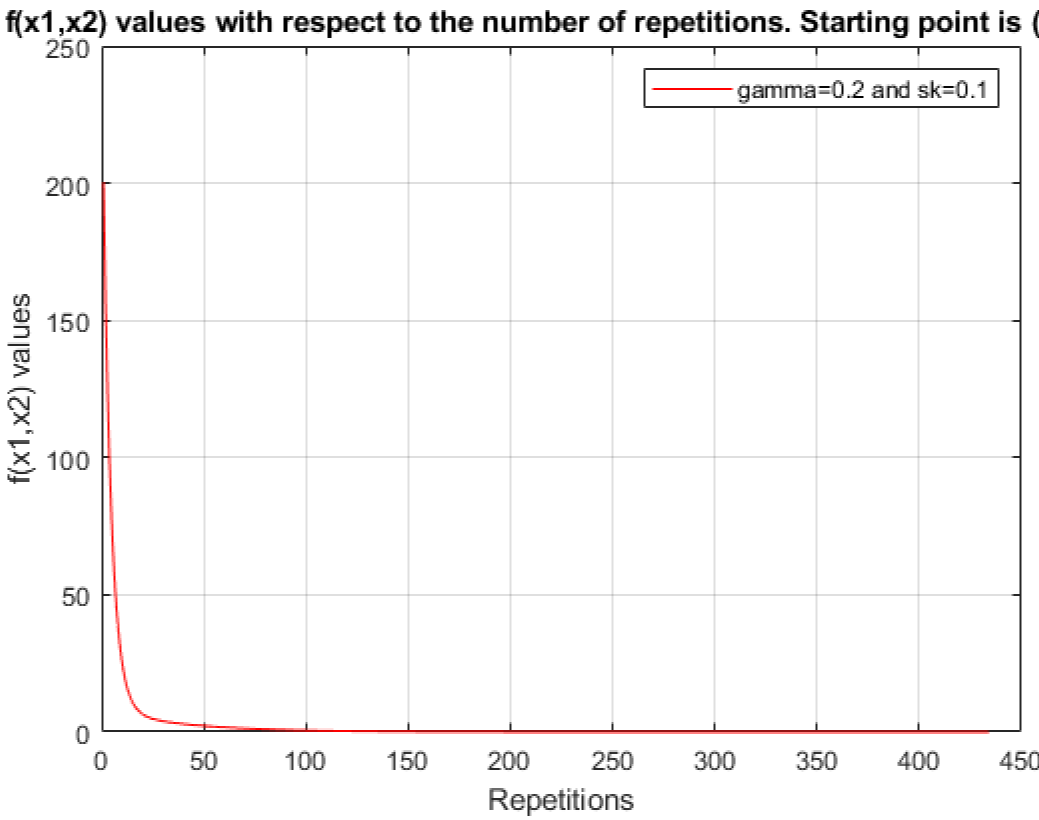

Αντίθετα, ο αλγόριθμος τερματίζει μετά απο 1216 επαναλήψεις, φτάνοντας στο ελάχιστο, αφού όμως πρώτα ταλαντώνεται κοντά του για πάρα πολλές επαναλήψεις. Μάλιστα, ο αλγόριθμος προσεγγίζει το ολικό ελάχιστο από την 11η κι όλας επανάληψη. Για να συγκλίνει καλύτερα ο αλγόριθμος, μπορούμε όπως και στο ερώτημα 2, να συγχρονίσουμε καλύτερα το $s_k$ και το $\gamma_k$, ή να μειώσουμε την ακρίβεια, δηλαδή να αυξήσουμε το $\varepsilon$. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα διάγραμμα με $\varepsilon = 0.1$.




Βλέπουμε πως ο αλγόρθμος συγκλίνει σε *24 επαναλήψεις.* Βέβαια, πάλι υπάρχει μια μικρή ταλάντωση κοντά στο ελάχιστο, η οποία οφείλεται στις πολύ μακρινές τιμές των $s_k$ και $\gamma_k$.

# Θέμα 4

Στο τέταρτο θέμα υλοποιούμε την ίδια μέθοδο με $s_k = 0.1, \gamma_k = 0.2$, σημείο εκκίνησης το $(8, -10)$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$. Εκ των προτέρων, περιμένουμε αργή σύγκλιση του αλγορίθμου, διότι τα $s_k$ και $\gamma_k$ παίρνουν μικρές τιμές. Επίσης, πρέπει να παρατηρήσουμε πως το σημείο εκκίνησης δεν είναι εφικτό, αφού $x_2 = -10 \notin [-8, 12]$. Βέβαια, αυτός ο έλεγχος γίνεται μέσα στον αλγόριθμο και το σημείο παίρνει την τιμή $x_2 = -8$.




Όπως αναμέναμε, ο αλγόριθμος συγκλίνει αργά στο ολικό ελάχιστο λόγω των μικρών τιμών που παίρνουν τα $s_k$ και $\gamma_k$ καθώς και του μικρού $\varepsilon$. Ο αλγόριθμος συγκλίνει σε *434 επαναλήψεις*.