# 第六节、函数的连续性与间断点

- 一、函数连续性
- 二、连续函数的运算法则
- 三、函数的间断点
- 四、闭区间上连续函数的性质

# 一、函数连续性的定义

定义　设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在 $x_0$ 连续.

可见，函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续必须具备下列条件：

(1)　$f(x)$在点 $x_0$ 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

(2)　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3)　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

对自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$, 有函数值的增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

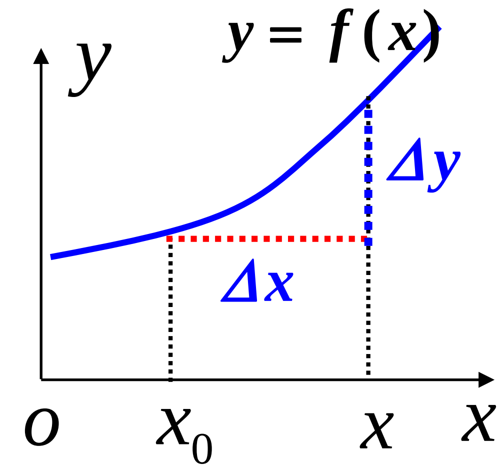
函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续有下列等价命题:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \rightleftarrows \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$\rightleftarrows \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

$$\rightleftarrows \underbrace{f(x_0^-) = f(x_0)}_{\text{左连续}} = f(x_0^+)$$

（$f(x_0) = f(x_0^+)$：右连续）




$$\rightleftarrows \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

当 $|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon.$$

函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处既左连续又右连续.

上页 下页 返回

若 $f(x)$ 在某区间上每一点都连续, 则称它在该区间上连续， 或称它为该区间上的连续函数 .

在闭区间 $[a\,,b]$ 上的连续函数的集合记作 $C[a,b]$.

例如 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ( 有理整函数 )

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续 .

又如, 有理分式函数 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

在其定义域内连续.

$\forall x_0 \in (-\infty,+\infty)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

只要 $Q(x_0) \neq 0$, 都有 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$

continue

**例1** 证明函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

**证** $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$|\Delta y|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|$$

$$\le 2\frac{|\Delta x|}{2}\cdot 1=|\Delta x|\xrightarrow{\Delta x\to 0}0$$

$|\sin x|<|x|,\ x\ne 0$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

这说明 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

同样可证: 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

**例2** 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

**证** $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

## 二、连续函数的运算法则

**定理1.** 在某点连续的有限个函数经有限次和,差,积,商(分母不为 0)运算，结果仍是一个在该点连续的函数.

( 利用极限的四则运算法则证明)

例如 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$内连续

$\Longrightarrow$ $\tan x, \cot x$ 在其定义域内连续

**定理2.** 连续单调递增 (递减) 函数的反函数 也连续单调递增 (递减). (证明略)

例如 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$上连续单调递增,

其反函数 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也连续单调递增.

又如 $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$上连续单调递增,

其反函数 $y = \ln x$ 在$(0, +\infty)$ 上也连续单调递增.

定理3 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$, 函数 $f(u)$在点$a$连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)]$.

证 $\because$ $f(u)$在点 $u = a$连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$,

使当 $|u - a| < \eta$时, 恒有$|f(u) - f(a)| < \varepsilon$成立.

又$\because$ $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$, 对于$\eta > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,

恒有$|\varphi(x) - a| = |u - a| < \eta$成立. 于是 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$$|f(u) - f(a)| = |f[\varphi(x)] - f(a)| < \varepsilon .$$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)]$.

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

意义　1.极限符号可以与函数符号互换;

2. 变量代换$(u=\varphi(x))$的理论依据.

例3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$

即 $\ln(1+x) \sim x \quad (x\to 0).$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$.

解 原式 $\xlongequal{\text{令 } e^{x}-1=y} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = 1.$

同理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x} = \ln a.$

即 $e^{x}-1 \sim x \ (x\to 0).$ $a^{x}-1 \sim x\ln a \ (x\to 0).$

**定理4** 连续函数的复合函数是连续的.

**证** 设函数 $u=\phi(x)$ 在点 $x_0$ 连续，且 $\phi(x_0)=u_0$.

函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0$ 连续，即 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$.

于是 $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(\phi(x)\big)=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f\big(\phi(x_0)\big)$

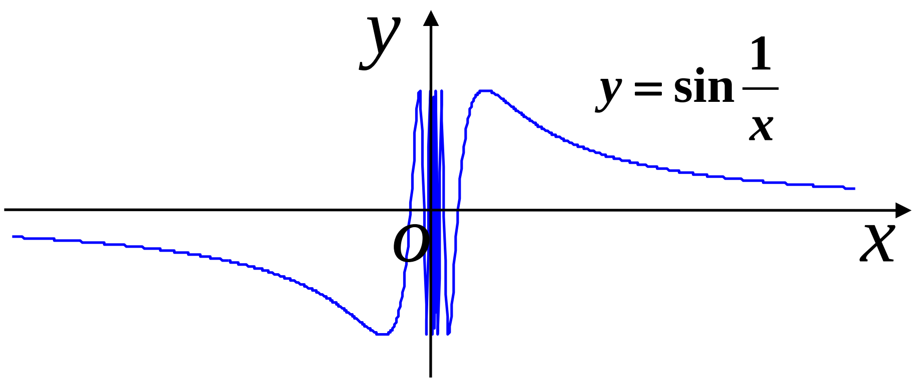
故复合函数 $f\big(\phi(x)\big)$ 在点 $x_0$ 连续.

**注意** 定理4是定理3的特殊情况.

例如 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 是由连续函数链

$$y=\sin u,\quad u\in(-\infty,+\infty),\qquad u=\frac{1}{x},\quad x\in R^{*}$$

复合而成，因此 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in R^{*}$ 上连续.



**例5** 设 $f(x)$与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$上连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},$$
$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\},$$

也在 $[a,b]$ 上连续.

**证** $\because$ $$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$

根据连续函数运算法则, 可知 $\varphi(x),\psi(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续.

## 初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

一切初等函数在定义区间内连续

例如

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$（端点为单侧连续）

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi),\ n\in Z$

而 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2n\pi,\ n\in Z$

因此它无连续点.

**例6** 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^{6}.$$

**说明** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0\,(u(x)\neq 1)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$,则有

□ $\lim\limits_{x\to x_0}\big(u(x)\big)^{v(x)} = a^{b}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)}$$

$$= e^{b\ln a} = a^{b}$$

## 三、函数的间断点

设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某去心邻域内有定义，则下列情形之一函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 不连续：

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 无定义；

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 虽有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 虽有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

这样的点 $x_0$ 称为函数 $f(x)$ 间断点．

**间断点分类:**

**第一类间断点:**

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在,

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 称 $x_0$ 为可去间断点.

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$, 称 $x_0$ 为跳跃间断点.

**第二类间断点:**

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少一个不存在,

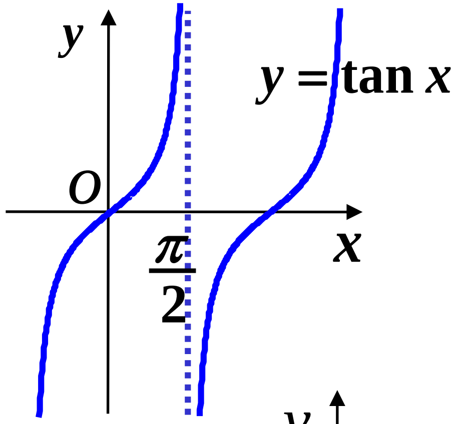
若其中有一个为 $\infty$, 称 $x_0$ 为无穷间断点.

若其中有一个为振荡, 称 $x_0$ 为振荡间断点.

例如

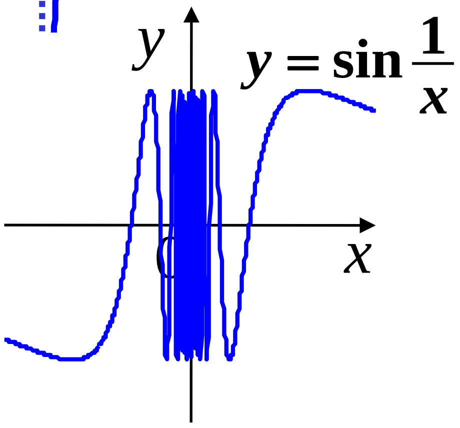
(1) $y = \tan x$

$x = \dfrac{\pi}{2}$为其无穷间断点.



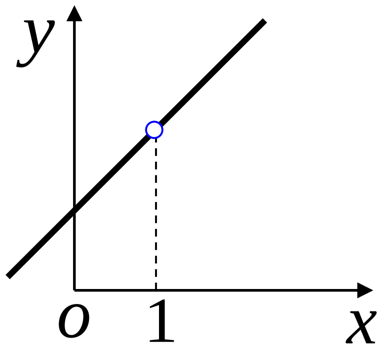

(2) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

$x = 0$为其振荡间断点.

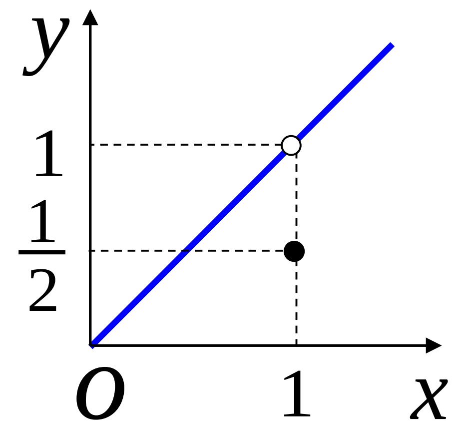



(3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

$x = 1$ 为可去间断点.



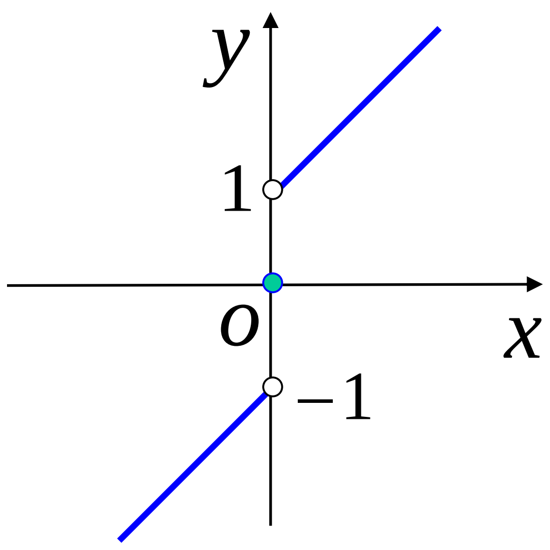
(4) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$




显然 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1).$

$x = 1$为其可去间断点.

(5) $y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$




$f(0^-) = -1, \quad f(0^+) = 1$

$x = 0$ 为其跳跃间断点 .

上页 下页 返回

★ 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

在定义域$R$内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

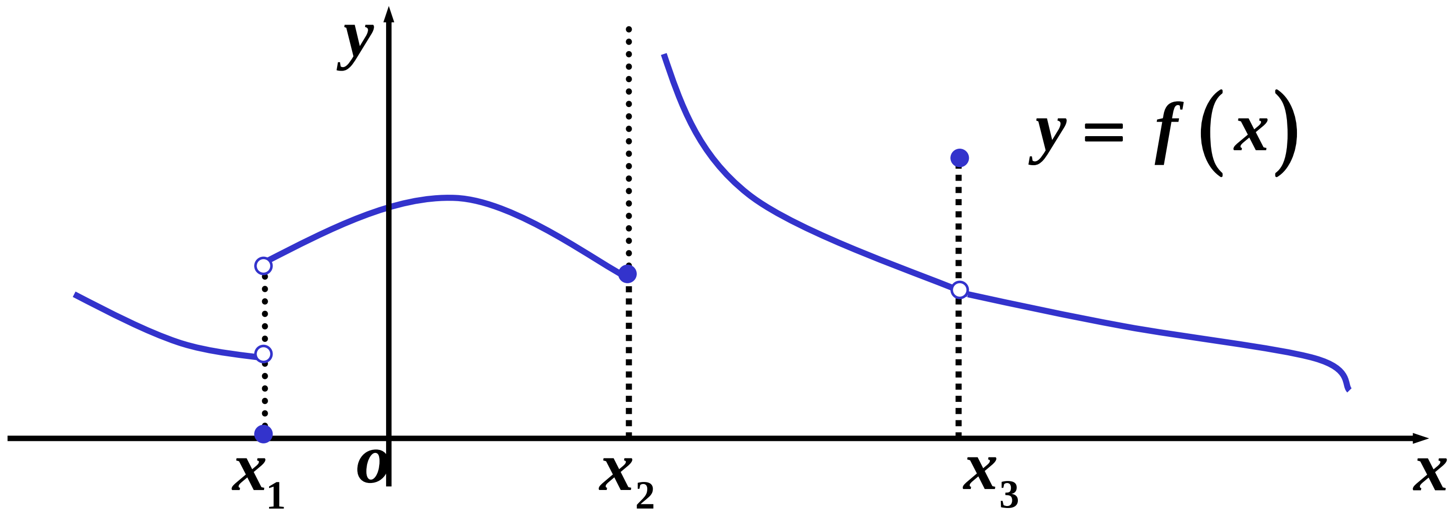
★ $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ -x, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

仅在$x=0$处连续, 其余各点处处间断.

★ $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ -1, & \text{当}x\text{是无理数时},\end{cases}$

在定义域 $R$ 内每一点处都间断，但其绝对值处处连续.

判断下列间断点类型:




上页 下页 返回

**例8** 当$a$取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

**解** $\because\ f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0^-)=f(0^+)=f(0),\qquad \Rightarrow a=1,$

故当且仅当$a=1$时, 函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

**练习题** 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

**解**: 间断点 $x=0,\ x=1,$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty,\ \therefore\ x=0$ 为无穷间断点;

当 $x\to 1^{-}$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to +\infty,\ \therefore\ f(x)\to 0.$

当 $x\to 1^{+}$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to -\infty,\ \therefore\ f(x)\to 1.$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

在 $x\neq 0,1$ 处, $f(x)$ 连续.

# 小结

1. $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \rightleftharpoons \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$$\rightleftharpoons \underbrace{f(x_0^-) = f(x_0)}_{\text{左连续}} = f(x_0^+)$$

右连续

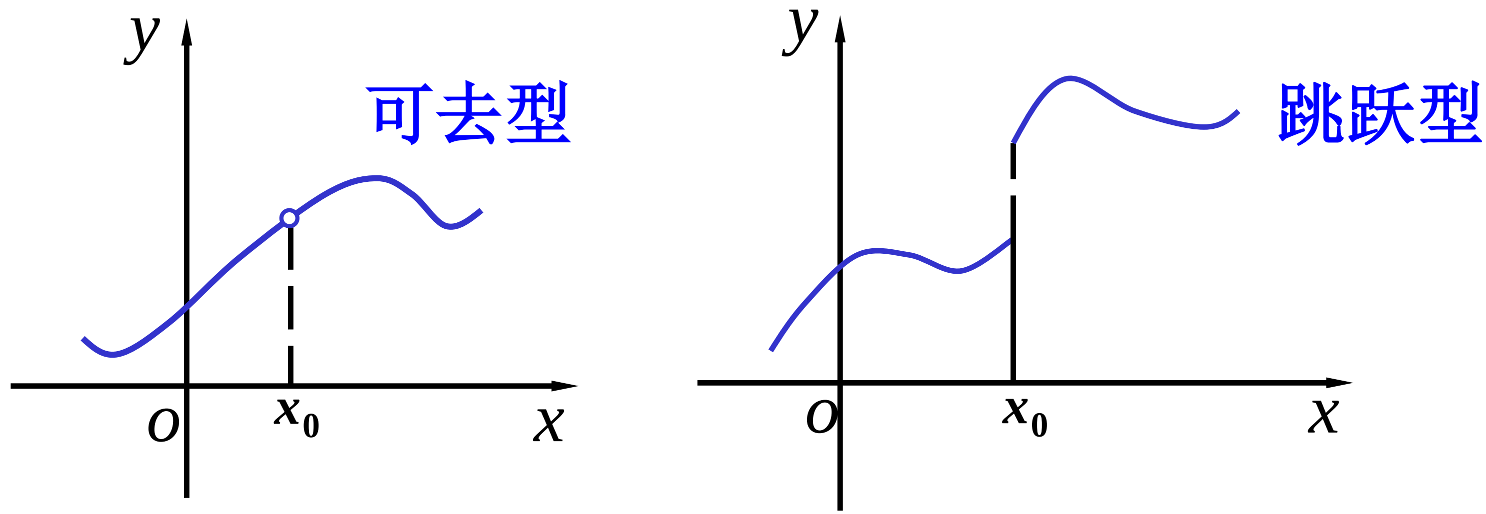
2. $f(x)$ 在点 $x_0$ 间断的类型

第一类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限都存在

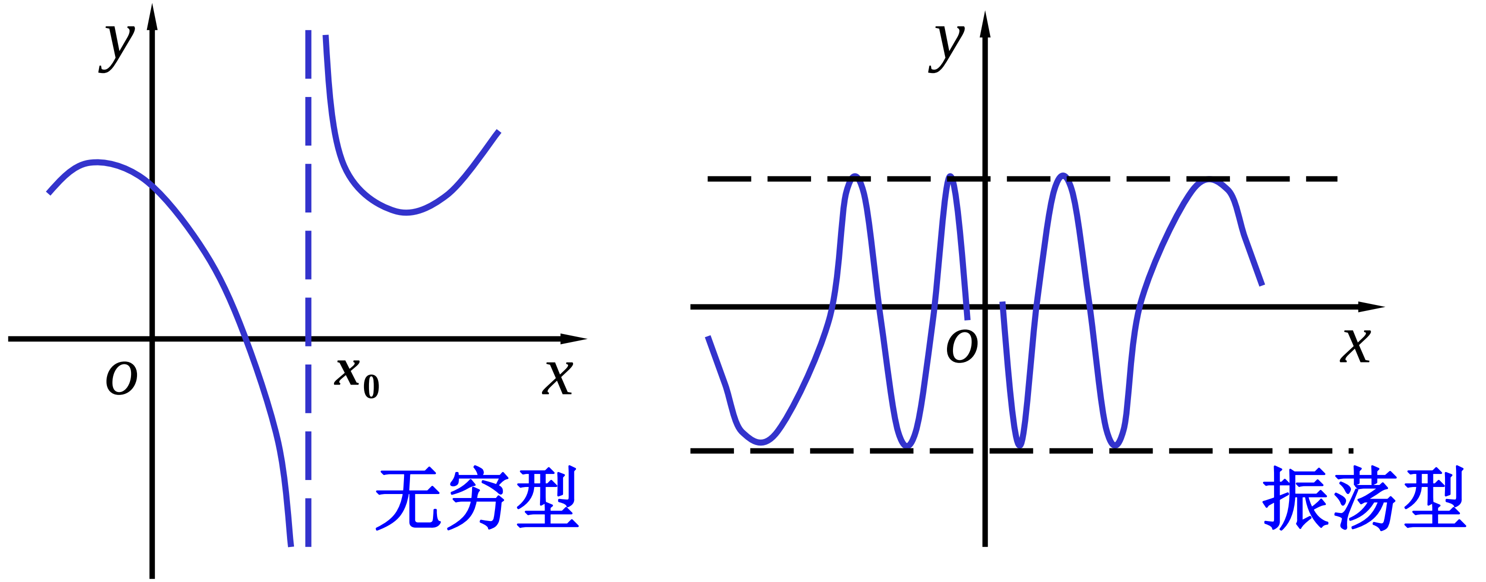
第二类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限至少有一个不存在

(见下图)

第一类间断点




第二类间断点



# 四、闭区间上连续函数的性质

## （1）最值定理

**定义** 对于在区间$I$上有定义的函数$f(x)$，若存在$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$，都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$为函数$f(x)$在区间$I$上的最大值（最小值）.

例如 $y = 1 + \sin x$，在$[0, 2\pi]$上，$y_{max} = 2$，$y_{min} = 0$；

$y = \operatorname{sgn} x$，在$(-\infty, +\infty)$上，$y_{max} = 1$，$y_{min} = -1$；

在$(0, +\infty)$上，$y_{max} = y_{min} = 1$.

$y=x$ 在区间$(a, b)$上既没有最大值又没有最小值.

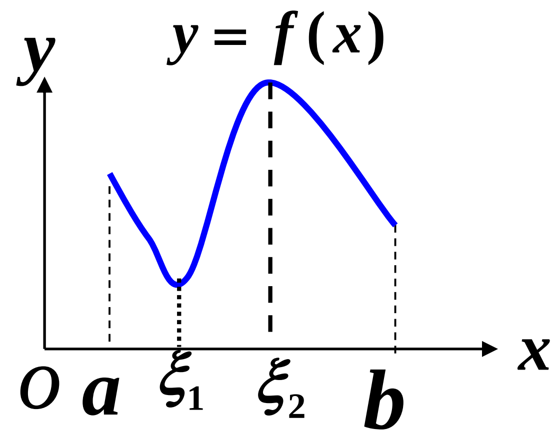
上页 下页 返回

**定理**　若$f(x)$闭区间$[a,b]$上连续，　则 $f(x)$在$[a, b]$上一定有最大值和最小值.　即 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$，使

$$f(\xi_1) = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

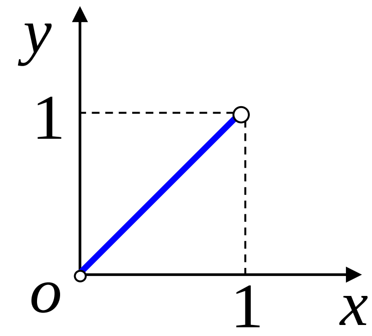
$$f(\xi_2) = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

(证明略)




**注意**：若函数在开区间上连续，　或在闭区间内有间断点，　结论不一定成立 .

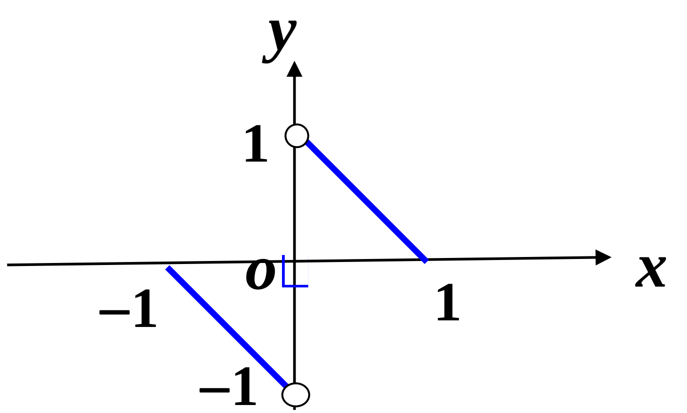
例如 $y = x\,,\ x \in (0,1)$




无最大值和最小值.

又如

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 0\ , & x = 0 \\ -x-1, & -1 \le x < 0 \end{cases}$$




也无最大值和最小值 .

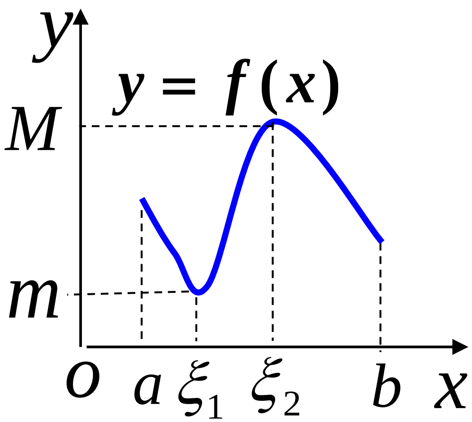
**定理** 在**闭区间上连续**的函数在该区间上**有界**.

**证**: 设 $f(x) \in C[a,b]$，由定理 1 可知有

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

故 $\forall x \in [a,b]$，有 $m \le f(x) \le M$，

因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 .



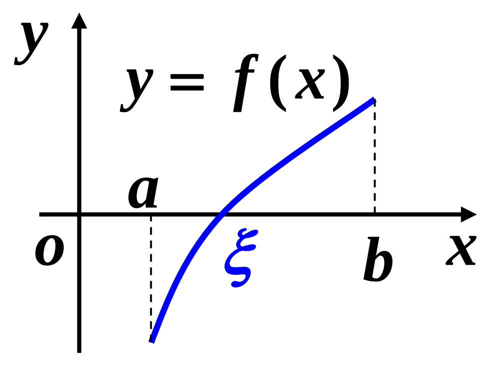
## （2） 介值定理

若有$x_0$使 $f(x_0)=0$,　　则$x_0$称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理. (零点定理)　若 $f(x)$ 闭区间$[a, b]$上连续,

且 $f(a)f(b)<0$, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

（ 证明略 ）



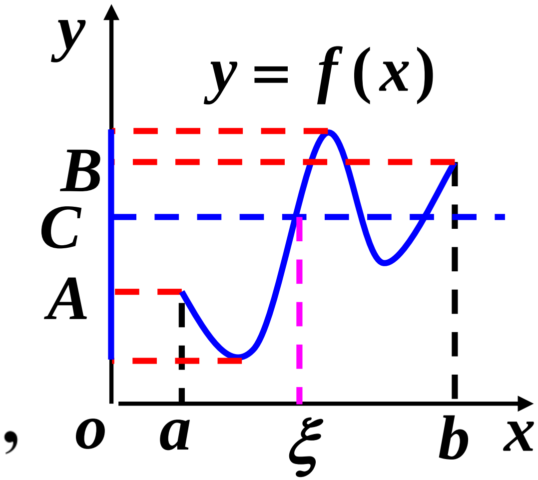

上页 下页 返回

**定理(介值定理)** 若 $f(x)$闭区间$[a,b]$上连续,

且 $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A \neq B$, 则对$A$与$B$之间的任一数$C$, 至少有一点 $\xi \in (a,b)$,使 $f(\xi)=C$.

**证** 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C$$




则$\varphi(x)$ $[a,b]$上连续, 且

$$\varphi(a)\phi(b) \;=(A-C)(B-C)<0.$$

故由零点定理知,至少有一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $\varphi(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=C$.

**推论** 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值.

例. 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个根 .

证 显然 $f(x)=x^3-3x^2+1\in C[0,1]$， 又

$$f(0)=1>0,\qquad f(1)=-1<0$$

故据零点定理， 至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-3\xi^2+1=0$$

---

说明:

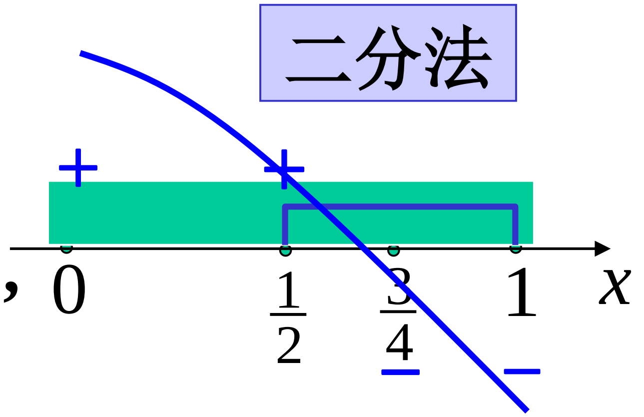
取 $[0,1]$的中点 $x=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{8}>0$,

则 $(\frac{1}{2},1)$ 内必有方程的根;

取$[\frac{1}{2},1]$ 的中点 $x=\frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4})=-\frac{17}{64}<0$,

则 $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ 内必有方程的根; …

可用此法求近似根.



例. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒为正，证明：

对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$，必存在一点 $\xi \in [x_1, x_2]$，

使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ .

$\boxed{f^2(\xi) - f(x_1)f(x_2) = 0}$

证　令 $F(x) = f^2(x) - f(x_1)f(x_2)$，则 $F(x) \in C[a,b]$

$F(x_1)F(x_2) = -f(x_1)f(x_2)[f(x_1) - f(x_2)]^2 \le 0$

当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，取 $\xi = x_1$ 或 $\xi = x_2$，　则有

$[f^2(x_1) - f(x_1)f(x_2)][f^2(x_2) - f(x_1)f(x_2)]$

当 $f(x_1) \ne f(x_2)$ 时，$\because f(x) > 0$，$\therefore F(x_1)F(x_2) < 0$，

故由零点定理知，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$，使 $F(\xi) = 0$，即

$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ .

**例3** 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

**证** 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$，

$F(b)=f(b)-b>0$，由零点定理，

$\exists\xi\in(a,b)$，使$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，

即 $f(\xi)=\xi$.

**例** 证明 $x = e^{x-3} + 1$ 至少有一个不超过 4 的正根 .

**证：** 令 $f(x) = x - e^{x-3} - 1$

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,4]$ 上连续，且

$$f(0) = -e^{-3} - 1 < 0$$

$$f(4) = 4 - e^{4-3} - 1 = 3 - e > 0$$

根据零点定理， 在开区间 $(0,4)$ 内至少存在一点 $\xi \in (0,4)$，使 $f(\xi) = 0$，原命题得证 .

# 小结

四个定理

有界性定理;最值定理;介值定理; 零点定理.

注意　1． 闭区间；　2． 连续函数.

这两点不满足，上述定理不一定成立.

解题思路

1.直接法:先利用最值定理,再利用介值定理;

2.辅助函数法:先作辅助函数$F(x)$,再利用零点定理;

上页 下页 返回

## 思考题

1. 下述命题是否正确?

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 $(a,b)$ 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内必有零点.

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 $(a,b)$ 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内必有零点.

## 思考题解答

不正确.

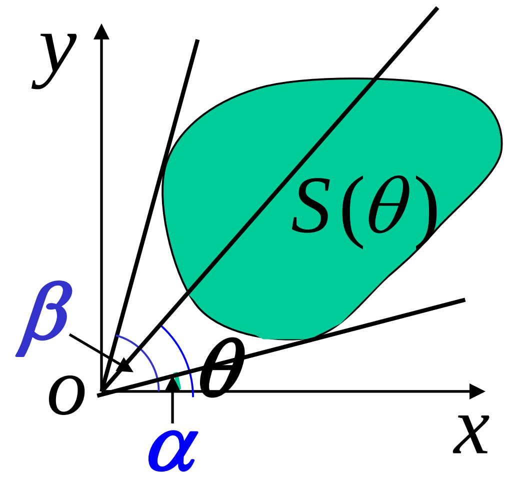
例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点.

上页 下页 返回

**2**. 任给一张面积为 $A$ 的纸片(如图), 证明必可将它一刀剪为面积相等的两片.




提示: 建立坐标系如图.

则面积函数 $S(\theta)\in C[\alpha,\beta]$

因 $S(\alpha)=0$, $S(\beta)=A$

故由介值定理可知:

$\exists\theta_0\in(\alpha,\beta)$, 使 $S(\theta_0)=\dfrac{A}{2}$.

**3.** 设 $f(x)\in C[0,2a]$，$f(0)=f(2a)$，证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

**提示**：令 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$，

则 $\varphi(x)\in C[0,a]$，易证 $\varphi(0)\varphi(a)\le 0$

# 练 习 题

一、证明方程 $x = a\sin x + b$ ，其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$ .

二、若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 $\xi$ ，使 $f(x) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$.

三、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < c < d < b$ , 试证明：对任意正数 $p$ 和 $q$；至少有一点 $\xi \in [c, d]$ , 使 $pf(x) + qf(x) = (p+q)f(\xi)$.

# 思考题

若 $f(x)$在$x_0$ 连续，则 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0$ 是否连续？

又若 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0$ 连续，$f(x)$ 在 $x_0$ 是否连续？

若 $f(x)$在$x_0$ 连续，则 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0$ 是否连续？又若 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0$ 连续，$f(x)$ 在 $x_0$ 是否连续？

## 思考题解答

$\because f(x)$在$x_0$连续， $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

且 $0 \le \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \le |f(x) - f(x_0)|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故$|f(x)|$、$f^2(x)$在$x_0$都连续.

但反之不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在$x_0=0$不连续

但$|f(x)|$、$f^2(x)$在$x_0=0$连续

上页 下页 返回

# 练 习 题

一、填空题：

1、指出 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1$ 是第________类间断点；在 $x=2$ 是第______类间断点 .

2、指出 $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 在 $x=0$ 是第_________类间断点；在 $x=1$ 是第_______类间断点；在 $x=-1$ 是第______类间断点 .

二、研究函数 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$ 的连续性，并画出函数的图形 .

三、指出下列函数在指定范围内的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续．

1、 $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$ 在 $x\in R$ 上．

2、$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, 在 $x\in R$ 上．

四、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性，若有间断点，判断其类型．

五、试确定 $a,b$ 的值, 使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$，

（1）有无穷间断点 $x=0$；（2）有可去间断点 $x=1$．

上页 下页 返回

# 练习题答案

一、1、一类, 二类;　　2、一类, 一类, 二类.

二、$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内连续, $x=-1$为跳跃间

断点.

三、1、$x=1$为第一类间断点;

2、$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$为可去间断点,

$x=k\pi(k\neq 0)$为第二类间断点.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 1, x=0\end{cases}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

四、 $f(x)=\begin{cases}x, |x|<1\\ 0, |x|=0\\ -x, |x|>1\end{cases}$ $x=1$和$x=-1$为第一类间断点.

五、(1) $a=0, b\neq 1$; (2) $a\neq 1, b=e$.