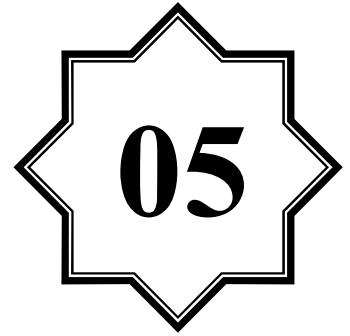


عروض نظرية و تمارين

من التطورات الرتبة ٥

تطور جملة ميكانيكية



الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 03

حركة الأقمار الاصطناعية و الكواكب

• دور الحركة الدائرية المنتظمة :

- دور الحركة الدائرية المنتظمة الذي يرمز له بـ T و وحدته الثانية (s) هو المدة اللازمة لإنجاز دورة واحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{2\pi.r}{v}$$

حيث :

▪ r : نصف قطر المسار الدائري (يقدر بالمتر m) .

▪ v : سرعة المتحرك على المسار الدائري (تقدر بالمتر على الثانية m/s) .

مثال-1 :

جسم نقطي (S) ، يتحرك على مسار دائري نصف قطره r = 50 cm بسرعة v = 2 m/s . نحسب دور حركة هذا الجسم .

$$T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi.0.5}{2} = 0.5\pi = 1.57 \text{ s}$$

مثال-2 :

جسم نقطي (S) ، يدور بمعدل 600 دورة في الدقيقة ، نحسب دور حركة هذا الجسم .

- حسب تعريف الدور و المتمثل في أنه الزمن اللازم لإنجاز دورة واحدة ، يكون حسب القاعدة الثلاثة :

$$600 \text{ دورة} \rightarrow 60 \text{ s (1min)}$$

$$1 \text{ دورة} \rightarrow T \text{ s}$$

و منه :

$$T = \frac{60 \cdot 1}{600} = 0.1 \text{ s}$$

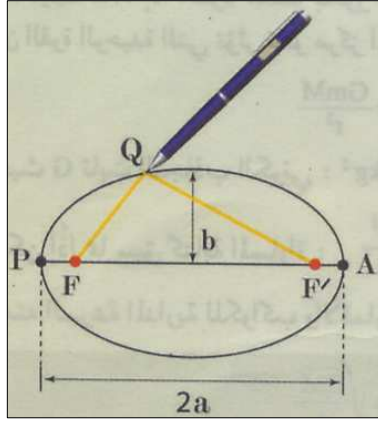
• قانون كبلر الأول :

- ينص على ما يلي :

" إن الكواكب تتحرك وفق مدارات اهليلجية تمثل الشمس إحدى محرقها "

خواص الإهليلج :

- الإهليلج هو منحنى يكون فيه دائما مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين F و F' ثابتا (الشكل) .



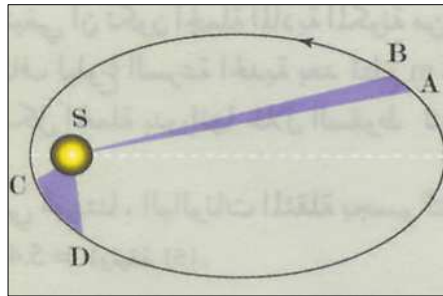
• قانون كبلر الثاني :

- ينص على ما يلي :

" إن المستقيم الرابط بين الشمس و كوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية "

مثال :

إذا فرضنا أن خلال مجال زمني معين ، ينتقل كوكب من النقطة A إلى النقطة B و ينتقل من C إلى D خلال مجال زمني آخر.



حسب القانون الثاني ، المساحتان SAB و SCD متساويتان إذا كان المجالين الزمنيين متساويين. و هذا دليل على تتغير قيمة سرعة الكوكب على مداره.

• قانون كبلر الثالث :

- ينص على ما يلي :

" إن مربع الدور لمدار كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس أي : $T^2 = k r_m^3$ "

- المسافة المتوسطة تساوي نصف طول المحور الكبير a و عليه يعبر عن النص بالعلاقة :

$$T^2 = k a^3 \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = k$$

و بعبارة أخرى :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \dots = k$$

k : ثابت صالح لكل الكواكب و مستقل عن كتلة الكواكب.

● قانون الجذب العام :

- في عام 1687 ، أعطى إسحاق نيوتن قانون الجذب العام في كتابه الشهير على الشكل التالي :

" جسمان كفيان يتجاذبان بقوة تتناسب مباشرة مع جداء كتلتيهما و عكسيا مع مربع المسافة التي تفصلهما "

- يمكن نمذجة قوة الجذب العام ، المتبادلة بين جسمين A و B كتلتهما على الترتيب M_A و M_B تفصلهما المسافة d ، بعلاقة رياضية تسمح بتحديد شدة هذه القوة بدلالة الكتلتين و المسافة الفاصلة بين مركزي الجسمين ، تكون كما يلي :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{M_A \cdot M_B}{d^2}$$

حيث G ثابت التناسب يدعى ثابت الجذب العام و يقدر في الجملة الوحدات الدولية (SI) بالنيوتن في المتر مربع على الكيلوغرام المربع ($N \cdot m^2 / kg^2$) ، و قيمته : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$.

التمرين (1) :

يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليلجيا كما يوضحه (الشكل-4) .

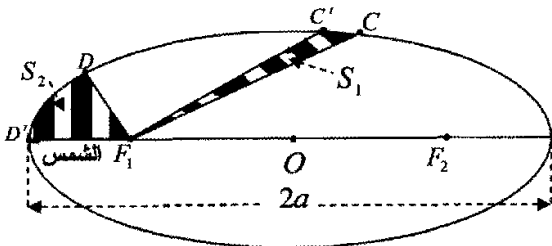
ينتقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة C إلى النقطة C'

ثم من النقطة D إلى النقطة D' خلال نفس المدة الزمنية Δt .

1- كيف نسمي النقطتين F_1 ، F_2 ، و ما هي خاصيتيهما .

2- اعتمادا على قانون كبلر الأول حدد موقع الشمس في الشكل .

3- اعتمادا على قانون كبلر الثاني بين أن $v_{mC} < v_{mD}$ ، حيث v_{mC} هي متوسط السرعة بين الموضعين C و C' و v_{mD} متوسط السرعة بين الموضعين D و D' .



(الشكل-4)

الأجوبة :

1- نسمي النقطتين F_1 ، F_2 بمحراقي الإهليلج ، و خاصيتيهما هو أن مجموع بعدهما عن نقطة من الإهليلج يكون ثابت في جميع نقاط هذا الإهليلج .

2- حسب قانون كبلر الأول تقع الشمس في أحد محراقي الإهليلج (النقطة F_1 في الشكل) .

3- إثبات أن $V_{mC} < V_{mD}$:

حسب القانون الثاني لكبلر ، تكون المساحة التي يمسحها نصف قطر مسار الكوكب في نفس المدة الزمنية Δt ، نفسها أثناء الانتقال من C إلى C' و D إلى D' ، و كون أن نصف القطر ليس نفسه في الحالتين يكون من الشكل :

$$CC' < DD'$$

بقسمة الطرفين على المدة Δt :

$$\frac{CC'}{\Delta t} < \frac{DD'}{\Delta t} \rightarrow V_{mC} < V_{mD}$$

التمرين (2) :

يتحرك قمر إصطناعي (S) بسرعة ثابتة على مدار دائري حول الأرض نصف قطره r . أكتب العبارات التالية :

- 1- عبارة شدة القوة المؤثرة على القمر الإصطناعي بدلالة G ، m ، M_T ، r ، حيث G : ثابت الجذب العام ، m : كتلة القمر الإصطناعي ، M_T : كتلة الأرض ، r : نصف قطر مسار القمر الإصطناعي حول الأرض .
- 2- أوجد باستعمال التحليل البعدي وحدة ثابت الجذب العام (G) في الجملة الدولية (SI) .
- 3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن استنتج عبارة التسارع الناظمي بدلالة G ، M_T ، r .
- 4- أوجد عبارة سرعة القمر الإصطناعي بدلالة G ، M_T ، r .
- 5- أوجد عبارة دور القمر الإصطناعي بدلالة r ، v .
- 6- أوجد عبارة دور القمر الإصطناعي بدلالة G ، M_T ، r .
- 7- أثبت أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة من أجل أي قمر اصطناعي .

8- ما معنى قمر إصطناعي جيو مستقر . أوجد ارتفاع هذا القمر الإصطناعي على سطح الأرض و كذا سرعته على مداره .

المعطيات :

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$.
- كتلة الأرض : $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.
- نصف قطر الأرض : $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$.
- دور حركة الأرض حول نفسها : $T = 23 \text{ h} , 56 \text{ min}$.

الاجوبة :

1- عبارة شدة القوة المؤثرة :

حسب قانون الجذب العام يخضع القمر الإصطناعي إلى قوة $\vec{F}_{T/S}$ ناتجة عن جذب الأرض (T) للقمر الإصطناعي (S) و حسب ذات القانون شدة هذه القوة هي :

$$\|\vec{F}_{T/S}\| = F = G \frac{m \cdot M_T}{r^2}$$

2- وحدة G :

- لدينا :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} \rightarrow G = \frac{F \cdot r^2}{m \cdot M}$$

$$[G] = \frac{[F].[r]^2}{[M].[M]}$$

من العلاقة (2) الناتجة عن الدراسة السابقة لدينا :

$$F = m a_n \rightarrow [F] = [M].[a]$$

و منه يصبح :

$$[G] = \frac{[M].[a].[r]^2}{[M].[M]} \rightarrow [G] = \frac{[a].[r]^2}{[M]}$$

$$\rightarrow [G] = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg} \rightarrow [G] = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg} \rightarrow [G] = m^3 / s^2 \cdot kg .$$

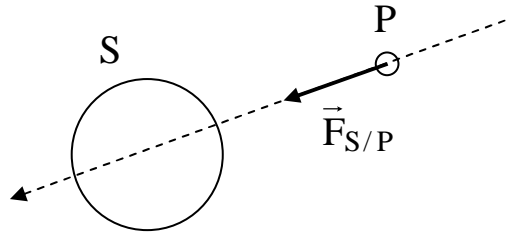
3- عبارة a_n :

- الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .

- مرجع الدراسة : مركزي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : القوة $(\vec{F}_{T/S})$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{T/S} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحور الناظمي :

$$F_{T/S} = m a_n$$

$$G \frac{m \cdot M_T}{r^2} = m a_n \rightarrow a_n = G \frac{M_T}{r^2}$$

4- عبارة سرعة القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة r ، M_T ، G :
لدينا من جهة :

$$a_n = G \frac{M_T}{r^2}$$

ومن جهة أخرى :

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

ومنه :

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M_T}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

5- عبارة الدور بدلالة r ، v :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

6- عبارة الدور بدلالة G ، M_T ، r :
من جهة :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow v^2 = \frac{G M_T}{r}$$

و من جهة أخرى :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

ومنه يكون :

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{G M_T}{r^2}$$

$$4\pi^2 r^3 = T^2 G M_T \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

7- إثبات أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة :

مما سبق لدينا :

$$4\pi^2 r^3 = T^2 G M_T \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

π ، G ، M_T ثوابت ، إذن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية .

8- معنى قمر جيو مستقر :

يعني ثابت بالنسبة لنقطة من سطح الأرض رغم دوران الأرض و دوره مساوي لدور الأرض .

- ارتفاع القمر الجيومستقر :

إذا كان z هو ارتفاع القمر الاصطناعي بالنسبة للأرض و كان R هو نصف قطر الأرض يكون : $r = R + z$ و منه يمكن كتابة :

$$\frac{T^2}{(R + z)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$(R + z)^3 = \frac{T^2 G M_T}{4\pi^2} \rightarrow (R + z) = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} \rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} - R$$

$$T = (23 \cdot 3600) + (56 \cdot 60) = 86160 \text{ s}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{(86160)^2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6.37 \cdot 10^6 = 3.5816 \cdot 10^7 \text{ m} = 35816 \text{ km}$$

- سرعة القمر الاصطناعي على مساره :

مما سبق يمكن كتابة :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R + z)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(3.37 \cdot 10^6 + 3.58 \cdot 10^7)}} = 3191 \text{ m/s}$$

التمرين (3) :

- كوكب كتلته m يدور حول الشمس ذات الكتلة M متبعا مسارا نعتبره دائريا مركزه O هو مركز عطالة الشمس .
- 1- بين أن حركة مركز عطالة هذا الكوكب دائرية منتظمة بالنسبة للمرجع الهيليو مركزي .
 - 2- أوجد عبارة سرعة الكوكب v بدلالة كل من ثابت الجذب العام G ، كتلة الشمس M و البعد r بين مركزي العطالة لكل من الكوكب و الشمس .
 - 3- اذكر نص قانون كبلر الثالث .
 - 4- كوكبا الأرض و المريخ يدوران حول الشمس على مدارين يمكن اعتبارهما دائريين ، مركزهما هو مركز الشمس O . استنتج قيمة r_m نصف قطر مدار المريخ .
- المعطيات :

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$.
- نصف قطر مدار الأرض حول الشمس : $r_t = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.
- مدة دوران الأرض حول الشمس : $T_t = 365.25 \text{ j}$.
- مدة دوران كوكب المريخ حول الشمس : $T_m = 687 \text{ j}$.

الأجوبة :

- 1- إثبات أن حركة الكوكب دائرية :

- الجملة المدروسة : كوكب (P) .
- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .

- القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب

- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m \vec{a} \\ \sum \vec{F}_{S/P} &= m \vec{a} \end{aligned}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين المماسي و الناطمي :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a_t \dots\dots\dots (1) \\ F = m \cdot a_n \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

الطريقة الأولى :

- من العلاقة (1) :

$$a_t = 0$$

و حيث أن : $a_t = \frac{dv}{dt}$ يكون :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow v = C$$

أي أن سرعة القمر الاصطناعي ثابتة ، و كون أن مساره دائري ، تكون حركته دائرية منتظمة .

الطريقة الثانية :

نحسب قيمة التسارع :

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}$$

- من العلاقة (1) و مما سبق وجدنا : $a_t = 0$.

من العلاقة (2) نكتب :

$$\frac{G.m.M}{r^2} = m a_n \rightarrow a_n = \frac{GM}{r^2}$$

و منه يصبح :

$$a = a_n = \frac{GM}{r^2}$$

G ، M ، r ثوابت ، منه التسارع يكون ثابت ، و كون أن المسار دائري ، فحركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة .

2- عبارة v بدلالة r ، M ، G :

من العلاقة (2) :

$$F = m a_n$$

$$G \frac{mM}{r^2} = m a \rightarrow G \frac{M}{r^2} = a_n$$

و حيث أن حركة الكوكب دائرية منتظمة يكون $a_n = \frac{v^2}{r}$ و منه يصبح :

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3- قانون كبلر الثالث :

يتناسب مربع دور كوكب T مع مكعب البعد المتوسط r للكوكب عن الشمس أي :

$$T^2 = \alpha r^3$$

أو :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \dots = \alpha$$

حيث α هو ثابت التناسب

4- نصف قطر كوكب المريخ :

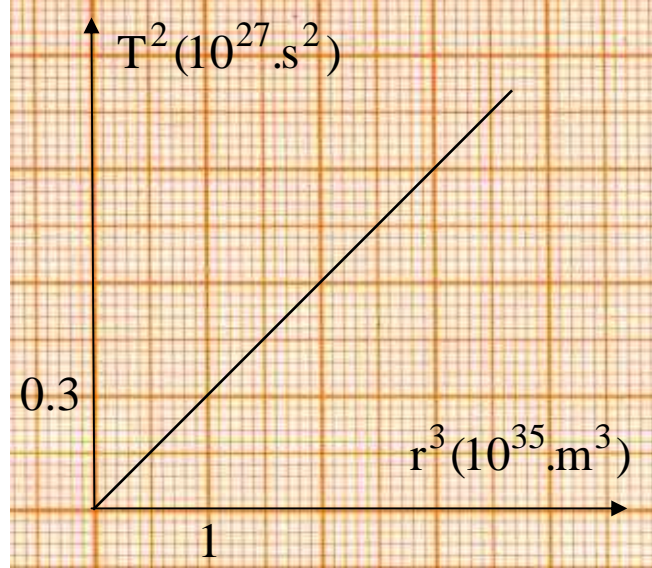
بتطبيق قانون كبلر الثالث بالنسبة لكوكب الأرض t و كوكب المريخ m نكتب :

$$\frac{T_t^2}{r_t^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3} \rightarrow r_m = \sqrt[3]{\frac{T_m^2 \cdot r_t^3}{T_t^2}}$$

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{(687 \text{ jours})^2 (150.10^6 \text{ km})^3}{(365.25 \text{ jours})^2}} = 2.29.10^8 \text{ km}$$

التمرين (4) :

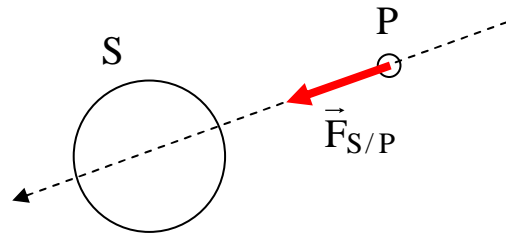
مسار الكوكب حول الشمس اهليلجي و من أجل التبسيط نمذجته في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره r .
 باستعمال برمجة "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان $T^2 = f(r^3)$ (الشكل-6). حيث T دور الحركة



- 1- ندرس حركة الكوكب في المرجع المركزي الشمسي (الهيليومركزي) الذي نعتبره غاليليا ، عرف المرجع المركزي الشمسي .
- 2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من السرعة v و دور حركة الكوكب T بدلالة r ، M ، G .
- 3- اعتمادا على البيان :
 أ- استنتج نص قانون كبلر الثالث .
 ب- أوجد كتلة الشمس .
 يعطى : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$.

الأجوبة :

- 1- تعريف المرجع المركزي الشمسي :
 هو مرجع مبدأ معلمه منطبق على مركز الشمس و محاوره الثلاث تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة نعتبرها ثابتة بالنسبة لمركز الشمس .
- 2- عبارة v دلالة r ، M ، G :
 - الجملة المدروسة : كوكب .
 - مرجع الدراسة : هيليو مركزي .
 - القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب (قوة الجذب العام)
 - بتطبيق قانون نيوتن الثاني :



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{S/P} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور الناظمي :

$$F = m a_n$$

$$\frac{G.mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{G.M}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

• عبارة T بدلالة G ، M ، r :
لدينا :

$$T = \frac{2\pi.r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi.r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.r}{\frac{G.M}{r}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.r^3}{G.M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2.r^3}{G.M}}$$

3- أ- نص قانون كبلر الثالث :

المنحنى $T^2 = f(r^3)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $T^2 = k r^3$ ، حيث k هو ميل المنحنى المستقيم ، نستنتج من ذلك أن مربع حركة كوكب حول الشمس يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط r بين مركز الكوكب و مركز الشمس ، و هو القانون الثالث لكبلر .

ب- كتلة الشمس :

- من البيان لدينا :

$$T^2 = k r^3 \dots\dots\dots (1)$$

و لدينا مما سبق :

$$T = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \dots\dots\dots (2)$$

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$$\frac{4\pi^2}{GM} = k \rightarrow \frac{4\pi^2}{G.a}$$

- نحسب الميل :

$$k = \frac{0.3 \cdot 10^{17}}{1 \cdot 10^{35}} = 3 \cdot 10^{-19}$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{-19}} = 1.97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

تمارين مقترحة

التمرين (5): (بكالوريا 2008 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 01 على الموقع)

يدور قمر اصطناعي كتلته (m) حول الأرض بحركة منتظمة ، فيرسم مساراً دائرياً نصف قطره (r) و مركزه هو نفسه مركز الأرض .

1- مثل قوة جذب الأرض للقمر الاصطناعي و اكتب عبارة قيمتها بدلالة M_T ، m ، G ، r حيث :

M_T كتلة الأرض ، m كتلة القمر الاصطناعي ، G ثابت الجذب العام ، r نصف قطر المسار (البعد بين مركزي الأرض و القمر الاصطناعي) .

2- باستعمال التحليل البعدي أوجد وحدة ثابت الجذب العام (G) في الجملة الدولية (SI) .

3- بين أن عبارة السرعة الخطية (v) للقمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي تعطى بـ : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$

4- أكتب عبارة (v) بدلالة r و T حيث T دور القمر الاصطناعي .

5- أكتب عبارة دور القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة r ، G ، M_T .

6- أ) بين أن النسبة $\left(\frac{T^2}{r^3}\right)$ ثابتة لأي قمر يدور حول الأرض ، ثم احسب قيمتها العددية في المعلم المركزي الأرضي

مقدرة بوحدة الجملة الدولية (SI) .

ب) إذا كان نصف قطر مسار قمر اصطناعي يدور حول الأرض $r = 2.66 \cdot 10^4 \text{ km}$ ، أحسب دور حركته .

يعطى : ثابت الجذب العام : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ ، $\pi^2 = 10$ ، كتلة الأرض : $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

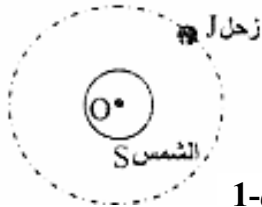
أجوبة مختصرة :

$$(2) \quad [G] = \text{m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg} \quad (3) \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \quad (4) \quad v = \frac{2\pi r}{T} \quad (5) \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

$$(6) \quad \text{أ) } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} \quad \text{ب) } T = 4.348 \cdot 10^4 \text{ s}$$

التمرين (6): (بكالوريا 2008 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 02 على الموقع)

المعطيات :



الشكل-1

كتلة الشمس	$M_T = 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
نصف قطر مسار زحل	$r = 7.8 \cdot 10^8 \text{ km}$
ثابت الجذب العام	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$

يدور كوكب زحل حول الشمس على مسار دائري مركزه ينطبق على مكر العطالة (O) للشمس ، بحركة منتظمة (الشكل-1) .

1- مثل القوة التي تطبقها الشمس على كوكب زحل ثم أعط عبارة قيمتها .

2- ندرس حركة كوكب زحل في المرجع المركزي الشمسي (الهيليومركزي) الذي نعتبره غاليليا .

- أ- عرف المرجع المركزي الشمسي .
 ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أوجد عبارة التسارع (a) لحركة مركز عطالة كوكب زحل .
 ج- أوجد العبارة الحرفية للسرعة (v) للكوكب في المرجع المختار بدلالة ثابت الجذب العام (G) و كتلة الشمس (M_S) و نصف قطر المدار (r) ، ثم أحسب قيمتها .
 3- أوجد عبارة الدور (T) لكوكب زحل حول الشمس بدلالة نصف قطر المدار (r) و السرعة (v) ، ثم أحسب قيمته
 4- استنتج عبارة القانون الثالث " لكبلر " و أذكر نصه .

أجوبة مختصرة :

- 2- (أ) هو مرجع مرتبط بالشمس مبدأ معلمه منطبق على مركز الشمس و محاوره الثلاث متجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة
 بالنسبة لمركز الشمس ، (ب) $a_G = \frac{G.M_S}{r^2}$ ، (ج) $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}} = 1.3.10^4 \text{ m/s}$
 $T = \frac{2\pi r}{v} = 3.768.10^8 \text{ s}$ (3)
 $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$ ، π ، G ، M_T ثوابت ، و منه تكون النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية ، هذا
 يعني أن مربع الدور لكوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب و الشمس و هو نص القانون الثالث لكبلر .

التمرين (7) : (بكالوريا 2009 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 07 على الموقع)

- يدور قمر اصطناعي كتلته (m_s) حول الأرض في مسار دائري على ارتفاع (h) من سطحها .
 نعتبر الأرض كرة نصف قطرها (R) ، و نمذج القمر الاصطناعي بنقطة مادية .
 تدرس حركة القمر الاصطناعي في المعلم المركزي الأرضي الذي نعتبره غاليليا .
 1- ما المقصود بالمعلم المركزي الأرضي ؟
 2- أكتب عبارة القانون الثالث لكبلر بالنسبة لهذا القمر .
 3- أوجد العبارة الحرفية بين مربع سرعة القمر (v^2) و (G) ثابت الجذب العام ، M_T كتلة الأرض ، h و R .
 4- عرف القمر الجيو مستقر و أحسب ارتفاعه (h) و سرعته (v) .
 5- أحسب قوة جذب الأرض لهذا القمر . اشرح لماذا لا يسقط على الأرض رغم ذلك .
 المعطيات : دور حركة الأرض حول محورها : $T \approx 24 \text{ h}$.
 $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ، $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2.\text{kg}^{-2}$
 $R = 6400 \text{ km}$ ، $m_s = 2.0 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

أجوبة مختصرة :

- 1) المعلم المركزي الأرض هو معلم مبدأه منطبق مركز الأرض و محاوره الثلاث متجهة نحو ثلاث نجوم بعيدة تكون ثابتة بالنسبة لمركز الأرض .
 2) $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi}{G.M_T}$ (3) ، $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R+h)}}$
 4) هو قمر يدور في جهة دوران الأرض و دوره مساوي لدور حركة الأرض .
 $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R+h)}} = 3070.3 \text{ m/s}$ ، $h = \sqrt[3]{\frac{T^2.G.M_T}{4\pi^2}} - R = 3.5841.10^7 \text{ m} = 35841 \text{ km}$

(5) $F = G \frac{M_T \cdot m_s}{(R + h)^2} = 446.3 \text{ N}$ ، القمر الاصطناعي خاضع إلى قوة ناتجة عن جذب الأرض له ، و كون أنه لا يسقط فهذا ناتج عن تأثير قوة ثابتة معاكسة للقوة الأولى ، هذه القوة الثانية ناتجة عن الفعل الطبيعي المؤثر على القمر الاصطناعي نتيجة دورانه حول الأرض .

التمرين (8) : (بكالوريا 2011 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 12 على الموقع)

ألسات 1 (Alsat 1) قمر اصطناعي جزائري متعدد الاستخدامات كتلته $m_s = 90 \text{ kg}$ ، أرسل إلى الفضاء بتاريخ 28 نوفمبر 2002 من محطة الفضاء الروسية ، يدور حول الأرض وفق مسار إهليلجي و دوره $T = 98 \text{ min}$.

1- لأجل دراسة حركته نختار مرجعا مناسباً .
أ- اقترح مرجعا لدراسة حركة القمر الاصطناعي حول الأرض و عرفه .
ب- ذكر بنص القانون الثاني لكلبر .

2- بفرض أن القمر الاصطناعي (Alsat 1) يدور حول الأرض وفق مسار دائري على ارتفاع h عن سطحها .
أ- مثل قوة جذب الأرض بالنسبة للقمر الاصطناعي .

ب- اكتب العبارة الحرفية لشدة قوة جذب الأرض للقمر الاصطناعي بدلالة : M_T ، m_s ، G ، h ، R_T .
ج- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، تحقق أن عبارة سرعة القمر الاصطناعي المدارية هي من الشكل :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \quad \text{حيث : } r = R_T + h$$

د- عرف الدور T و اكتب عبارته بدلالة : r ، G ، M_T .

هـ- احسب الارتفاع h الذي يتواجد عليه القمر الاصطناعي (Alsat 1) عن سطح الأرض .

المعطيات : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ ، كتلة الأرض : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ، نصف قطر الأرض : $R_T = 6.38 \cdot 10^3 \text{ km}$.

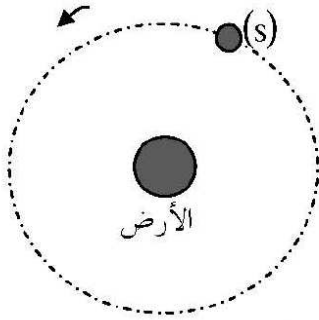
أجوبة مختصرة :

1- أ) المرجع المناسب لدراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي (جيومركزي) .
ب) ينص على ما يلي : " مربع دور كوكب يتناسب طردياً مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب و مركز الشمس "

$$F_{T/S} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2} \quad \text{ب) 2-}$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \pi^2 r^3}{G \cdot M_T}} \quad \text{د) الدور هو الزمن اللازم لانجاز دورة واحدة ،}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \pi^2}} - R = 672950 \text{ m} = 672.95 \text{ km} \quad \text{هـ)}$$

التمرين (9): (بكالوريا 2013 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 18 على الموقع)

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِدْ العبارة الحرفية لسرعة القمر الاصطناعي

بدلالة: ثابت الجذب العام G ، كتلة الأرض M_T ، نصف قطر الأرض R_T

وارتفاع مركز عطالة القمر الاصطناعي عن سطح الأرض h ، ثم احسب قيمتها.

4- أ- جِدْ عبارة دور القمر الاصطناعي بدلالة: R_T ، G ، M_T ، h ، ثم احسب قيمته.

ب- هل يمكن اعتبار هذا القمر جيو مستقر ؟ علّل.

5- ذكّر بالقانون الثالث لكبلر، ثم بَيِّنْ أن النسبة: $\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = k$ ، حيث: k ثابت يطلب حسابه. الشكل-6

يعطى: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ (SI)}$, $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6380 \text{ km}$, $h = 35800 \text{ km}$, $\pi^2 = 10$

أجوبة مختصرة :

(2) المرجع المناسب لدراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي، تعريف: هو مرجع مركزه مركز الأرض و له ثلاث محاور تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة ثابتة بالنسبة لمركز الأرض.

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T + h}} = 3080.24 \text{ m/s} \quad (3)$$

$$T = \frac{2\pi (R_T + h)}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}} = 85996.54 \text{ s} = 24 \text{ h} \quad (4)$$

لأن جهة دورانه بجهة دوران الأرض و دوره يساوي دور الأرض حول نفسها.

(5) قانون كبلر الثالث: النسبة بين مربع دور القمر و مكعب البعد بين مركزي القمر و الأرض يساوي مقدار ثابت.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = 10^{-13}$$

التمرين (10): (بكالوريا 2013 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 19 على الموقع)

يدور قمر اصطناعي (S) حول الأرض بحركة دائرية منتظمة على ارتفاع $h = 700 \text{ km}$ من سطحها، حيث ينجز 14.55 دورة في اليوم الواحد. نفرض أن المرجع الأرضي المركزي مرجع غاليلي.

1- مثل شعاع التسارع \vec{a} لحركة القمر الاصطناعي (S) (الشكل).

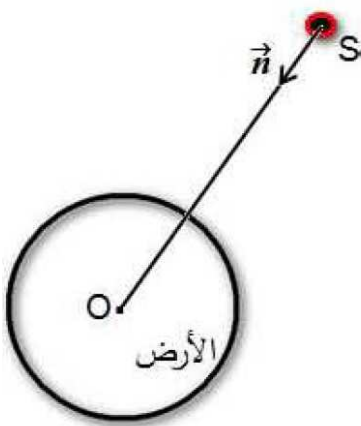
2- أعط دون برهان عبارة شعاع التسارع \vec{a} لحركة القمر الاصطناعي (S)،

بدلالة v سرعة القمر الاصطناعي (S). بدلالة v سرعة القمر الاصطناعي (S) و نصف القطر r لمسار حركة القمر الاصطناعي حول الأرض، و شعاع الوحدة \vec{n} .

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن عبارة سرعة القمر الاصطناعي (S) حول حركة كوكب الأرض تعطى بالعلاقة:

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} \quad \text{حيث: } M_T \text{ كتلة الأرض}$$

4- اكتب العلاقة بين T_s و r ، حيث: T_s دور القمر الاصطناعي (S) حول



الأرض .

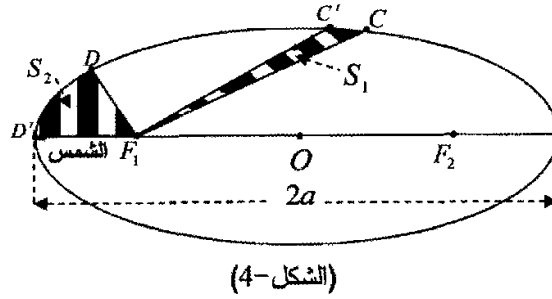
$$5- \text{ بين أن : } \frac{T_s^2}{r^3} = 9.85 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3} .$$

6- استنتج M_T كتلة الأرض .

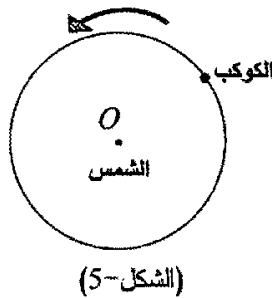
يعطى :

- ثابت التجاذب الكوني : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$.- نصف قطر الأرض : $R_T = 6400 \text{ km}$.- دور الأرض : $T = 24 \text{ h}$.**التمرين (12): (بكالوريا 2010 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 10 على الموقع)**

أ/ يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليلجيا كما يوضحه (الشكل-4) .

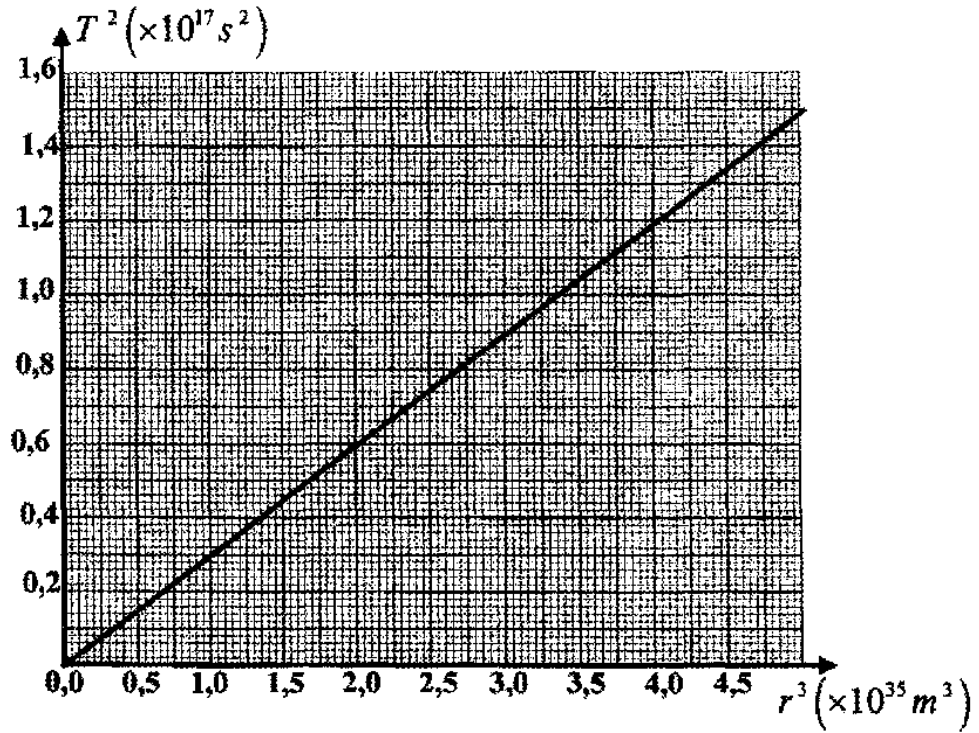
ينتقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة C إلى النقطة C' ثم من النقطة D إلى النقطة D' خلال نفس المدة الزمنية Δt .1- اعتمادا على قانون كبلر الأول فسر وجود موقع الشمس في النقطة F_1 ، كيف نسمي عندئذ النقطتين F_1 ، F_2 ؟2- حسب قانون كبلر الثاني ما هي العلاقة بين المساحتين S_1 و S_2 ؟

3- بين أن متوسط السرعة بين الموضعين C و C' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين D و D' .

ب/ من أجل التبسيط نمذج المسار الحقيقي لكوكب في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره r (الشكل-5) .يخضع كوكب أثناء حركته حول الشمس إلى تأثيرها و الذي ينمذج بقوة \vec{F} ، قيمتها تعطى حسب قانون الجذب العام لنيوتن بالعلاقة :

$$F = G \frac{mM}{r^2} , \text{ حيث } M \text{ كتلة الشمس , } m \text{ كتلة الكوكب و } G \text{ ثابت التجاذب الكوني } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$$

باستعمال برمجة "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان $T^2 = f(r^3)$ (الشكل-6) . حيث T دور الحركة



(الشكل-6)

- 1/ أذكر نص قانون كبلر الثالث .
- 2/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من v سرعة الكوكب ، و دور حركته T بدلالة M ، G ، r .
- 3/ أوجد بياناً العلاقة بين T^2 و r^3 .
- 4/ أوجد العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 .
- 5/ بتوظيف العلاقتين الأخيرتين استنتج قيمة كتلة الشمس M .

أجوبة مختصرة :

- أ- (1) - وجود الشمس في النقطة F_1 يفسر بمسار الكوكب الإهليلجي و الذي تمثل الشمس أحد محرقيه ، تسمى النقطتين F_1 ، F_2 محرقا المدار الإهليلجي .
- (2) حسب قانون كبلر الثاني يكون : $S_1 = S_2$
- (3) من (الشكل-4) المعطى ، $C'C < D'D$ ، و كون أن الكوكب يقطع المسافتين $C'C$ ، $D'D$ في نفس المدة الزمنية يكون بقسمة الطرفين على الزمن : $V(C'C) < V(D'D)$.
- ب- (1) ينص على ما يلي : " مربع دور الكوكب يتناسب طردياً مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس "

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \quad , \quad v^2 = \frac{GM}{r} \quad (2)$$

- (3) البيان $T^2 = f(r^3)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ لذا يكون : $T^2 = \alpha r^3$ ، حيث α ميل هذا المستقيم .

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (4)$$

- (5) - بمطابقة مع العلاقتين البيانية و النظرية ، و بعد حساب الميل نجد : $M = 1.97 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$.