第十章　半群与群

积代数

定义 设$V_1=\langle S_1,\circ\rangle$，$V_2=\langle S_2,*\rangle$为半群(或独异点)，令$S=S_1\times S_2$，并定义S上的$\bullet$运算如下：

$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in S,\langle a,b\rangle\bullet\langle c,d\rangle=\langle a\circ c,b*d\rangle$

称$\langle S,\bullet\rangle$为V_1和V_2的**直积(积代数)**，记作$V_1\times V_2$。且$V_1\times V_2$也是半群(或独异点)。

说明 若V_1,V_2是独异点，单位元分别为e_1,e_2，则$V_1\times V_2$的单位元是$\langle e_1,e_2\rangle$。

1) 封闭的：$\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in S$,

$\langle a,b\rangle \bullet \langle c,d\rangle = \langle a \circ c, b*d\rangle \in S$

2) 可结合的： $\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in S$,

$(\langle a,b\rangle \bullet \langle c,d\rangle) \bullet \langle e,f\rangle$

$= \langle a \circ c, b*d\rangle \bullet \langle e,f\rangle$

$= \langle (a \circ c) \circ e, (b*d)*f\rangle$

$= \langle a \circ (c \circ e), b*(d*f)\rangle$

$= \langle a,b\rangle \bullet \langle c \circ e, d*f\rangle$

$= \langle a,b\rangle \bullet (\langle c,d\rangle \bullet \langle e,f\rangle)$

3) $\langle e_1,e_2\rangle$是$\bullet$的单位元： $\forall \langle a,b\rangle \in S$,

$\langle a,b\rangle \bullet \langle e_1,e_2\rangle = \langle a \circ e_1, b*e_2\rangle = \langle a,b\rangle$

$\langle e_1,e_2\rangle \bullet \langle a,b\rangle = \langle a,b\rangle$

10．2　群的定义与性质

群

定义 设<G,°>是代数系统，°为二元运算。如果

1. °运算是可结合的；
2. 存在单位元$e \in G$；
3. $\forall x \in G$，有$x^{-1} \in G$，

则称G为**群**。

群

1. $\langle Z,+\rangle,\langle Q,+\rangle,\langle R,+\rangle$是群；
2. $\langle N,\cdot\rangle$, $\langle Z,\cdot\rangle$, $\langle Q,\cdot\rangle$, $\langle R,\cdot\rangle$, $\langle R^*,\cdot\rangle$?
3. $\langle \Sigma^*,\circ,\lambda\rangle$不是群，其中Σ是有穷字母表，°表示连接运算。单位元是空串λ。除λ外，其它符号串没有逆元；
4. $\langle P(S),\oplus,\varnothing\rangle$是群，元素的逆元是自身。
5. $\langle Z_n,\oplus,0\rangle$是群，其中$Z_n$ ={0,1,…,n-1}，⊕表示模n加法。0的逆元是0 非0元素x的逆元是n-x。

群

6. $<M_n(R), +>$，$<M_n(R), \times>$?
7. $<A^A, \circ, I_A>$，$<P(S), \cup, \varnothing>$，$<P(S), \cap, S>$?

群

例 设G＝{e,a,b,c}，∘为G上的二元运算，定义由下面运算表给出。证明G是一个群。

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

1. ∘是可结合的
2. e是单位元
3. $\forall x \in G,\ x^{-1}=x$
4. ∘是可交换的

群

特点：a,b,c三个元素中，任何两个元素运算的结果都等于另一个元素。

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

一般称这个群为Klein四元群。

积代数

定义 设$<G_1,\circ>$，$<G_2,*>$为群，在$G_1\times G_2$上定义$\bullet$运算如下：

$\forall <a,b>,<c,d>\in G_1\times G_2$,

$<a,b>\bullet<c,d>=<a\circ c,b*d>$

称$<G_1\times G_2,\bullet>$为G_1和G_2的**直积(积代数)**，且它也是**群**。

$\forall <a,b>\in G_1\times G_2$, $<a,b>^{-1}=<a^{-1},b^{-1}>\in G_1\times G_2$

无限群与有限群

定义 若群G是有穷集，则称G为**有限群**，否则称G为**无限群**。对于有限群G，G中的**元素个数**也叫做G的**阶**，记作|G|。

例，

1. $\langle Z,+\rangle,\langle R,+\rangle$是_____。
2. $\langle Z_n,\oplus\rangle$是_____，其阶是____。
3. Klein四元群是_____，其阶是____。

平凡群

定义 只含单位元的群称为**平凡群**。

如，$\langle\{0\},+\rangle$, $\langle\{1\},\cdot\rangle$, $\langle\{\varnothing\},\cup\rangle$, $\langle\{I_A\},\circ\rangle$等。

平凡群的阶是1。

交换群

定义 若群G中的二元运算是可交换的，则称G为**交换群**或**阿贝尔(Abel)群**。

如，

1. $\langle Z,+\rangle,\langle Q,+\rangle,\langle R,+\rangle$
2. $\langle P(B),\oplus,\varnothing\rangle$
3. $\langle Z_n,\oplus,0\rangle$
4. Klein四元群是阿贝尔群。

元素的幂

定义 设G是群，$\forall a \in G$，则a的**n次幂**($n \in Z$)：

$$a^n = \begin{cases} e & n = 0 \\ a^{n-1}a & n > 0 \\ (a^{-1})^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

元素的幂

例,

1. $<Z_3,\oplus,0>$中,

   $2^{-3} = 0$

2. $<Z,+,0>$中,

   $2^{-3} = -6$

元素的阶

定义 设G是群，$a \in G$，使得等式

$$a^k = e$$

成立的**最小的正整数**k叫做a的**阶**(或**周期**)，

记作$|a|=k$，称a为**k阶元**；

如果不存在正整数k，使$a^k=e$，则称a为**无限阶元**。

任何群G中单位元e的阶都是

1，$|e|=1$。

元素的阶

例,

1. $<Z_6,\oplus,0>$中，求

   $|0|, |1|, |2|, |3|, |4|, |5|$?

2. $<Z,+,0>$中，求

   $|0|$, 其它?

作业（习题十）

- 5，9，15，16