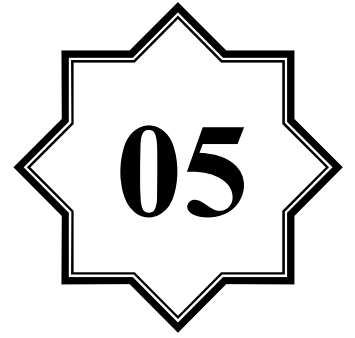


عروض نظرية و تمارين

من التطورات الحديثة

تطور جملة ميكانيكية



الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 05

السقوط الحر و القذائف

السقوط الحر للأجسام في الهواء

• تعريف السقوط الحر :

نقول عن جسم أنه في سقوط حر ، عندما يتحرك تحت تأثير ثقله فقط ، أي بإهمال تأثيرات الهواء عليه المتمثلة في قوة الاحتكاك و دافعة أرخميدس .

التمرين (1) :

تقذف كرة (S) شاقوليا عند اللحظة $t = 0$ من نقطة (O) نعتبرها مبدأ الفواصل ، تقع على ارتفاع $h_0 = 5 \text{ m}$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0 = 10 \text{ m/s}$ (الشكل-1) .

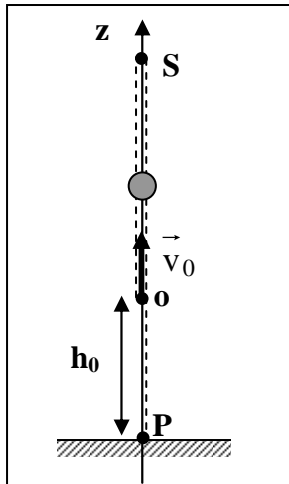
- 1- أدرس طبيعة حركة الكرة .
 - 2- أكتب المعادلات الزمنية للحركة $z(t)$ ، $v_z(t)$ ، مثل مخططات الحركة بشكل كافي .
 - 3- أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .
 - 4- أوجد لحظة اصطدام الكرة بالأرض ، ثم استنتج سرعتها عندئذ .
- يؤخذ : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

الاجوبة :

1- دراسة طبيعة الحركة :

- الجملة المعتبرة : جسم صلب .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا خلال مدة السقوط .



- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : ثقل الجسم الصلب \vec{P} .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور OZ :

$$- P = m a_z$$

$$- m.g = m a_z \rightarrow a_z = - g$$

كون أن g ثابت يكون تسارع الجسم (S) ثابت ، و بما أن مساره مستقيم ، فالحركة إذن مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- المعادلات الزمنية للحركة $v_z(t)$ ، $y(t)$ ، كذا معادلة المسار $y(x)$ ، مخططات الحركة :
لدينا :

$$a_z = - g$$

$$v_z = - g t + C$$

$$t = 0 \rightarrow v_z = v_0$$

$$v_0 = - g(0) + C \rightarrow C = v_0$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

من الشروط الابتدائية :

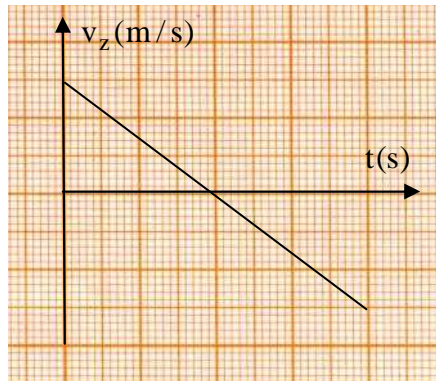
بالتعويض :

و منه تصبح معادلة السرعة :

$$v_z = - g t + v_0$$

$$v_z = a_z t + v_0$$

حيث a_z هو تسارع الحركة .
- بيانيا :



- نكامل طرفي $v_z(t)$ بالنسبة للزمن فنجد :

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + C'$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow z = 0$$

بالتعويض :

$$0 = -\frac{1}{2} g (0)^2 + v_0(0) + C' \rightarrow C' = 0$$

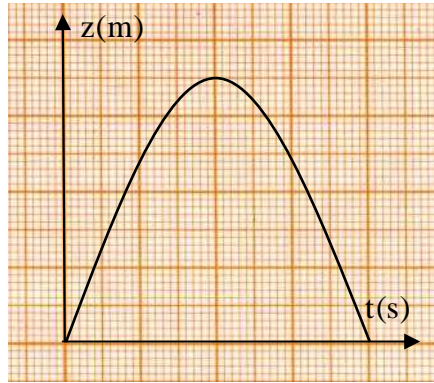
يصبح :

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

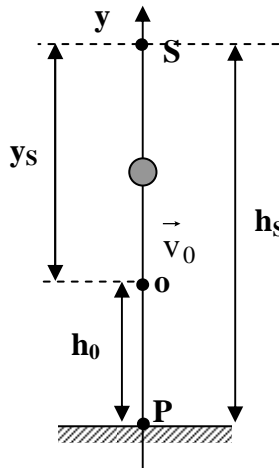
أو :

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_0 t$$

حيث a_z هو تسارع الحركة .
- بيانها :



3- أقصى ارتفاع تبلغ الكرة :



$$h_s = h_0 + y_s$$

تبلغ الكرة أقصى ارتفاع في الموضع (S) لذا يكون : $v_{yS} = 0$ ، بالتعويض في $v_y(t)$:

$$v_{yS} = -g \cdot t_s + v_0$$

$$0 = -10 t_s + 10$$

$$10 t_S = 10 \rightarrow t_S = 1 \text{ s}$$

بالتعويض في $y(t)$ نجد :

$$y_S = -\frac{1}{2} g t_S^2 + v_0 t_S$$

$$y_S = (0.5 \cdot 10 \cdot (1)^2) + (10 \cdot 1) = 5 \text{ m}$$

إذن :

$$h_S = 5 + 5 = 10 \text{ m}$$

ملاحظة :

يمكن الحصول على نفس النتيجة بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة .

4- لحظة اصطدام الكرة بالأرض عند P :

لدينا $y_P = -h_0 = -5 \text{ m}$ ، بالتعويض في $y(t)$:

$$y_P = -\frac{1}{2} g t_P^2 + v_0 t_P$$

$$-5 = -0.5 \cdot 10 t_P^2 - 10 t_P$$

$$5 t_P^2 - 10 t_P - 5 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - (4 \cdot 5 \cdot (-5)) = 200 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 200$$

$$\bullet t_{P1} = \frac{10 - 10\sqrt{2}}{10} = 1 - \sqrt{2} = 0.41 \text{ s} \quad (\text{مرفوض})$$

$$\bullet t_{P1} = \frac{10 + 10\sqrt{2}}{10} = 1 + \sqrt{2} = 2.41 \text{ s}$$

- سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض عند P :

لدينا $t_P = 2.41 \text{ s}$ بالتعويض $v_y(t)$:

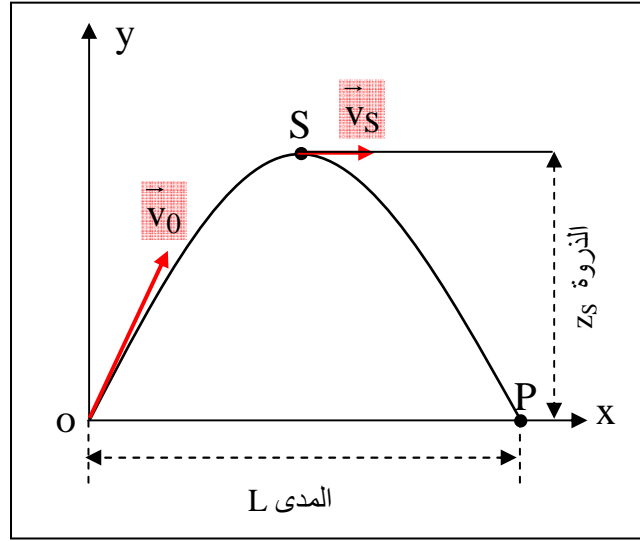
$$v_{yP} = -10 t_P + 10$$

$$v_{yP} = -10 (2.4) + 10 = -14.1 \text{ m/s}$$

حركة قذيفة

• الذروة و المدى :

- من موضع (O) نعتبره مبدأ الاحداثيات في معلم مستوي (\vec{i}, \vec{j}) ، نقذف جسم صلب (S) في اللحظة $t = 0$ بسرعة ابتدائية \vec{v}_0 ، يصنع شعاعها الزاوية α مع المحور ox (الشكل) . نعتبر قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس مهملية .



- الذروة هي أعظم ارتفاع يبلغه الجسم الصلب (الموضع S). و الذي يكون عنده شعاع السرعة أفقيا ، إذن عند بلوغ الذروة يتحقق :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0$$

- المدى L هو المسافة بين نقطة القذف O و نقطة التصادم P على المستوي الأفقي الذي يضم O ، أي :

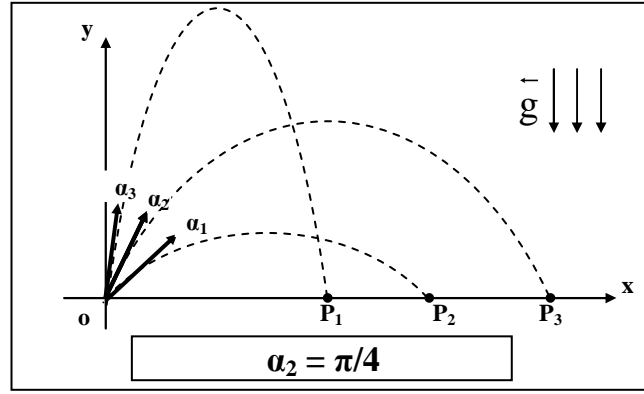
$$L = x_P$$

و إذا كان مبدأ الاحداثيات منطبق على موضع القذف كما في الشكل السابق ، فإن عند بلوغ المدى يتحقق :

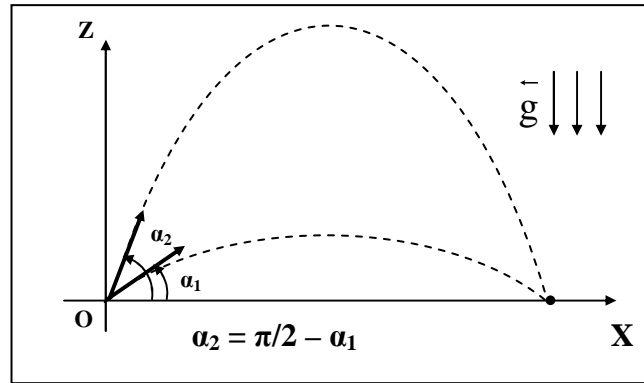
$$y_P = 0$$

ملاحظة- 1 :

- من أجل قيمة محددة للسرعة الابتدائية v_0 ، يكون المدى أعظمية لما $\sin(2\alpha) = 1$ أي $\alpha = 45^\circ$ كما مبين في الشكل التالي :



- نحصل على نفس المدى من أجل الزاويتين α ، $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ كما مبين في الشكل التالي :

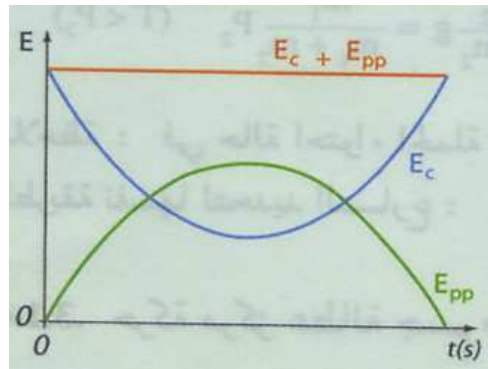


• طاقة الجملة (قذيفة + أرض) :

- طاقة الجملة (قذيفة + أرض) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي تتضمن طاقة حركية $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ و طاقة كامنة ثقالية $E_{pp} = mgz$ ، ففي حقل منتظم للجاذبية g يعبر عن طاقة الجملة (قذيفة + أرض) بالعلاقة :

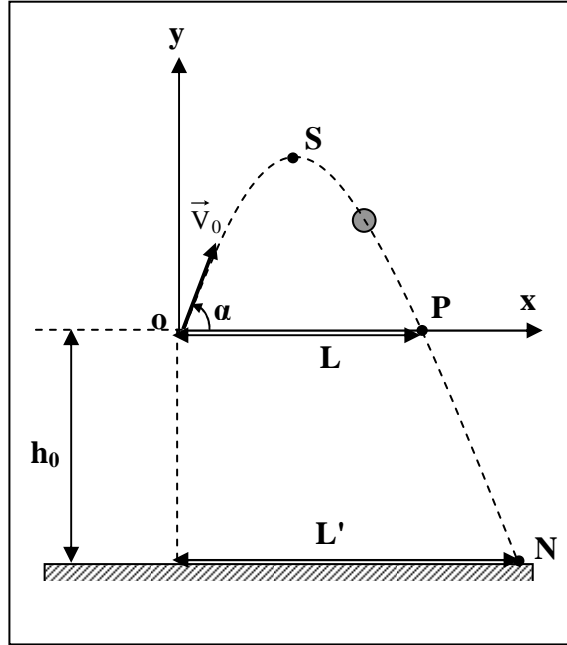
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

- الدراسة التجريبية لتطور كل من الطاقة الحركية E_c و الطاقة الكامنة E_p و كذا الطاقة الكلية $E = E_c + E_p$ للجملة (قذيفة + أرض) في الحالة التي تكون فيها قوى الإحتكاك مهمة أعطت البيانات الموضحة في الشكل التالي :



التمرين (2) :

من نقطة O تقع على ارتفاع $h_0 = 5 \text{ m}$ من سطح الأرض نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة (S) كتلتها m بسرعة ابتدائية $v_0 = 20 \text{ m.s}^{-1}$ يصنع شعاعها الزاوية $\alpha = 60^\circ$ ، تهمل كل قوى الاحتكاك و كذا دافعة أرخميدس ، نعتبر مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة O .
يعطى : $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- 1- أدرس طبيعة حركة الكرة .
- 2- أكتب المعادلات الزمنية للحركة ، مثل مخططات الحركة بشكل كفي .
- 3- أكتب معادلة المسار و بين طبيعته .
- 4- أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .
- 5- أوجد مدى الكرة L و كذا الزمن اللازم لذلك .
- 6- تأكد من أن زمن بلوغ المدى هو ضعف زمن بلوغ الذروة .
- 7- أحسب المسافة الأفقية L' بين موضع سقوط الكرة على الأرض و المحور oy .
- 8- أحسب سرعة الكرة عند المواضع S ، P ، N ، و كذا الزاوية التي شعاع كل سرعة مع المحور ox ، مثل كل هذه الأشعة على الشكل .

يعطى : $\cos 60^\circ = 0.5$ ، $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

الأجوبة :

- 1- طبيعة الحركة :
- الجملة المدروسة : كرة .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل \vec{P} .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m a_x \\ P_y = m a_y \\ 0 = m a_x \\ -P = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m a_x \\ -m g = m a_y \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

إذن :

- مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .

- مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- المعادلات الزمنية :

لدينا سابقا :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

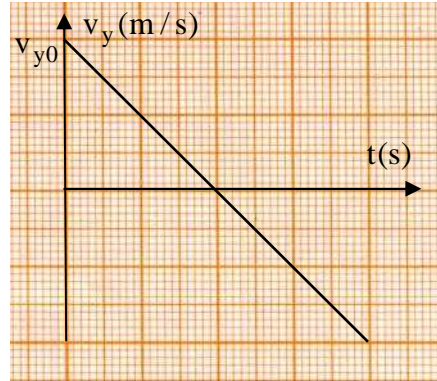
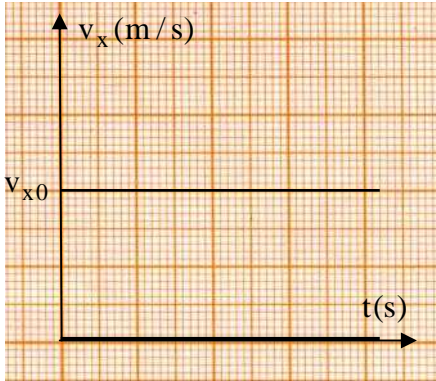
بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha = -g (0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -g t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

- بيانيا :



تطبيق عددي :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = -10t + 10\sqrt{3} \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + C_1' \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

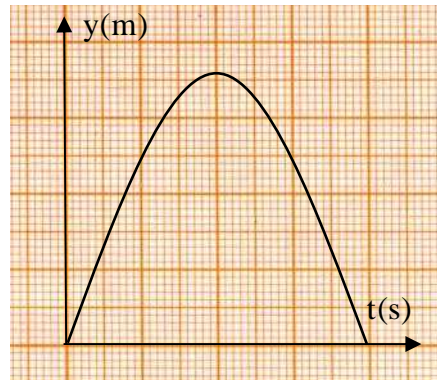
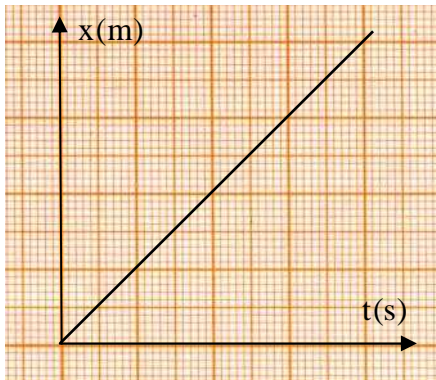
بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos \alpha (0) + C_1' \rightarrow C_1 = 0 \\ 0 = -\frac{1}{2} g (0)^2 + v_0 \sin \alpha (0) + C_2' \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

- بيانيا :



تطبيق عددي :

$$\vec{r} \begin{cases} x = 10 t \\ y = -5 t^2 + 10\sqrt{3} t \end{cases}$$

3- معادلة المسار و طبيعته :

من المعادلة $x = f(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

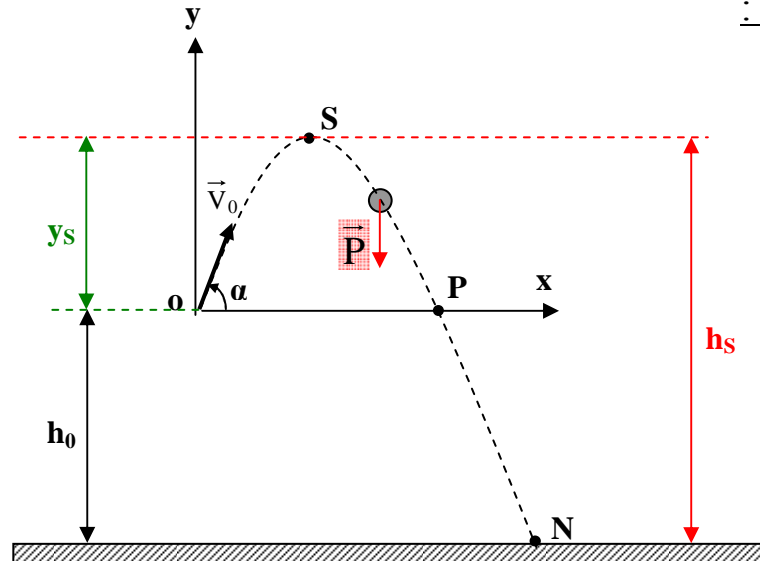
$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

تطبيق عددي :

$$y = -0.05 x^2 + \sqrt{3} x$$

و هي معادلة قطع مكافئ . إذن مسار الكرة عبارة عن قطع مكافئ .

4- أقصى ارتفاع تبلغه الكرة :



$$h_S = y_S + h_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

عند (S) أي عند الذروة يكون $v_{yS} = 0$.بالتعويض في العبارة $v_y(t)$ نجد :

$$0 = -10 t_S + 10\sqrt{3}$$

$$10 t_S = 10 \sqrt{3} \rightarrow t_S = \sqrt{3} \text{ s}$$

بالتعويض في عبارة $y(t)$:

$$y_S = -5 (\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3} (\sqrt{3})) = 15 \text{ m}$$

ومن العلاقة (1) يصبح :

$$h_s = 15 + 5 = 20 \text{ m}$$

و هو أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .

5- مدى الكرى :

$$L = x_P$$

عند بلوغ المدى (P) يكون : $y_P = 0$ ، بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$0 = - 0.05 x_P^2 + \sqrt{3} x_P$$

$$0.05 x_P^2 = \sqrt{3} x_P$$

$$0.05 x_P = \sqrt{3} \rightarrow x_P = \frac{\sqrt{3}}{0.05} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

- الزمن اللازم لبلوغ المدى :

لدينا : $x_P = 20\sqrt{3}$ بالتعويض في العبارة $x(t)$ يكون :

$$20\sqrt{3} = 10 t_P \rightarrow t_P = 2\sqrt{3}$$

6- التأكد من أن: زمن بلوغ المدى هو ضعف زمن بلوغ الذروة :

لدينا سابقا :

$$\bullet t_P = 2\sqrt{3} , t_S = \sqrt{3}$$

إذن : $t_P = 2 t_S$.

7- المسافة الأفقية بين موضع سقوط الكرة على الأرض (N) و المحور (oy) :

لدينا : $y_N = - h_0 = - 5$ بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$- 5 = - 0.05 x_N^2 + \sqrt{3} x_N$$

$$0.05 x_N^2 - \sqrt{3} x_N - 5 = 0$$

$$\Delta = 4 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$

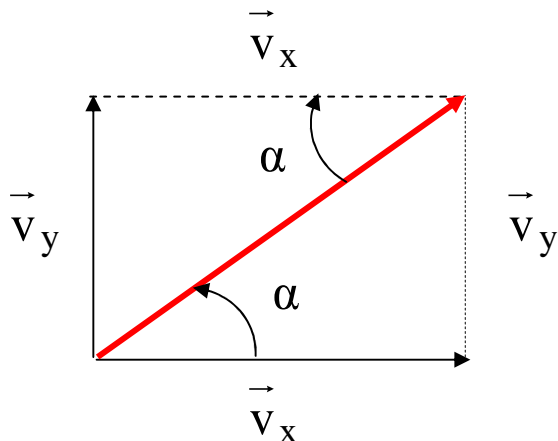
$$x_{N1} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2 \cdot 0.05} = - 2.67 \text{ m (مرفوض)}$$

$$x_{N2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2 \cdot 0.05} = 37.32 \text{ m (مقبول)}$$

إذن المسافة الأفقية بين موضع سقوط الكرة على الأرض (N) و المحور (oy) هي 37.32 m .

8- سرعة الكرة عند المواضع S ، P ، N و كذا الزاوية التي يصنعها

شعاع السرعة مع المحور OX :



$$\bullet v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (\text{من الشكل})$$

عند الموضع (S) :

لدينا : $t_S = \sqrt{3} \text{ s}$ بالتعويض في \vec{v} :

$$\vec{v}_S \begin{cases} v_{xS} = 10 \text{ m/s} \\ v_{yS} = -10(\sqrt{3}) + 10\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$v_S = \|\vec{v}_S\| = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\tan(\alpha_S) = \frac{v_{yS}}{v_{xS}} = \frac{0}{10} = 0 \rightarrow \alpha_S = 0$$

عند الموضع (P) :

لدينا : $t_S = 2\sqrt{3} \text{ s}$ بالتعويض في \vec{v} :

$$\vec{v}_P \begin{cases} v_{xP} = 10 \text{ m/s} \\ v_{yP} = -10(2\sqrt{3}) + 10\sqrt{3} = -10\sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

$$v_P = \|\vec{v}_P\| = \sqrt{(10)^2 + (-10\sqrt{3})^2} = 20 \text{ m/s}$$

$$\tan(\alpha_P) = \frac{v_{yP}}{v_{xP}} = \frac{-10\sqrt{3}}{10} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha_P = -60^\circ$$

عند الموضع (N) :

نحسب أولا الزمن اللازم لبلوغ الموضع (N) .
- لدينا $x_N = 37.32 \text{ m}$ بالتعويض في $x(t)$:

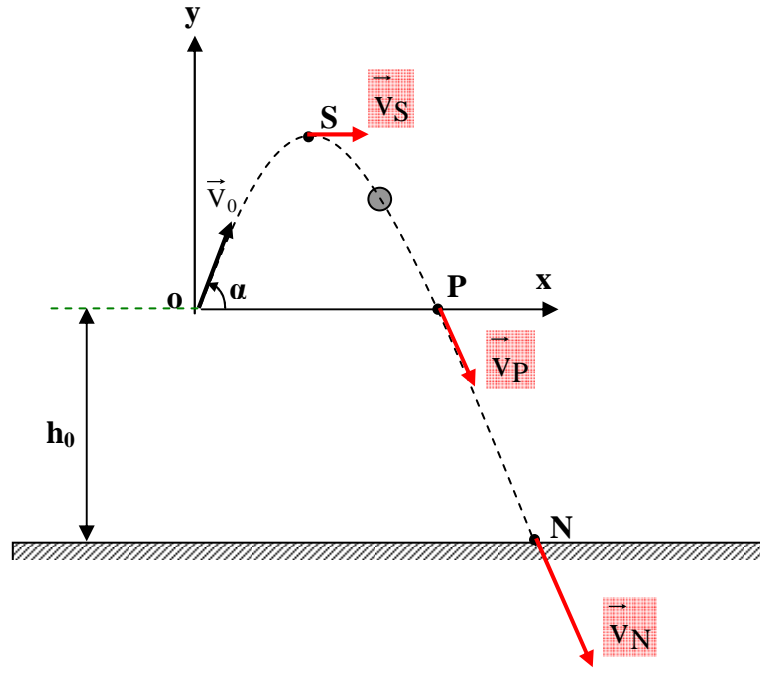
$$37.32 = 10 t_N \rightarrow t_N = 3.73 \text{ s}$$

بالتعويض في \vec{v} :

$$\vec{v}_N \begin{cases} v_{xN} = 10 \text{ m/s} \\ v_{yN} = -10(3.73) + 10\sqrt{3} \approx -20 \text{ m/s} \end{cases}$$

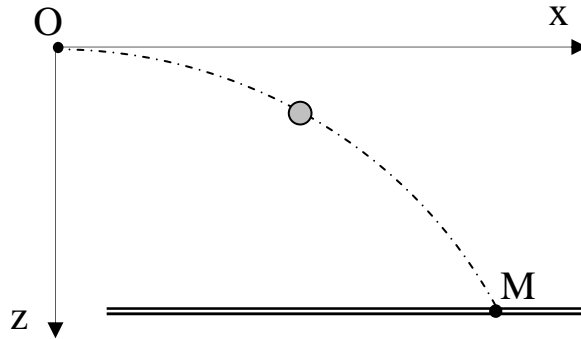
$$v_N = \|\vec{v}_N\| = \sqrt{(10)^2 + (-20)^2} = 22.36 \text{ m/s}$$

$$\tan(\alpha_N) = \frac{v_{yN}}{v_{xN}} = \frac{-20}{10} = -2 \rightarrow \alpha_N = -63.43^\circ$$



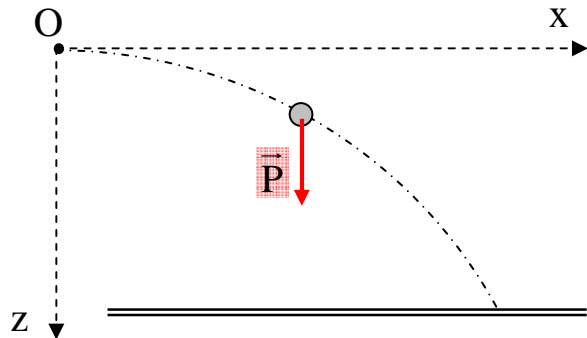
التمرين (3) :

من نقطة O نعتبرها مبدأ الإحداثيات تقع على ارتفاع $h = 405 \text{ m}$ من سطح الأرض ، نقذف افقيا عند اللحظة $t = 0$ جسم صلب (S) مركز عطالته G ، فيسقط باتجاه النقطة M من سطح الأرض (الشكل) ، نهمل تأثيرات الهواء على الجسم (S) و نعتبر $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.



- 1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أجد :
 - أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $z(t)$.
 - ب- معادلة المسار $z(x)$.
- 2- أوجد إحداثيتي نقطة السقوط M .
- 3- أوجد الزمن اللازم لوصول الصندوق إلى الأرض .

الأجوبة :



- 1- أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ ، $y(t)$:
 - الجملة المدروسة : جسم صلب (S) .
 - مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
 - القوى الخارجية المؤثرة : الثقل \vec{P} .
 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m a_x \\ P_z = m a_z \\ 0 = m a_x \\ P = m a_z \\ 0 = m a_x \\ m g = m a_z \\ \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = g \end{cases} \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = g t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \\ 0 = g (0) + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = g t \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 t + C_1' \\ z = \frac{1}{2} g t^2 + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 (0) + C_1' \rightarrow C_1' = 0 \\ 0 = \frac{1}{2} g (0)^2 + C_2' \rightarrow C_2' = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 t \\ z = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ب- معادلة المسار :

من المعادلة $x = f(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

بالتعويض في $z(t)$:

$$z = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$z = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

ج- إحداثيي نقطة السقوط M :

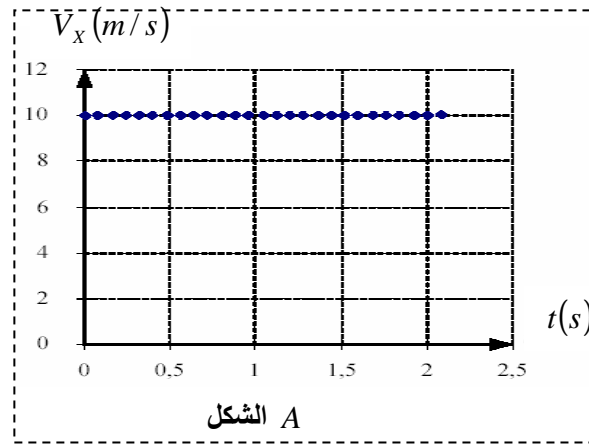
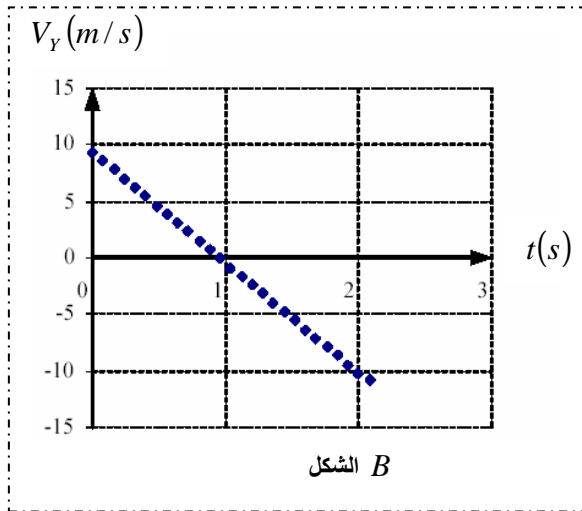
لدينا :

$$x = x_M \rightarrow z = h = 405$$

1

التمرين (4) :

في لعبة رمي الكرة ، و عند اللحظة $t = 0$ رمى اللاعب الكرة بسرعة ابتدائية \vec{v}_0 يصنع الزاوية α مع المحور الأفقي من على ارتفاع $h_0 = 2.5 \text{ m}$ من سطح الأرض . تهمل دافعة أرخميدس و قوى الاحتكاك .
الدراسة التجريبية لحركة هذه الكرة أعطت البيانيين التاليين أين تمت الدراسة في معلم (O, x, y) مبدأ موضع رمي الكرة و باعتبار مبدأ الأزمنة عند مبدأ الإحداثيات (موضع رمي الكرة) .



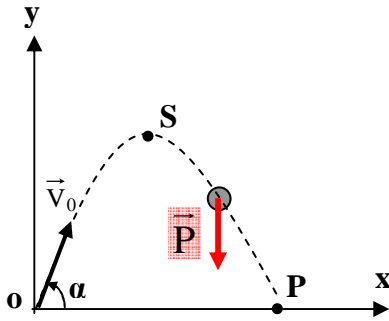
- 1- أدرس طبيعة الحركة و أكتب معادلة مسار الكرة .
- 2- اعتمادا على الدراسة النظرية و البيانيين (A) ، (B) أوجد :
 - السرعة الابتدائية v_0 .
 - زاوية الرمي α ($0 < \alpha < 90^\circ$) .

- لحظة بلوغ الذروة (S) .
- الجاذبية الأرضية g .
- أقصى ارتفاع بلغته الجلة بالنسبة لسطح الأرض .
- سرعة الجلة عند بلوغها الذروة (أقصى ارتفاع) .
- مدى الجلة .
- سرعة الجلة عند بلوغها المدى .

يعطى : $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\tan 45^\circ = 1$

الأجوبة :

- 1- معادلة المسار :- الجلة المدروسة : الجلة .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل \vec{P} .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m a_x \\ P_y = m a_y \\ 0 = m a_x \\ -P = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m a_x \\ -m g = m a_y \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

تكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha = -g(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -g t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + C_1' \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos \alpha (0) + C_1' \rightarrow C_1 = 0 \\ 0 = -\frac{1}{2} g (0)^2 + v_0 \sin \alpha (0) + C_2' \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

$$x = f(t) \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \text{بالتعويض في } y(t) :$$

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

و هي معادلة قطع مكافئ . إذن مسار الكرة عبارة عن قطع مكافئ .

2- أ- السرعة الابتدائية v_0 :

من البيان :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = 10 \text{ m/s} \\ v_y = v_{0y} = 10 \text{ m/s} \end{cases}$$

ومنه :

$$v_0 = \|\vec{v}_0\| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

• زاوية الرمي :

من البيان : $y = 10 \text{ m} \rightarrow t = 0$ بالتعويض في المعادلة $v_y(t)$ نجد :

$$v_y = -g t + v_0 \sin \alpha$$

$$10 = -g(0) + 10\sqrt{2} \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

● لحظة بلوغ الذروة :

- عند بلوغ الذروة يكون $v_{ys} = 0$.
- من البيان $v_y(t)$ نتعلم v_y من أجل $t_s = 1$ و هي لحظة بلوغ الذروة .

● الجاذبية الأرضية :

لدينا :

$$t = t_s = 1 \text{ s} \rightarrow v_y = v_{ys} = 0$$

بالتعويض في $v_y(t)$ نجد :

$$v_{ys} = -g t_s + v_0 \sin \alpha$$

$$0 = -g (1) + 10\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow g = 10 \text{ m/s}^2$$

● أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض :

إذا كان h_s هو أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض يكون :

$$h_s = h_0 + y_s$$

نحسب y_s .لدينا : $t_s = 1 \text{ s}$ بالتعويض في $y(t)$ نجد :

$$y_s = -\frac{1}{2} g t_s^2 + v_0 \sin \alpha t_s$$

$$y_s = -0.5 \cdot 10 (1)^2 + 10\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ m} \rightarrow h_s = 2.5 + 5 = 7.5 \text{ m}$$

● سرعة الكرة عند بلوغها أقصى ارتفاع :

$$\vec{v}_s \begin{cases} v_{xs} = v_0 \cos \alpha = 10\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \\ v_{ys} = 0 \end{cases}$$

$$v_s = \|\vec{v}_s\| = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = 10 \text{ m/s}$$

● مدى الكرة :

- إذا كان L هو مدى الكرة يكون : $L = x_p$.
- عند بلوغ المدى يكون : $y_p = 0$ بالتعويض في $y(t)$.

$$y_p = -\frac{1}{2} g t_p^2 + v_0 \sin \alpha t_p$$

$$0 = -0.5 \cdot 10 t_p^2 + 10\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} t_p$$

$$5t_p^2 = 10 t_p \rightarrow 5t_p = 10 \rightarrow t_p = 2 \text{ s}$$

بالتعويض في $x(t)$ نجد :

$$x_p = v_0 \sin \alpha t_p$$

$$x_p = 10\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 20 \text{ m}$$

إذن المدى هو : $L = x_p = 20 \text{ m}$.

• سرعة الكرة عند بلوغ المدى :

لحظة بلوغ المدى هي $t_p = 2 \text{ s}$ بالاسقاط في البيانين $v_x(t)$ ، $v_y(t)$ نجد :

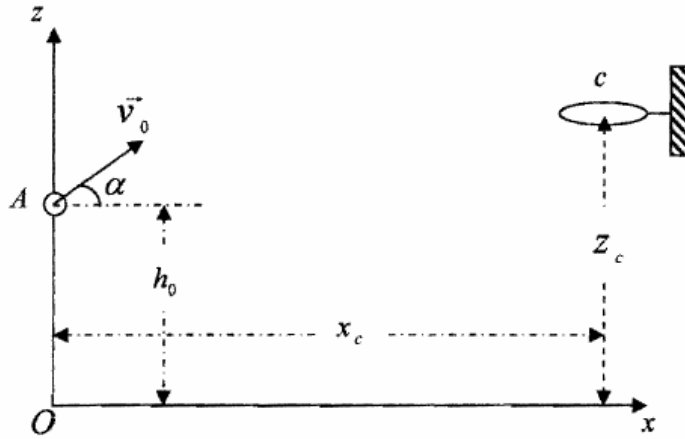
$$t_p = 2 \text{ s} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0P} = 10 \text{ m/s} \\ v_y = v_{0P} = -10 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$v_P = \left\| \vec{v}_P \right\| = \sqrt{(10)^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

تمارين مقترحة

التمرين (5): (بكالوريا 2009 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 08 على الموقع)

قام لاعب في مقابلة لكرة السلة ، بتسديد الكرة نحو السلة من نقطة A منطبقة على مركز الكرة الموجود على ارتفاع $h_0 = 2.10 \text{ m}$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية ($V_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$) يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37^\circ$ مع الأفق ، ليمر مركز الكرة G بمركز السلة الذي إحداثياته : ($x_c = 4.50 \text{ m}$, z_c) في المعلم الأرضي (\vec{Ox}, \vec{Oz}) الذي نعتبره غاليليا



- 1/ أدرس حركة مركز عطالة الكرة في المعلم (\vec{Ox}, \vec{Oz}) معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة تسديد الكرة و إهمال تأثير الهواء .
- 2/ أحسب (z_c) .
- 3/ يعبر مركز عطالة الكرة مركز السلة بسرعة (\vec{v}_c) ، التي يصنع حاملها مع الأفق زاوية (β) . استنتج قيمتي كل من (v_c) و (β) .
تعطى : ($g = 9.80 \text{ m.s}^{-2}$) .

أجوبة مختصرة :

- 1 ▪ مسقط حركة الكرة على المحور Ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
 - مسقط حركة الكرة على المحور Oz هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .
- $$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + h_0 \quad , \quad x = v_0 \cos \alpha t \quad , \quad v_z = -g t + v_0 \sin \alpha \quad , \quad v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x + h_0$$

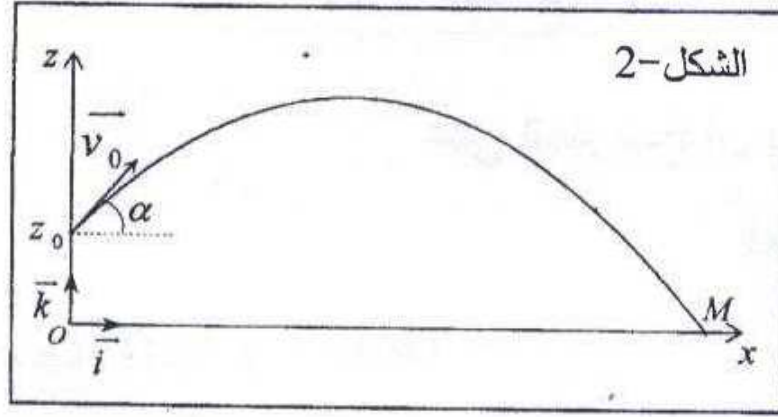
$$z_c = 3 \text{ m} \quad (2)$$

- (3) نبحت عن لحظة بلوغ النقطة C من طرف الكرة و لتكن t_c ، فنجد : $t_c = 0.70 \text{ s}$ و منه :

$$\beta = 18^\circ \leftarrow \tan \alpha = \frac{|v_{Cz}|}{v_{Cx}} = \frac{2.04}{6.40} = 0.32 \quad , \quad v_C = 6.7 \text{ m/s}$$

1 التمرين (6) : (بكالوريا 2011 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 13 على الموقع)

في لعبة رمي الكرة ، يقذف اللاعب في اللحظة $t = 0$ s الكرة من ارتفاع $oz_0 = h = 2.0$ m ، عن سطح الأرض ، بسرعة ابتدائية $v_0 = 13.7$ m.s⁻¹ ، شعاعها يصنع زاوية $\alpha = (\vec{ox}, \vec{v}_0) = 35^\circ$.
 نهمل تأثير الهواء (مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس) ، و نأخذ $g = 9.80$ m.s⁻¹ .



- 1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المعلم المبين على (الشكل-2) ، استخراج :
 أ- المعادلة التفاضلية للحركة .
 ب- المعادلات الزمنية للحركة .
 2- اكتب معادلة المسار $z = f(x)$.
 3- اوجد إحداثيات M نقطة سقوط القذيفة . و ما هي سرعتها عندئذ ؟

أجوبة مختصرة :

$$1- \left(\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= -g , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 , \quad \frac{dv_z}{dt} = -g , \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \end{aligned} \right)$$

$$2- \left(\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + h_0 , \quad x = v_0 \cos \alpha t , \quad v_z = -g t + v_0 \sin \alpha , \quad v_x = v_0 \cos \alpha \end{aligned} \right)$$

$$3- \left(\begin{aligned} z &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x + h_0 \end{aligned} \right)$$

$$(3) \quad v_M = 15 \text{ m/s} , \quad (x_M = 20 \text{ m} , z_M = 0)$$