

عروض نظرية و تمارين

من التطورات الرتبة ٥

تطور جملة ميكانيكية



الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

www.sites.google.com/site/faresfergani

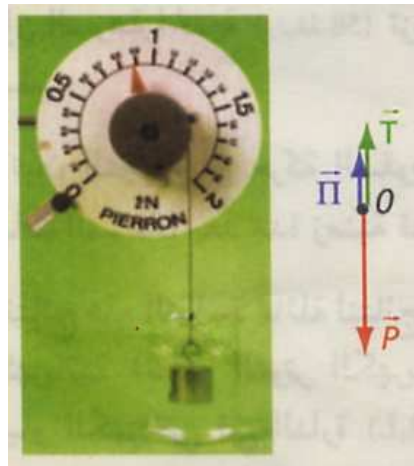
السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 04

السقوط الحقيقي للأجسام في الهواء

• القوى المؤثرة على جسم صلب يسقط في الهواء :

- أثناء سقوط جسم صلب في الهواء تحدث تأثيرات متبادلة بين هذا الجسم الصلب و الوسط الخارجي تتمثل في الهواء ، الأرض ،
- و ينتج عن هذه التأثيرات خضوع الجسم الصلب إلى قوى أهمها :



■ قوة الثقل :

- يرمز لها بـ \vec{P} ناتجة عن تأثير الأرض على الجسم الصلب .
- تتناسب قوة الثقل \vec{P} مع شعاع حقل الجاذبية \vec{g} وفق العلاقة الشعاعية : $\vec{P} = m \vec{g}$.

- بجوار سطح الأرض أين يكون شعاع حقل الجاذبية ثابت و عمودي على سطح الأرض (الشكل-34) تكون قوة الثقل ثابتة و متجهة عموديا نحو سطح الأرض في كل نقطة من حقل الجاذبية الأرضية .
 - شدة قوة ثقل جسم صلب كتلته m موجود في نقطة من حقل الجاذبية الأرضية شدته g عند هذه النقطة يعطى بالعلاقة :

$$P = m g$$

■ دافعة أرخميدس :

- كل جسم صلب مغمور في مائع (هواء أو سائل) يخضع لفعل ميكانيكي يدعى دافعة أرخميدس.
 - نمذج دافعة أرخميدس بقوة شاقولية يرمز لها بـ $\vec{\Pi}$ متجهة نحو الأعلى قيمتها تساوي ثقل المائع المزاح و عليه يعبر عنها بالعلاقة :

$$\Pi = \rho V g$$

حيث : ρ : الكتلة الحجمية للمائع يقدر بـ kg/m^3 .
 V : حجم المائع المزاح و يساوي حج الجسم الصلب يقدر بـ m^3 .
 g : الجاذبية تقدر بـ m/s^2 .

■ قوة الاحتكاك :

- يخضع كل جسم صلب يتحرك في مائع لعدة قوى موزعة على سطحه ، تتعلق بطبيعة المائع و شكل الجسم الصلب و كذا خشونة السطح .
 - تزداد قيمة هذه القوى بتزايد السرعة.
 - يمكن نمذجة المجموع الشعاعي لهذه القوى التلامسية بقوة شاقولية ، معاكسة لجهة الحركة ، تدعى قوة الاحتكاك .
 - التعبير عن قوة الاحتكاك بدلالة السرعة معقد ماعدا في الحالتين التاليتين :
 • عندما تكون السرعة ضعيفة تكون قيمة القوة متناسبة مع قيمة السرعة : $f = kv$
 • عندما تكون قيمة السرعة كبيرة تكون قيمة القوة متناسبة مع مربع قيمة السرعة : $f = kv^2$
 - في كلتي الحالتين ، الشعاع \vec{f} معاكس للشعاع \vec{v} .

ملاحظة :

سقوط الأجسام الصلبة في السوائل يشبه سقوط الأجسام الصلبة في الهواء.

التمرين (1) :

- 2- نغمر كليا جسما صلبا حجمه $V = 5.0 \text{ cm}^3$ و كتلته الحجمية $\rho = 8.9 \text{ g/cm}^3$ ، في مائع كتلته الحجمية ρ' ، باعتبار $g = 9.8 \text{ N/kg}$:
 أ- أحسب ثقل هذا الجسم .
 ب- أحسب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الماء حيث $\rho' = 1.0 \text{ g.cm}^{-3}$.
 ج- أحسب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الهواء حيث : $\rho'' = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g.cm}^{-3}$.

الاجوبة :

2- ثقل الجسم :

$$P = m g \rightarrow P = \rho V g$$

نحسب قيمة m :

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V$$

$$m = 8.9.5 = 44.5 \text{ g}$$

ومنه يكون الثقل :

$$P = 44.5 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8 = 0.47 \text{ N}$$

ب- قيمة دافعة أرخميدس حيث المائع هو الماء :

دافعة أرخميدس هي ثقل المائع المنزاح عند غمر فيه الجسم الصلب و عليه :

$$\Pi = m' g = \rho' V' g$$

حجم الماء المنزاح يساوي حجم الجسم المغمور في الماء و الذي حل محل المائع المنزاح ، أي $V = V'$ ومنه :

$$\Pi = \rho' V g$$

$$\Pi = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 9.8 = 4.9 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

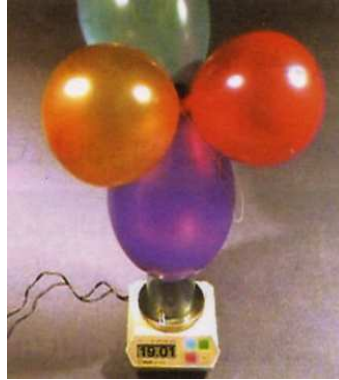
ج- دافعة أرخميدس حيث يكون الماء هو الهواء :

$$\Pi' = \rho'' V g$$

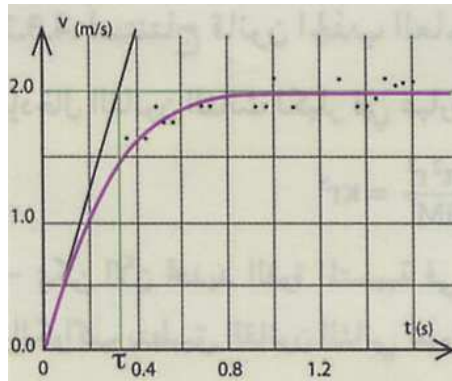
$$\Pi' = 1.3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 9.8 = 6.37 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

● دراسة حركة السقوط الحقيقي لجسم صلب في الهواء :

- نعتبر جملة مادية مكونة من أربعة بالونات خفيفة مثقلة بجسم له كتلة $m = 19 \text{ g}$ و حجم $v = 5.41$. و ذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية بعد قطع 2 m تقريبا من السقوط ، و أن لا يسمح شكل الجملة بدورانه خلال السقوط لتكون الحركة انسحابية شاقولية (الشكل) .



- البيان التالي يمثل تطور سرعة البالونات بدلالة الزمن .



- من البيان يتضح وجود نظامين :

- نظام إنتقالي : تكون فيه قيمة السرعة متزايدة بشكل سريع في البداية و أقل فأقل مع مرور الزمن. إذن حركة البالونات متسارعة في هذه المرحلة . (النظام الانتقالي)
- نظام دائم : تكون فيه قيمة السرعة ثابتة حيث تبلغ قيمتها الحدية $v_\ell = 2.0 \text{ m/s}$ في هذه المرحلة و تصبح حركة البالونات منتظمة.

الزمن المميز للسقوط τ :

يقطع مماس البيان $v(t)$ عند اللحظة $t = 0$ في حالة $f = kv$ الخط المقارب $v = v_\ell$ في لحظة تمثل مقدار يدعى الزمن المميز للسقوط يرمز له بـ τ و وحدته الثانية s .

● إبراز المعادلة التفاضلية :

- الجملة المعتبرة : بالونات .
- مرجع الدارسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل \vec{P} ؛ دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الإحتكاك \vec{f} .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحور (Oz) :

$$P - \Pi - f = m a_z$$

$$m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} - f = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{m} f = \frac{m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g}{m}$$

- إن الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية له علاقة بشكل قيمة قوة الإحتكاك f .
- من أجل $f = kv$:
- تكون المعادلة من الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v = \frac{m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g}{m}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها من الشكل :

$$v = v_\ell (1 - e^{-t/\tau})$$

حيث $\tau = \frac{m}{K}$ هو الزمن المميز للسقوط و هندسيا يحسب من خلال تقاطع مماس البيان $v = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب في النظام الدائم .

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt} = 0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{K}{m} v_\ell = \frac{m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g}{m}$$

$$K v_\ell = m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g$$

$$K v_\ell = \rho_S V_S g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g$$

حجم المائع (الهواء) المنزاح هو نفسه حجم الجملة S بمعنى $V_{\text{air}} = V_S$ و منه يصبح :

$$K v_\ell = \rho_S V_S g - \rho_{\text{air}} V_S g$$

$$K v_\ell = V_S g (\rho_S - \rho_{\text{air}})$$

$$v_\ell = \frac{V_S \cdot g}{K} (\rho_S - \rho_{\text{air}})$$

■ من أجل $f = k v^2$:

تكون المعادلة من الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v^2 = \frac{m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g}{m}$$

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt} = 0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{k}{m} v_\ell^2 = \frac{m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g}{m}$$

$$k v_\ell^2 = m g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g$$

$$k v_\ell^2 = \rho_S V_S g - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} g$$

حجم المائع (الهواء) المنزاح هو نفسه حجم الجملة S بمعنى $V_{\text{air}} = V_S$ و منه يصبح :

$$k v_\ell^2 = \rho_S V_S g - \rho_{\text{air}} V_S g$$

$$k v_\ell^2 = V_S g (\rho_S - \rho_{\text{air}})$$

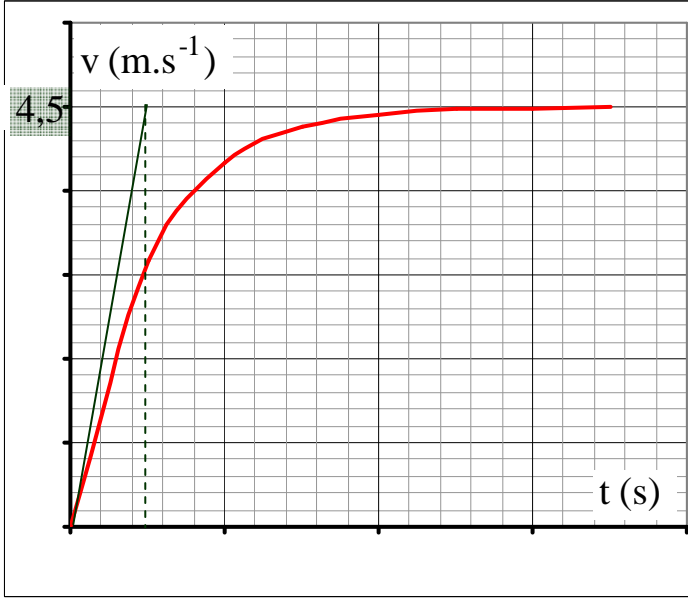
$$v_\ell = \sqrt{\frac{V_S \cdot g}{k} (\rho_S - \rho_{\text{air}})}$$

حالة خاصة :

إذا اعتبرنا $f = k v$ و أهملنا دافعة أرخميدس تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v = g$$

التمرين (2) :



يسقط شاقوليا مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100 \text{ kg}$ فيبلغ سرعة ثابتة حدية قيمتها $v_\ell = 4.5 \text{ m.s}^{-1}$ ، نهمل خلال السقوط دافعة أرخميدس أمام القوى الأخرى المطبقة على المظلي و تجهيزه ، نعتبر أن قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على المظلي من الشكل $f = k v^2$. يعطى : $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات سرعة (المظلي و مظلته) بدلالة الزمن .

- 1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تعبر عن سرعة حركة مركز عطالة المظلي و تجهيزه .
- 2- فسر لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة .
- 3- أحسب المعامل k الذي يتدخل في قوة الاحتكاك .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : المظلي و تجهيزه .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل \vec{P} ، قوى الاحتكاك \vec{f} .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m \vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور (Oz) شاقولي و متجه نحو الأسفل يكون :

$$P - f = m a$$

$$m g - k v^2 = m a$$

$$m g - k v^2 = m \frac{dv}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} + k v^2 = m g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g$$

2- تفسير الحركة المستقيمة المنتظمة (ثبات السرعة) :

قوة الثقل لا تتغير أثناء الحركة ، في بداية الحركة تكون سرعة الجسم معدومة و بالتالي قوة الاحتكاك تكون معدومة أيضا ، و أثناء الحركة أين تكون حركة (المظلي مع تجهيزه) متسارعة ، تزداد سرعة المظلي مع تجهيزه ما يجعل قوة الاحتكاك تزداد تدريجيا إلى أن تصبح مساوية للثقل في الشدة $P = f$ ، و بالعودة إلى قانون نيوتن الثاني نجد في هذه الحالة :

$$P - f = m a$$

$$P - P = m a \rightarrow a = 0 \rightarrow v \text{ (ثابتة)}$$

3- قيمة k :

قيمة k ثابتة لا تتعلق بالزمن و عليه يمكن حسابها في أي لحظة من اللحظات .
- نختار اللحظة التي تكون فيها سرعة (المظلي مع تجهيزه) ثابتة و حدية (نظام دائم) أين يكون :

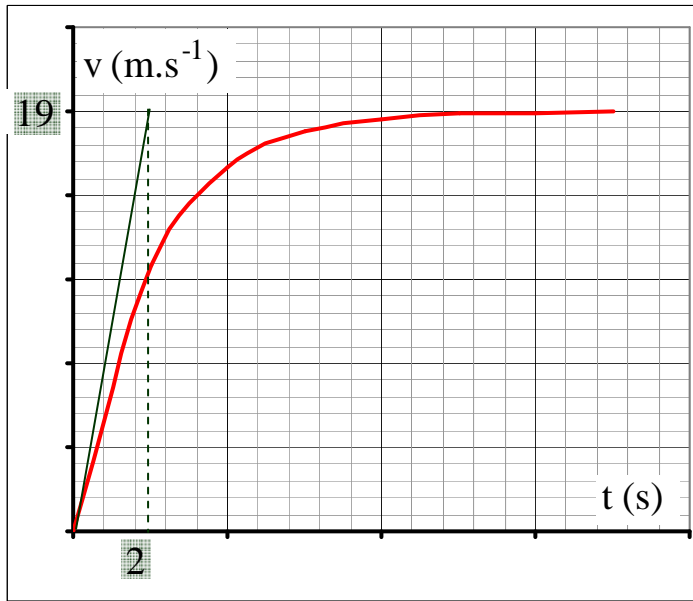
$$v = v_m = \text{ثابت} , \frac{dv}{dt} = 0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{k}{m} v_m^2 = g$$

$$k = \frac{g \cdot m}{v_m^2} \rightarrow k = \frac{9.8 \cdot 100}{(4.5)^2} = 48.4 \text{ kg/m}$$

التمرين (3) :



قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء كتلته $m = 19 \text{ g}$ ، وذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل) .

يعطى : $g = 9.8 \text{ N.kg}^{-1}$.

1- حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم . علل .

2- بالاعتماد على البيان عين :

أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط .

ب- تسارع الحركة في اللحظة $t = 0$ ، و عند اللحظة

$t = 12 \text{ s}$ ؟

ج- قيمة الطاقة الحركية للجسم (S) في النظام الدائم .

3- كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا و هذا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي و دائم ؟

4- بين أن المعادلة التفاضلية لحركة (S) بالعبارة : $\frac{dv}{dt} + Av = C(1 - \frac{\rho V}{m})$ حيث A و C ثابتين يطلب كتابة

عبارتهما ، نذكر أن : ρ الكتلة الحجمية للهواء ، V حجم الجسم (S) .

5- توقع شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء . علل .

الأجوبة :

1- طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) :

النظام الانتقالي :

المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن خط منحنى ، و بما أن السرعة متزايدة تكون طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة من دون انتظام .

النظام الدائم :

المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، إذن طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

2- أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط :
من البيان مباشرة : $v_\ell = 19 \text{ m/s}$ ، $\tau = 2 \text{ s}$.

ب- تسارع الحركة في اللحظتين $t = 0$ ، $t = 12 \text{ s}$:

تسارع الحركة في لحظة t مساوي لميل مماس المنحنى $v = f(t)$ عند هذه اللحظة و الذي نعتبره $\tan \alpha$ ، لذا يكون :

$$\square t = 0 \rightarrow \tan \alpha = \frac{19}{2} = 9.5 \rightarrow a = 9.5 \text{ m/s}^2$$

$$\square t = 12 \text{ s} \rightarrow \tan \alpha = 0 \rightarrow a = 0$$

ج- الطاقة الحركية في النظام الدائم :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

من البيان و في النظام الدائم يكون : $v = v_\ell = 19 \text{ m/s}$ و منه :

$$E_C = 0.5 \cdot 19 \cdot 10^{-3} (19)^2 = 3.43 \text{ J}$$

3- للحصول على حركة مستقيمة شاقولية إنسحابية في نظامين انتقالي و دائم ، يجب أن يكون الجسم (S) خفيف و ذو حجم كاف لبلغ السرعة الحدية ، كما لا يكون شكله انسيابي كي يجعل تأثير قوة الاحتكاك أكبر .

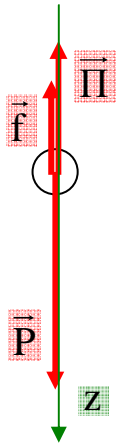
4- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل \vec{P} ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، قوة الاحتكاك \vec{f} .

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \vec{a}$$

$$P - \Pi - f = m a$$

$$m \cdot g - m_{\text{air}} g - kv = m \frac{dv}{dt} \rightarrow m \cdot g - \rho_{\text{air}} V \cdot g - kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} + k v = m g - \rho_{\text{air}} V \cdot g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g - \frac{\rho_{\text{air}} V}{m} \cdot g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}} V}{m} \right)$$

المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + A v = C \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}} V}{m} \right)$$

$$\text{حيث : } C = g , \quad A = \frac{k}{m}$$

5- شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء :

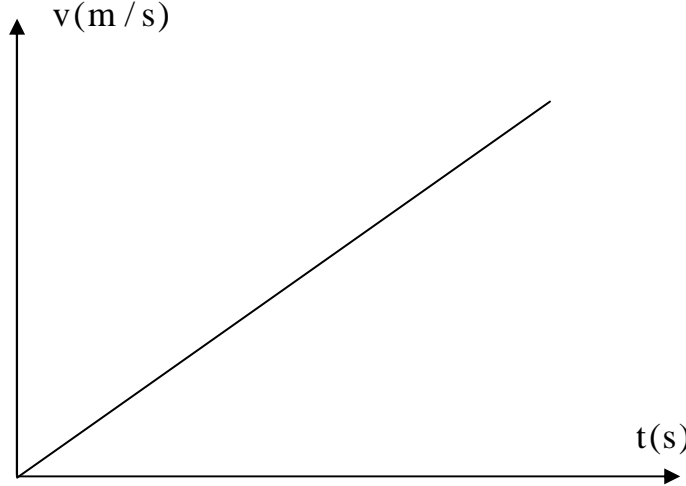
عند إهمال قوة الاحتكاك و كذا دافعة أرخميدس ، تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\frac{dv}{dt} = g \rightarrow v = g t + C$$

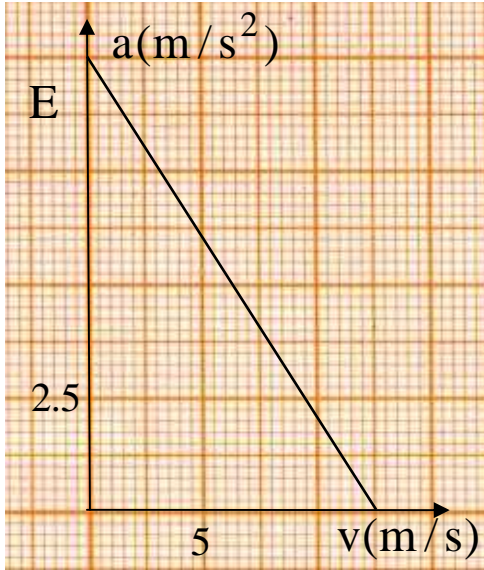
- من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow v = g t$$

أي أن المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ ، معادلته من الشكل $v = a t$ كما يلي :



التمرين (4) :



يسقط مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100 \text{ kg}$ سقوطا شاقوليا بدءا من نقطة O بالنسبة لمعلم أرضي دون سرعة ابتدائية . يخضع أثناء سقوطه إلى قوة مقاومة الهواء عبارتها من الشكل $f = k v$ (تهمل دافعة أرخميدس) .
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أكتب المعادلة التفاضلية لحركة المظلي بدلالة السرعة $v(t)$.

2- عبر عن السرعة الحدية v_ℓ بدلالة k ، m ، g .

3- بين أن المعادلة تقبل الحل التالي : $v = v_\ell (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

4- أكتب العبارة اللحظية لتسارع المظلي .

5- أرسم في نفس المعلم و بشكل كيفي المنحنيين $v = f_1(t)$ ، $a = f_2(t)$.

6- تتميز الحركة السابقة بقيمة المقدار $\frac{k}{m}$ ، حدد وحدة هذا المقدار .

7- يمثل البيان الشكل-2- تغيرات (a) تسارع مركز عطالة المظلي بدلالة السرعة (v)

أ- استنتج من البيان قيمتي g و k .

ب- أحسب السرعة الحدية v_ℓ للمظلي .

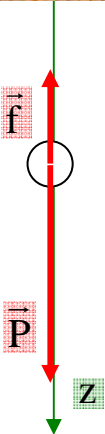
الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $v(t)$:

- الجملة المدروسة : (مظلي مع تجهيزه)

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل \vec{P} ، قوة الاحتكاك \vec{f} .



- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oz) :

$$P - f = m a$$

$$m.g - kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} + k v = m g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

2- عبارة v_ℓ بدلالة g ، m ، k :

عند النظام الدائم يكون : $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$0 + \frac{k}{m} v_\ell = g \rightarrow v_\ell = \frac{m.g}{k}$$

3- إثبات حل المعادلة التفاضلية :

$$\blacksquare v = v_\ell (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$\blacksquare \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{k} (0 - (-\frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t})) = g e^{-\frac{k}{m}t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$g e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \cdot \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = g$$

$$g e^{-\frac{k}{m}t} + g (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = g$$

$$g e^{-\frac{k}{m}t} + g - g e^{-\frac{k}{m}t} = g \rightarrow g = g$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

4- عبارة التسارع اللحظية :

لدينا :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

و مما سبق وجدنا :

$$\frac{dv}{dt} = g e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow a = g e^{-\frac{k}{m}t}$$

5- المنحنيين $v(t)$ ، $a(t)$:
لدينا مما سبق :

$$\blacksquare v = v_{\ell} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

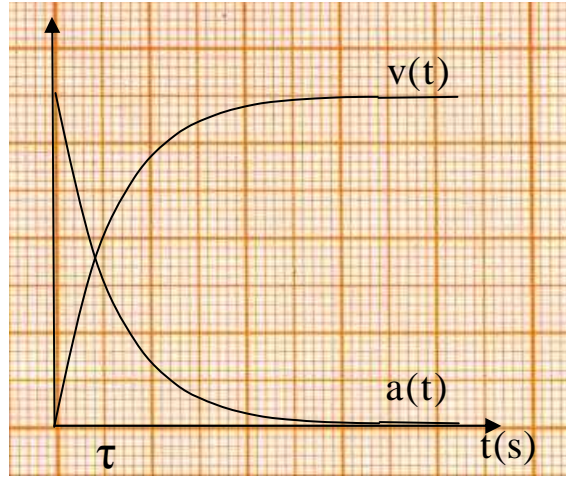
$$\blacksquare a = g e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = g$$

$$t = \infty \rightarrow v = v_{\ell} , a = 0$$

و من هاتين العلاقتين نجد :

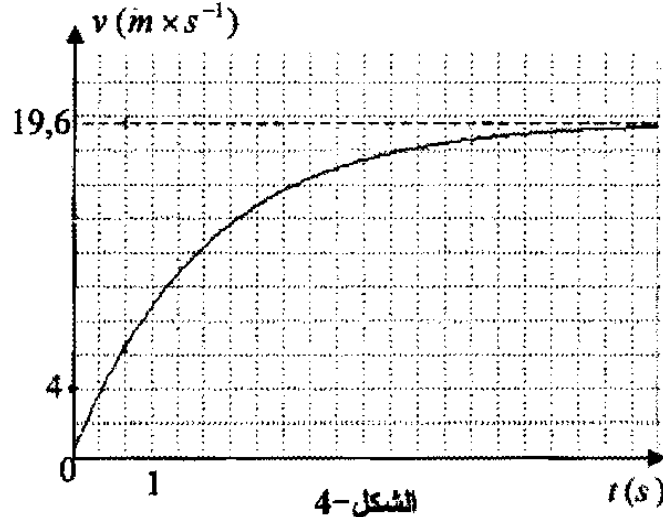
إذن المنحنيين يكونان كما يلي :



تمارين مقترحة

التمرين (5): (بكالوريا 2010 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 09 على الموقع)

قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء ، و ذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل-4) .



الشكل-4

- 1- حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم . علل .
- 2- بالاعتماد على البيان عين :
أ/ السرعة الحدية v_{lim} .
ب/ تسارع الحركة في اللحظة $t = 0$.
- 3- كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا و هذا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظاميين انتقالي و دائم ؟
- 4- باعتبار دافعة أرخميدس مهملة ، مثل القوى المؤثرة على الجسم (S) أثناء السقوط ، و استنتج عندئذ المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة السرعة v في حالة السرعات الصغيرة .
- 5- توقع شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء . علل .

أجوبة مختصرة :

(1) النظام الإنتقالي ($0 < t < 7s$) : في هذه المرحلة (النظام الإنتقالي) البيان $v = f(t)$ عبارة عن خط منحنى ، و بما أن السرعة متزايدة تكون طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة (من دون انتظام) النظام الدائم ($t > 7$) : في هذه المرحلة (النظام الدائم) ، البيان $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة إذن طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

(2- أ) $v_{lim} = 19.6 \text{ m/s}$ ، ب) $a = 9.5 \text{ m/s}^2$

(3) - يجب أن يكون الجسم خفيف و ذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية .

(4) تمثيل القوى المؤثرة الجسم (S) :

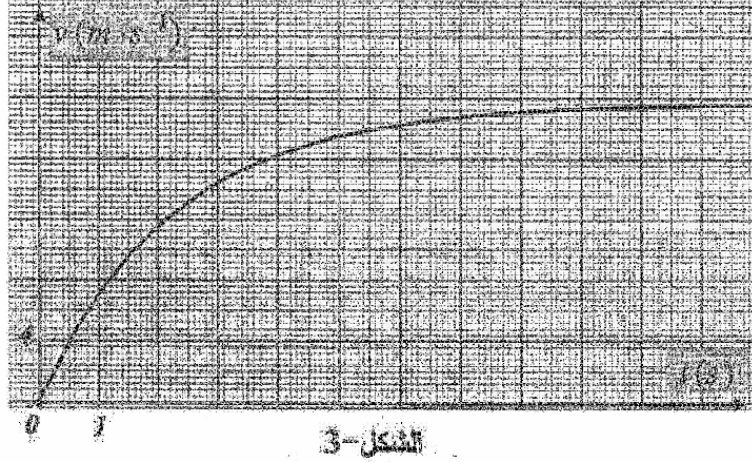
● المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ ، (5) المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ

معادلته من الشكل $v = at$.



التمرين (6) : (بكالوريا 2012 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 14 على الموقع)

ندرس في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا حركة سقوط كرية في الهواء .
(الشكل-3) يمثل تطور سرعة مركز عطالة الكرية v بدلالة الزمن t .



الشكل-3

1- من البيان :

أ- حدد المجال الزمني لنظامي الحركة .

ب- عين قيمة السرعة الحدية v_ℓ .

ج- احسب a_0 تسارع مركز عطالة الكرية في اللحظة $t = 0$. ماذا تستنتج ؟

د- ما هي قيمة التسارع لحظة وصول الكرية إلى سطح الأرض ؟

هـ- كم تكون قيمة الطاقة الحركية للكرية في اللحظة $t = 3$ s ؟

2- مثل كيفيا مخطط السرعة $v(t)$ لحركة السقوط الشاقولي لمركز عطالة الكرية في الفراغ .

تعطى : $g = 9.80 \text{ m.s}^{-2}$ ، كتلة الكرية : $m = 30 \text{ g}$

أجوبة مختصرة :

1- أ) النظام الانتقالي : $0 \leq t \leq 9 \text{ s}$ ، النظام الدائم : $t > 9 \text{ s}$ ، ب) $v_\ell = 4.9 \cdot 4 = 19.6 \text{ m/s}$

ج) $a_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، نلاحظ أن $a_0 = g$ ، نستنتج أن دافعة أرخميدس مهمة .

د) يتضح من البيان أن الكرية بلغت النظام الدائم قبل وصولها إلى الأرض ، و اثناء ذلك تكون السرعة ثابتة

($v = C^{te}$) و عليه التسارع يكون معدوم ($a = \frac{dv}{dt} = 0$) في النظام الدائم و كذلك لحظة و وصول الكرية إلى سطح

الأرض ، هـ) $E_C = \frac{1}{2} m v^2 = 3.1 \text{ J}$

2) الفراغ يقصد به عدم وجود الهواء و بالتالي عدم وجود تأثيرات الهواء المتمثلة في قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس ، في حالة الحالة الكرية تخضع إلى قوة وحيدة ثابتة تتمثل في قوة الثقل ، و حركتها اثناء ذلك تكون مستقيمة متسارعة بانتظام بدون سرعة ابتدائية (سقوط حر) ، يكون المخطط $v(t)$ إذن عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $v = at$.

التمرين (7) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 47 على الموقع)

عند اللحظة $t = 0$ نترك كرة تنس كتلتها $m = 57 \text{ g}$ لتسقط في الهواء ، ندرس حركة مركز العطالة للكرة في المرجع السطحي الأرضي المزود بالمعلم المستقيم (O, \vec{k}) حيث \vec{k} شاقولي و موجه نحو الأسفل .

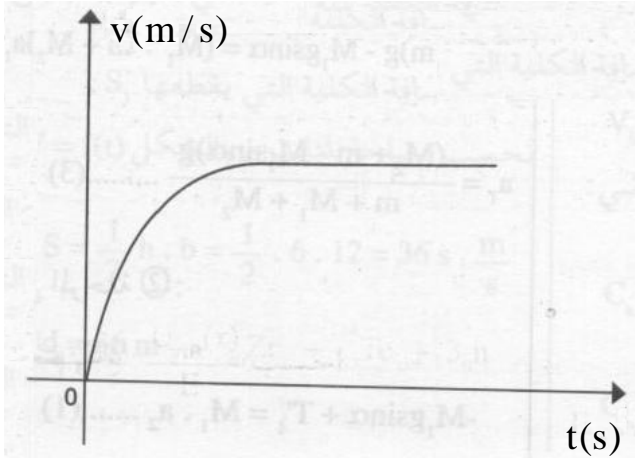
تظهر نتائج الدراسة أن سرعة مركز عطالة الكرة تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$$

حيث : $A = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، $B = 0.02 \text{ m}$.

تخضع الكرة أثناء سقوطها لقوة احتكاك ، شدتها تعطى بالعلاقة : $\|\vec{f}\| = k.v^2$.

- 1- ما هي القيمة الابتدائية لشدة هذه القوة ؟ كيف تتغير شدة القوة مع الزمن أثناء السقوط ؟
- 2- ما هي القوى الخارجية الأخرى المطبقة على الكرة ؟ هل تتغير شدة هذه القوى أثناء السقوط ؟
- 3- باستعمال المعادلة التفاضلية أوجد قيمة تسارع مركز عطالة الكرة عند اللحظة $t = 0$.
- 4- أكتب عند $t = 0$ قانون نيوتن الثاني و استنتج أنه يمكن إهمال إحدى القوى الخارجية المطبقة على الكرة أثناء دراسة حركتها .
- 5- باستعمال المعادلة التفاضلية ، أوجد قيمة السرعة الحدية v_ℓ .
- 6- إن المنحنى البياني الذي يمثل تغيرات السرعة v بدلالة الزمن له الشكل التالي :



أ- مثل المماس عند اللحظة $t = 0$ ، و كذا المستقيم المقارب

للمنحنى عند $t \rightarrow \infty$ ، أكتب معادلة هذا الأخير .

ب- هي قيمة معامل توجيه هذا المستقيم ؟

ب- كيف نسمي اللحظة الموافقة لفاصلة نقطة تقاطع مماس

المنحنى $v(t)$ عند $t = 0$ و المستقيم المقارب لنفس المنحنى عند

$t = \infty$ ، أوجد قيمة هذه اللحظة .

يعطى : $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

أجوبة مختصرة :

(1) $f = 0$ ، الثقل \vec{P} حيث : $P = m.g$ ، دافعة

أرخميدس $\vec{\Pi}$ حيث : $\Pi = \rho_{\text{air}}.V.g$ ،

هاتين القوتين $(\vec{P}, \vec{\Pi})$ ثابتتين في الشدة كون : m ، g ، ρ_{air} .

(3) $a_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$.

(4) $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \vec{a}_{(t=0)}$ ، بتحليل العلاقة الشعاعية : $P - \Pi = m.a_{(t=0)} \leftarrow g - \frac{\Pi}{m} = a_{(t=0)}$ ، و حيث أن

$g = 9.8$ يكون بالتعويض : $\Pi = 0$.