7．6 等价关系与划分

等价关系

定义　设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系。

如果$<x,y>\in R$，称x等价于y，记作$x\sim y$。

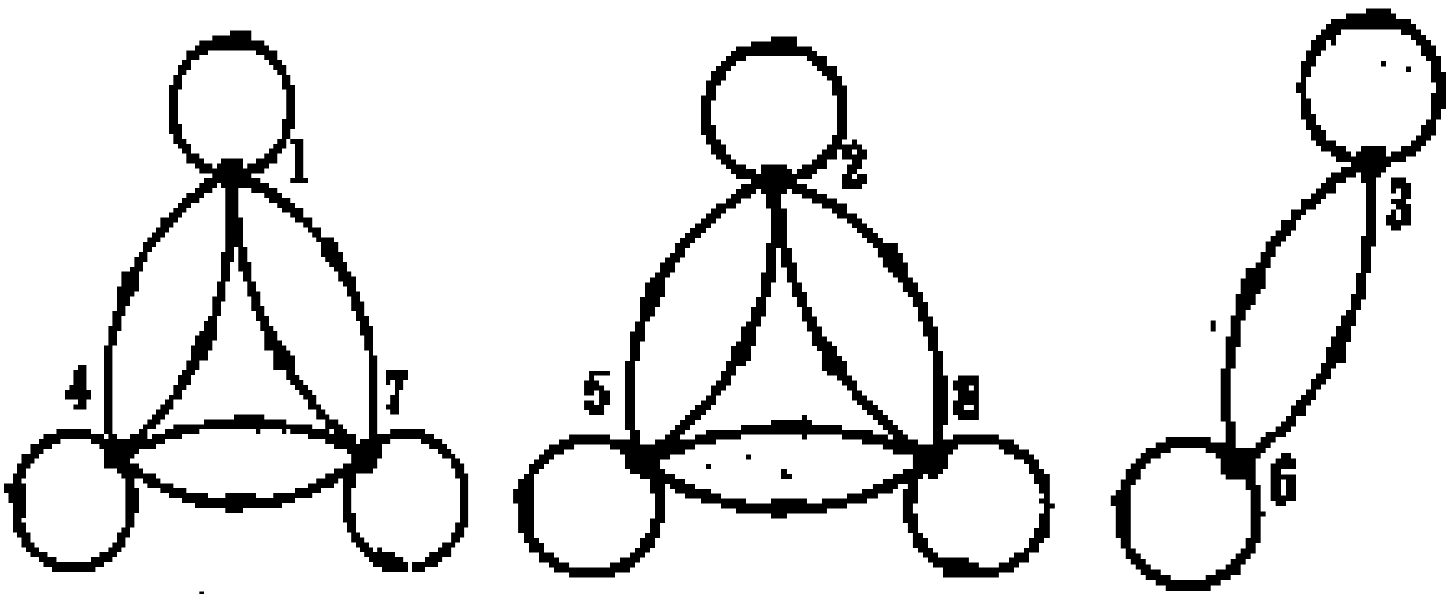
例：设$A=\{1,2,...,8\}$，A上的关系

$$R=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 3\}$$

$x\equiv y \pmod 3$：叫做x与y模3相等

即$x-y=3k$，$k\in Z$　余数相同

R为A上的等价关系，它的关系图如下所示，



其中1~4~7，2~5~8，3~6。

等价类

定义 设R是非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$,

令$[x]_R=\{y|y \in A \wedge xRy\}$

称$[x]_R$为x关于R的等价类，简称为x的等价类，简记为[x]或$\bar{x}$。

等价类

在上例中有：

$$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$$

$$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$$

$$[3]=[6]=\{3,6\}$$

等价类

例: $R=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge x\equiv y(\text{mod } n)\}$, n是正整数.

R为Z上的等价关系。

等价类(Z的子集, Z的分类):

余数为0: $nz, z\in Z$

余数为1: $nz+1, z\in Z$

……

余数为n-1: $nz+n-1, z\in Z$

构成了n个等价类, 记作

$[i]=\{nz+i|z\in Z\}, i=0,1,\ldots,n-1$

等价类的性质

定理　设R是非空集合A上的等价关系，则

(1) $\forall x\in A$，有$[x]\neq\varnothing$，且$[x]\subseteq A$(定义)；

(2) $\forall x,y\in A$，若xRy，则$[x]=[y]$；

(3) $\forall x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\notin R$，则$[x]\cap[y]=\varnothing$；

(4) $\bigcup\limits_{x\in A}[x]=A$　(定义)

商集

定义 设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类为元素构成的集合称为A关于R的**商集**，记作A/R，

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

上例中A关于R的商集是：

$$A/R=\{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

商集

例，设A为非空集合，A上的等价关系

(1) I_A

$\forall x \in A$，$[x]=\{x\}$, 由定义，

商集$A/I_A=\{\{x\}|x\in A\}$

(2) E_A

$\forall x \in A$，$[x]=A$,

商集$A/E_A=\{A\}$

商集

(3) 整数集合Z上模n相等的等价关系

等价类：$[i]=\{nz+i|z\in Z\}$, $i=0,1,\ldots,n-1$

商集$Z/R=\{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$

划分

定义 设A是非空集合，若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$满足以下条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$；

(2) $\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$：$\pi$中任意两个元素不交；

(3) $\bigcup\limits_{x\in\pi} x = A$：$\pi$中所有元素的并集等于A。

则称π为A的一个划分，且称π中的元素为A的划分块。

划分

例. 考虑集合A={a,b,c,d}的下列子集族是否为A的划分？

(1) {{a},{b,c},{d}}

(2) {{a,b,c,d}}

(3) {{a,b},{c},{a,d}}

(4) {∅,{a,b},{c,d}}

(5) {{a},{b,c}}

(6) {{a,{d}},{b,c}}

说明：商集A/R是A的一个划分。

商集的定义：$A/R=\{[x]_R | x \in A\}$

商集A/R是A的一个划分

如商集：$A/R=\{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$是A的一个划分。

说明：

"A的一个划分π确定一个等价关系R"

令$R=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$在π的同一划分块中$\}$

可证，R是等价关系。

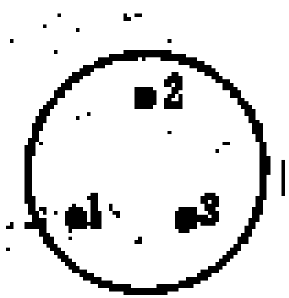
例 求出A={1,2,3}上所有的等价关系。

解：先求A的各种划分：只有1个划分块的划分π_1；

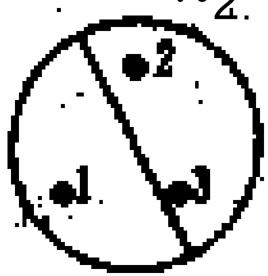
具有两个划分块的划分π_2，π_3和π_4；

具有3个划分块的划分π_5。

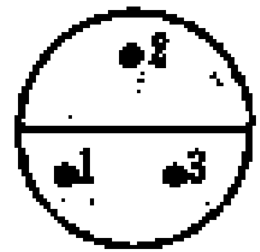
$\pi_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$ $\pi_3=\{\{2\},\{1,3\}\}$



π_1



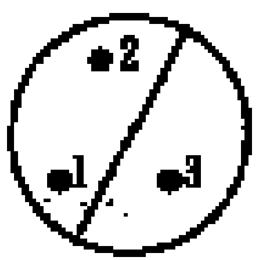
π_2



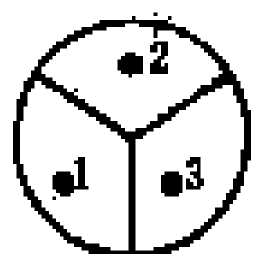
π_3

$\pi_1=\{\{1,2,3\}\}$

$\pi_4=\{\{1,2\},\{3\}\}$



π_4



π_5

$\pi_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

设对应于划分π_i的等价关系为R_i,(i=1,…,5),

则有

$R_1=\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}=E_A$ $\pi_1=\{\{1,2,3\}\}$

$R_2=\{1\}\times\{1\}\cup\{2,3\}\times\{2,3\}=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$

$R_3=\{2\}\times\{2\}\cup\{1,3\}\times\{1,3\}=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

$R_4=\{3\}\times\{3\}\cup\{1,2\}\times\{1,2\}=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

$R_5=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}=I_A$ $\pi_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

作业（习题七）

- 31，33
- 36
- 41
- 42