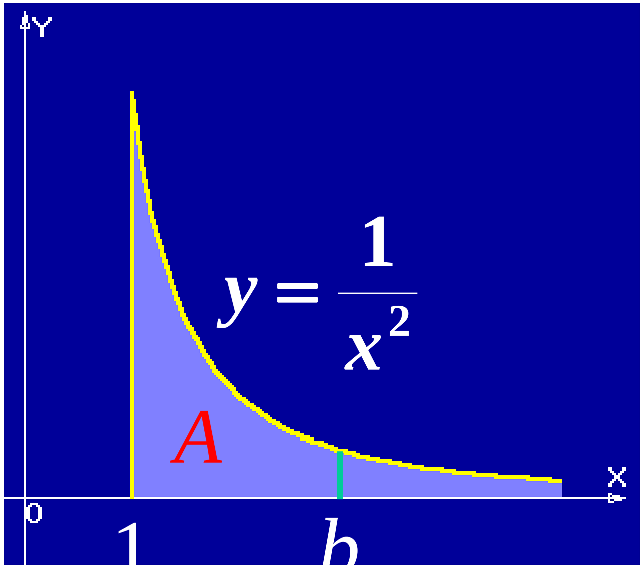
第八节、反常积分

- 一、无穷限的反常积分
- 二、无界函数的反常积分
- 三、小结、思考题
- 四、作业

一、无穷限的反常积分

引例: 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

定义1. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 取 $b>a$, 若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限反常积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；

如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地，若 $f(x)\in C(-\infty,b]$, 则定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

无穷限的反常积分也称为第一类反常积分.

注 上述定义中若出现 $\infty - \infty$，并非不定型，它表明该反常积分发散.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛－莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

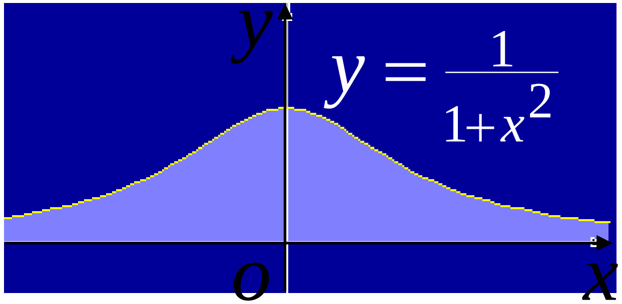
$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例1. 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \cancel{=} 0$$ 对吗?

分析: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注

•对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零” 的性质, 否则会出现错误 .

例2. 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；$p\le 1$ 时发散.

证: 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 反常积分收敛, 其值为 $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\le 1$ 时, 反常积分发散.

例3.计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} \mathrm{d}t \ (p>0)$.

解: 原式 $= -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

例4 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$

解 $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{\pi}{2}\right]=1.$$

例 5　证明广义积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

证　$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-px}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_a^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-pa}}{p}-\frac{e^{-pb}}{p}\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{-ap}}{p}, & p>0\\ \infty, & p<0\end{cases}$$

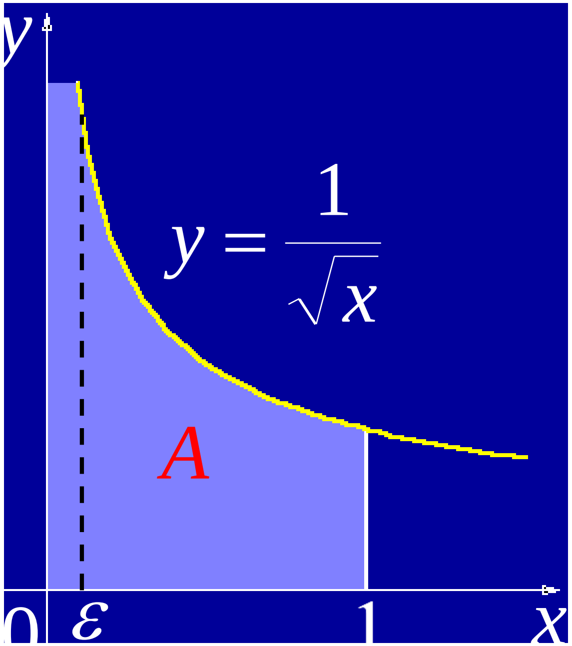
即当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

二、无界函数的反常积分

引例: 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的

开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义2.设 $f(x)\in C(a,b]$,而在点a的右邻域内无界,

取 $\varepsilon>0$,若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的反常积分,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

如果上述极限不存在,就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地,若 $f(x)\in C[a,b)$,而在b 的左邻域内无界,

则定义 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，而在点 c 的邻域内无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- •无界函数的积分又称作第二类反常积分，无界点常称为瑕点(奇点)．
- •若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点，则本质上是常义积分，而不是反常积分．

例如，$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的的计算表达式：

若 b 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a，b 都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

若瑕点 $c \in (a, b)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underbrace{- F(c^+) + F(c^-)}_{\text{可相消吗?}} - F(a)$$

例6 计算广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$

解 $\because \lim_{x\to a-0} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty,$

$\therefore x=a$ 为被积函数的无穷间断点. a为瑕点

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} - 0\right] = \frac{\pi}{2}.$$

例7. 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

下述解法是否正确:

$$\because \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \cancel{=} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1-1=-2\ ,\ \therefore \text{积分收敛}$$

解: $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1}=\infty$

所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例8. 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当$q<1$时收敛；$q\geq1$时发散．

证：当$q=1$时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当$q\neq1$时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当$q<1$时，该广义积分收敛，其值为 $\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$；

当$q\geq1$时，该广义积分发散．

例9. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

解: $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点, 故 I 为反常积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\arctan f(x)+C$$

$$=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

三、小结、思考题

内容小结

$$\textbf{1.}\ \text{反常积分}\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{array}\right\} \text{——} \ \text{常义积分的极限}$$

内容小结

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \le 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p > 1 \end{cases} \qquad (a > 0)$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1 \\ +\infty, & q \ge 1 \end{cases}$$

内容小结

3.有时通过换元,反常积分和常义积分可以互相转化.

例如,
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \qquad (令\ x=\sin t)$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \qquad (令\ t=x-\frac{1}{x})$$

内容小结

4.当一题同时含两类反常积分时，应划分积分区间，分别讨论每一区间上的反常积分.

四、作业

习题4-8：　1（单），2（单），4;

例8 计算广义积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

解 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x}$

$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln x)\right]_{1+\varepsilon}^2$

$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))\right]$

$= \infty.$ 故原广义积分发散.

例9 计算广义积分 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. $x=1$瑕点

解 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \left(\int_0^1 + \int_1^3\right)\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3\cdot\sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$