二、导数应用

1. 研究函数的性态：

增减， 极值， 凹凸， 拐点， 渐近线， 曲率

2. 解决最值问题

- 目标函数的建立与简化
- 最值的判别问题

3. 其他应用：

求不定式极限； 几何应用；

相关变化率； 证明不等式； 研究方程实根等.

例7. 填空题

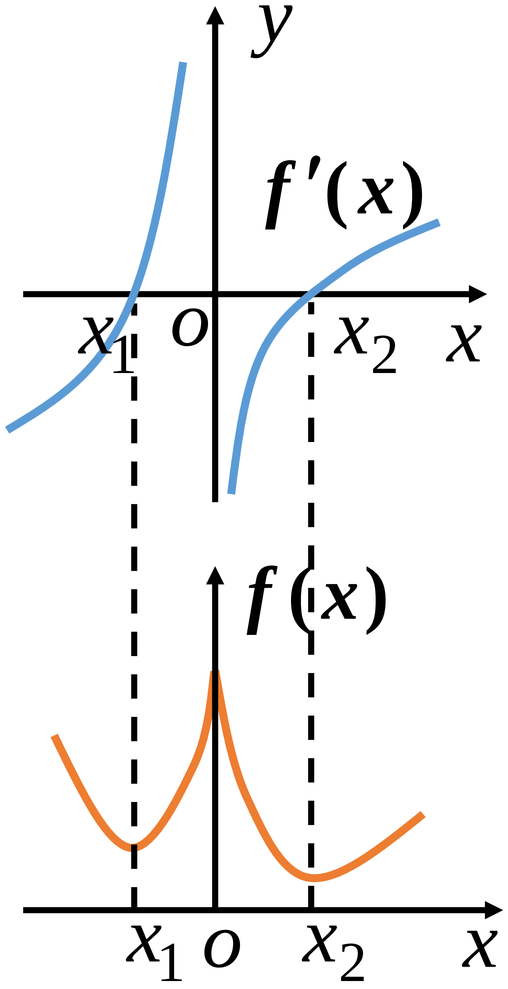
(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导数图形如图所示，则 $f(x)$ 的

单调减区间为 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$；

单调增区间为 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$；

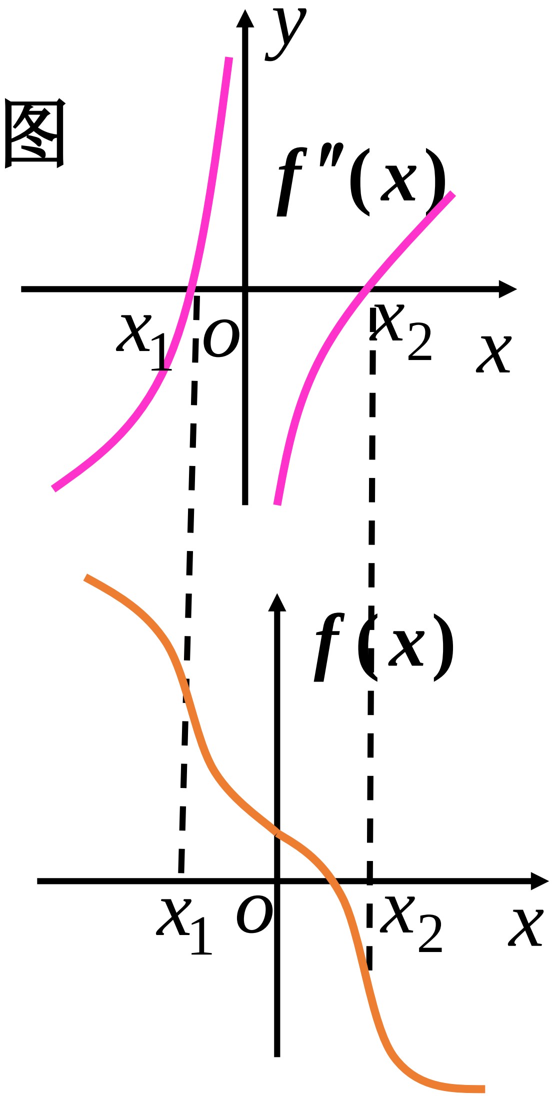
极小值点为 $\underline{x_1,\ x_2}$；

极大值点为 $\underline{x = 0}$。



提示：根据 $f(x)$ 的连续性及导函数的正负作 $f(x)$ 的示意图.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f''(x)$的图形如图所示，则函数 $f(x)$ 的图形在区间 $\underline{(x_1,0),(x_2,+\infty)}$上是凹弧；在区间 $\underline{(-\infty,x_1),(0,x_2)}$ 上是凸弧；拐点为 $\underline{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(0,f(0))}$.



提示：根据 $f(x)$ 的可导性及 $f''(x)$ 的正负作 $f(x)$ 的示意图.

例8. 证明$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$在$(0,+\infty)$上单调增加.

证：$\ln f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$= x[\ln(1+x) - \ln x]$$

$$\therefore \quad f'(x) = (1+\frac{1}{x})^x \underline{[\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x}]}$$

令$F(t)=\ln t$, 在$[x, x+1]$上利用中值定理，得

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+x} \quad (0 < x < \xi < x+1)$$

故当$x>0$时, $f'(x)>0$, 从而$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增.

例9. 设 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$,

证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

证: 设 $\varphi(x)=e^x f(x)$

则 $\varphi'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]>0$

故 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续单调递增, 从而至多只有一个零点 .

又因 $e^x>0$, 因此 $f(x)$ 也至多只有一个零点.

思考: 若题中 $f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其它不变时, 如何设辅助函数? $\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$

例10. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

证：设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\geq 1)$, 用对数求导法得

$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ 令

$f'(x)=0$, 得 $x=e$,

列表判别:

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

极大值

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大点 $x=e$, 因此在 $x=e$ 处 $f(x)$ 也取最大值.

又因 $2<e<3$, 且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项.

例11. 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0).$

证: 设 $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 则 $\varphi(0) = 0$

$$\varphi'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时, $\varphi(x)$单调增加, 从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即 $$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ $(0<x<1)$时, 如何设辅助函数更好?

提示: $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

例12. 设 $f(0)=0$,且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$存在，且单调递减，证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

证：设$\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$时，$\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$,得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立.

例13. 证明：当$0<x<1$时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

证：只要证 $(1-x)e^{2x}-1-x<0 \quad (0<x<1)$

设 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x,$ 则 $f(0)=0$

$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1,$ $f'(0)=0$

$f''(x)=-4xe^{2x}<0 \quad (0<x<1)$

利用一阶泰勒公式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=-2\xi e^{2\xi}x^2<0 \quad (0<\xi<x<1)$$

故原不等式成立.

例14. 证明当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$.

证：令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, 则 $f(1)=0$

$$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x}-2(x-1), \quad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, \quad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

法1 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶泰勒公式，得

$$f(x)=\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

$$=(x-1)^2+\frac{\xi^2-1}{3\xi^3}(x-1)^3 \ge 0 \quad (x>0, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } 1 \text{ 之间})$$

故所证不等式成立.

法2 列表判别:

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2, \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2 \qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1, \qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$ $+$	2	$\nearrow$ $+$
$f'(x)$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $+$	0	$\nearrow$ $+$

故当$x>0$时 $f(x)\geq 0$, 即 $(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$.

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2\qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\qquad \boxed{f''(1)=2>0}$$

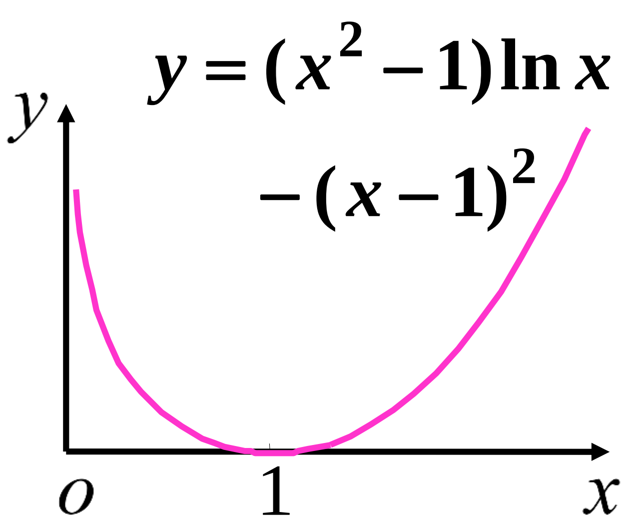
法3 利用极值第二判别法.

易知 $x=1$ 是 $f'(x)=0$ 的唯一根，

且 $f''(1)>0$，$\therefore$ $x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一极小点，故 $f(1)=0$ 也是最小值，

因此当 $x>0$ 时 $f(x)\geq 0$，即

$$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$$



例15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}) \quad (a \neq 0)$

解法1 利用中值定理求极限

$$原式 = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}) \quad (\xi 在 \frac{a}{n} 与 \frac{a}{n+1} 之间)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} \frac{a}{1+\xi^2}$$

$$= a$$

解法2 利用泰勒公式

令$f(x)=\arctan x$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left\{[\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n^2})]-[\frac{a}{n+1}+o(\frac{1}{(n+1)^2})]\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}\right]=a$$

解法3 利用洛必达法则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

洛必达法则

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a \neq 0)$$