第一章、函数与极限

习题课

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、作业

一、主要内容

- （一）函数的定义
- （二）极限的概念
- （三）连续的概念

函 数
的定义

基本初等函数

复合函数

初等函数

双曲函数与
反双曲函数

反函数

隐函数

反函数与直接
函数之间关系

函 数
的性质

单值与多值

奇偶性

单调性

有界性

周期性

1、函数的定义

定义：设 $D \subset R$，函数为特殊的映射：

$$f : D \longrightarrow f(D) \subset R$$

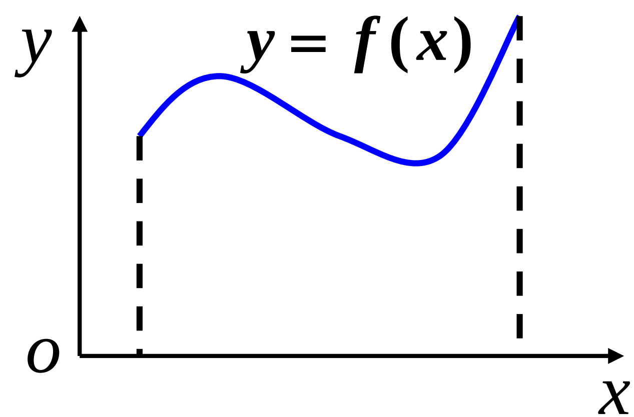
定义域　　　　值域

其中　$f(D) = \{ y \mid y = f(x), x \in D \}$

图形：

$$C = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D \}$$

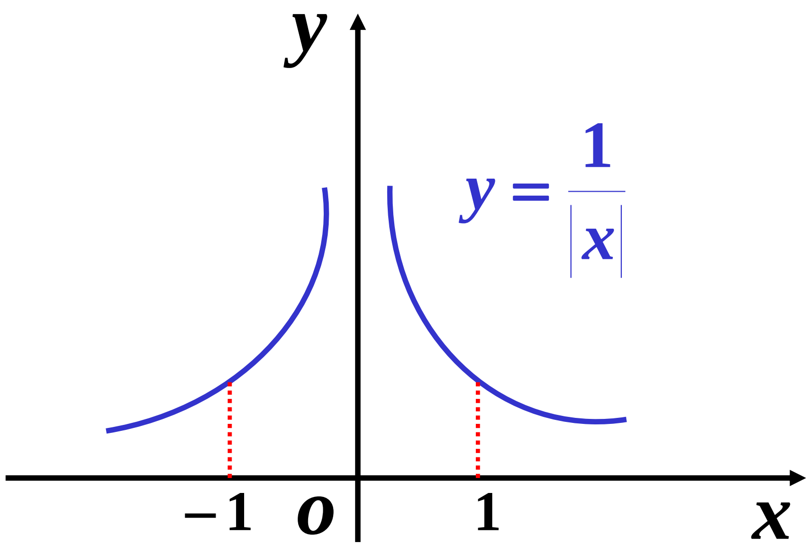
（ 一般为曲线 ）



2、函数的性质

(1) 函数的有界性:

设函数 $y = f(x), x \in D$，且数集 $X \subset D$．若$\exists M > 0$，使 $\forall x \in X$，$|f(x)| \le M$，称 $f(x)$在X上有界.



在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$上无界;

在$(-\infty,-1]$及$[1,+\infty)$上有界.

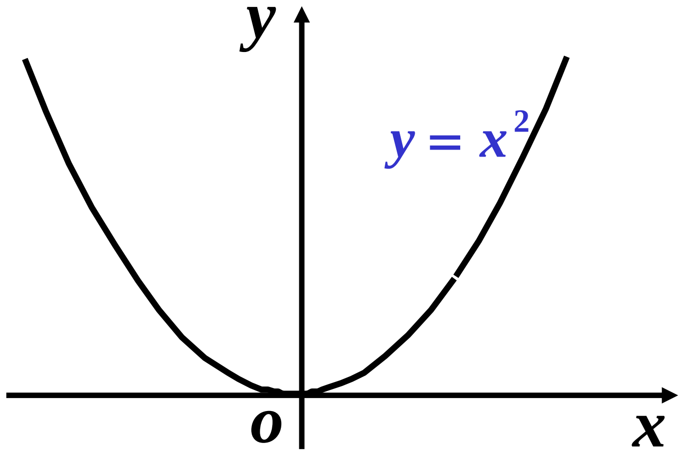
(2) 函数的单调性:

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且区间 $I \subset D$.

$\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的 单调增函数;

若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的单调减函数.



当 $x \le 0$ 时为减函数;

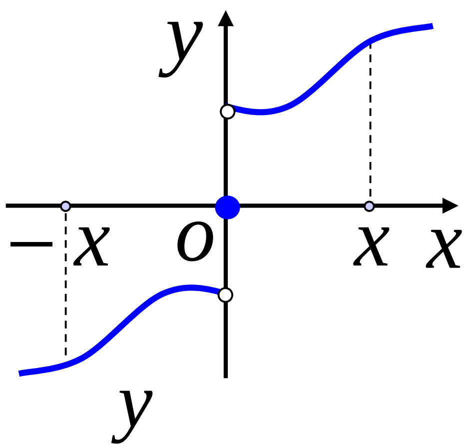
当 $x \ge 0$ 时为增函数;

(3) 函数的奇偶性:

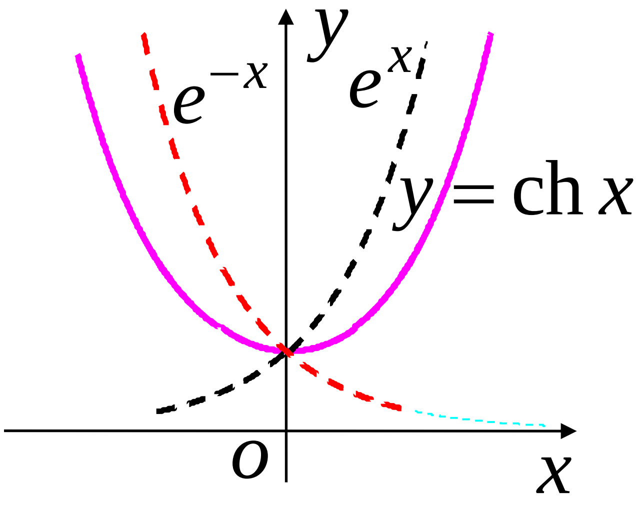
设函数 $f(x)$ 的定义域为D，且D关于原点对称，

若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.



奇函数



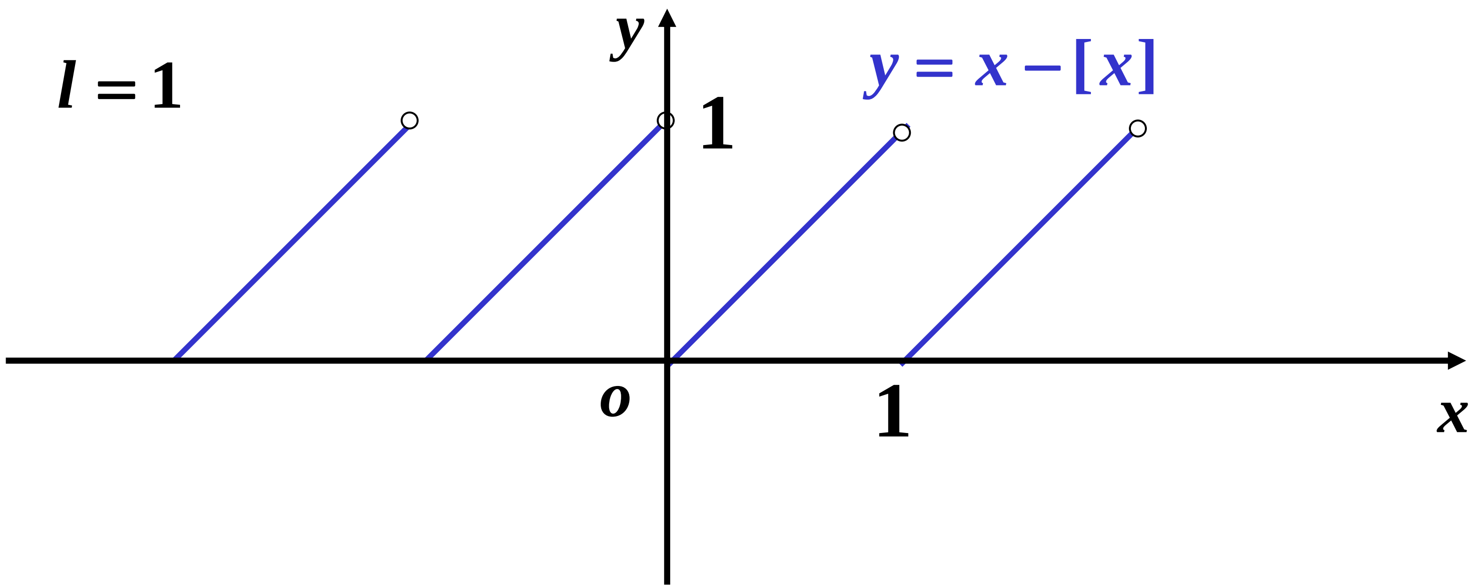
偶函数

(4) 函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为D, 若$\exists\, l>0, \forall\, x\in D, x\pm l\in D$,且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数 ,称l为周期(一般指最小正周期).



3、反函数

若函数 $f: D \to f(D)$

$$f^{-1}: f(D) \to D$$

称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数 .

习惯上, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

$$y = f^{-1}(x)\ , x \in f(D)$$

4、隐函数

由方程$F(x, y) = 0$所确定的函数

$y = f(x)$称为隐函数.

如 $y - x - \varepsilon e^{y} = 0$

5、反函数与直接函数之间的关系

设函数 $y=f(x),\ x\in D$ 的反函数为

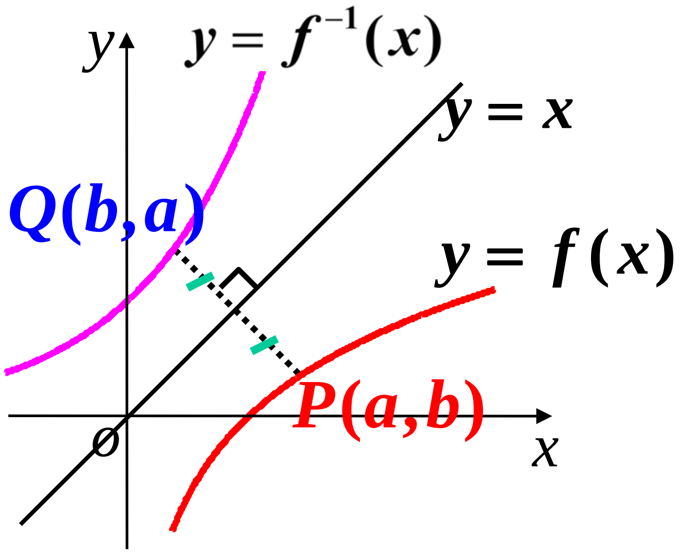
$$y=f^{-1}(x),x\in R_f$$

(1) $f(f^{-1}(x))\equiv x, x\in R_f$

$$f^{-1}(f(x))\equiv x, x\in D_f$$

(2) $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的

图形对称于直线$y=x$.



6、基本初等函数

1）幂函数 $y = x^{\mu}, \mu$为常数,

2）指数函数 $y = a^{x} \quad (a > 0, a \neq 1)$

3）对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$

4）三角函数 $y = \sin x, \quad y = \cos x$

$y = \tan x, \quad y = \cot x$

$y = \sec x, \quad y = \csc x$

5）反三角函数 $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x$

$y = \arctan x, \quad y = \text{arccot}\, x$

7、复合函数

设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_1 \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D, \quad \text{且 } g(D) \subset D_1 \qquad ②$$

则 $$y = f(g(x)), x \in D$$

称为由y=$f(u)$和u=$g(x)$ 构成的复合函数, u 称为中间变量.

8、初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

9、双曲函数与反双曲函数

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

双曲函数常用公式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

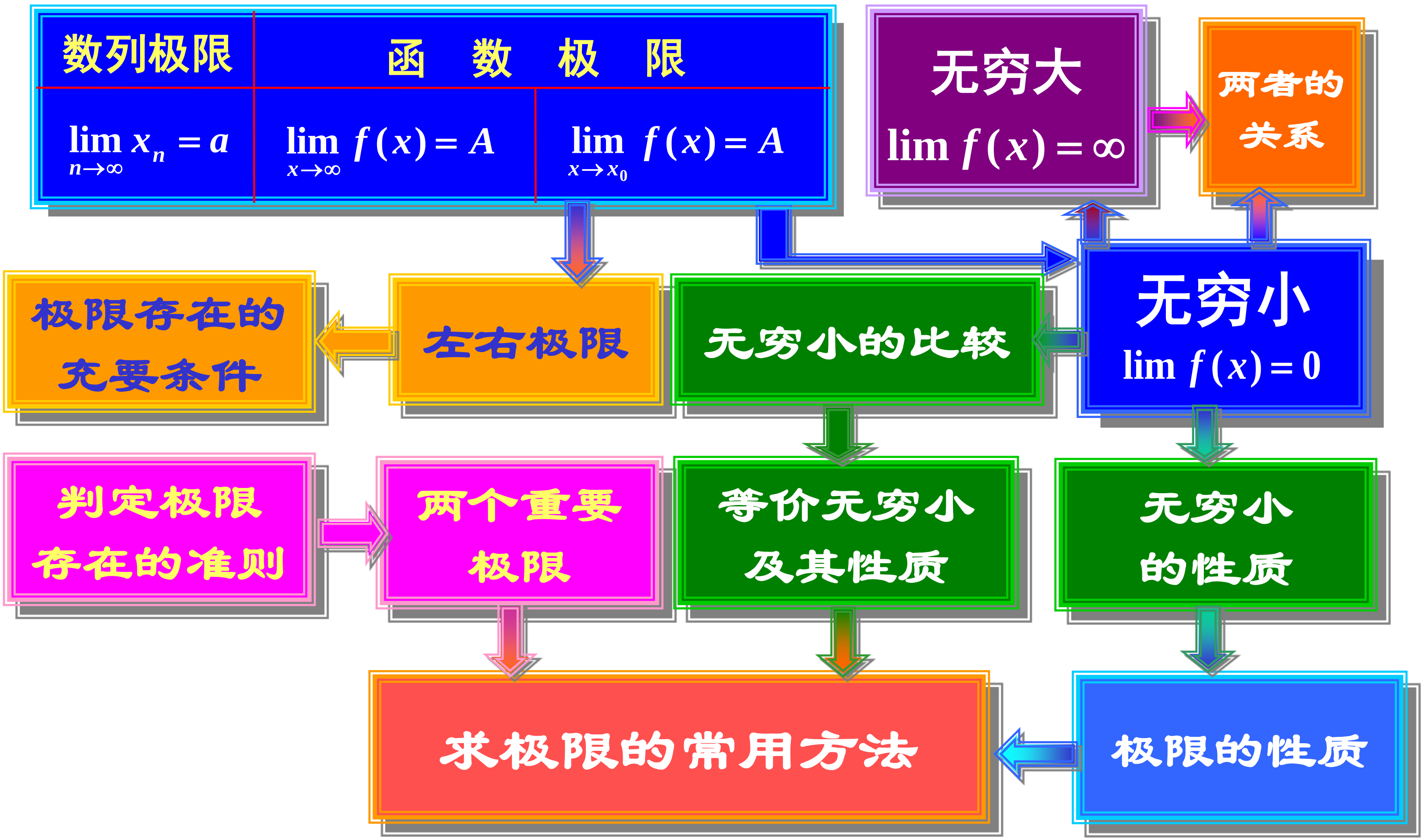
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$

反双曲余弦 $y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$

反双曲正切 $y = \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x};$


数列极限
函 数 极 限
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
无穷大
$\lim f(x) = \infty$
两者的关系
极限存在的充要条件
左右极限
无穷小的比较
无穷小
$\lim f(x) = 0$
判定极限存在的准则
两个重要极限
等价无穷小及其性质
无穷小的性质
求极限的常用方法
极限的性质

1、极限的定义

定义1 设$\{x_n\}$为一数列，若存在常数a，对任意 $\varepsilon > 0$ (无论多么小)，总存在正整数N，使得当 $n>N$时，都有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称a为数列$\{x_n\}$的极限，或称$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a\ (n \to \infty).$$

"$\varepsilon - N$" 定义

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall U(a,\varepsilon), \exists N \in N^+, \text{当}\, n>N\, \text{时},$$

$$\text{总有}\ x_n \in U(a,\varepsilon).$$

定义2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\,(当\, x\to x_0)$$

“$\varepsilon-\delta$” 定义

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 当\ x\in \mathring{U}(x_0,\delta)\ 时，有\ |f(x)-A|<\varepsilon}$$

左极限： $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,$ 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限： $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,$ 当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

2、无穷小与无穷大

无穷小：极限为零的变量称为无穷小.

记作

无穷大：绝对值无限增大的变量称为无穷大.

记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$）

无穷小与无穷大的关系

在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

无穷小的运算性质

定理1　在同一过程中，有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

定理2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1　在同一过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3、极限的性质

定理　若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

(1)　$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

(2)　$\lim\left(f(x)g(x)\right)=AB.$

(3)　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$　（$B\neq 0$）

推论1．$\lim[C f(x)]=C\lim f(x)$（ C 为常数 ）.

推论2　$\lim\left(f(x)\right)^{n}=\left(\lim f(x)\right)^{n}$（ n 为正整数 ）.

4、求极限的常用方法

a. 多项式与分式函数代入法求极限;

b. 消去零因子法求极限;

c. 利用两个重要极限求极限;

d. 利用无穷小运算性质求极限;

e. 利用左右极限求分段函数极限.

5、判定极限存在的准则

准则I 若当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ (或 $|x| > M$)时,有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在，且等于$A$. (夹逼准则)

准则II 单调有界数列必有极限.

6、两个重要极限

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$ $$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

(2) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$ $$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e.$$

7、无穷小的比较

定义　设α,β是自变量同一变化过程中的无穷小，

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$，则称 β 是关于α 的 k 阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$ 是α的等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$

或 $\beta\sim\alpha$

8、等价无穷小的性质

定理　设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

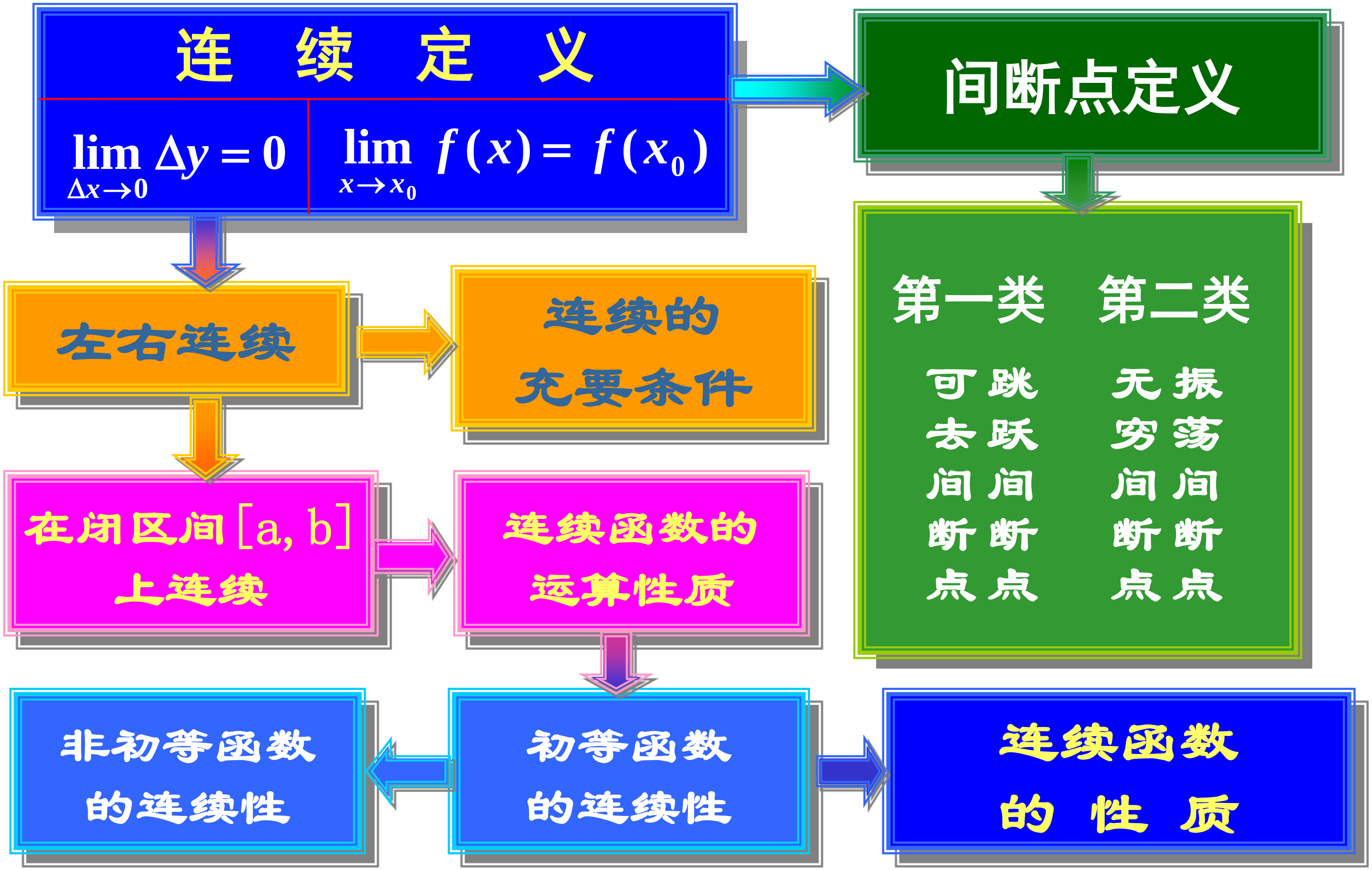
$\sin x \sim x$;　$\tan x \sim x$;　$e^x - 1 \sim x$;

$\arctan x \sim x$;　$\arcsin x \sim x$;　$\ln(1+x) \sim x$;

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $a^x - 1 \sim x \ln a$;　$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$;

9、极限的唯一性

定理　若 $\lim f(x)$ 存在，则极限唯一.



连 续 定 义
$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
间断点定义
左右连续
连续的充要条件
第一类
可去间断点
跳跃间断点
第二类
无穷间断点
振荡间断点
在闭区间[a, b]上连续
连续函数的运算性质
非初等函数的连续性
初等函数的连续性
连续函数的 性 质

1、连续的定义

定义1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在 x_0 连续.

定义2　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

2、单侧连续

左连续　$f(x_0^-)=f(x_0)$

右连续　$f(x_0^+)=f(x_0)$

3、连续的充要条件

定理 函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$

是函数 $f(x)$在 x_0处既左连续又右连续 .

4、间断点的定义

函数 $f(x)$ 在 x_0 连续必须具备下列条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(或间断)，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点(或间断点)。

5、间断点的分类

(1) 跳跃间断点

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 称 x_0为为函数 $f(x)$跳跃间断点.

(2)可去间断点

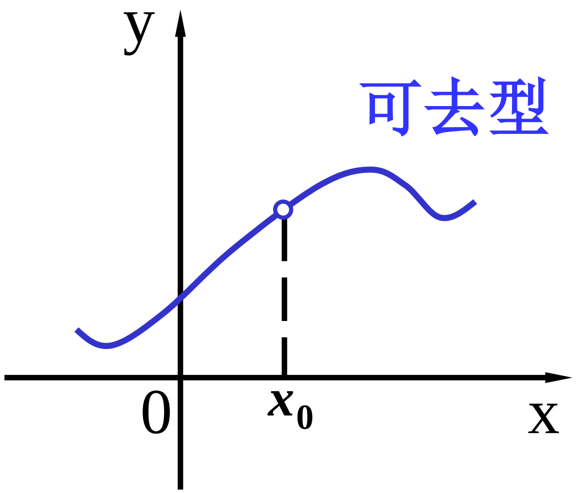
若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 称$x_0$

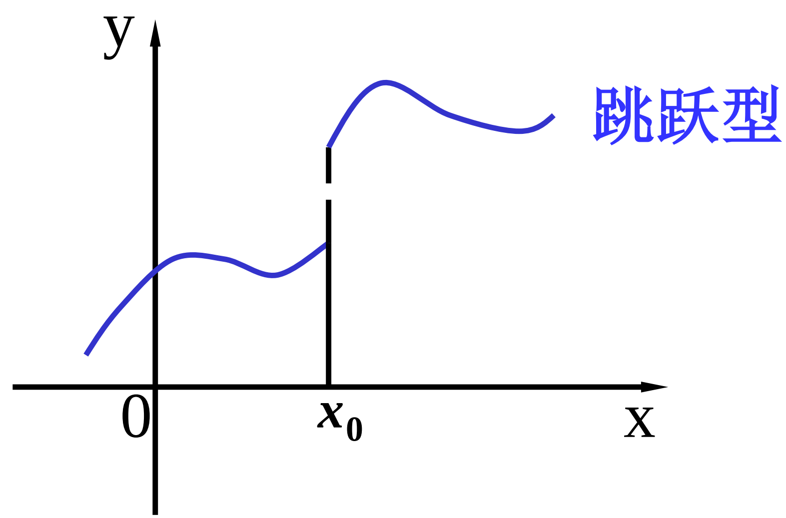
为函数 $f(x)$的可去间断点 .

跳跃间断点与可去间断点统称为**第一类间断点**.

特点: 函数在x_0处的左右极限都存在.

第一类间断点





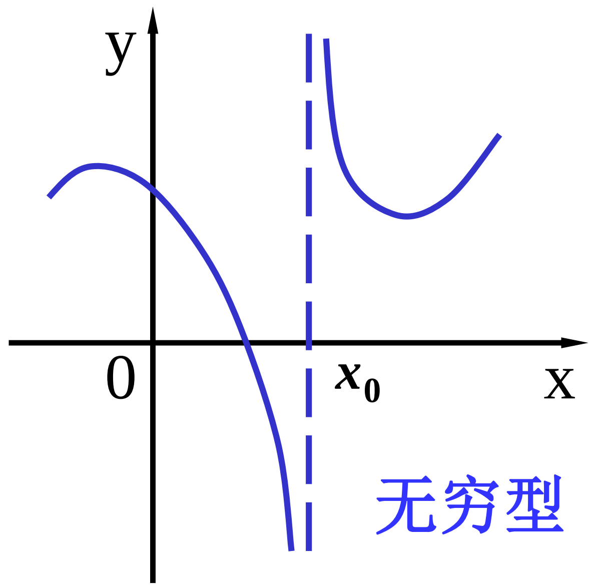
第二类间断点

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少一个不存在.

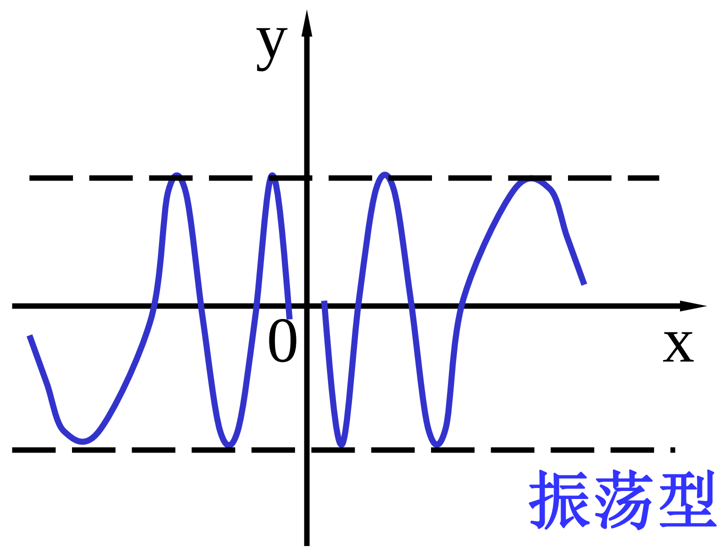
若其中有一个为 ∞，称 x_0 为无穷间断点 .

若其中有一个为振荡 ，称 x_0 为振荡间断点 .

第二类间断点



无穷型



振荡型

6、闭区间的连续性

若函数$f(x)$在开区间(a, b)内连续，并且在左端点$x=a$处右连续，在右端点$x=b$处左连续,则称函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续.

7、连续性的运算性质

定理 若函数$f(x), g(x)$在点x_0处连续,则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$$

在点x_0处也连续.

8、初等函数的连续性

定理1 单调的连续函数必有单调的连续反函数.

定理2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 函数 $f(u)$在点a连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

定理3 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续,且$\varphi(x_0)=u_0$,而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

定理4 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理5 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

9、闭区间上连续函数的性质

定理1(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理3. (零点定理) 若 $f(x)$ 闭区间 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$, 则至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)=0$.

定理4 (介值定理) 若 $f(x)$ 闭区间 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A \neq B$, 则对A与B之间的任一数C, 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

二、典型例题

例1 求函数 $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ 的定义域.

解 $16-x^2>0,$

$x-1>0,$

$x-1\neq 1,$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x|<4 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $1<x<2$及$2<x<4,$

即$(1,2)\cup(2,4).$

例2 当$|x|<1$时,求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 将分子、分母同乘以因子(1-x), 则

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}.\quad (\because 当|x|<1时,\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0.)$$

例3 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 $$\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+n\right)} < \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} < \frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+1\right)}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+n\right)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+1\right)}=\frac{1}{2},$$ 由夹逼准则得

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1\right)^n n\sin(\pi\sqrt{n^2+2})$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(\pi\sqrt{n^2+2}-n\pi)$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}$$

$$=\pi.$$

例5 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解

$$\text{原式} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0}\left(1+\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right)^{\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\cos x}\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{原式} = e^{\frac{1}{2}}.$$

例6 设$p(x)$是多项式,且$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=1$,求$p(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)-x^3}{x^2}=2,$

$\therefore$ 可设$p(x)=x^3+2x^2+ax+b$(其中a,b为待定系数)

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=1$, $\therefore p(x)=x^3+2x^2+ax+b \sim x \quad (x\to 0)$

从而得 $b=0, a=1.$ 故 $p(x)=x^3+2x^2+x.$

例7 讨论$f(x)=\begin{cases} |x-1|, & |x|>1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \end{cases}$的连续性.

解 将 $f(x)$ 改写成

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$$

显然 $f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$$

当$x=-1$时,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1-x)=2.$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0.$$

$\because \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, 故$x=-1$为$f(x)$的跳跃间断点.

当$x=1$时,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0=f(1)$$

故$f(x)$在$x=1$连续. $\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$内连续.

例8 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,且$f(0)=f(1)$,

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证法一 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x),\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

则 $F(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上连续.

倘若不存在$\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 使$F(\xi)=0$, 则在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上,

$F(x)>0$ (或$F(x)<0$). 不妨设$F(x)>0,\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 于是

$F(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)>0,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)>0,$

$\Rightarrow f(0)<f(1)$, 与已知矛盾, 原命题正确.

例8 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证法二 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x),\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

则 $F(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上连续. $\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$,

$$F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2}),$$

讨论: 若$F(0)=0$, 则 $\xi=0$, $f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若$F(\frac{1}{2})=0$, 则 $\xi=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

$$F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0),$$
$$F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2}),$$

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$, 则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2})=-\left(f(\frac{1}{2})-f(0)\right)^2<0.$$

由零点定理知, $\exists \xi \in (0,\frac{1}{2})$, 使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$成立.

综上所述, 必有一点$\xi \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\subset [0,1]$,

使 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$ 成立.

令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

例9 设 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，且对任意实数 x,y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明：$f(x)$ 对一切 x 都连续.

解 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$$

$$= f(x)+f(0)$$

$$= f(x+0) = f(x).$$

所以 $f(x)$ 在 x 连续.

例10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1.$$

$\Longrightarrow$ 原式 = 1.

三、作业

A:

测 验 题

一、 选择题：

1．函数 $y=\sqrt{1-x}+\arccos\frac{x+1}{2}$ 的定义域是（　）

(A) $x\le 1$；

(B) $-3\le x\le 1$；

(C) $(-3,1)$；

(D) $\{x|x<1\}\cap\{x|-3\le x\le 1\}$.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x-3, -4\le x\le 0\\ x^2+1, 0<x\le 3\end{cases}$ 的定义域是（　）

(A) $-4\le x\le 0$；

(B) $0<x\le 3$；

(C) $(-4,3)$；

(D) $\{x|-4\le x\le 0\}\cup\{x|0<x\le 3\}$.

3、函数 $y = x\cos x + \sin x$ 是（　）

(A)偶函数；　　　(B)奇函数；

(C)非奇非偶函数；(D)奇偶函数.

4、函数 $f(x) = 1 + \cos\frac{\pi}{2}x$ 的最小正周期是（　）

(A)2π；　　　(B)π；

(C) 4 ；　　　(D)$\frac{1}{2}$.

5、函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域为（　）

(A)有上界无下界；　　　(B)有下界无上界；

(C)有界，且 $\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$ ；

(D)有界，且 $-2 \le \frac{x}{1+x^2} \le 2$.

6、与 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 等价的函数是（　　）

（A） x；　　　　　（B） $(\sqrt{x})^2$；

（C） $(\sqrt[3]{x})^3$；　　　（D） $|x|$.

7、当 $x\to 0$时，下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小（　　）

（A）x^2；　　　　　（B）$1-\cos x$；

（C） $x-\tan x$；　　（D）$\ln(1+x)$.

8、设$a_0,b_0\neq 0$,则当（　　）时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots\dots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots\dots+b_n}=\frac{a_0}{b_0}\quad .$$

(A)$m>n$　；　　　(B)$m=n$　；

(C)$m<n$　；　　　(D)m,n任意取 .

9、设 $f(x)=\begin{cases} x-1,-1<x\le 0 \\ x,0<x\le 1 \end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$（　　）

(A)−1 ；　　　　(B)1 ；

(C)0 ；　　　　(D)不存在 .

10、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}=$ （　　）

(A)1；　　(B)−1；

(C)0；　　(D)不存在.

二、求下列函数的定义域：

1、$y=\sin(2x+1)+\arctan x$；

2、$\varphi(x)=\sqrt{\lg(\frac{9x-x^2)}{2}-1}$.

三、设 $g(x-1)=2x^2-3x-1$

（1）试确定 a,b,c 的值使

$$g(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$;

（2）求 $g(x+1)$ 的表达式 .

四、求 $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

五、求极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{(1-n)^2}$;

2、$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$;

3、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$;

4、$\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$;

5、当 $x \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ ；

6、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$.

六、 设有函数 $f(x)=\begin{cases}\sin ax, x<1\\ a(x-1)-1, x\geq 1\end{cases}$ 试确定a的值使 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续 .

七、 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi}{2}x}$的连续性，并判断其间断点的类型 .

八、证明奇次多项式：

$P(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1}$ $(a_0 \neq 0)$至少存在一个实根 .

测验题答案

一、1、B；　2、D；　3、B；　4、C；　5、C；

6、D；　7、C；　8、B；　9、D；　10、D；

二、1、$(-\infty,+\infty)$；　2、$[4,5]$.

三、$a=2, b=1, c=0, g(x+1)=2x^2+5x+3$.

四、$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, x>1\\ 0, x=0\\ -\sqrt{-(x+1)}, x<-1\end{cases}$.

五、1、2；　2、$\dfrac{1}{4}$；　3、e^2；　4、1；　5、$\dfrac{\sin x}{x}$；

6、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

六、$a=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$

七、$x=0$可去间断点，$x=1$跳跃间断点，

$x=2n(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$无穷间断点，

x为其它实数时$f(x)$连续.

思考与练习

1\. 下列各组函数是否相同 ？ 为什么?

(1) $f(x)=\cos(2\arccos x)$ 与 $\varphi(x)=2x^2-1,\ x\in[-1,1]$

相同

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le a \\ a, & x>a \end{cases}$ 与 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left[\,a+x-\sqrt{(a-x)^2}\,\right]$

相同

(3) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$ 与 $\varphi(x)=f[f(x)]$

相同

2. 下列各种关系式表示的 y 是否为 x 的函数? 为什么?

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x-1}}$　　不是

(2) $y=\max\{\sin x, \cos x\}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　是

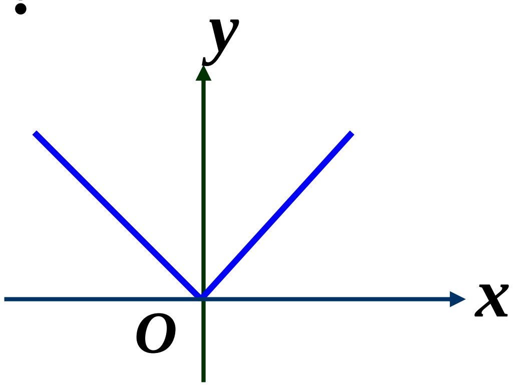
(3) $y=\arcsin u$, $u=2+x^2$　　不是

提示：(2) $y=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\\ \sin x, & \dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

3. 下列函数是否为初等函数？为什么？

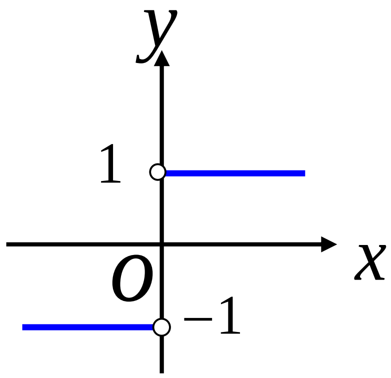
(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$=\sqrt{x^2}$



(2) $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

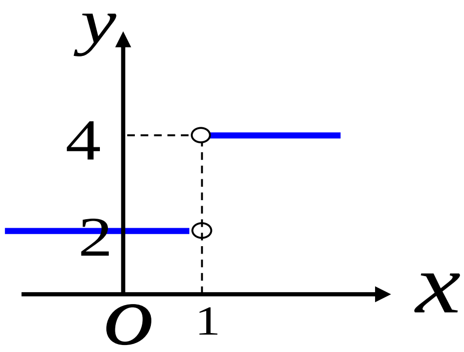
$=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x},\ \ x\neq 0$



$$(3)\ f(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 4, & x>1\end{cases}$$

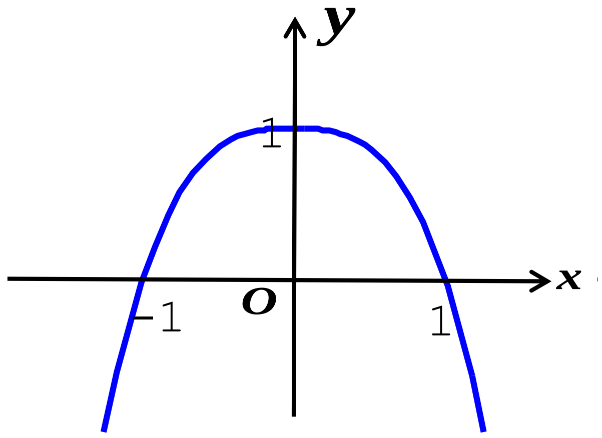
$$=3+\begin{cases}-1, & x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$=3+\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1},\ x\neq 1$$



$$(4)\ f(x)=\begin{cases}1-x^3, & x>0\\ 1+x^3, & x\leq 0\end{cases}$$

$$=1-\sqrt{x^6},\ x\in R$$



以上各函数都是初等函数.

4. 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域 .

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\geq 8 \\ f[f(x+5)], & x<8 \end{cases}$ ， 求 $f(5)$.

6. 设 $f(\sin x+\dfrac{1}{\sin x})=\csc^2 x-\cos^2 x$， 求 $f(x)$.

---

4. 解: $\because f(x)=e^{x^2}$ $\therefore f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$

由 $e^{\varphi^2(x)}=1-x,$

得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$， $x\in(-\infty,0]$

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\ge 8 \\ f[f(x+5)], & x<8 \end{cases}$，求 $f(5)$.

解: $f(5)=f[f(10)]=f(10-3)=f(7)=f[f(12)]$

$$=f(12-3)=f(9)=6$$

6. 设 $f(\sin x+\dfrac{1}{\sin x})=\csc^2 x-\cos^2 x$，求 $f(x)$.

解: $\because \quad f(\sin x+\frac{1}{\sin x})=\frac{1}{\sin^2 x}+\sin^2 x-1$

$$=(\sin x+\tfrac{1}{\sin x})^2-3$$

$\therefore \quad f(x)=x^2-3$