第七节、定积分在物理学上的应用

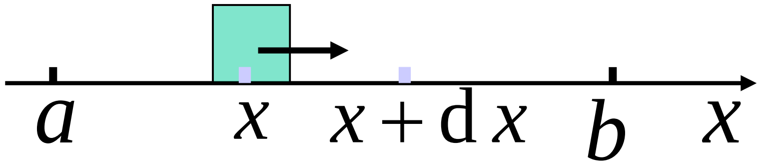
- 一、变力沿直线所做的功
- 二、液体的侧压力
- 三、引力问题
- 四、小结、思考题
- 五、作业

一、变力沿直线所做的功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功．

在$[a,b]$上任取子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$$



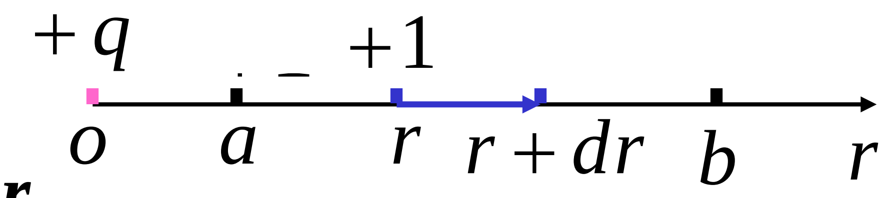
因此变力$F(x)$ 在区间$[a,b]$上所作的功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

例1. 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a < b)$，求电场力所作的功 .

解: 当单位正电荷距离原点 r 时,由库仑定律电场力为

$$F = k\frac{q}{r^2}$$



则功的元素为 $\mathrm{d}W = \dfrac{kq}{r^2}\mathrm{d}r$

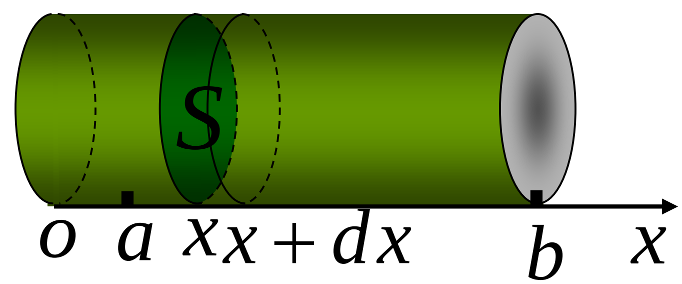
所求功为 $W = \displaystyle\int_a^b \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = kq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

说明: 电场在 $r = a$ 处的电势为 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{kq}{a}$

例2. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体, 由于气体的膨胀, 把容器中的一个面积为S 的活塞从点 a 处移动到点 b 处 (如图), 求移动过程中气体压力所作的功 .

解: 建立坐标系如图. 由波义耳—马略特定律知压强 p 与体积 V 成反比 , 即$p=\frac{k}{V}=\frac{k}{xS}$, 故作用在活塞上的力为

$$F=p\cdot S=\frac{k}{x}$$



功元素为 $\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=\frac{k}{x}\mathrm{d}x$

所求功为 $W=\int_a^b\frac{k}{x}\mathrm{d}x=k\left[\ln x\right]_a^b=k\ln\frac{b}{a}$

例3. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m, 底圆半径为3m, 试问要把桶中的水全部吸出需作多少功 ?

解: 建立坐标系如图. 在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的一薄层水的重力为

$$g\cdot\rho\cdot\pi 3^2\,\mathrm{d}x\ \ (\mathrm{KN})$$

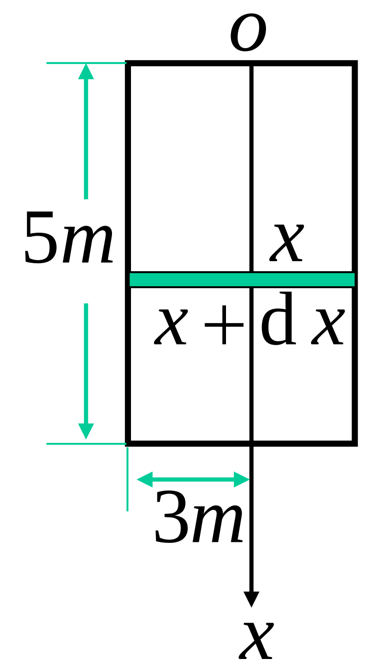
这薄层水吸出桶外所作的功(功元素)为

$$\mathrm{d}W = 9\pi g\,\rho\,x\,\mathrm{d}x$$

故所求功为

$$W=\int_0^5 9\pi\,g\,\rho x\,\mathrm{d}x = 9\pi\,g\,\rho\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^5$$

$$=112.5\pi\,g\,\rho\ \ (\mathrm{KJ})$$

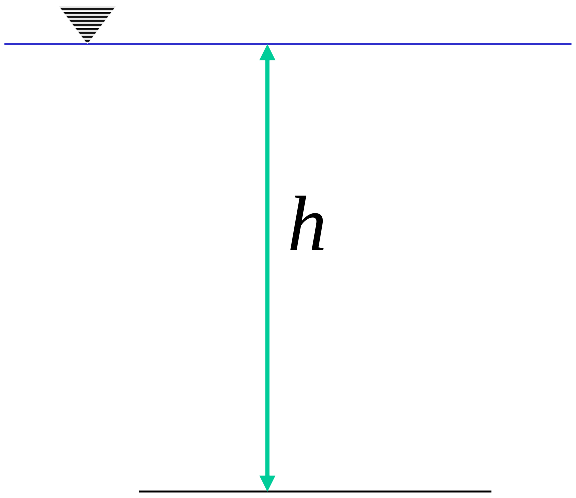


设水的密度为 ρ

二、液体的侧压力

设液体密度为 ρ

深为 h 处的压强：$p = g\rho h$



面积为 A 的平板

- 当平板与水面平行时，

平板一侧所受的压力为

$$P = pA$$

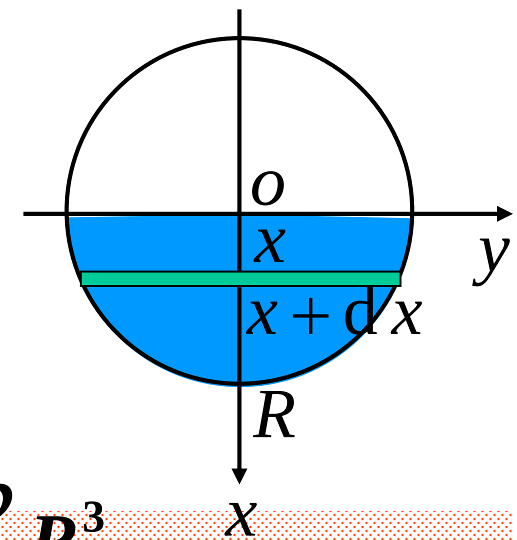
- 当平板不与水面平行时，

所受侧压力问题就需用积分解决 .

例4. 一水平横放的半径为R 的圆桶,内盛半桶密度为ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解: 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \quad (0 \le x \le R)$$



利用对称性,侧压力元素

$$\mathrm{d}P = 2g\rho x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

端面所受侧压力为

$$P = \int_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2g\rho}{3}R^3$$

说明: 当桶内充满液体时, 小窄条上的压强为 $g\,\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}P = 2g\,\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

故端面所受侧压力为

$$P=\int_{-R}^{R}2g\,\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

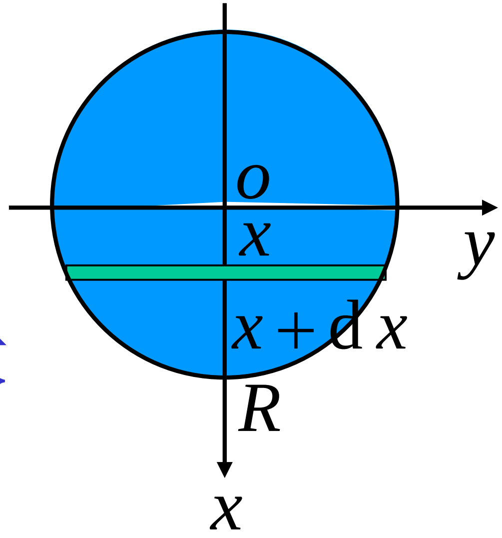
奇函数

$$=4Rg\rho\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

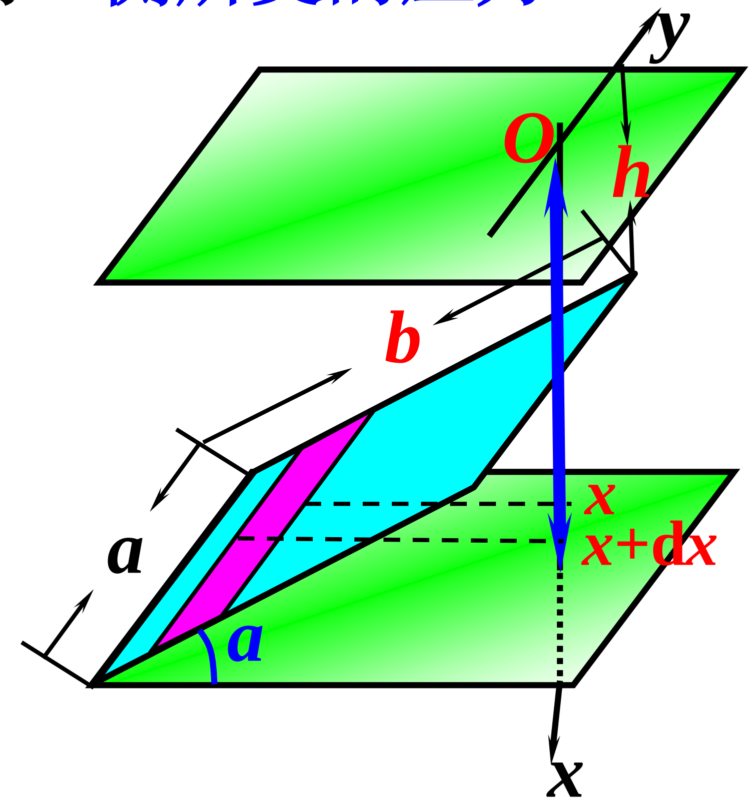
(令 $x=R\sin t$)

$$=4Rg\,\rho\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R$$

$$=\pi g\rho R^3$$



例　边长为 *a* 和 *b* 的矩形薄板 (*a* > *b*), 与液面成 *a* 角置于液体中，长边长平行于液面位于深 *h* 处, 设液面的密度为*m*，求薄板的一侧所受的压力.



解　取液面上的某点为坐标原点，*x* 轴的正向向下. 取*x*为积分变量, 积分区间为 [*h*, *h*+*b*sin*a*].　任取小区间 [*x*, *x*+d*x*] Ì[*h*, *h*+*b*sin*a*]. 对此小区间上的薄板的面积为 $a\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$, 所受水的压力近似

于

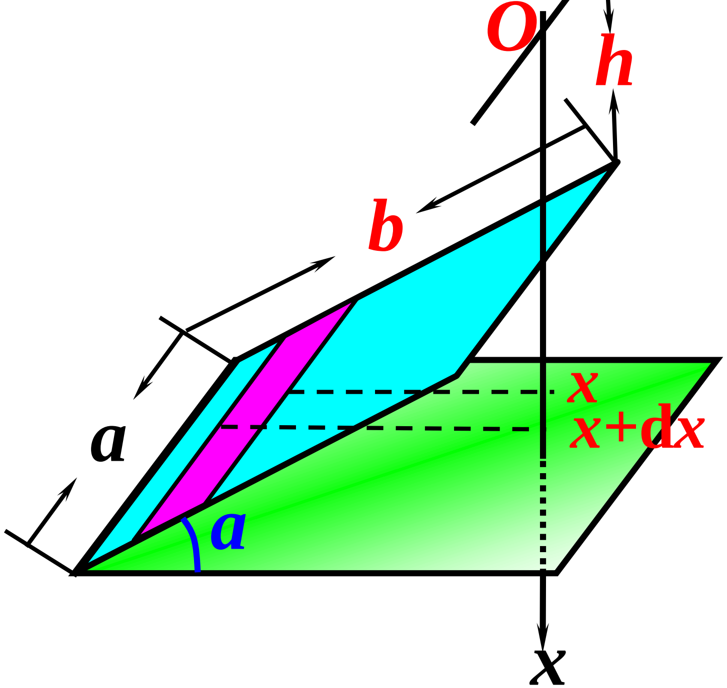
$$\mathrm{d}F = \mu g x a \frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha},$$

从而薄板所受压力为

$$F = \int_h^{h+b\sin\alpha} \mu g x a \frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$$

$$= \mu g a b\left(h + \frac{1}{2} b\sin\alpha\right).$$

小薄板的面积 $a\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$



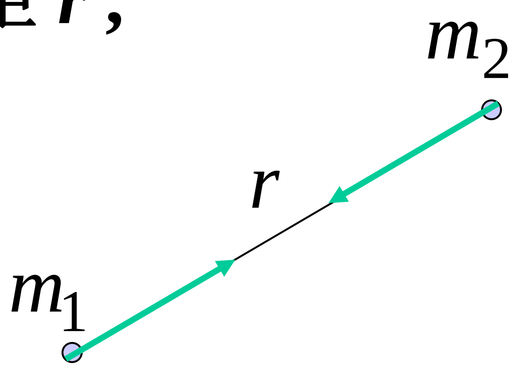
三、引力问题

质量分别为 m_1 , m_2 的质点 , 相距 r ,

二者间的引力 :

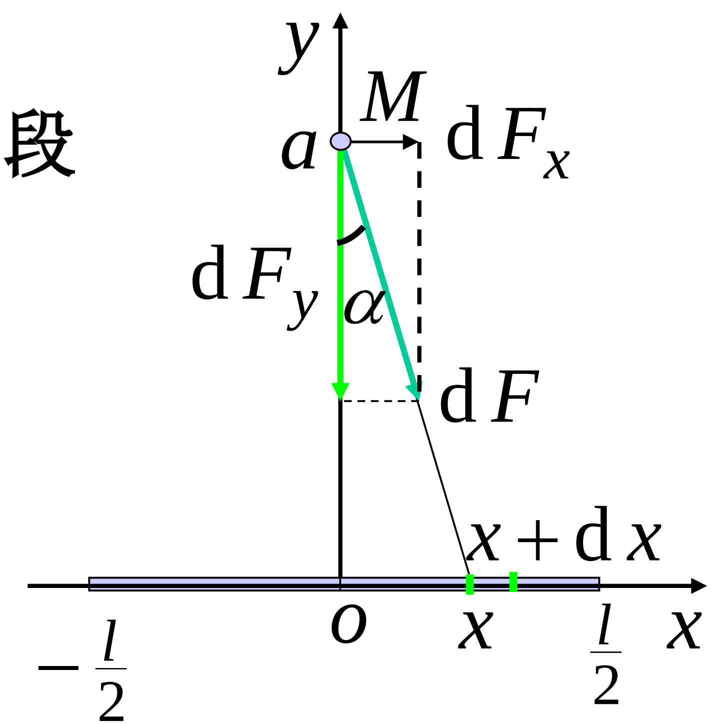
大小: $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向: 沿两质点的连线



若考虑物体对质点的引力, 则需用积分解决 .

例5. 设有一长度为 l, 线密度为 μ 的均匀细直棒, 在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试计算该棒对质点的引力.



解: 建立坐标系如图. 细棒上小段 $[x, x+dx]$ 对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

故垂直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cos\alpha$$

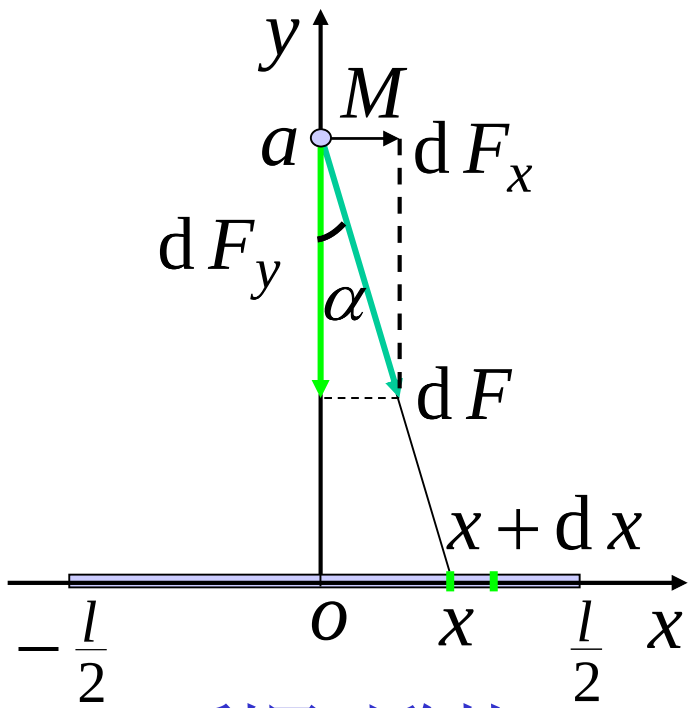
$$= -k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的垂直分力为

$$F_y = -2k m\mu a \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -2k m\mu a \left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= -\frac{2k m\mu l}{a} \frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$



利用对称性

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0$.

故棒对质点的引力大小为 $F = \frac{2k m\mu l}{a} \frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

说明:

1) 当细棒很长时,可视 l 为无穷大 ,

此时引力大小为 $\dfrac{2km\mu}{a}$

方向与细棒垂直且指向细棒 .

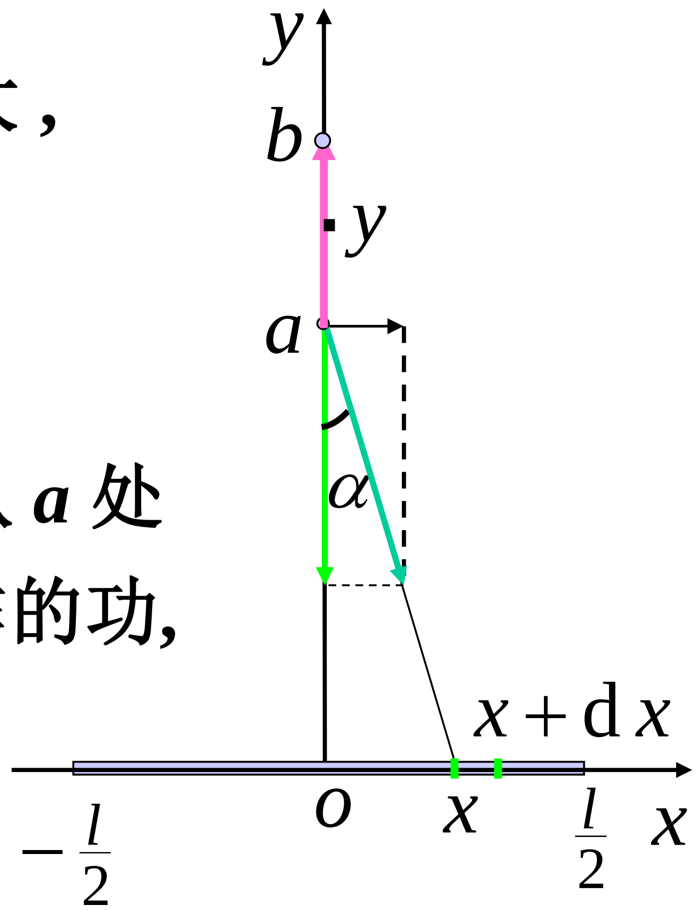
2) 若考虑质点克服引力沿 y 轴从 a 处

移到 b $(a < b)$ 处时克服引力作的功,

则有

$$\mathrm{d}W = -\frac{2km\mu l}{y}\frac{1}{\sqrt{4y^2+l^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$W = -2km\mu l\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2+l^2}}$$



3) 当质点位于棒的左端点垂线上时，

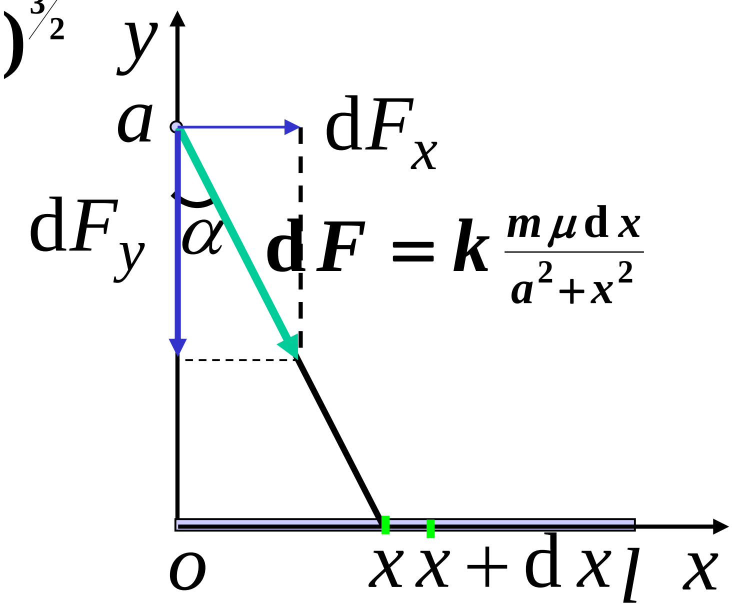
$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F \cdot \cos\alpha = -k m \mu a \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

注意正负号

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F \cdot \sin\alpha = k m \mu \frac{x\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

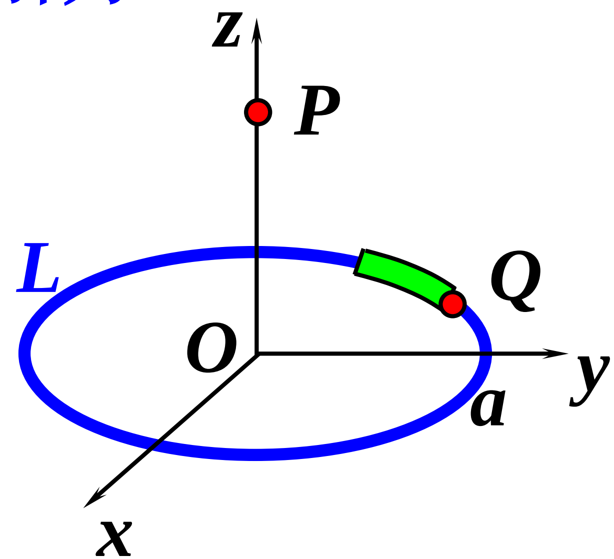
$$\therefore \quad F_y = -k m \mu a \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$F_x = k m \mu \int_0^l \frac{x\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$



引力大小为 $F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}$

例: 设L为xOy坐标面上的圆 $x^2+y^2=a^2$，在L上分布线密度为常数 μ 的质量.点$P(0, 0, b)$处有质量为m的质点，试计算L对质点P的引力.



解 设$(0, a)$点为计算弧长的起点，取弧长 s 为积分变量，变化区间为$[0, 2\pi a]$,任取小区间$[s, s+\mathrm{d}s] \in [0, 2\pi a]$. 对应该区间上的小弧段，对点$P$的引力的大小近似于

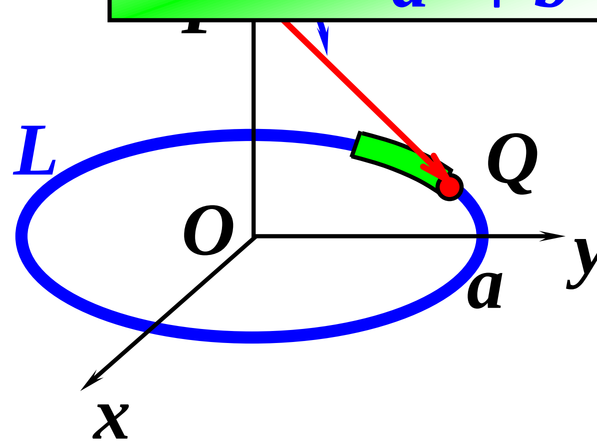
$$\left|\mathrm{d}\vec{F}\right| = G\frac{m\mu \mathrm{d}s}{a^2+b^2}.$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{F}\right| = G\frac{m\mu\,\mathrm{d}s}{a^2+b^2}.$$

方向近似于$\overrightarrow{PQ}$，由对称性，

L对点P的引力沿 z 轴方向.

设 $\overrightarrow{PQ}$ 与 z 轴的夹角为θ，



$$\cos\theta = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

则

$$\mathrm{d}F_z = \left|\mathrm{d}\vec{F}\right|\cos\theta = -m\mu G\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\mathrm{d}s.$$

从而

$$F_z = \int_0^{2\pi a} -m\mu G\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\mathrm{d}s = -\frac{2\pi abm\mu G}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}},$$

负号表示方向向下.

四、小结、思考题

内容小结

1.用定积分求一个分布在某区间上的整体量 Q 的步骤:

(1) 先用微元分析法求出它的微分表达式 dQ

一般微元的几何形状有: 条、段、环、带、扇、片、壳 等.

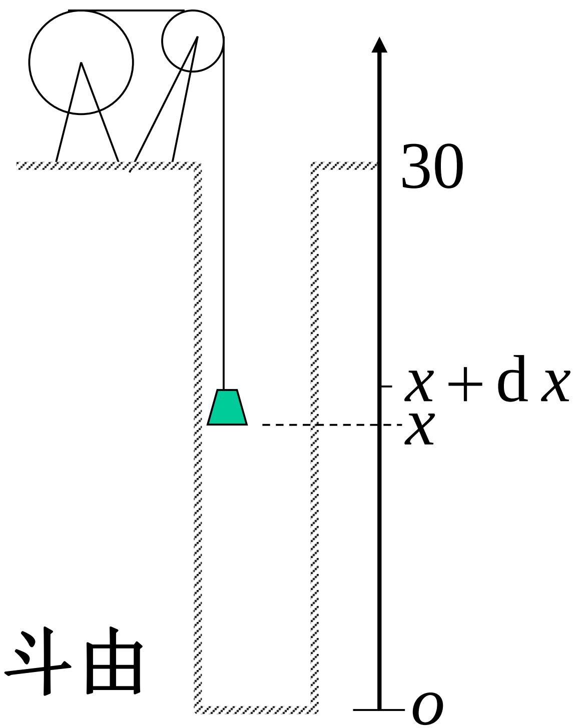
(2) 然后用定积分来表示整体量 Q , 并计算之.

2.定积分的物理应用:

变力作功，侧压力，引力等.

思考与练习

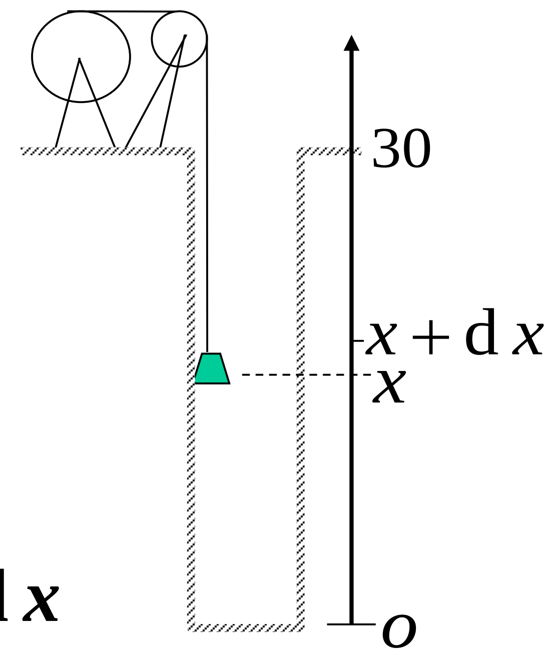
1.为清除井底污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口, 已知井深**30 m**, 抓斗自重**400N**, 缆绳每米重**50N**, 抓斗抓起的污泥重**2000N**, 提升速度为**3m /s**, 在提升过程中污泥以**20N /s** 的速度从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起污泥的抓斗提升到井口, 问克服重力需作多少焦耳(**J**) 功?



提示: 作 x 轴如图. 将抓起污泥的抓斗由 x 提升 $\mathrm{d}x$ 所作的功为

井深 30 m,　抓斗自重 400 N,　缆绳每米重50N,
抓斗抓起的污泥重 2000N,　提升速度为3m/s,
污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2 + \mathrm{d}W_3$$



克服抓斗自重: $\mathrm{d}W_1 = 400\,\mathrm{d}x$

克服缆绳重: $\mathrm{d}W_2 = 50\cdot(30-x)\,\mathrm{d}x$

抓斗升至 x 处所需时间 : $\frac{x}{3}$ (s)

提升抓斗中的污泥:

$$\mathrm{d}W_3 = (2000 - 20\cdot\tfrac{x}{3})\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad W = \int_0^{30}[400 + 50(30-x) + (2000 - 20\cdot\tfrac{x}{3})]\,\mathrm{d}x$$

$$= 91500\,(\mathrm{J})$$

2. 设星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在点O 处有一单位质点 ,求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

提示: 如图.

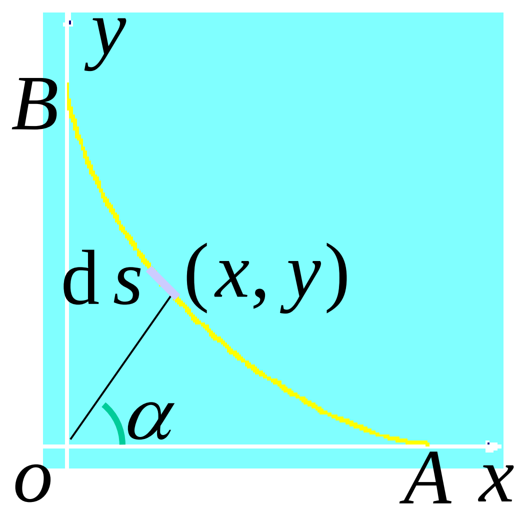
$$\mathrm{d}F = k\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}s}{x^2+y^2} = k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\cos\alpha$$

$$= k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$

$$= k\,x\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cdot\sin\alpha = k\,y\,\mathrm{d}s$$



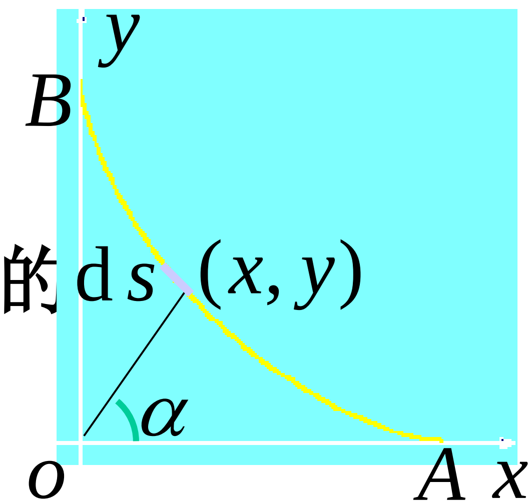
$$F_x = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot \sqrt{[3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2 t\cdot\cos t]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 3a^2 k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\cdot\sin t\,\mathrm{d}\,t \;= \frac{3}{5}k\,a^2$$

同理 $F_y = \frac{3}{5}k\,a^2$

故星形线在第一象限的弧段对该质点的

引力大小为 $F = \frac{3}{5}\sqrt{2}\,k\,a^2$



五、作业