第四章 一阶逻辑基本概念

引言

- 命题逻辑中：
  - **原子命题**是命题演算中最基本的单位，不再对原子命题进行分解。
- **缺点**：
  - 无法研究命题的**内部结构**；
  - 无法表达命题之间的**内在联系**和**数量关系**；
  - 无法处理一些简单又常见的**推理过程**。

引言

例：苏格拉底论证是正确的，但不能用命题逻辑的推理规则验证结论的有效性。

p：所有的人总是要死的。

q：苏格拉底是人。

r：所以苏格拉底是要死的。

不能判定$p \wedge q \Rightarrow r$ 。

谓词逻辑：对原子命题进行了再分，引入**个体词**、**谓词**、**量词**等概念。

4．1 一阶逻辑命题符号化

个体词和谓词

- 在谓词逻辑中，可将原子命题分解为**谓词**与**个体词**两部分。
  - 如“苏格拉底”、“张三”是个体词，“…是要死的”是谓词。
- **个体词**：命题中所描述的对象。
  - 如李明，自然数，计算机，思想等。
  - 可以是具体的，也可以是抽象的。

个体词和谓词

谓词：用于刻划个体的**性质**或个体之间**关系**。

例，(1)李明是学生。 P(a)

(2)张亮比陈华高。 Q(b,c)

(3)陈华坐在张亮与李明之间。 R(c,b,a)

个体词：a:李明，b: 张亮，c: 陈华

谓词：P: “…是学生”，

Q:“…比…高”，

R: “…坐在…与…之间”。

通常，用**大写字母**表示谓词，

小写字母表示个体词。如，

上述**命题**可分别表示为：

个体词和谓词

一般地，由n个个体词和一个谓词所组成的**命题**可表示为$P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

注意：$a_1,a_2,\ldots,a_n$的排列次序是重要的。

例，a:武汉; b:北京; c:广州

P：…位于…和…之间

P(a,b,c)：武汉位于北京和广州之间。

说明：P(a,b,c)是真，但P(b,a,c)是假，是两个不同的命题。

个体词和谓词

- **个体常量**：表示具体的或特定的个体。一般用小写字母a,b,c,…表示。
- **个体变量**：表示不确定的个体，泛指。常用x,y,z…表示。
- **谓词常量**：表示特定的谓词，表示具体的性质和关系。
- **谓词变量**：表示不确定的谓词，泛指。

个体词和谓词

例．设H表示谓词：“…能够到达山顶。”

个体词：w:王红；t:老虎；c:汽车，则

H(w)：王红能够到达山顶。

H(t)：老虎能够到达山顶。

H(c)：汽车能够到达山顶。

这里w,t,c均是**个体常量**，H为**谓词常量**。

H(x)：x能够到达山顶。x是不确定的，是**个体变量**。

个体词和谓词

例．L(x,y,z)表示“x+y=z”，其中x,y,z为个体变量，

L为谓词常量。

L(3,2,5)表示命题“3+2=5”。真

L(1,2,4)表示命题“1+2=4”。假

个体词和谓词

定义：含n(n≥1)个**个体变量**的谓词 $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，称为**n元谓词**或n元**简单命题函数**。

说明：n元谓词不是命题，

- 只有给谓词变量指定一个常量；
- 为所有个体变量指定具体的个体时，它才表示一个真值确定的命题。
- 如P为常量时，$P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$为命题。

$(P(x,y)\vee L(x,y,z))\rightarrow P(y,x)$是一**复合命题函数**。

个体词和谓词

0元谓词：不带个体变量的谓词

- 如F(a), G(a,b), $H(a_1,a_2,\ldots,a_n)$等
- 当F,G,H为谓词常量时，0元谓词是命题

例 将命题用0元谓词符号化，并讨论真值。

"如果5大于4，则4大于6"

令G(x,y)：x大于y，

a：4，b：5，c：6

G(b,a), G(a,c)是两个0元谓词、命题。

命题符号化为：$G(b,a)\rightarrow G(a,c)$，真值为**假**

个体域

个体域：在n元谓词(命题函数)中，个体变量的取值范围称为**个体域**。

例．P(x,y)：表示“2x+y=1”。

x,y的个体域为整数集；

x和y的取值不同，P(x,y)代表不同的命题。

如P(1,1)，真值__假___。

P(1,-1)，真值__真___。

量词

例，对于命题

“所有的正整数都是素数(质数) ” 和

“有些正整数是素数”

仅用个体词和谓词是很难表达的。

使用前面介绍的概念，仍不足以表达日常生活中的各种命题。

量词：在命题里表示数量的词。

全称量词

定义：把“所有的”，“每一个”，“对任何一个”，“一切”，“任意的”等称为**全称量词**。 ∀

符号化为：

∀x ：表示个体域中的每一个个体x。

例，所有的人都是要死的。

令D(x)：x 是要死的。

个体域：全体人的集合。 **真命题**

命题可表示为：∀xD(x)，是

全称量词

例，所有的正整数都是素数。

令 P(x)：x 是素数

个体域：正整数集

则命题可表示为$\forall x\, P(x)$，是**假命题**

全称量词

几种表达式的**读法**：

$\forall x P(x)$：“对所有的x，x是…”

$\forall x \neg P(x)$：“对所有x，x不是…”；

$\neg \forall x P(x)$：“并不是对所有的x，x是…”；

$\neg \forall x \neg P(x)$：“并不是所有的x，x不是…”。

存在量词

定义：把“**存在着**”，“**至少有一个**”，“**存在一些**”，“**对于一些**”，“**某个**”等称为**存在量词**。

符号化为：∃

∃x：表示个体域中存在个体x。

例，有些正整数是素数

令P(x)：x是素数。

个体域：正整数集

命题可表示为∃xP(x)，是**真命题**

存在量词

几种表达式的**读法**：

∃xP(x)：存在一个x，x是…；

∃x¬P(x)：存在一个x，x不是…；

¬∃xP(x)：不存在一个x，x是…；

¬∃x¬P(x)：不存在一个x，x不是…。

全总个体域与特性谓词

1. 含有量词的命题，**表达式的形式**与个体域有关。

例，“所有的正整数都是素数”

令P(x)：x是素数

1) 取个体域为**正整数集**，表达式为：$\forall x P(x)$

2) 取个体域为**实数集**，

还须令Q(x)：x是正整数

命题表达为：$\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$

全总个体域与特性谓词

2. 含有量词的命题，真值与个体域也有关。

例，“有些数是素数”

1) 取个体域为正整数集，则

表达式为 $\exists xP(x)$，是 真 命题。

2) 取个体域为无理数集，则

表达式为 $\exists xP(x)$，是 假 命题。

因此，为了方便，我们引入全总个体域的概念。

全总个体域与特性谓词

全总个体域：宇宙间的一切事物组成的个体域。

说明：

1) 后面的讨论中，除特殊说明外，均使用**全总个体域**。
2) 对个体变量的真正取值范围，用**特性谓词**加以限制。

全总个体域与特性谓词

例，(1)“所有的人都是要死的。”

(2)“有的人活百岁以上。”

1) 当x的个体域为**全体人组成的集合**时，符号化上述命题，

令D(x)：x是要死的。

则(1)表示为：$\forall x D(x)$

令G(x)：x活百岁以上。

则(2)表示为：$\exists x G(x)$

全总个体域与特性谓词

2) 当x的个体域为**全总个体域**时，必须引入一个**特性谓词**将人从全宇宙的一切事物中分离出来。

(1)对所有个体而言,如果它是人,则它是要死的。

(2)存在着个体，它是人并且它活百岁以上。

于是令$P(x)$：x是人，**特性谓词**。

(1)$\forall x(P(x)\rightarrow D(x))$ (2)$\exists x(P(x)\wedge G(x))$

将n元谓词转化为命题

个体域和谓词的含义确定后，

1. 将n元谓词如P(x)转化为命题，有2种方法：
   1) 将x取定一个值。如：P(4)，P(5)
   2) 将谓词量化。如：$\forall xP(x)$，$\exists xP(x)$

使用量词注意事项

1. 在不同的个体域中， 命题符号化的形式可能不一样 。
2. 如果事先没有给出个体域， 都应以**全总个体域**为个体域。
3. 在引入特性谓词后， 使用全称量词与存在量词符号化的形式是不同的。

使用量词注意事项

例：每个自然数都是实数。

例：有的有理数是整数。

使用量词注意事项

4. 当个体域为**有限集**时，如$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，由量词的意义，有

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$$

$$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$$

A(x)为任意的谓词。

使用量词注意事项

5. 多个量词同时出现时，**不能随意颠倒它们的顺序**，颠倒后会改变原命题的含义。

命题符号化

例：没有不犯错误的人。

例：在北京工作的人未必都是北京人。

作业

- 习题四(P65)
  - 2，4