习题课

定积分及其相关问题

一、与定积分概念有关的问题的解法

二、有关定积分计算和证明的方法

一、与定积分概念有关的问题的解法

1. 用定积分概念与性质求极限

2. 用定积分性质估值

3. 与变限积分有关的问题

例1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

解: 因为 $x\in[0,1]$ 时，$0\le\frac{x^n e^x}{1+e^x}\le x^n$，所以

$$0\le\int_0^1\frac{x^n e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x\le\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$

利用夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x=0$

例2. 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解：将数列适当放大和缩小，以简化成积分和：

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\boxed{\frac{1}{k}}}<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

利用夹逼准则可知 $I=\dfrac{2}{\pi}$.

思考: $$J=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}{n+\frac{1}{n+1}}\right]=?$$

提示:由上题

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}$$

故 $$J=I-\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}{n+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{2}{\pi}-0+0=\frac{2}{\pi}$$

练习：1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

提示： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\le$ 原式 $\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}$

左边 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}=$ 右边

例3.估计下列积分值 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\mathrm{d}x$.

解: 因为 $\frac{1}{\sqrt{4}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in[0,1]$

∴ $$\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

即 $$\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{6}$$

例4. 证明 $\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,\mathrm{d}x \le 2e^2.$

证： 令 $f(x)=e^{x^2-x}$, 则 $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\dfrac{1}{2}$,

$$f(0)=1,\qquad f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt[4]{e}},\qquad f(2)=e^2$$

$$\therefore\quad \min_{[0,2]} f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\,,\qquad \max_{[0,2]} f(x)=e^2$$

故
$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,\mathrm{d}x \le 2e^2$$

例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的连续函数,试证明对于任何 $q\in[0,1]$ 都有不等式

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x \ge q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明: 显然 $q=0, q=1$ 时结论成立. 当 $0<q<1$ 时,

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x - q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (1-q)\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x - q\int_q^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$ (用积分中值定理)

$$= (1-q)\cdot q\cdot f(\xi_1) - q\cdot(1-q)\cdot f(\xi_2)$$

$\xi_1\in[0,q]$

$\xi_2\in[q,1]$

$$= q(1-q)[f(\xi_1)-f(\xi_2)] \ge 0$$

故所给不等式成立.

例6. 求可微函数 $f(x)$ 使满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$$

解: 等式两边对 x 求导, 得

$$2f(x)f'(x) = f(x)\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

不妨设 $f(x)\neq 0$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

$$\therefore\quad f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2+\cos x) + C$$

$$f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+C$$

注意 **$f(0)=0$,** 得 $C=\frac{1}{2}\ln 3$

$$\therefore\quad f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+\frac{1}{2}\ln 3$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2+\cos x}$$

例7. 已知 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续, $f(1)=3$, 且由方程

$$\int_1^{xy} f(t)\,\mathrm{d}\,t = x\int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}\,t + y\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

确定 y 是 x 的函数, 求 $f(x)$.

解: 方程两端对 x 求导, 得

$$f(xy)\cdot(y+xy') = \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}\,t + x\cdot f(y)\cdot y' + y'\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + y\cdot f(x)$$

令 $x=1$, 得 $f(y)y = \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + yf(1)$

再对 y 求导, 得 $f'(y) = \frac{1}{y}f(1) = \frac{3}{y} \Longrightarrow f(y) = 3\ln y + C$

令 $y=1$, 得 $C=3$, 故 $f(x) = 3\ln x + 3$

例8. 求多项式 $f(x)$ 使它满足方程

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t+\int_0^x f(t-1)\,\mathrm{d}t=x^3+2x$$

解: 令 $u=xt$, 则 $\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

代入原方程得 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+x\int_0^x f(t-1)\,\mathrm{d}t=x^4+2x^2$

两边求导: $f(x)+\int_0^x f(t-1)\,\mathrm{d}t+x\,f(x-1)=4x^3+4x$

再求导: $f'(x)+2f(x-1)+x\,f'(x-1)=12x^2+4$ ①

可见 $f(x)$ 应为二次多项式, 设 $f(x)=ax^2+bx+c$

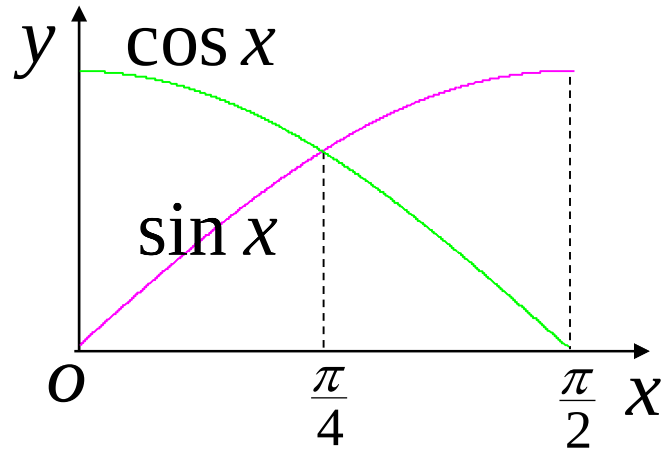
代入① 式比较同次幂系数, 得 $a=3, b=4, c=1.$

故 $f(x)=3x^2+4x+1$

二、有关定积分计算和证明的方法

1. 熟练运用定积分计算的常用公式和方法
2. 注意特殊形式定积分的计算
3. 利用各种积分技巧计算定积分
4. 有关定积分命题的证明方法

例9. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.



解: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$

$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2(\sqrt{2}-1)$

例10. 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $e^{-x}=\sin t$, 则 $x=-\ln\sin t$, $\mathrm{d}x=-\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\left[\ln\left|\csc t-\cot t\right|+\cos t\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例11. 选择一个常数 c , 使

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,\mathrm{d}x = 0$$

解: 令 $t = x + c$, 则

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} t\cos^{99} t\,\mathrm{d}t$$

因为被积函数为奇函数 , 故选择 c 使

$$a + c = -(b + c)$$

即

$$c = -\frac{a+b}{2}$$

可使原式为 0 .

例12. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}\,\mathrm{d}y$，求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{令 } u=(x-1)^2)$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}(x-1)^2$$

$$=\frac{e}{6}\int_0^1 u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u=-\frac{e}{6}(u+1)e^{-u}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(e-2)$$

例13. 证明恒等式

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

证: 令 $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$

则 $\quad f'(x) = 2x\sin x\cos x - 2x\sin x\cos x = 0$

因此 $f(x) = C \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 又

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

故所证等式成立 .

例14. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x) \neq 0$, 试证至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

分析: 要证 $\underline{g(\xi)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{f(\xi)}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

即 $\left[\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]'\Bigg|_{x=\xi} = 0$

故作辅助函数

$$F(x) = \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

证明：令

$$F(x)=\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

因 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b)内可导, 且 $F(a)=F(b)=0$, 故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$$

因在 $[a,b]$ 上 $g(x)$ 连续且不为**0**，从而不变号,因此

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$$

故所证等式成立 .

思考：本题能否用柯西中值定理证明？

如果能, 怎样设辅助函数?

要证:
$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \quad \xi \in (a,b)$$

提示：设辅助函数
$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

例15. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x)>0$. 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x)>0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ, 使

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 在 (a, b) 内存在与 ξ 相异的点 η, 使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证: (1) $\because \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在, $\therefore \lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a)=0$,

由 ***f*** **(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 知 *f* (*a*) = 0.** 又 $f'(x)>0$, 所以***f*** **(*x*)**

在**(*a*, *b*)**内单调增, 因此

$$f(x)> f(a)=0, \quad x\in(a,b)$$

(2) 设 $F(x)=x^2,\ g(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \ \ (a\le x\le b)$

则 $g'(x)= f(x)>0$, 故 $F(x),\ g(x)$**满足柯西中值定理条件,**

于是存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}=\left.\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'}\right|_{x=\xi}$$

即
$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 因 $f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$

在$[a,\xi]$上用拉格朗日中值定理

$$=f'(\eta)(\xi-a),\quad \eta\in(a,\xi)$$

代入(2)中结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

因此得
$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例16. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \ge (b-a)^2 \qquad ②$$

证: 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}-(x-a)^2$

则 $$F'(x)=f(x)\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}+\frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-2(x-a)$$

$$=\int_a^x\left[\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right]\mathrm{d}t=\int_a^x \frac{[f(x)-f(t)]^2}{f(x)f(t)}\,\mathrm{d}t$$

≥ 0 $\qquad$ $x>a,\ f(x)>0$

故 $F(x)$ 单调不减，$\therefore F(b)\ge F(a)=0$，即② 成立.

作业：

例17. 若 $f(x)\in C[0,1]$，**试证：**

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

解: 令 $t=\pi-x$, 则

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\,f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} t\,f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

因为

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

对右端第二个积分令 $t = \pi - x$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

综上所述

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$