第五节、极限存在准则 无穷小的比较

- 一、夹逼准则
- 二、单调有界定理
- 三、两个重要极限
- 四、无穷小的比较
- 五、作业

一、 夹逼准则

准则I 若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, 3\cdots)$ (1)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

则数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

证 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_1 > 0, \ N_2 > 0,$ 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$ (2)

当 $n > N_2$ 时恒有 $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$ (3)

取 $N = \max\{N_1, N_2\},$ (1)、(2)、(3)同时成立.

当 $n > N$ 时, 恒有 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

上述数列极限存在的准则可以推广到函数的极限.

准则I′ 若当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ (或 $|x| > M$)时,有

$$(1)\ g(x) \le f(x) \le h(x),$$

$$(2)\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A,$$

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在, 且等于$A$.

准则 I和准则 I'称为夹逼准则.

注意: 利用夹逼准则求极限关键是构造出y_n与z_n,

并且y_n与z_n的极限是容易求的 .

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots\right.$

> 准则I 若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:
>
> (1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n=1,2,3\cdots)$
>
> (2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$
>
> 则数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

解

$$\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{\quad}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{\quad}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\text{又} \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$ 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

二、单调有界定理

如果数列 x_n 满足条件

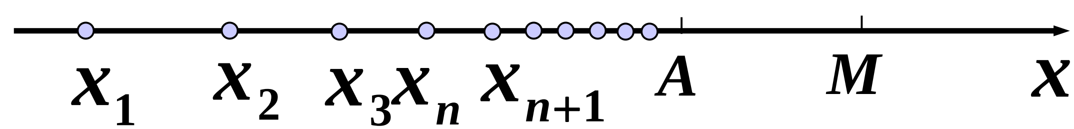
$x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$　　单调增加

$x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$　　单调减少

单调数列

准则II　单调有界数列必有极限.

几何解释:



例2 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1} > x_n$, $\quad \therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, $\quad x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的； $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. $\quad \because x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$,

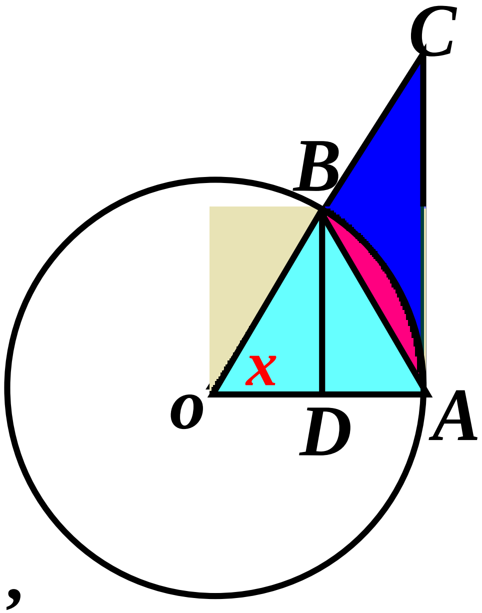
$x_{n+1}^2 = 3 + x_n$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$, $\quad A^2 = 3 + A$,

解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去) $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

准则II′ 设函数 $f(x)$ 在点x_0的某左 (右)邻域内单调且有界， 则 $f(x)$ 在 x_0 的左(右) 极限必存在。

三、 两个重要极限

1. $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$



设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

$\triangle AOB$ 的面积<圆扇形AOB的面积 <$\triangle AOC$的面积

由于$BD=\sin x$, 弧长$AB = x$, $AC=\tan x$,

$\therefore \sin x < x < \tan x$, 即$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

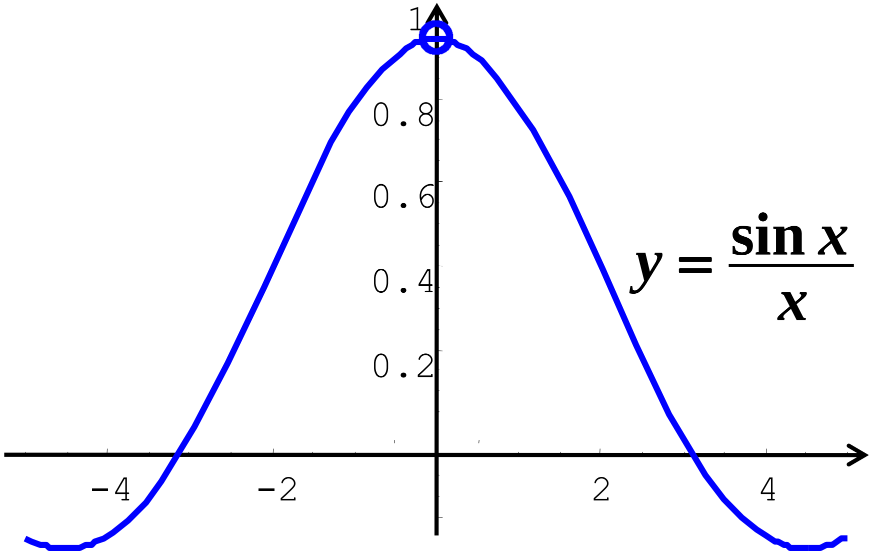
$$|\sin x| < |x|, x \neq 0$$

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0, \quad \therefore \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0, \quad 即 \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

$$又 \because \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$



例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1,$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

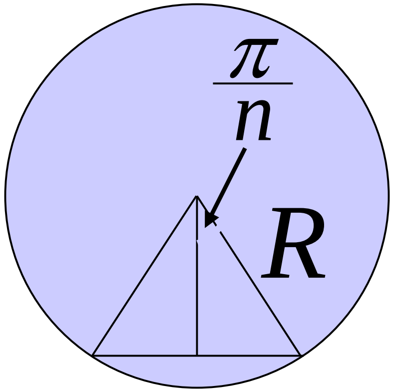
解 原式 $\overset{t=\arcsin x}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1.$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$.

例6. 已知圆内接正 n 边形面积为

$$A_n=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$



证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.

证

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2$$

说明: 计算中注意利用

$$\boxed{\lim_{\phi(x)\to 0}\frac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1.}$$

2

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

定义 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$

设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

类似地，$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

$\because x_{n+1}>x_n$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的;

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

$\therefore \{x_n\}$是有界的; $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$(e=2.71828\cdots)$

当 $x \geq 1$时, 记 $[x]=n$, 有 $n \leq x < n+1$,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < (1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

$$\text{而} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

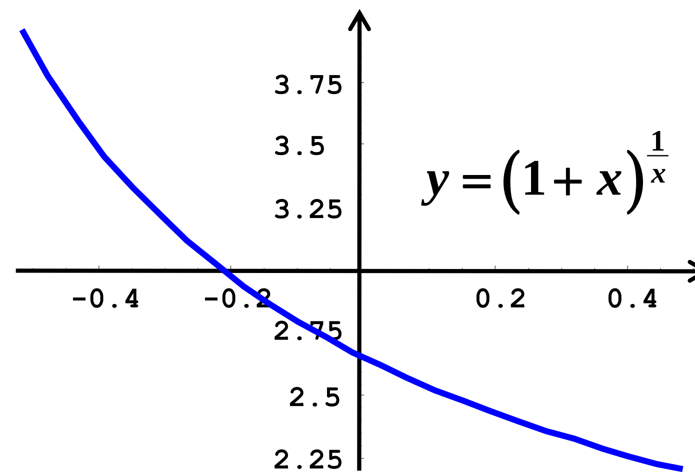
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xlongequal{\text{令 } t=-x,} \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x},} \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$



$$\boxed{\therefore \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\,.}$$

特点： 1^{∞}不定式

1^{∞}不定式

例7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x} \xlongequal{t=-x} \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{-2t}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}}=\frac{1}{e^{2}}$$

说明 若利用 $\lim\limits_{\phi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\phi(x)}\right)^{\phi(x)}=e$, 则

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-2}=e^{-2}.$$

1^{∞}不定式

例8. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{2}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left((1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right)^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=e.$$

一般地，对于幂指函数 $(u(x))^{v(x)}\ (u(x)>0, u(x)\neq 1)$,
若 $\lim u(x)=a>0$, $\lim v(x)=b$, 则

$$\lim(u(x))^{v(x)}=a^{b}$$