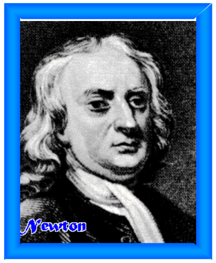
第二章、导数与微分

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton



德国数学家 Leibniz

导数思想最早由法国数学家 Ferma 在研究极值问题中提出.

微分学

- 导数 —— 描述函数变化快慢
- 微分 —— 描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具 (从微观上研究函数)

第一节、导数的概念

- 一、引例
- 二、导数的定义
- 三、导数的几何意义
- 四、函数的可导性与连续性的关系
- 五、小结
- 六、作业

一、 引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动路程的函数为

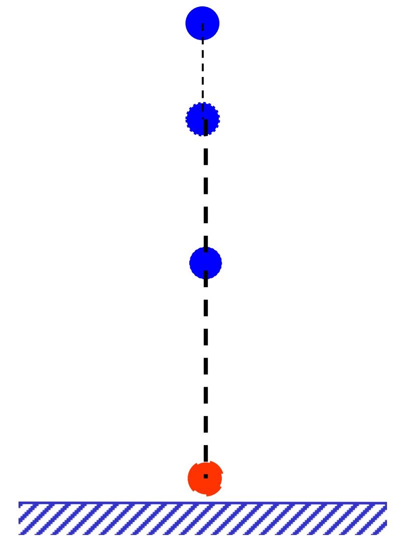
$$s = f(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

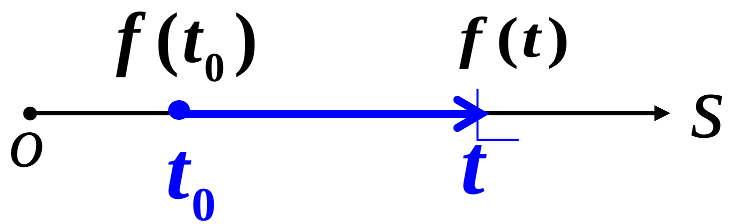
而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

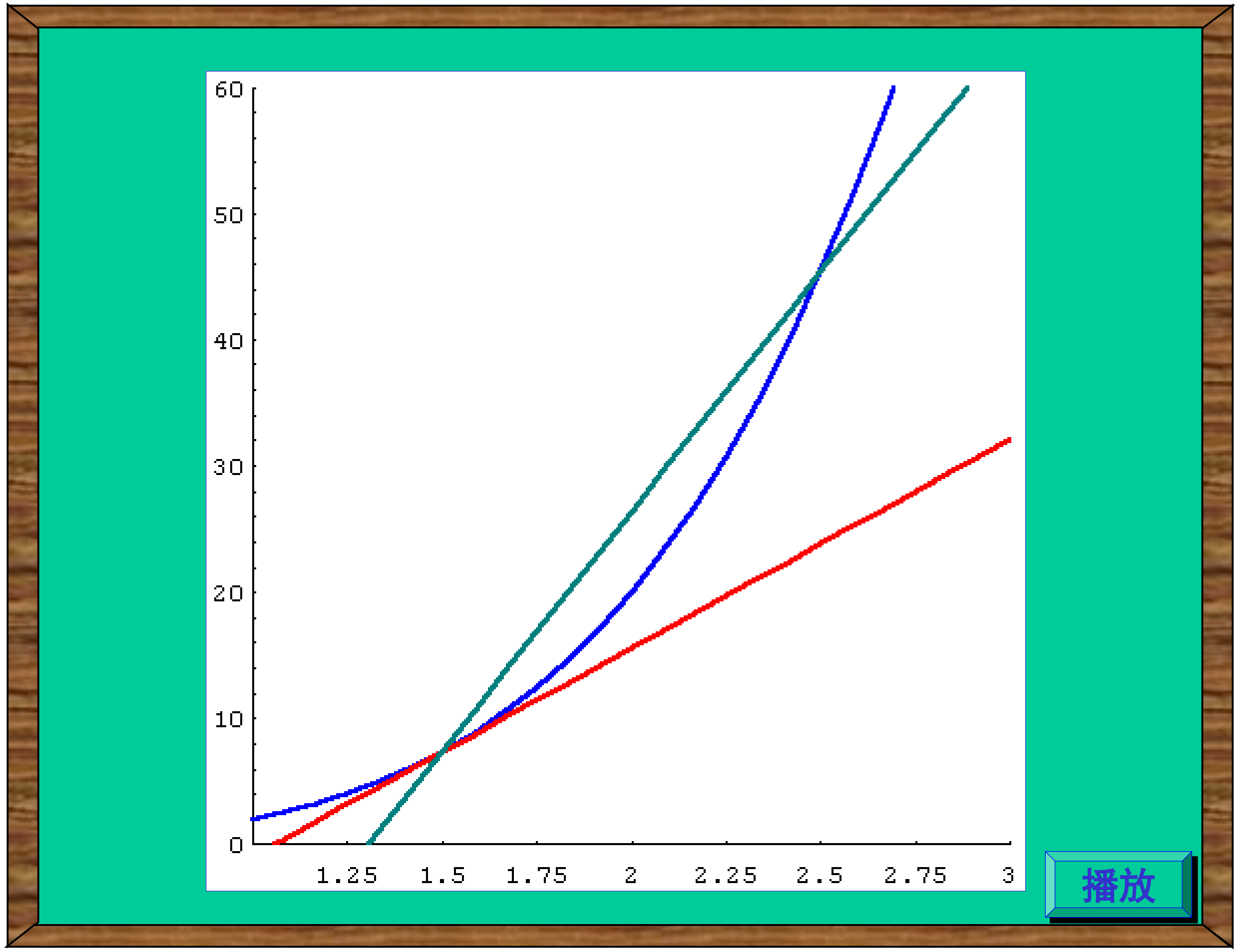


自由落体运动

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2$$



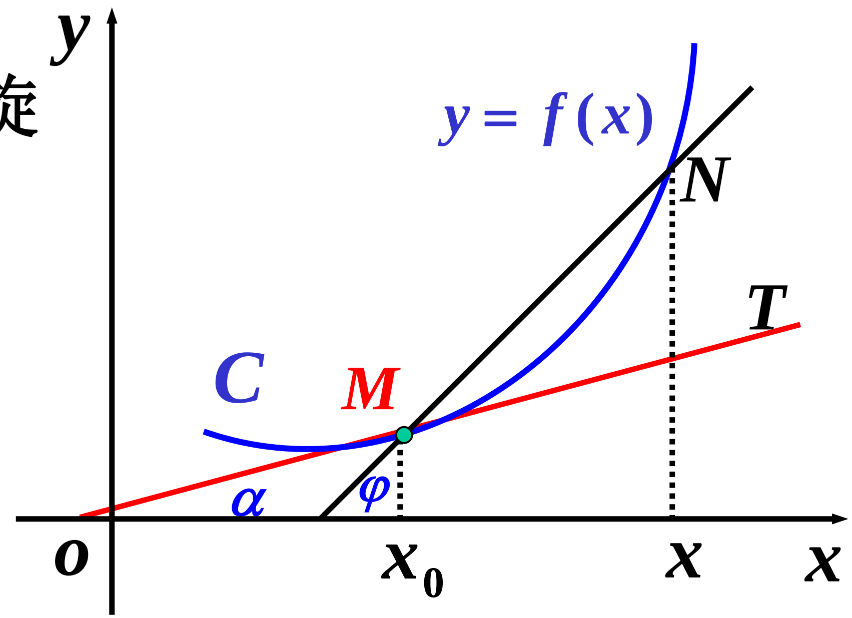
2.切线问题　割线的极限位置——切线位置



如图，如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT，直线MT就称为曲线C在点M处的切线.

极限位置即

$$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$$



设 $M(x_0, y_0), N(x, y)$.

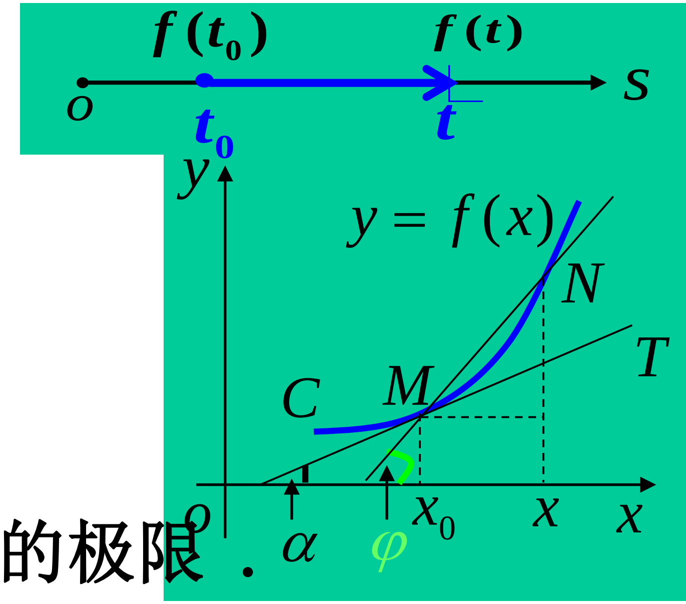
割线MN的斜率为 $\tan\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

$N \xrightarrow{\text{沿曲线 } C} M, x \to x_0$,

切线MT的斜率为 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

切线斜率 $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



两个问题的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

………

变化率问题

二、导数的定义

1 函数在一点处的导数与导函数

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,

若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta y = f(x)-f(x_0)\\ \Delta x = x - x_0\end{array}}$$

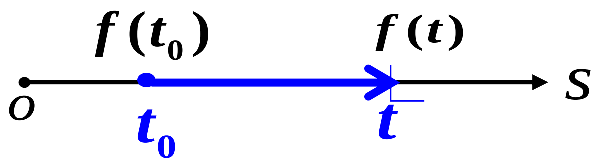
存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0处可导, 并称此极限为

$y = f(x)$ 在点 x_0的导数. 记作:

$$y'\Big|_{x=x_0}; \quad f'(x_0); \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}; \quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

即 $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

运动质点的位置函数 $s = f(t)$

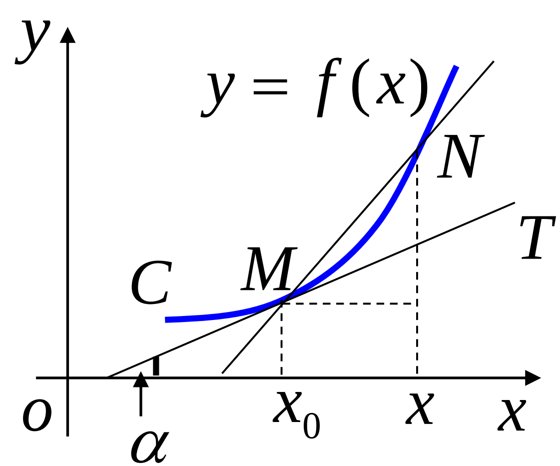


在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



说明：在经济学中，边际成本率，

边际劳动生产率和边际税率等

从数学角度看就是导数.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta y=f(x)-f(x_0)\\ \Delta x=x-x_0\end{gathered}}$$

若上述极限不存在，就说函数在点 x_0 不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$， 也称 $f(x)$在 x_0 的导数为无穷大.

若函数在开区间 I 内每点都可导，就称函数在 I 内可导.

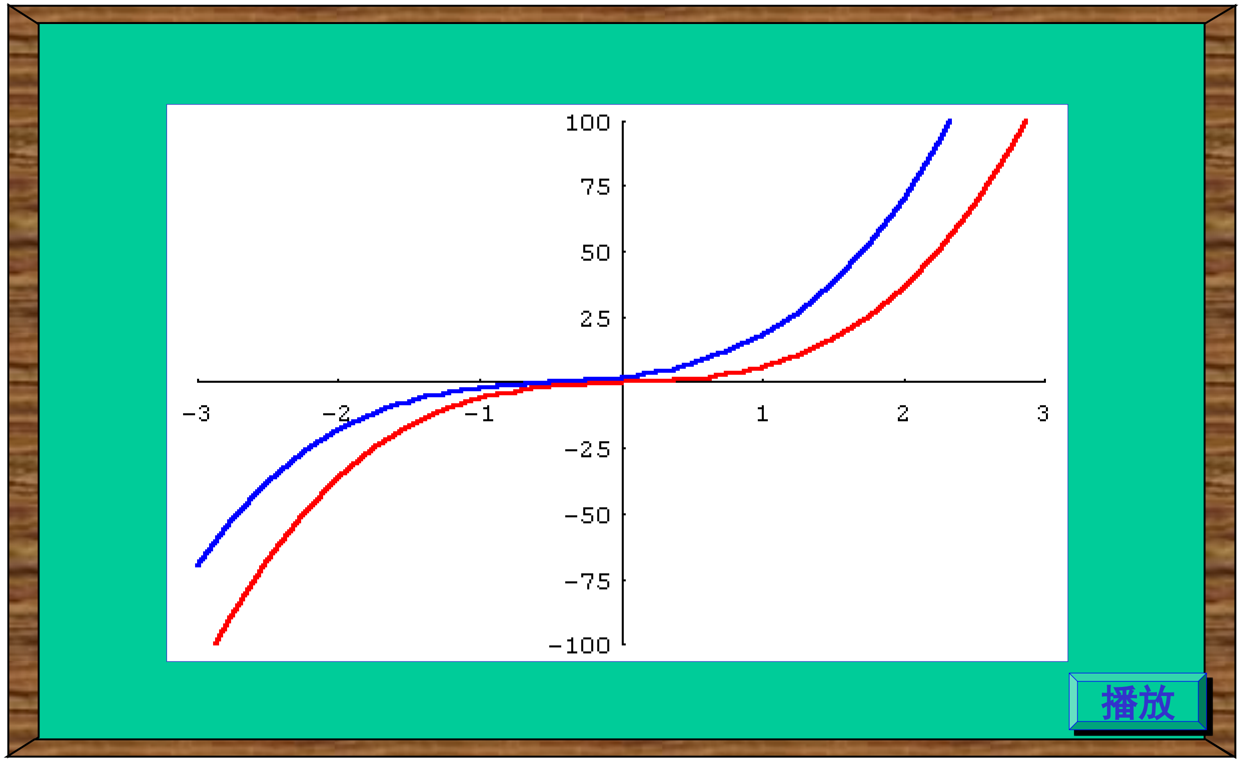
此时导数值构成的新函数称为导函数.

记作: y'; $f'(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

即 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

注意: $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}\neq\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

导函数(瞬时变化率)是函数平均变化率的逼近函数.



2 求导数举例

例1. 求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0.$

即 $\boxed{(C)'=0}$

例2. 求函数 $f(x)=x^n\ (n\in N^+)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$=na^{n-1}.$$

说明：

对一般幂函数 $y = x^{\mu}$（μ 为常数）

$$\boxed{(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}}$$

（以后将证明）

例如：$(\sqrt[4]{x})' = (x^{\frac{1}{4}})' = \dfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$ $x \neq 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = \frac{-3}{4} x^{-\frac{7}{4}}, \quad x \neq 0$$

例3. 求函数 $f(x)=\cos x$的导数.

解 令 $h=\Delta x$，则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\Big/h\right)$$

$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x$$

即 $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$

类似可证得 $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$

例4 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即 $\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.}$ $\boxed{(e^x)'=e^x.}$

例5 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h\ln a}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}}{h\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

即

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.}\qquad\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$$

例6 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

证 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在,

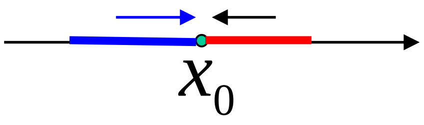
即 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

3 单侧导数

定义2 设函数 $y=f(x)$ 在点x_0 的某个右（左）邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$(\Delta x\to 0^-)\qquad\qquad(\Delta x\to 0^-)$$

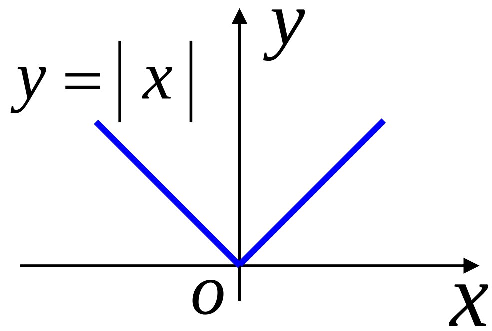


存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的右（左）导数，记作

$f'_+(x_0)$ $\quad(f'_-(x_0))\quad$ 即

$$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}_{-}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处有



见例6 $f'_+(0)=+1$， $f'_-(0)=-1$

定理1 函数 $y=f(x)$在点 x_0 **可导**的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$与 $f'_-(x_0)$存在，且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

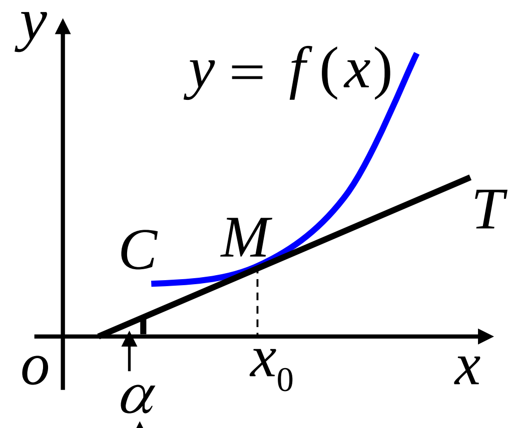
简写为 $\boxed{f'(x_0) \text{ 存在} \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0).}$

若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内可导， 且 $f'_+(a)$与 $f'_-(b)$ 都存在， 则称 $f(x)$ 在**闭区间$[a,b]$上可导**.

三、导数的几何意义

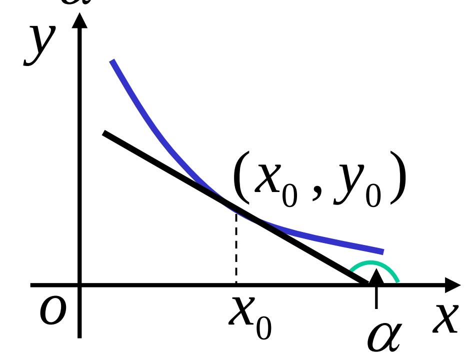
曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0\ , y_0)$ 的切线斜率为

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$



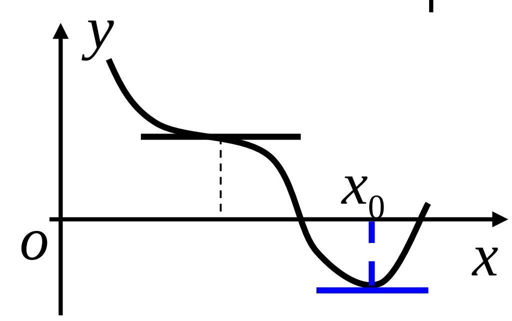
若 $f'(x_0) > 0$， 曲线过 $(x_0\ , y_0)$ 上升;

若 $f'(x_0) < 0$，曲线过 $(x_0\ , y_0)$ 下降;

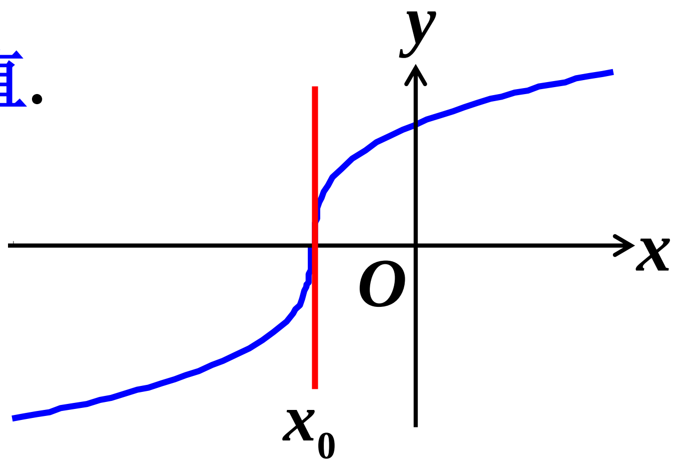


若 $f'(x_0) = 0$，切线与 x 轴平行,

x_0 称为 $f(x)$ 的**驻点**;



若 $f'(x_0)=\infty$, 切线与 x 轴垂直.



切线方程: $x = x_0$

当 $f'(x_0)\neq\infty$ 时，曲线在点 (x_0, y_0) 处的

切线方程: $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$

法线方程: $\boxed{y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0)\neq 0)}$

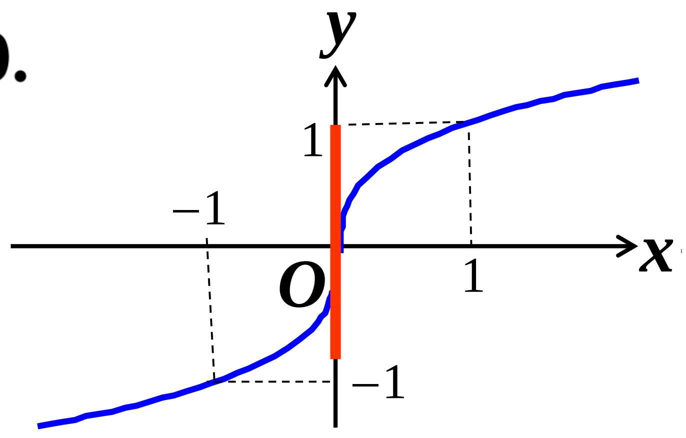
例7. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有垂直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解 $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\therefore\ y'\big|_{x=0}=\infty$,

故在原点 $(0,0)$ 有垂直切线 $x=0$.

令 $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$，得 $x=\pm1$,

对应 $y=\pm1$.

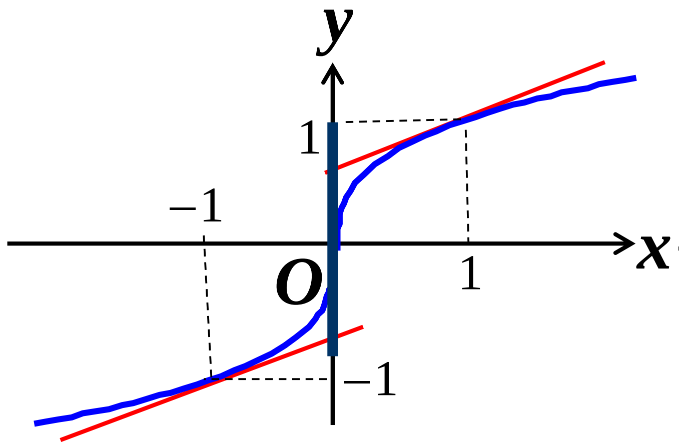


则在点(1, 1)，（－1，－1)处与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$

平行的切线方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$

即 $$x-3y\pm 2=0.$$



四、 函数的可导性与连续性的关系

定理2 $f(x)$在点x处可导 $\longrightarrow$ $f(x)$在点x处连续

证 设 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

存在 ，因此必有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha，\quad 其中 \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0,$$

故

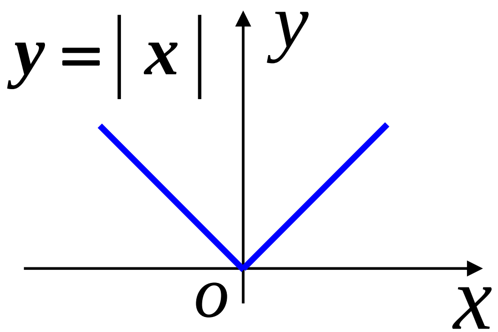
$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\,\Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0.$$

所以函数 $y = f(x)$ 在点 x 连续.

注意: 函数在点 x 连续未必可导.

如: $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续,

但在 $x=0$ 处不可导.



定理3 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右（左）导数存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 必右(左) 连续.

显然, $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上可导

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$ 上连续.

五、内容小结

1. 导数的实质：增量比的极限；

2. $f'(x_0)=a \iff f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$

3. 导数的几何意义：切线的斜率；

4. 可导必连续，　但连续不一定可导；

5. 已学求导公式 ：

$$(C)'=0;\quad (x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1};\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (\sin x)'=\cos x;\quad (\cos x)'=-\sin x;$$

$$(a^x)'=a^x\ln a;\quad (e^x)'=e^x.$$

6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续，　一定不可导.} \\ \text{直接用导数定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases}$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系 ？

区别: $f'(x)$是函数 ， $f'(x_0)$是数值;

联系: $f'(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = \underline{\quad -f'(x_0) \quad}.$$

3. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=k_0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \underline{\quad k_0 \quad}$.

4. 若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 可导?

解：由题设 $f(0)=0$

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f'(0)=0$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ a x, & x\geq 0\end{cases}$，问 a 取何值时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $x=0$ 连续.

$$\underline{f'_-(0)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}\underline{=1}$$

$$\underline{f'_+(0)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-0}{x-0}\underline{=a}$$

故 $a=1$ 时，$f'(0)=1$，此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在,

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

六、作业

习题2-1

A：2（单），4（双），5（单），

6（双），7，13

例题

1. 设 $f'(x)$存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，求 $f'(1)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

所以　$f'(1)=-2.$

2. 设 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，证明：$f(x)$在 $x=0$ 处可导.

证： 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续， 则

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$$

所以 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.