

# 命题逻辑的推理理论

## 3.1 推理的形式结构



# 推理的形式结构

---

若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ 是重言式

记作 $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$

**前提：**  $A_1, A_2, \dots, A_n$

**结论：**  $B$ ，称 $B$ 为**有效结论**。

**推理正确（有效）。**



# 推理的形式结构

---

## ■ 推理的形式结构：

前提： $A_1, A_2, \dots, A_n$

结论： $B$

## ■ 判断 $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$ 是否成立，即判断 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots A_n) \rightarrow B$ 是否为重言式。



# 判断方法

---

1. 真值表法
2. 等值演算法
3. 主析取范式法
4. 分析法：若设前提为T时，结论也为T，则推理正确；或设结论为F时，前提也为F，则推理正确。



# 推理定律

---

重要的重言蕴涵式，称作**推理定律**，  
其中A、B、C表示任意的命题公  
式：

1. 附加律： $A \Rightarrow A \vee B$

2. 化简律： $A \wedge B \Rightarrow A$

3. 假言推理： $A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$

4. 拒取式： $\neg B \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow \neg A$

5. 析取三段论： $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$

6. 假言三段论： $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

7. 等价三段论： $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

8. 构造性二难：

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

9. 破坏性二难：

$$(\neg B \vee \neg D) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$



## 等值式和重言蕴涵式的关系

**定理3.1** 设A、B是任意两个命题公式，  
 $A \Leftrightarrow B$ 的充分必要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 。

**证明：**

$$A \Leftrightarrow B;$$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow 1 \text{ 且 } B \rightarrow A \Leftrightarrow 1;$$

以前的等值式可当作两个重言蕴涵式使用(举例)。

## 3. 2 自然推理系统P





# 自然推理系统P

---

- 推理中命题变量较多时，前4种方法演算量大，为此引入命题逻辑的推理理论。
- 推理：在形式系统(符号系统)中进行。
- 形式系统
  - 自然推理系统
  - 公理推理系统



# 自然推理系统

---

从任意给定的前提(公式集)出发，  
应用系统中的推理规则进行推理  
演算，最后得出结论——有效结  
论。



# 自然推理系统 $P$

**定义3.2** 自然推理系统 $P$ 定义如下：

## 1. 字母表

- (1) 命题变量符号： $p, q, r, \dots, p_i, q_j, r_k, \dots$
- (2) 联结词符号： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (3) 括号与逗号： $(, ), ,$

## 2. 合式公式

字母表中的符号按一定规则构成的合式公式的集合，定义同前。

### 3. 推理规则

- 1) **前提引入规则(P规则)**: 在证明的任何步骤上, 都可引入前提。
- 2) **结论引入规则(T规则)**: 在证明的任何步骤上, 所证明的**结论**都可以作为后续证明的前提, 在后续证明中引用。
- 3) **置换规则**: 在证明的任何步骤上, 命题公式的子公式都可以用与它等值的其它命题公式置换。
- 4) **合取引入规则**:  $A, B \Rightarrow A \wedge B$ , 若证明的公式序列中已出现A和B, 则可将 $A \wedge B$ 引入序列中作为后续证明的前提。

根据9条推理定律及合取引入规则、结论引入规则，可得下面推理规则，

5) **假言推理规则(分离规则)**:  $A \rightarrow B, A \Rightarrow B$

6) **附加规则**:  $A \Rightarrow A \vee B$

7) **化简规则**:  $A \wedge B \Rightarrow A$

8) **拒取式规则**:  $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$

9) **假言三段论**:  $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$

10) **析取三段论规则**:  $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$

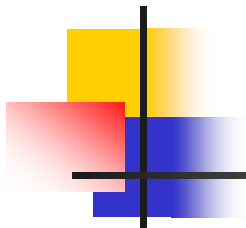
11) **构造性二难规则**:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$$

12) **破坏性二难规则**:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D \Rightarrow \neg A \vee \neg C$$





# 变化

以上A、B、C表示任意的命题公式：

$$\blacksquare \neg p \Rightarrow p \rightarrow q$$

$$\blacksquare \neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$$



# 证明推理正确(结论有效)的方法

---

1. 直接证法
2. 附加前提证明法
3. 反证法 (归谬法)



# 直接证法

由一组**前提**,  
利用一些公认的**推理规则**,  
根据已知的**等值式**或**重言蕴涵式**,  
推演得到**有效结论**。

**例.**在自然推理系统 $P$ 中构造下列推理的证明

(1)  $p \vee q, p \rightarrow \neg r, s \rightarrow t, \neg s \rightarrow r, \neg t \Rightarrow q$

(2)  $p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q, r \vee s, s \rightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$





# 附加前提证明法

---

## CP规则：

欲证 $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow A \rightarrow B$ 成立,  
通过证明 $A_1, A_2, \dots, A_n, A \Rightarrow B$ 成立,  
证得原推理正确。



# 归谬法

---

欲证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 成立，  
将结论取反作为前提，通过证  
明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ 为矛盾式，证得  
原推理正确。



## 习题讲解

---

1. 证明 $r \wedge (p \vee q)$ 是前提 $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$ 的结论。

2. 前提: $\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q$   
结论: $t \rightarrow r \wedge s$

**3. 符号化下面语句的推理过程，并指出推理是否正确。**

**“如果甲是冠军，则乙或丙将得亚军；如果乙得亚军，则甲不能得冠军；如果丁得亚军，丙不能得亚军；事实是甲得冠军。可知丁不能得亚军”。**

**要求：**两种方法证明。

# 第四章 一阶逻辑基本概念



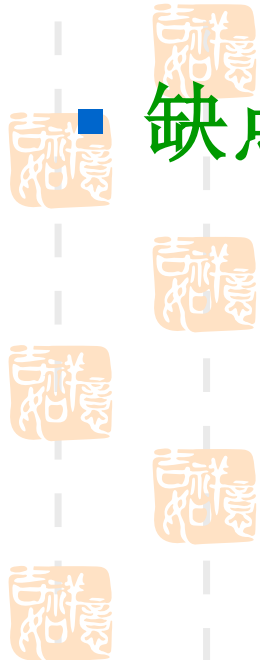
# 引言



- 命题逻辑中：

- **原子命题**是命题演算中最基本的单位，不再对原子命题进行分解。

缺点：



# 引言

**例：**苏格拉底论证是正确的，但不能用命题逻辑的推理规则验证结论的有效性。

$p$ : 所有的人总是要死的。

$q$ : 苏格拉底是人。

$r$ : 所以苏格拉底是要死的。

本章介绍的谓词逻辑，对原子命题进行了再分，引入了个体词、谓词、量词、谓词公式等概念。

## 4. 1 一阶逻辑命题符号化





# 个体词和谓词



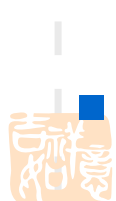
- 在谓词逻辑中，可将原子命题分解为**谓词**与**个体词**两部分。

➤ 如“苏格拉底”、“张三”是个体词，“...是要死的”是谓词。

■ **个体词**：命题中所描述的对象。

➤ 如李明，自然数，计算机，思想等。

➤ 可以是具体的，也可以是抽象的。



# 个体词和谓词

**谓词**：用于刻划个体的**性质**或个体之间**关系**。

**例**，(1)李明**是学生**。

$P(a)$

(2)张亮**比**陈华**高**。

$Q(b,c)$

(3)陈华**坐在**张亮**与**李明**之间**。

$R(c,b,a)$

个体词：**a**:李明，**b**: 张亮，**c**: 陈华

谓词：**P**: “...是学生”，

**Q**: “...比...高”，

**R**: “...坐在...与...之间”。

通常，用**大写字母**表示谓词，

**小写字母**表示个体词。如，

上述**命题**可分别表示为：

# 个体词和谓词

一般地，由 $n$ 个个体词和一个谓词所组成的命题可表示为 $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

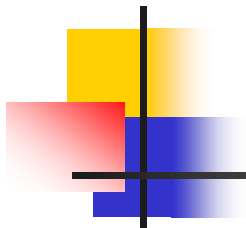
**注意：**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的排列次序是重要的。

**例，**  $a$ : 武汉;  $b$ : 北京;  $c$ : 广州

$P$ : ...位于...和...之间

$P(a, b, c)$  : 武汉位于北京和广州之间。

**说明：**  $P(a, b, c)$  是真，但  $P(b, a, c)$  是假，是两个不同的命题。



# 作业

---

14(1)~(5)

15

16

18