第四节、不定积分的概念与性质

- 一、原函数与不定积分的概念
- 二、基本积分表
- 三、不定积分的性质
- 四、小结、思考题
- 五、作业

一、原函数与不定积分的概念

1.引例:

一个质量为 m 的质点, 在变力 $F = A\sin t$ 的作下沿直线运动 ,试求质点的运动速度 $v(t)$.

分析:

根据牛顿第二定律, 加速度 $a(t) = \frac{F}{m} = \frac{A}{m}\sin t$

因此问题转化为:

已知 $v'(t) = \frac{A}{m}\sin t$, 求 $v(t) = ?$

2.原函数的定义

定义 1． 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**.

例 $(\sin x)'=\cos x$　　$\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad (x>0)$$

$\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的原函数.

3.与原函数的有关的几个问题

(1). 在什么条件下, 一个函数的原函数存在 ?

(2). 原函数是否唯一?

(3). 若不唯一它们之间有什么联系?

(4). 若原函数存在, 它如何表示 ?

定理1. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数 .

简言之: <u>连续函数一定有原函数</u>.

定理2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数都在函数族 $F(x)+C$（C 为任意常数）内.

证: 1) $\because (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

$\therefore F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数

2) 设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，即

$$\Phi'(x) = f(x)$$

又知 $$F'(x) = f(x)$$

$$\therefore \quad [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

故 $\Phi(x) = F(x) + C_0$ （C_0 为某个常数）

即 $\Phi(x) = F(x) + C_0$ 属于函数族 $F(x)+C$.

4.不定积分的定义

定义2. $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体称为$f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中

$\int$ — 积分号; $f(x)$ — 被积函数;

x — 积分变量; $f(x)\mathrm{d}x$ — 被积表达式.

$\int$: 拉长的s (summation).

若 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (\,C\text{ 为任意常数}\,)$$

C 称为积分常数

求不定积分的步骤：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

例如：

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

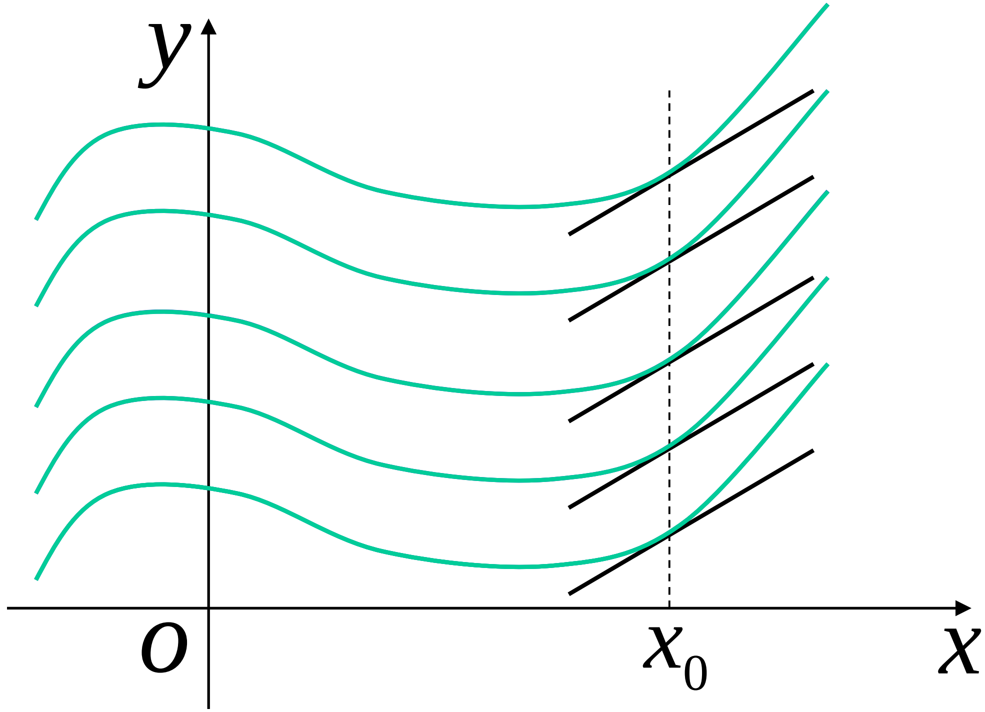
$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

5.不定积分的几何意义

$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形——— $f(x)$ 的所有积分曲线组成

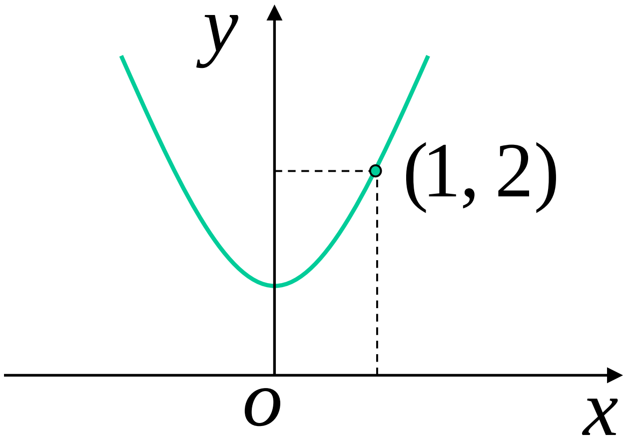
的平行曲线族.



例1. 设曲线通过点(1 , 2) , 且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解: $\because \quad y' = 2x$

$$\therefore \quad y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$



所求曲线过点 (1 , 2) , 故有

$$2 = 1^2 + C$$

$$\therefore \quad C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$

例2 求 $\int x^5 dx.$

解 $\because \left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5, \quad \therefore \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$

例3 求 $\int \frac{1}{1+x^2} dx.$

解 $\because \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

6.不定积分与导数的关系

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$$

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$$

(2) $$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

$$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$$

二、基本积分表

实例 $\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \Rightarrow \int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$

$(\mu \neq -1)$

启示　能否根据求导公式得出积分公式?

结论　既然积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

1.基本积分表

(1) $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$　　　(k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$　　$(\mu \neq -1)$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

说明: $x > 0,\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln|x| + C$

$x < 0$时

$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

$$(10)\quad \int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$(11)\quad \int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$(12)\quad \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$$(13)\quad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

$$(14)\quad \int \operatorname{sh} x \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$$

$$(15)\quad \int \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$$

例4 求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx.$

解 $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据积分公式（2）$\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

例5. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解: 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$

$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C$

例6. 求 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式$= \int \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C$

三、不定积分的性质

1. $\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

推论: 若 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\mathrm{d}x$$

例7. 求 $\int 2^x(e^x-5)\mathrm{d}x$.

解: 原式 = $\int [(2e)^x - 5\cdot 2^x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)} - 5\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$=2^x\left[\frac{e^x}{\ln 2+1}-\frac{5}{\ln 2}\right]+C$$

例8 求积分 $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$.

解 $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例9. 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C$$

例10 求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

解 $$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

例11. 求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$

$$= \tan x - x + C$$

例12 求积分$\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

解 $$\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan x + C.$$

例13. 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

说明: 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.

四、小结、思考题

内容小结

1. 不定积分的概念

- 原函数与不定积分的定义
- 不定积分的性质
- 基本积分表

2. 直接积分法:

利用恒等变形, 积分性质 及 基本积分公式进行积分 .

常用恒等变形方法 $\begin{cases} \text{分项积分} \\ \text{加项减项} \\ \text{利用三角公式，代数公式，}\cdots \end{cases}$

思考与练习

1. 证明 $\frac{1}{2}e^{2x}, e^{x}\,\mathrm{sh}\,x, e^{x}\,\mathrm{ch}\,x$ 都是 $\dfrac{e^{x}}{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}$ 的原函数.

提示: $\mathrm{ch}\,x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $\quad \mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

2. 若 e^{-x} 是 $f(x)$的原函数, 则

$$\int x^{2} f(\ln x)\,\mathrm{d}\,x= \underline{\quad -\frac{1}{2}x^{2}+C \quad}$$

提示: $f(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}$

$$f(\ln x)=-e^{-\ln x}=-\frac{1}{x}$$

3. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \underline{\quad \frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C \quad}$$

提示: 已知 $f'(x) = e^{-x}$

$$\therefore \quad f(x) = -e^{-x} + C_0$$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C_0$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$$

4. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是(B).

(A) $1+\sin x$;　　(B) $1-\sin x$;

(C) $1+\cos x$;　　(D) $1-\cos x$.

提示: 已知 $f'(x)=\sin x$

求 $(\ ?\ )'=f(x)$

即 $(\ ?\ )''=\sin x$

或由题意 $f(x)=-\cos x+C_1$，其原函数为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2$$

5. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

提示:

(1) $$\frac{1}{x^2(1+x^2)}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

(2) $$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x+\csc^2 x$$

6. 求不定积分 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

解:
$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int (e^{2x}-e^x+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$$

7. 已知 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = Ax\sqrt{1-x^2} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

求 A , B .

解: 等式两边对 x 求导, 得

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = A\sqrt{1-x^2} - \frac{Ax^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(A+B)-2Ax^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

五、作业