习题 1-1

(A)

1．填空题．

(1)函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为 $\underline{-4\le x\le 4}$;

(2)函数 $y=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ 的定义域为 $\underline{x\ne \pm 3}$;

(3)函数 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域为 $\underline{1\le x\le 4}$;

(4)函数 $y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{|x|-3}}$ 的定义域为 <u>x<-3</u>;

(5)函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的周期为 $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

2．设 $f(\sin\dfrac{x}{2})=\cos x+1$，求 $f(x)$ 及 $f(\cos\dfrac{x}{2})$.

解： $f(\sin\dfrac{x}{2})=\cos x+1$

$$=1-2\sin^2\frac{x}{2}+1$$

$$=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$\therefore\ f(x)=2-2x^2$　则 $f(\cos\dfrac{x}{2})=2-2\cos^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$

3．设 $f(x)=\begin{cases}2+x，x\le 0,\\ 3^x，x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1),f(0),f(3)及f(x-5).$

解： $f(-1)=2-1=1$

$f(0)=2+0=2$

$f(3)=3^3=27$

$$f(x-5)=\begin{cases}2+(x-5)，x\le 5\\ 3^{x-5}，x>5\end{cases}=\begin{cases}x-3，x\le 5\\ 3^{x-5}，x>5\end{cases}$$

4．将函数 $y=3-|4x-1|$ 用分段形式表示，并做出函数图形．

解： $y=\begin{cases}3-(4x-1)，x\ge\dfrac{1}{4}\\3+(4x-1)，x<\dfrac{1}{4}\end{cases}=\begin{cases}4-4x，x\ge\dfrac{1}{4}\\4x+2，x<\dfrac{1}{4}\end{cases}$

5．判断下列函数的奇偶性．

(1) $y=x^2(1-x^2)$；

解： $f(-x)=f(x)$，则为偶函数．

(2) $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$；

解： $f(-x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-f(x)$，则为奇函数．

(3) $f(x)=(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}})^{x}+(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}})^{x}$；

解： $f(-x)=(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}})^{-x}+(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}})^{-x}=(2-\sqrt{3})^{-x}+(2+\sqrt{3})^{-x}=f(x)$，则为偶函数．

6．设 $y=\dfrac{x}{2}f(t-x)$,且当 x=1 时，$y=\dfrac{1}{2}t^2-t+\dfrac{1}{2}$,求 $f(x)$．

解：当 x=1 时，$\dfrac{1}{2}t^2-t+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}f(t-1)$

$f(t-1)=(t-1)^2$

则：$f(x)=x^2$．

7．求下列函数的反函数．

(1) $y=\dfrac{2-x}{2+x}$;

解： $2y+xy=2-x$

$x=\dfrac{2-2y}{1+y}$

则反函数为： $y=\dfrac{2-2x}{1+x} \quad (x\neq 1)$

(2) $y=\dfrac{3^x}{3^x-1}$；

解： $3^x y - y = 3^x$

$x=\log_3 \dfrac{y}{y-1}$

则反函数为： $y=\log_3 \dfrac{x}{x-1} \quad (x>1\text{或}x<0)$

(3) $y=\begin{cases} x^2, -1\le x<0 \\ \ln x，\ 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, 1<x\le 2 \end{cases}$；

解： $-1\le x<0$ 时， $x=-\sqrt{y}$，则反函数为： $y=-\sqrt{x} \quad (0<x\le 1)$

$0<x\le 1$ 时， $x=e^y$，则反函数为： $y=e^x \quad (-\infty<x\le 0)$

$1<x\le 2$ 时， $x=\ln\dfrac{y}{2}+1$，则反函数为： $y=\ln\dfrac{x}{2}+1 \quad (2<x\le 2e)$

则其反函数为： $y=\begin{cases} y=-\sqrt{x}，\ 0<x\le 1 \\ y=e^x，\ -\infty<x\le 0 \\ y=\ln\dfrac{x}{2}+1，\ 2<x\le 2e \end{cases}$

8．证明：函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界的充分必要条件是在 (a,b) 内既有上界，又有下界.

证明：首先来看必要性

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，且 n≤ $f(x)\le$ m

$f(x)\le$ m，则 $f(x)$ 有上界 m；n≤ $f(x)$，则 $f(x)$ 有下界 n；

再来看充分性

设 $f(x)$ 上界和下界分别是 m 和 n，取 $\mathrm{M}=\max\{|\mathrm{m}|,|\mathrm{n}|\}$

n ≤ $f(x)\le$ m ，则 $|f(x)|\le M$， $f(x)$ 有界。

9．某厂生产某产品 1200t，每吨定价 100 元，销售量在 900t 以内时，按原价出售；超过 900t 时，超过的部分打 8 折出售，试将销售总收入与总销售量的函数关系用数学表达式表示．

解：依题意，设总销售量为 x 吨，销售总收入为 y 元

$$y=\begin{cases}100x，x\le 900\\ 900x+(x-900)\times 80，900<x\le 1200\end{cases}$$

$$=\begin{cases}100x，x\le 900\\ 980x+72000，900<x\le 1200\end{cases}$$

10．在半径为 r 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表示为其高 h 的函数，并确定此函数的定义域．

解：设圆柱底面半径为 R

由几何关系得：$R^2+\mathrm{h}^2=\mathrm{r}^2$ 即 $R=\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{h}^2}$

圆柱体积为：$V=\pi R^2 h=\pi(\mathrm{r}^2-\mathrm{h}^2)h=\pi\mathrm{r}^2 h-\mathrm{h}^3$ （$0<h<\sqrt{r}$ ）

(B)

12．填空题．

(1)对一切实数 x，有 $f(\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，则 $f(x)$ 是周期为 $\underline{1}$ 的周期函数；

(2)函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\underline{x\ge 3}$；

(3)已知 $f(x)=\sin x$， $f(\varphi(x))=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\underline{-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}}$．

13．计算题．

(1)已知 $f(x)=e^{x^2}$， $f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\ge 0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域；

解：$1-x=e^{\varphi(x)^2}$，则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

定义域为：$\begin{cases}(1-x)>0\\ \ln(1-x)\ge 0\end{cases}$，即 $x\le 0$．

(2)设 $f(x)=x^2$，令 $g(x)=\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}$，求 $g(x^2)$；

解：$g(x)=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{2hx+h^2}{h}=2x+h$

则：$g(x^2)=2x^2+h$．

(3)设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=f(f(\cdots(f(x))\cdots))$，并讨论 $f_n(x)$ 的奇偶性和有界性；

解：$f_2(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$f_3(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+ax^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

以此类推：$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

$f_n(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1+nx^2}}=-f_n(x)$，为奇函数

当 x=0 时，$f_n(x)=0$

当 $x\neq 0$ 时，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+n}}$，则 $|f_n(x)|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\therefore f_n(x)$ 有界.

(4)设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}$ 试将 $F(x)=f(x)-f(x-1)$ 表示成分段函数；

解：$F(x)=f(x)-f(x-1)=\begin{cases}1-1, & x\geq 1\\ 1-0, & 0\leq x<1\\ 0-0, & x<0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\geq 1\\ 1, & 0\leq x<1\\ 0, & x<0\end{cases}$.

(5)求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

解：$$\begin{aligned}y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+x-\sqrt{1+x^2}-3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&=2x-3y\end{aligned}$$

$x=\dfrac{y^3+3y}{2}$

则反函数：$y=\dfrac{x^3+3x}{2}\,(y\in R)$

14．证明题．

(1)若周期函数 $f(x)$ 的周期为 T 且 $a \neq 0$，则 $f(ax+b)$ 得的周期为 $\frac{T}{a}$；

证明：由已知：$f(x)=f(x+T)$

则：$f(ax+b+T)=f[a(x+\frac{T}{a})+b]$

得证．

(2)若函数 $f(x)$ 满足

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}，\ x \neq 0, |a| \neq |b|,$$

则 $f(x)$ 为奇函数.

证明：$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$　　　(1)

则，$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$　　(2)

(1)+ (2)得：$(a+b)[f(\frac{1}{x})+f(x)]=c(x+\frac{1}{x})$

由 $|a| \neq |b|$，则 $(a+b) \neq 0$

$$\therefore [f(-\frac{1}{x})+f(-x)]=-\frac{c}{(a+b)}(x+\frac{1}{x})=-[f(\frac{1}{x})+f(x)]$$

即 $f(x)$ 为奇函数．

习题 1-2

(A)

1．观察下列一般项为 x_n 的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，判断它们是否有极限？若存在极限，则写出它们的极限．

(1) $x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$；有极限，极限为 1；

(2) $x_n=\cos\frac{1}{n}$；有极限，极限为 1；

(3) $x_n=\frac{1}{3^n}$；有极限，极限为 0；

(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$；有极限，极限为 1；

(5) $x_n=(-1)^n$；无极限；

(6) $x_n=\sin n$；无极限．

2．利用数列极限的定义证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$；

证明：令$x_n=\dfrac{3n+1}{4n-1}$，由于

$$\left|\frac{3n+1}{4n-1}-\frac{3}{4}\right|=\frac{7}{16n-1}<\frac{1}{n-1},$$

于是，对于$\forall\varepsilon>0,$(不妨设$\varepsilon<1$),要使

$\dfrac{1}{n-1}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}+1,$

因此，对上述，取N=$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$,则当$n>N$时，就有$\left|x_n-\dfrac{3}{4}\right|<\varepsilon$成立，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$；

证明：令$x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$，由于

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1+(-1)^n}{n}<\frac{1}{n},$$

于是，对于$\forall\varepsilon>0,$(不妨设$\varepsilon<1$),要使

$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon},$

因此，对上述，取N=$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时，就有$\left|x_n-0\right|<\varepsilon$成立，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$；

证明：令$x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$，由于

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1<\frac{1}{n},$$

于是，对于$\forall\varepsilon>0,$(不妨设$\varepsilon<1$),要使

$\frac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\frac{1}{\varepsilon}$,

因此，对上述，取N=$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时，就有$|x_n-1|<\varepsilon$成立，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}=0$；

证明：令$x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$，由于

$$\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}-0\right|<\frac{1}{n},$$

于是，对于$\forall\varepsilon>0,$(不妨设$\varepsilon<1$),要使

$\frac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\frac{1}{\varepsilon}$,

因此，对上述，取N=$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时，就有$|x_n-0|<\varepsilon$成立，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}=0$.

3．证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，并举例说明：数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证明：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$及数列极限定义，对$\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 n>N 时，

有$|x_n-a|<\varepsilon$，则：$\big||x_n|-|a|\big|<|x_n-a|<\varepsilon$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

举例：数列$\{|x_n|\}$的极限为 1，

而数列$\{x_n\}$ $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$无极限.

5．设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

证明：由极限定义可知，$\forall\varepsilon,\exists N_1,$使当$2n-1>N_1$时$,|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$

$\exists N_2,$使当$2n>N_2$时$,|x_{2n}-a|<\varepsilon$，

$\therefore n>\dfrac{N_1+1}{2}\qquad n>\dfrac{N_2}{2}$

取$N=\max\left\{\left[\dfrac{N_1+1}{2}\right],\left[\dfrac{N_2}{2}\right]\right\}$

则当 n>N 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

7．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi})$

解：由于$n(\dfrac{n}{n^2+n\pi})<n(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi})<n(\dfrac{n}{n^2+\pi})$

而$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{n}{n^2+n\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{n}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{n}{n^2+\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{n^2}}=1$

由夹逼准则可得$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi})$=1．

8．设x_1=$\sqrt{2}$，x_2=$\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，证明：数列$\{x_n\}$的极限存在，并求其极限．

证明：显然$x_2>x_1$

设对某正整数k,有$x_{k+1} > x_k$,则

$x_{k+2} = \sqrt{2+x_{k+1}} > \sqrt{2+x_k} = x_{k+1}$

由归纳法可知，对任意的正整数$n \geq 1$，有$x_{n+1} > x_n$,即数列单调递增.

又易知该数列有上界2，所以由单调有界准则可知：数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,且$a > 0$.在两端$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$取极限得：$a = \sqrt{2+a}$

求得$a = 2$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

10．求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-4}{n^2+2}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-4}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n^2-5n+6}{4n^3-2\mathrm{n}+1}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n^2-5n+6}{4n^3-2\mathrm{n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{6}{n^3}}{4-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}} = \dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})(1+\dfrac{3}{n})}{3} = \dfrac{1}{3}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{\mathrm{n}}})$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{\mathrm{n}}}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\dfrac{1}{2})^n}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{10}(2n+1)^{20}}{(2n+1)^{30}}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{10}(2n+1)^{20}}{(2n+1)^{30}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{10}(2+\frac{1}{n})^{20}}{(2+\frac{1}{n})^{30}}=\dfrac{1}{2^{10}}$.

12．设数列$\{x_n\}$收敛，证明：$\{x_n\}$中必有最大项或最小项.

证明：由数列$\{x_n\}$收敛，则此数列有界，即$|x_n|\le M$

则$\{x_n\}$中必有最大项或最小项.

13．设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 a>b，证明：存在某正整数 N，使得当 n>N 时，有$x_n>b$.

证明：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，存在某正整数 N，使得当 n>N 时，

对$\forall\varepsilon>0$，有$|x_n-a|<\varepsilon,则a-x_n\le|x_n-a|<\varepsilon$

$\therefore x_n>a-\varepsilon$

取ε为无穷小，则$x_n>a>b$.

16．设$x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n},n=1,2,\cdots$,证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

证明：显然$x_2>x_1$

设对某正整数k,有$x_{k+1}>x_k$,则

$x_{k+2}=\sqrt{3+2x_{k+1}}>\sqrt{3+2x_k}=x_{k+1}$

由归纳法可知，对任意的正整数$n\ge1$，有$x_{n+1}>x_n$,即数列单调递增.

又易知该数列有上界3，所以由单调有界准则可知：数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$.在两端$x_n=\sqrt{3+2x_{n-1}}$取极限得：$a=\sqrt{3+2a}$

求得$a=3$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

17．设$x_n=(1+\dfrac{1}{n})\sin\dfrac{n\pi}{2}$，证明：数列$\{x_n\}$发散.

证明：数列$\{x_n\}$有两个子数列：

$x_{2k}=0\,(k=1,2,\cdots)$，

$x_{2k+1}=(1+\frac{1}{n})(-1)^{k+1} \quad (k=1,2,\cdots)$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k}=0$，数列 x_{2k+1} 发散

$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 发散.

习题 1.3（P47）

1. 答案：D

解：例：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 在 $x=1$ 处没有定义但是有极限。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x>0\\ x+1, & x\le 0\end{cases}$

（1） 作出函数 $f(x)$ 的图形

（2） 根据函数图形写出 $f(0^-), f(0^+)$；

（3） 极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在么？

解：

（1）略

（2）$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{2}x^2)=0$

（3）因为 $f(0^-)\ne f(0^+)$，所以极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

3. 解：当 $x\to 0$ 时，函数 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不存在。

$\forall M>0$（不论它多么大），$\exists\delta=\frac{1}{\ln M}>0$，使得当 $0<|x-0|<\delta$ 时，

有 $|f(x)|=|e^{\frac{1}{x}}|>e^{\frac{1}{\delta}}=M$，故它的极限不存在。

4. 解：$f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4$

$f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(4x-3)=5$

5. 解：

（1）$f(x)=\frac{2x^2-x}{x+3}=\frac{x(2x-1)}{x+3}$，当 $x\to 0$ 时，无穷小

（2） $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{x-1}{(x-3)(x+3)}$，当 $x\to -3$ 时，无穷大

（3） $f(x)=\ln x$，当 $x\to 0^+$ 时，无穷大

（4） $f(x)=\ln(1+2x)$，当 $x\to 0$ 时，极限为 0，无穷小

（5） $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$，当 $x\to\infty$ 时，极限为 0，无穷小

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ a+x^2, & x\le 0 \end{cases}$

解： $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}})=0$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则 $f(0^-)=f(0^+)$，则 $a=0$， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

7. 解：（1） $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{1}{2})^x=0$

（2） $\lim\limits_{x\to -\infty}(\dfrac{1}{2})^x=+\infty$

8. 证：因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，则

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=|\frac{(\sqrt{f(x)}+\sqrt{A})(\sqrt{f(x)}-\sqrt{A})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}|=|\frac{f(x)-A}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}|<|\frac{f(x)-A}{\sqrt{A}}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$

9. 解：

（1） $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

有 $|f(x)-1|=|2x-1-1|=2|x-1|<2\delta=\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

（2） $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta=\varepsilon>0$，使得当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时，

有 $|f(x)-(-4)|=|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4|=|\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}|=|\dfrac{(x+2)^2}{x+2}|=|x+2|<\delta=\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-2|=|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2|=|\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}|=|\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1}|=|\sqrt{x}-1|=|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}|<|x-1|<\delta=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$

（4）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，使得当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有

$|f(x)-0|=|x\sin\dfrac{1}{x}-0|=|\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}|<|\dfrac{1}{\frac{1}{x}}|=|x|<\delta=\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

（5）$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\sqrt{\varepsilon}>0$，使得当 $x>X$ 时，有

$|f(x)-2|=|\dfrac{1+2x^2}{x^2}-2|=\dfrac{1}{x^2}=<\dfrac{1}{X^2}=\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^2}{x^2}=2$

（6）$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\varepsilon^2>0$，使得当 $x>X$ 时，有

$|f(x)-0|=|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0|<|\dfrac{1}{\sqrt{x}}|=<\dfrac{1}{\sqrt{X}}=\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$

10. 解：$\forall M>0$，$\exists\delta=\dfrac{1}{M}>0$，使得当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有

$|f(x)|=|\dfrac{1+x}{x}|<|1+\dfrac{1}{x}|=1+|\dfrac{1}{x}|>1+\dfrac{1}{\delta}=1+M$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{x}=\infty$

11. 解：

（1）A. $|\cos\dfrac{2}{x^2}|\le 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{|\cos\dfrac{2}{x^2}|}=0$

（2）C. $\lim\limits_{x\to 0}|\arctan\dfrac{1}{x}|=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\arctan\dfrac{1}{x}=0$

（3）A. 考虑 a=0 的情况，BCD 错误。

习题 1.4（P54）

1. 解：

（1）$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x-4)=2^3-2\times 2-4=0$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+4}{x-2}=\dfrac{4}{0-2}=-2$

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^3+2x-1}=\dfrac{2^2-1}{2^3+2\times 2-1}=\dfrac{3}{11}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{(x+1)}{(2x+1)}=\dfrac{2}{3}$

（5）$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}=\dfrac{1}{(\sqrt{2+x}+3)}=\dfrac{1}{6}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{(\sqrt[6]{1+x}-1)((\sqrt[6]{1+x})^2+\sqrt[6]{1+x}+1)}{(\sqrt[6]{1+x}-1)(\sqrt[6]{1+x}+1)}=\dfrac{((\sqrt[6]{1+x})^2+\sqrt[6]{1+x}+1)}{(\sqrt[6]{1+x}+1)}$

$=\dfrac{1+1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)})=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{-2}{(\frac{1}{x}+1)(1-\frac{1}{x})})=-2$

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{4x^2-3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{4-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^2(3x+1)^3}{(2x+1)^5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{(2x-3)^2(3x+1)^3}{x^5}}{\frac{(2x+1)^5}{x^5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\frac{3}{x})^2(3+\frac{1}{x})^3}{(2+\frac{1}{x})^5}=\dfrac{2^2\times 3^3}{2^5}=\dfrac{27}{8}$

（10）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})=8\sqrt{3}$

（11）因为$|\sin x|\le 1$有界，则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$

（12）因为$|\cos x|\le 1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\cos x=0$

2. 解

（1） 令$u=\sqrt[3]{x}$，$x=u^3$，$x\to 1\Rightarrow u\to 1$，则

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{\sqrt{u^3}-1}=\lim_{u\to1}\frac{(\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}+1)}{(\sqrt{u}-1)((\sqrt{u})^2+\sqrt{u}+1)}=\lim_{u\to1}\frac{(\sqrt{u}+1)}{((\sqrt{u})^2+\sqrt{u}+1)}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

（2） 令$u=\sqrt[4]{x}$，$x=u^4$，$x\to16\Rightarrow u\to2$，则

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim_{u\to2}\frac{u-2}{u^2-4}=\lim_{u\to2}\frac{u-2}{(u+2)(u-2)}=\lim_{u\to2}\frac{1}{u+2}=\frac{1}{4}$$

（3） 令$u=\sqrt[3]{x}$，$x=u^3$，$x\to1\Rightarrow u\to1$，则

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{u\to1}\frac{u^2-2u+1}{(u^3-1)^2}=\lim_{u\to1}\frac{(u-1)^2}{(u-1)^2(u^2+u+1)^2}=\lim_{u\to1}\frac{1}{(u^2+u+1)^2}=\frac{1}{9}$$

（4） 令$u=\sqrt[12]{1+x}$，$x\to0\Rightarrow u\to1$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{u\to1}\frac{u^3-1}{u^4-1}=\lim_{u\to1}\frac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u-1)(u+1)(u^2+1)}=\lim_{u\to1}\frac{u^2+u+1}{(u+1)(u^2+1)}=\frac{3}{4}$$

3. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

4. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-\alpha x^2-\alpha x-\beta x-\beta}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+1-\beta}{x+1}=0$

则$1-\alpha=0$，$\alpha+\beta=0$，故$\alpha=1$，$\beta=-1$

5. 解：$x\to x_0$时，$f(x)$有极限，$g(x)$没有极限。当$x\to x_0$，$f(x)\pm g(x)$没有极限，$f(x)g(x)$不一定有极限（$x_0=\infty$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x$）。

6. 解：$x\to x_0$时，$f(x)$，$g(x)$都没有极限。$f(x)\pm g(x)$不一定有极限（例如：$f(x)=\mp g(x)$），$f(x)g(x)$不一定有极限（当$x\to\infty$时，$f(x)=g(x)=x$时$f(x)g(x)$没有极限；当$x\to\infty$时，$f(n)=(-1)^n$，$g(n)==(-1)^{n+1}$，$f(n)g(n)=(-1)^{2n+1}=-1$，$n=1,2,3\cdots$）。

7. 解：

（1）$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=1$

（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2x+h)h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x+\ldots+x^{n-1})=n$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2}=2$

（5）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{1+2x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}2\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}2\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

（6）因为$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$

8. 解；$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+a)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+a)=3+a=4$

则$3+a=4$且$(x-3)(x+a)=x^2-2x+k$，则$a=1$，$k=-3$

习题 1-5

(A)

1. (1) D　　　　(2) B

2. (1) $e^{-1/2}$　(2) e　(3)3/4　(4) e^2　(5)$(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$　(6) e^{x+1}

3. (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{(5x)^2}=\dfrac{2}{25}$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1$

(4) 原式$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-1$

(5) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x\cdot 2x}=\dfrac{9}{4}$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{2\sin x}{x+\sin x})=1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+\dfrac{x}{\sin x}}=0$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[1+(-\dfrac{2}{x})]^{-\frac{x}{2}\cdot\frac{2-x}{x}}=\dfrac{1}{e}$

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{2x}=-2$

4. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{4a}{x-2a})^{\frac{x-2a}{4a}\cdot\frac{4ax}{x-2a}}=e^{4a}=8$

$\therefore a=\dfrac{3}{4}\ln 2$

5. (1) 错，无穷小是极限为零的变量，无穷大是其值无限增大的变量

(2) 错

(3) 正确

(4) 正确

(5) 错，反例见例 3.8

(6) 错，反例：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

(7) 错，

6. 解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}=1$ ，故它们是等价无穷小

7. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{x^2}=0$，故 $(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的高阶无穷小

8. 解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})=3$，故 $1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1+x}=1$，故 $1-x$ 与 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 是等价无穷小

9. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}}{2x}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & m<n\\ 1, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)-[1-\dfrac{1}{2}(2x)^2+o(4x^2)]}{\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}=3$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\cdot(\cos x-1)}{\dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\cdot(-\dfrac{1}{2}x^2)}{x^3}=-3$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\dfrac{1}{2}\cdot(-x^2)}=-2$

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{n})^2=\dfrac{\pi^2}{2}$

(B)

10. (1) D (2) B (3) D

11. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\pi(x-1)}=\dfrac{2}{\pi}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{2}x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{4}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{4}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{5}{x-3})^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5x}{x-3}}=e^5$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1-2x^2)^{\frac{1}{-2x^2}\cdot\frac{-2x^2}{\sin^2 x}}=e^0=1$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}\cdot\frac{-3x}{\sin x}}=e^{-6}$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}[9^x(1+\frac{1}{3^x})]^{\frac{1}{x}}=9\cdot e^0=9$

12. 证明：$\because\ \lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim\limits_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$

$\therefore$ 原极限不存在

13. 解：$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x})=0+1=1$

$$\lim_{x\to0^-}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x})=2-1=1$$

$\therefore$ 原式=1

14. 解：$f(x)=\lim\limits_{t\to x}(1+\frac{x-t}{t-1})^{\frac{t-1}{x-t}\cdot\frac{x-t}{t-1}\cdot\frac{1}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{1}{t-1}}=e^{\frac{1}{x-1}}$

15. 证明：(1) 设 t=arctanx，则 $x\to0$时，$t\to0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=1$$

$$\therefore \arctan x\sim x$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

$$\therefore \sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$$

16. 证明：(1) 因为 $\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$，故有 $\alpha\sim\alpha$

(2) 由 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$ 有 $\alpha=\beta+o(\beta)$

所以 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\beta+o(\beta)}=\lim\frac{1}{1+\frac{o(\beta)}{\beta}}=1$，故有 $\beta\sim\alpha$

(3) 因为$\alpha \sim \beta$，所以$\alpha = \beta + o(\beta)$

因为$\beta \sim \gamma$，所以$\gamma \sim \beta$，所以$\gamma = \beta + o(\beta)$

所以$\lim \dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim \dfrac{\beta + o(\beta)}{\beta + o(\beta)} = 1$，故有$\alpha \sim \gamma$

习题 1-6

(A)

1. (1) B　(2) C　(3) A　(4) D

2. (1) -1, 1　(2) kπ

3. (1) 原式$=(\sin 2 \cdot \dfrac{\pi}{4})^2 = 1$

(2) 原式$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx}{x} = k$

(3) 原式$= \ln 1 = 0$

(4) 原式$= \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{4}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

(5) 原式$= \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \dfrac{-3}{x^2})^{\frac{x^2}{-3} \cdot \frac{-3}{x^2} \cdot x} = e^0 = 1$

(6) 原式$= \lim\limits_{n \to \infty} \ln(1 + \dfrac{2}{n})^n = \lim\limits_{n \to \infty} \ln(1 + \dfrac{2}{n})^{\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n} = \ln e^2 = 2$

(7) 原式$= \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{-1}{3+x})^{-(3+x) \cdot \frac{-1}{3+x} \cdot \frac{x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

(8) 原式$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\dfrac{2}{3}$

4. (1) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x+1}{x-2}$

x=1 是可去间断点，x=2 是无穷间断点

(2)
$$\begin{cases} x, & |x|>1 \\ & \\ & \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -x, & |x|<1 \\ 0, & x=\pm 1 \end{cases}$$

$x=\pm 1$ 是跳跃间断点

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$， x=1 是跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5$， f(x)在 x=2 处连续

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$， x=0 是无穷间断点

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$， x=-1 是跳跃间断点

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$， x=0 是跳跃间断点

(6)
$$f(x)=\begin{cases} 0, & |x|>1 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \\ 1, & |x|<1 \end{cases}$$

$x=\pm 1$ 是跳跃间断点

5. 解：由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3+b=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1-b=f(1)=a$ 得：

a=2， b=-1

6. 证明：设 $f(x)=e^x-2-x$, 因为

$f(0)\cdot f(2)=-2\times(e^2-4)<0$

由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使 $f(\xi)=0$

即，方程 $e^x-2=x$ 在(0,2)内至少有一个实根

7. 证明：设 f(x)=x-2-sinx，因为

$f(0)\cdot f(3)=-2\times(1-\sin 3)<0$

由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,3)$ 使 $f(\xi)=0$

即，方程 x=2+sinx 至少有一个小于 3 的正根

8. 证明：设 $F(x)=f(x)-f(a+x)$, 则有

$F(0)=f(0)-f(a)=f(2a)-f(a)$，　$F(a)=f(a)-f(2a)$

所以，$F(0)\cdot F(a)=-[f(a)-f(2a)]^2\le 0$

若 $F(0)\cdot F(a)=0$，则 $F(0)=F(a)=0$；

若 $F(0)\cdot F(a)<0$，则由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,a)$ 使 $F(\xi)=0$；

综上，至少存在一点 $\xi\in[0,a]$ 使 $F(\xi)=0$，即至少存在一点 $\xi\in[0,a]$ 使 $f(\xi)=f(a+\xi)$

9. 解：设 $F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d)$，则有

$F(c)=qf(c)-qf(d)$,　$F(d)=pf(d)-pf(c)$

所以，$F(c)\cdot F(d)=-pq[f(c)-f(d)]^2\le 0$

若 $F(c)\cdot F(d)=0$，则 $F(c)=F(d)=0$；

若 $F(c)\cdot F(d)\le 0$，则由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(c,d)$ 使 $F(\xi)=0$；

又因为 $a<b<c<d$,所以对任何正数 p,q，至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$,使得 $F(\xi)=0$，即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

(B)

10. (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\frac{x}{a})^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x}{a})^{\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}-3}{5e^{2x}+1}=\frac{2}{5}$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{4\sin x}{x}-3x^2\cos\dfrac{2}{x}}{\dfrac{\tan 2x}{x}}=\dfrac{4-0}{2}=2$

(4) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+\dfrac{2}{\frac{1}{x}-1})^{\frac{\frac{1}{x}-1}{2}\cdot\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{2x}}=\ln e^1=1$

(5) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2}\cdot n}=e$

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2x\cdot3x}=\dfrac{1}{12}$

(7) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(8) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=1$

11. (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　　x=1 是可去间断点

$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=0$　　x=$k\pi+\dfrac{\pi}{2}$是可去间断点

$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)$不存在　　x=$k\pi$是无穷间断点

(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$　　x=0 是无穷间断点

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$　　x=1 是可去间断点

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=+\infty$　　x=2 是无穷间断点

12. 解：由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1-b}{a}=\infty$，知：a=0，b≠1

由$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e-b}{x-1}$存在，知：b=e

所以，a=0，b=e

13. 解：

$$h(x)=\begin{cases}x+b & x\le0\\ 2x+1 & 0<x<1\\ x+a+1 & x\ge1\end{cases}$$

由 $\begin{cases} h(0^-)=h(0^+) \\ h(1^-)=h(1^+) \end{cases}$ 得：a=b=1

所以，当 a=b=1 时，f(x)+g(x)在(-∞,+∞)上连续

14. 解：化简得：

$$f(x)=\begin{cases} x, & |x|>1 \\ ax^2+bx, & |x|<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1) & x=1 \\ \frac{1}{2}(a-b-1) & x=-1 \end{cases}$$

由 $\begin{cases} f(1^-)=f(1^+)=f(1) \\ f(-1^-)=f(-1^+)=f(-1) \end{cases}$ 得：a=0，b=1

15. 证明：设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$,则 $f(0)\cdot f(1)=1\times(-10)<0$

所以，存在$\xi\in(0,1)$使 $f(\xi)=0$,即原方程在(0,1)上存在实根

唯一性：

16. 证明：设 F(x)=f(x)-x,则由题意有：

$$F(a)=f(a)-a>0;F(b)=f(b)-b<0$$

所以，存在 $C\in(a,b)$使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$.

17. 证明：

令 $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$，则有：

$g(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)=f(\frac{1}{2})-f(1);g(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$ 且 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续

$\therefore \ni \xi_1\in(0,\frac{1}{2})$，使得：$g(\xi_1)=f(\xi_1+\frac{1}{2})-f(\xi_1)=0$ 即：$f(\xi_1+\frac{1}{2})=f(\xi_1)$

令 $h(x)=f(x+\frac{1}{4})-f(x)$，则有：

$h(\xi_1)=f(\xi_1+\frac{1}{4})-f(\xi_1)=f(\xi_1+\frac{1}{4})-f(\xi_1+\frac{1}{2});f(\xi_1+\frac{1}{4})=f(\xi_1+\frac{1}{2})-f(\xi_1+\frac{1}{4})$ 且

$h(x)$ 在$\left[\xi_1,\xi_1+\frac{1}{4}\right]$上连续

$\therefore \exists\xi_2\in\left(\xi_1,\xi_1+\frac{1}{4}\right)$，使得：$h(\xi_2)=f(\xi_2+\frac{1}{4})-f(\xi_2)=0$ 即：$f(\xi_2+\frac{1}{4})=f(\xi_2)$，

证毕.

18. 证明：若 $f(x_1)=f(x_2)$,则结论显然成立

若 $f(x_1)>f(x_2)$,则有 $f(x_1)>\sqrt{f(x_1)f(x_2)}>f(x_2)$,由介值定理知：至少存在一点$\xi\in[x_1,x_2]$,使得 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$

若 $f(x_1)<f(x_2)$,则有 $f(x_1)<\sqrt{f(x_1)f(x_2)}<f(x_2)$,由介值定理知：至少存在一点$\xi\in[x_1,x_2]$,使得 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$

总上可知，原结论成立

19. 证明：由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$得：$f(0)=0$

取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,因为：

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0+x_0)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)=f(0)=0$$

所以，$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

20. 证明：由于对$\forall x_1,x_2\in[0,1]$,有

$$|x_1^3-x_2^3|=|x_1-x_2|\cdot|x_1^2+x_1x_2+x_2^2|\le 3|x_1-x_2|$$

于是对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，对$\forall x_1,x_2\in[0,1]$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，就有：$|x_1^3-x_2^3|<\varepsilon$.

故 $f(x)=x^3$ 在区间[0,1]上一致连续

21.

习题 2—1 （A）

1. 单项选择题。

（1） C

解：$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{3h}=-\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$
$$=-\frac{1}{3}f^{'}(0)=-\frac{1}{3}$$

（2） A

解：$$\lim_{x\to 1^{+}}\frac{\left|x^{2}-1\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{x^{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^{+}}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to 1^{-}}\frac{\left|x^{2}-1\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{1-x^{2}}{x-1}=-\lim_{x\to 1^{-}}(x+1)=-2$$

所以$f(x)$在 x=1 处不连续。

（3） C

解：函数$f(x)$在 x=0 处可导，则函数在 x=0 处连续。

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^{-}}f(x)=\lim_{x\to 0^{-}}(ax+b)=b$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}(x^{2}\sin\frac{1}{x})=0$$

∴当 b=0 时，保证$f(x)$在 x=0 处连续；

又∵ $f_{-}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{(a\Delta x+b)-b}{\Delta x}=a$；

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta x^{2}\sin\frac{1}{\Delta x}-b}{\Delta x}=b,$$

∴为保证$f(x)$在 x=0 处可导，a=b。

2. 填空题。

（1） $2f^{'}(x_0)$

析：$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}\cdot 2=2f^{'}(x_0)$$

（2）$-5f'(x_0)$

析：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{-5h}\cdot(-5)=-5f'(x_0)$

（3）$4f'(x_0)$

析：
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\cdot 3+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=4f'(x_0)$$

（4）$2f(x)f'(x)$

析：
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)+f(x)\right]\left[\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]\right]}{\Delta x}=2f(x)f'(x)$$

（5）$\dfrac{1}{3}$

析：$\because$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}\bullet k=kf'(x_0)=\frac{1}{3}f'(x_0)\neq 0$$

$\therefore k=\dfrac{1}{3}$

（6）$2\alpha f'(x_0)$

析：原式$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\alpha\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0)}{\alpha\Delta x}\bullet\alpha+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\alpha\Delta x)-f(x_0)}{-\alpha\Delta x}\bullet\alpha$$
$$=\alpha f'(x_0)+\alpha f'(x_0)=2\alpha f'(x_0)$$

（7）4

析：$v=s'=2t(m/s)$

3. 用导数定义证明下列等式成立。

（1）$(\cos x)'=-\sin x$

证明：$(\cos x)'$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\bullet\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=-\sin x$$

（2）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

证明：$(\ln x)'$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln e}$$

$$=\frac{1}{x}$$

（3）$(\sqrt{1+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

证明：$(\sqrt{1+x^2})'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}-\sqrt{1+x^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x(\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4. 求下列函数的导数。

（1）$y=x^7$

解： $y^{'}=7x^{6}$

（2） $y=\sqrt[4]{x^{7}}$

解： $y=\sqrt[4]{x^{7}}=x^{\frac{7}{4}}$

$y^{'}=\frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$

（3） $y=x^{2.5}$

解： $y^{'}=(x^{2.5})^{'}=2.5x^{1.5}$

（4） $y=\frac{x^{2}\bullet\sqrt[9]{x^{10}}}{\sqrt[4]{x^{3}}}$

解： $y^{'}=(x^{\frac{85}{36}})^{'}=\frac{85}{36}x^{\frac{49}{36}}$

（5） $y=\sqrt{x^{8}\sqrt{x\sqrt{x}}}$

解： $y=\sqrt{x^{8}\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^{\frac{35}{8}}$

$\therefore y^{'}=(x^{\frac{35}{8}})^{'}=\frac{35}{8}x^{\frac{27}{8}}$

5. 计算题。

（1） 解： $y^{'}\Big|_{x=\frac{\Pi}{3}}=(\cos x)^{'}\Big|_{x=\frac{\Pi}{3}}=-\sin\frac{\Pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

可知，在 $x=\frac{\Pi}{3}$ 处的切线及法线斜率分别为

$k_{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad k_{2}=-\frac{1}{k_{1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\Pi}{3})$

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\Pi)=0$；

法线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{\Pi}{3})$

即 $y-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\Pi=0$

（2） 解：$y'\big|_{x=0}=e^0=1$

可知，在 $x=0$ 处的切线及法线斜率分别为

$k_1=1 \qquad k_2=-\frac{1}{k_1}=-1$

∴切线方程为 $y-1=1\bullet(x-0)$

即 $y-x-1=0$；

法线方程为 $y-1=-(x-0)$

即 $y+x-1=0$。

（3） 解：若平行于直线 $y=3x-1$

则 设点为（a,a^3）

$y'\big|_{x=a}=3$

即 $3a^2=3$，∴ $\mathrm{a}=\pm1$

∴要求的点为（1，1）或（-1，-1）

（4） 解：由 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ 可知，$f(0)=0$

∴ $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$

（5） 解：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}-1}=2$ 可知，$f(0)=0$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)(\sqrt{1+x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2f(x)}{x}$

∴ $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

（6） 解：$f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)\varphi(x)-0}{x-\alpha}$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=0$

（7）解：$f^{'}(0)=b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$\therefore f^{'}(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}$

$=af^{'}(0)=ab$

6. 解：

（1）$\because y=|\sin x|$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$

$\therefore y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续；

又 $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$ 不存在，

∴y 在 x=0 处不可导。

（2）由 y 表达式可知，$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

∴函数在 x=0 处连续，

又 $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

∴函数在 x=0 处可导。

（3）$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

$\therefore f(x)$ 在 x=0 处连续；

又$\because$ $f_{+}^{'}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\Delta x^{2}}{\Delta x}=0$；

$f_{-}^{'}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{-}}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\neq f_{+}^{'}(0)$

$\therefore f(x)$ 在 x=0 处不可导。

（4） $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\sin x=0$，

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}x^{3}=0=f(0+0)$，

$\therefore f(x)$ 在 x=0 处连续；

又$\because$ $f_{+}^{'}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$

$f_{-}^{'}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{-}}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\Delta x^{3}}{\Delta x}=0\neq f_{+}^{'}(0)$

$\therefore f(x)$ 在 x=0 处不可导。

7. 证明题。

（1） 证明：$\because$ $f(x)=f(-x)$

$\therefore f^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}$

令 t=-x，则 $f^{'}(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{-t}=-f^{'}(0)$

$\therefore f^{'}(0)=0$

（2） 证明：导函数存在，

$f^{'}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$f^{'}(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}$

$\therefore f(x)$ 为奇函数时

$$f^{'}(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x+\Delta x)+f(x)}{-\Delta x}=f^{'}(x)$$

即 $f^{'}(x)$ 为偶函数；

$f(x)$ 为偶函数时

$$f^{'}(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f^{'}(x)$$

即 $f^{'}(x)$ 为奇函数；

证毕。

（3）证明：即要证当 $f(x)=f(x+T)$ 时，$f^{'}(x)=f^{'}(x+T)$

设 x_0 为定义域中的任意一元素，

$$\because f^{'}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+T)-f(x_0+T)}{(x+T)-(x_0+T)}=f^{'}(x_0+T)$$

由 x_0 的任意性知，结论成立。

习题 2—1 （B）

8.

解：在 x_0 处的线密度即为质量对长度的函数的导函数在 x_0 处的值，

$$\rho\Big|_{x=x_0}=m(x)\Big|_{x=x_0}\ (x_0\in[0,1])$$

9.

证明：$f(x)$ 在 x=0 处可导

$\therefore$原式=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)$$

证毕。

10.

解：由 7（3）中证明知，$f'(9)=f'(1)$

又 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$ 等价于 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$

∴ $f'(1)$ 即为所求的切线斜率 k_1

∴法线斜率 $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{2}$

11.

解：可去间断点

∵ $f(x)$ 为奇函数，

∴ $f(0)=-f(-0)=-f(0)$

∴ $f(0)=0$；

又∵ $f(x)$ 在 x=0 处可导

∴ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(x_0)$

即函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 x=0 处存在极限，

显然 $\frac{f(x)}{x}$ 在 x=0 处无定义，

∴x=0 为 $\frac{f(x)}{x}$ 的可去间断点。

12.

解：$f'(x)=x'\left[(x-1)\cdots(x-1000)\right]+x\left[(x-1)\cdots(x-1000)\right]'$

∴ $f'(0)=\left[(-1)\cdots(-1000)\right]+0=1000!$

13.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x\bullet\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+1)}{x\bullet x\bullet 1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+1)-f(1)}{x^2}$

∴令 $t=x^2+1$，$x\to 0$ 得 $t\to 1$

原式=$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=f^{'}(1)=2$

14.

解：$g^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$

∴ $f^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\bullet\sin\dfrac{1}{x}=0$

15.

解：连续性，

$f(0)=b+a+2$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[b(1+\sin x)+a+2\right]=b+a+2$，

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{ax}-1)=0$，

∴要连续，则 b+a+2=0　①

可导性，

$f_-^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1-b-a-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}ae^{ax}=a$

$f_+^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b\sin x}{x}=b$

∴要可导，则 a=b　②

由①②两式得 a=b=−1

16.

解：$f(0)=0$，

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{2}x^{2}}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$f_{-}^{'}(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{x^{2}g(x)}{x}=\lim_{x\to0^{-}}xg(x),$$

又∵ $g(x)$ 有界

∴ $|g(x)|\le M$ ， M 为常数

∴ $f_{-}^{'}(0)=\lim_{x\to0^{-}}xg(x)=0$

∴ $f^{'}(0)=0$

17.

解：由 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sin(x-1)}=2$ 可以看出 $f(1)=0$

令 t=x-1，则 x→1 等效于 t →0

∴ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sin(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t+1)}{\sin(t)}=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t-0}=f^{'}(1)=2$

18.

解：令 $g(x)=(x-2)^{2}(x-3)^{3}(x-4)^{4}$

则 $f(x)=(x-1)g(x)$

$f^{'}(x)=g(x)+(x-1)g^{'}(x)$

∴ $f^{'}(1)=g(1)+0=-648$

又令 $h(x)=(x-1)(x-2)^{2}(x-4)^{4}$

$f(x)=(x-3)^{3}h(x)$

$f^{'}(x)=3(x-3)^{2}h(x)+(x-3)^{3}h^{'}(x)$

∴ $f^{'}(3)=3(3-3)^{2}h(3)+(3-3)^{3}h^{'}(3)=0$

19.

证明：充分性

$f(x)$可导，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$存在

当$f(0)=0$时

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$存在

即$F(x)$在 x=0 处可导

必要性

$$F^{'}(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x-0}$$

又$F_{+}^{'}(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)+f(x)\sin x}{x-0}=f^{'}(x)+f(0)$

$$F_{-}^{'}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f(x)\sin x}{x-0}=f^{'}(x)-f(0)$$

所以，要$F^{'}(0)$存在，则$f^{'}(x)+f(0)=f^{'}(x)-f(0)$

$\therefore f(0)=0$

综上，得证

习题 2—2 （A）

1. 单项选择题。

（1） B

析：$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，$dy = f^{'}(x_0)\Delta x$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f^{'}(x_0) - f^{'}(x_0) = 0$$

（2） B

析：$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$，$dy\Big|_{x=x_0} = 2x_0\Delta x$

$\therefore \Delta y - dy = (\Delta x)^2$

（3） B

析：$\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a + b\Delta x + c(\Delta x)^2$

$$\therefore f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a$$

$\therefore dy = f^{'}(x_0)dx = adx$

2. 将适当的函数填入下列括号内。

（1）$d(c) = 0$

（2）$d(2x) = 2dx$

（3）$d(\frac{1}{2}x^2) = xdx$

（4）$d(x^3) = 3x^2dx$

（5）$d(\sqrt{x}) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

（6）$d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$

（7）$d(\sin x) = \cos dx$

（8）$d(e^x) = e^x dx$

（9）微分的几何意义：对应曲线的切线上点的纵坐标的相应增量。

（10）高阶

3. 计算题。

解：　（1）$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3$，$dy=3x^2\Delta x$

∴在 x=2 处

$\Delta x=1$时，$\Delta y=(2+1)^3-2^3=19$，$dy=3\times 2^2\times 1=12$；

$\Delta x=0.1$时，$\Delta y=(2+0.1)^3-2^3=1.216$，$dy=3\times 2^2\times 0.1=1.2$；

$\Delta x=0.01$时，$\Delta y=(2+0.01)^3-2^3=0.121$，$dy=3\times 2^2\times 0.01=0.12$

（2）$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$，$dy=-\sin xdx=-\sin x\Delta x$

∴在$x=\frac{\Pi}{3}$处

$\Delta x=\frac{\Pi}{180}$时，$dy=-\sin\frac{\Pi}{3}\times\frac{\Pi}{180}=-\frac{\sqrt{3}\Pi}{360}$；

$\Delta x=\frac{\Pi}{30}$时，$dy=-\sin\frac{\Pi}{3}\times\frac{\Pi}{30}=-\frac{\sqrt{3}\Pi}{60}$

（3）$y=x|x|=x^2 \quad x\geq 0$

$y=x|x|=-x^2 \quad x<0$

∴ $y'=2x \quad x\geq 0$

$y'=-2x \quad x<0$

∴ $dy=y'dx=2xdx \quad x\geq 0$

$dy=y'dx=-2xdx \quad x<0$

4. 计算下列各题。

解：　（1）$y=f(x)=\ln x$；　$x_0=781$；　$\Delta x=1$

则，$f(x_0+\Delta x)=\ln 782$

∴ $\ln 782=\ln 781+\frac{1}{x}\Big|_{x=781}\times 1=6.66186$

（2）令$f(x)=\sin x$；　$x_0=30^\circ=\frac{\Pi}{6}$；　$\Delta x=0.5^\circ=\frac{\Pi}{360}$

$\therefore \sin 30^{\circ}30^{'} = \sin\frac{\Pi}{6} + \cos x\Big|_{x=\frac{\Pi}{6}} \times \frac{\Pi}{360} = 0.5076$

（3）令 $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$；　$x_0 = 81$；　$\Delta x = -1$

则 $\sqrt[4]{80} = 81^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}\big|_{x=81} \times (-1) = 2.9907$

（4）球的体积 $V = \frac{4}{3}\Pi \times \frac{D^3}{2} = \frac{1}{6}\Pi D^3$

$\because \Delta V \approx \frac{dV}{dD} \times \Delta D = \frac{1}{2}\Pi D^2 \Delta D$

由已知 $\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le 1\%$

即 $\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le 1\% \left|\frac{\frac{1}{2}\Pi D^2 \Delta D}{\frac{1}{6}\Pi D^3}\right| = 3\left|\frac{\Delta D}{D}\right| \le 0.01$

$\therefore \left|\frac{\Delta r}{r}\right| = \left|\frac{\Delta D}{D}\right| \le \frac{0.01}{3} = 0.33\%$

∴测球半径时，所允许产生的相对误差是 0.33%

习题　2-3 (A)

1、 填空题。

（1） $y^{'} = \sin x + \sin x \cdot \sec^2 x$；（2） $y^{'} = \sec x \cdot \ln x - \sec x \cdot \csc^2 x \cdot \ln x + \frac{1}{x}\csc x$；

（3） $y^{'} = 2e^{2x} + 2^x \ln 2$；（4） $y^{'} = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$；（5） $y^{'} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$；

（6） $y^{'} = \frac{1}{2}\sec x \cdot \csc x$；（7） $d(\frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}}) = \frac{v^3}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}du + \frac{u^3}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}dv$；

（8）-2;（9） $e^{\tan^k x} \cdot k\tan^{k-1} x \cdot \sec^2 x, \frac{1}{2}$；（10） $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$；（11） $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}$；

（12） $\frac{3}{25}$；（13） $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$；（14） $2x - y - 2 = 0, 2x - y + 2 = 0$；（15） $\frac{\pi}{4}$；

（16） $9y + x - 6 = 0, y + x + 2 = 0$；（17） 0；（18） $4xe^{2x}$；（19） $e^{2t}(1 + 2t)$；

（20）$-\cos x^2$；（21）$-\frac{1}{2}e^{-x^2}$；（22）$\arcsin x$；（23）$\arcsin 2x$；（24）$\arctan x$；

（25）$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$；（26）$\ln\frac{x-1}{x}$；（27）$\ln\ln x$；（28）$\frac{1}{3}\tan 3x$；

（29）$\ln(1+e^x)$；（30）$\ln(1+f(x))$。

2、求函数的导数与微分

（1）$y'=-20x^{-6}-28x^{-5}+2x^{-2}$；（2）$y'=\frac{5x^4}{a}-\frac{b}{x^2}$；（3）$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；

（4）$y'=\frac{2a}{a+b}x+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}$（裂项分开后分别求导）；

（5）$y'=-\frac{4}{3}\frac{x}{(x^2-1)^2}+4x(1-x^2)$；

（6）$y'=2x\ln x+x$；（7）$y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$；（8）$y'=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$；

（9）$y'=abx^{b-1}(1+bx^a)+abx^{a-1}(1+ax^b)=ab[x^{b-1}+x^{a-1}+(a+b)x^{a+b-1}]$（乘法求导）；

（10）$y'=\frac{-3x^2\cdot\sqrt{x}-(1-x^3)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}=-\frac{5x^3+1}{2x\sqrt{x}}$（除法求导公式）；

（11）$y'=2x(\cos x+\sqrt{x})-x^2\sin x+\frac{1}{2}x\sqrt{x}$；（12）$y'=3\sin(4-3x)$；

（13）$y'=-6xe^{-3x^2}$；（14）$y'=2x\sec^2(x^2)$；（15）$y'=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

（16）$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x+\sqrt[3]{x}\cos x+a^xe^x+a^xe^x\ln a$；（17）$y'=\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}$；

（18）$y'=\cos 2x+2\sec^2 x+\sec x\tan x$；（19）$y'=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$；

（20）$y'=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$；

（21）$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{1+x^2}$；

（22）$y'=3\ln^2(2x+1)\cdot\frac{1}{2x+1}\cdot 2=\frac{6\ln^2(2x+1)}{2x+1}$；

（23） $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln 3x)} \cdot 2\ln(\ln 3x)\frac{1}{\ln 3x} \cdot \frac{3}{3x} = \frac{2\ln(\ln 3x)}{x\ln^2(\ln 3x) \cdot \ln 3x}$；

（24）$y' = n(\sin mx)^{n-1} \cdot \cos mx \cdot m \cdot (\cos nx)^{-m} + (\sin mx)^n \cdot (-m)(\cos nx)^{-m-1} \cdot (-\sin nx) \cdot n$

$= nm(\sin mx)^{n-1} \cdot (\cos nx)^{-m-1}[\cos mx \cdot \cos nx + \sin mx \cdot \sin nx]$

$= nm(\sin mx)^{n-1} \cdot (\cos nx)^{-m-1} \cos(m-n)x$；

（25） $y' = \sec x$；（26） $y' = \csc x$；（27） $y' = \frac{1}{2x}(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln x}})$；

（28） $y' = \csc x$；（29） $y' = \frac{1}{x\ln x}$；

（30） $y' = [(\cos\frac{x}{a})^{-2} + (\sin\frac{x}{a})^{-2}]' = -2(\cos\frac{x}{a})^{-3} \cdot (-\sin\frac{x}{a}) \cdot \frac{1}{a} - 2(\sin\frac{x}{a})^{-3} \cdot (\cos\frac{x}{a}) \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{2}{a}[(\cos\frac{x}{a})^{-3} \cdot (\sin\frac{x}{a}) - (\sin\frac{x}{a})^{-3} \cdot (\cos\frac{x}{a})]$

$= \frac{2}{a}[(\sec\frac{x}{a})^2 \cdot \tan\frac{x}{a} - (\csc\frac{x}{a})^2 \cdot \cot\frac{x}{a}]$；

（31） $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$；（32） $y' = 10^{x\tan 2x} \ln 10(\tan 2x + 2x\sec^2 2x)$；

（33） $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}$（先分母有理化，再利用除法公式求导）；

（34） $y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})\right]$

$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})\right]$；

（35） $y' = \sin(2x^2 + 1) + x \cdot 4x\cos(2x^2 + 1)$；

（36） $y' = a^{b^x} \ln a \cdot b^x \ln b + a^b \cdot x^{a^b - 1} + b^{x^a} \ln b \cdot ax^{a-1}$；

（37） $y = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}{x^2}$

先对 $\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}{x^2}$ 求导：

$$[\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}{x^2}]' = \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}\cdot(-\frac{4}{x^3}+2\frac{\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}-2x\sqrt{1+x^2}}{x^4})$$

$$= \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}\cdot(-\frac{4}{x^3}+2\frac{x^3-2x-2x^3}{x^4\sqrt{1+x^2}})$$

$$= -\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}\cdot\frac{2(\sqrt{1+x^2}+1)^2}{x^3\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$$

则

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}};$$

（38）$y' = -e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$。

3、利用一阶微分形式不变性求函数导数。

（1）$y' = \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)-(x^2+a^2)^2}}$；（2）$y' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$；（3）$y' = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$；

（4）$y' = \frac{2}{1-x^2}$；（5）$y' = \frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$；（6）$y' = 2\sqrt{1-x^2}$；

（7）$y' = \frac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$；

（8）原式变形为 $\sin y = \frac{2\sin x+1}{2+\sin x} = 2-\frac{3}{\sin x+2}$ 两边对 x 求导，有

$$\cos y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos x}{(\sin x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}\cdot\frac{3\cos x}{(\sin x+2)^2}$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\frac{2\sin x+1}{2+\sin x})^2} = \frac{\sqrt{3}\cos x}{2+\sin x}$$

则

$$y' = \frac{2+\sin x}{\sqrt{3}\cos x}\cdot\frac{3\cos x}{(\sin x+2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin x+2};$$

（9） $dy = d(\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}d(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$

$$= \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot (-\frac{2}{(1+x)^2})dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2x(1-x)}}{2x(1-x^2)}dx$$

所以 $y' = -\frac{\sqrt{2x(1-x)}}{2x(1-x^2)}$；

（10） $dy = \frac{1}{\cos(\arctan\frac{e^x - e^{-x}}{2})} d(\cos(\arctan\frac{e^x - e^{-x}}{2}))$

$$= \frac{1}{\cos(\arctan\frac{e^x - e^{-x}}{2})} \cdot (-\sin(\arctan\frac{e^x - e^{-x}}{2})) \cdot \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} d(\frac{e^x - e^{-x}}{2})$$

$$= -\frac{1}{\frac{2}{e^x + e^{-x}}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx$$

$$= -thxdx$$

所以 $y' = -thx$；

（11） $y' = \arcsin(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$；（12） $y' = 0$；（13） $y' = \frac{-2}{1+x^2}\operatorname{sgn} x$；

（14） $dy = d(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2xdx + d(\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$

所以 $y' = \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$；

（15） $y' = \frac{2\sqrt{2}e^{2x}}{2+e^{4x}}$。

4、（1） $y' = 2xf'(x^2)$；（2） $y' = \sin(2x)(f(\sin^2 x) - f(\cos^2 x))$；

（3） $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$；（4） $y' = e^{f(x)}f'(x)$；（5） $y' = \cos(f(x))f'(x)$；

（6）$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$；（7）$y' = f'(x^2+f(x)e^x)(2x+e^x f'(x)+f(x)e^x)$；

（8）$y' = \dfrac{1}{f(g(x^2))}\cdot\cdot 2x = \dfrac{2x}{f(g(x^2))}\cdot f'(g(x^2))\cdot g'(x^2)$；

（9）$y' = f'(f(f(\cot x)))\cdot f'(f(\cot x))\cdot f'(\cot x)\cdot(-\dfrac{1}{\sin^2 x})$

$= -\csc^2 x f'(f(f(\cot x)))\cdot f'(f(\cot x))\cdot f'(\cot x)$。

5、（1）先求，代入等式左边，变形整理等于右边。

$$y' = x+\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$= x+\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x+\sqrt{1+x^2}$$

将 y' 代入即证。

（2）$y' = \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\cdot\frac{(2x+\sqrt{2})(x^2-x\sqrt{2}+1)-(x^2+x\sqrt{2}+1)(2x-\sqrt{2})}{(x^2-x\sqrt{2}+1)^2}$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2x^2}{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}(x^2-1)-2x^2\sqrt{2}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}(x^2+1)-4\sqrt{2}x^2}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1+x^2}{2(1+x^4)}$$

$$= \frac{1}{1+x^4}$$

同理，代入即证。

（B）

6、$y' = f'(\dfrac{3x-2}{3x+2})\cdot(1-\dfrac{4}{3x+2})' = [\arctan(\dfrac{3x-2}{3x+2})^2]\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}$，

则　　$y'\big|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}\cdot 3 = \dfrac{3\pi}{4}$。

7、$y = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n(x+2)})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln[(1+\dfrac{1}{n(x+2)})^{n(x+2)}]^{\frac{1}{x+2}}$

$$=\ln e^{\frac{1}{x+2}}=\frac{1}{x+2}$$

所以 $dy=-\frac{1}{(x+2)^2}dx$。

8、令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$， $f(t)=\frac{1}{1+t}$，即 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，

所以 $f^{'}(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$。

9、利用换元可得， $f(x)=(1-x)e^{x-1}$，所以 $f^{'}(x)=-xe^{x-1}$。

10、 $f^{'}(x+3)=5x^4$。

11、令 $x=\frac{1}{x}$，有 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$，所以由

$$\begin{cases}2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x\\ f(x)+2f(\frac{1}{x})=\frac{3}{x}\end{cases}$$

解得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}$，所以 $f^{'}(x)=2+\frac{1}{x^2}$。

12、因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，所以在 $x=0$ 处不可导，因此

$$f^{'}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x},x>0\\ e^{\sin x}\cos x,x<0\end{cases}。$$

13、在 $x=1$ 处连续，但是 $\lim\limits_{x\to1^+}f^{'}(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f^{'}(x)$，所以在 $x=1$ 处不可导，在 $x=-1$ 处不连续，所以

$$f^{'}(x)=\begin{cases}1,x>1\\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x,-1<x<1\\ -1,x<-1\end{cases}。$$

14、解： $f^{'}(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda}(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}(\sin\frac{1}{x})$，若在 $x=0$ 处连续，则 $f^{'}(0)$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to0}f^{'}(x)$ 存在，所以 $\lambda>2$。

15、解：由已知在 $x=0$ 处连续并且在 $x=0$ 处左导数等于右导数，即

$$\begin{cases} b+a+2=0 \\ a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}。$$

16、解：$f(x)$ 在 $x=0$ 处无导数，在 $x=1$ 处不连续，所以

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x-1)\arctan\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+1}, x>1 \\ 2^x\ln 2, 0<x<1 \\ -2^{-x}\ln 2, x<0 \end{cases}。$$

17、解：由已知在 $x=0$ 处连续并且在 $x=0$ 处左导数等于右导数，即

$$\begin{cases} a+2=1 \\ 2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}。$$

18、解：

$$\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}=\frac{f(a)+f'(a+\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})}{f(a)}=1+\frac{f'(a+\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x}}{f(a)}+\frac{o(\frac{1}{x})}{f(a)}=1+(\frac{f'(a+\frac{1}{x})+g(\frac{1}{x})}{f(a)})\cdot\frac{1}{x}$$

其中 $g(\frac{1}{x})$ 表示 $\frac{1}{x}$ 的同阶或高阶无穷小。

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)})^x=\lim_{x\to\infty}(1+(\frac{f'(a+\frac{1}{x})+g(\frac{1}{x})}{f(a)})\cdot\frac{1}{x})^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}[(1+(\frac{f'(a+\frac{1}{x})+g(\frac{1}{x})}{f(a)})\cdot\frac{1}{x})^{\frac{f(a)}{f'(a+\frac{1}{x})+g(\frac{1}{x})}x}]^{\frac{f'(a+\frac{1}{x})+g(\frac{1}{x})}{f(a)}}$$

$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

19、

习题 2-4(A)

1、 填空题。

（1）$2y\cdot y'-2y-2xy'=0, y'=\dfrac{y}{y-x}$；（2）$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0, y'=-1$；

（3）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=(e^t\cos t-e^t\sin t)\cdot\dfrac{1}{e^t\cos t+e^t\sin t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$；

（4）$4x+3y-12a=0$；（5）$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$；

（6）$x=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{e}$，

$$ye^{xy}+e^{xy}xy'+\frac{x+1}{y}\cdot\frac{y'(x+1)-y}{(x+1)^2}=0$$

$$\frac{1}{e}+e(y'-\frac{1}{e})=0$$

$$y'=\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e})\text{；}$$

（7）$x=0,y=-1$

$$ye^{xy}+e^{xy}xy'+3y^2\cdot y'-3=0$$

$$y'\big|_{x=0}=\frac{4}{3}\text{；}$$

（8）1；（9）$\dfrac{dx}{(x+y)^2}$；（10）$\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$；（11）$(\ln 2-1)dx$。

2、导数和微分。

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$， $dy=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}dx$；（2）$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y}{1+xe^y},dy=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}dx$；

（3）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}},dy=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}dx$；

（4）

$$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+2y\cdot y')$$

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}(x+y\cdot y')$$

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

；

（5）$y'f(x)+yf'(x)+2xf(y)+x^2\cdot f'(y)y'=2x$

$$y'=\frac{2x-yf'(x)-2xf(y)}{f(x)+x^2\cdot f'(y)}\text{；}$$

（6）$e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$，

$$y'=-\frac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}\text{；}$$

（7）$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$；

（8）$1=y^y\cdot\ln y\cdot y'+y\cdot y^{y-1}\cdot y'$，所以 $y'=\frac{1}{x(\ln y+1)}$；

3、（1）$\ln y=x\ln x$，所以 $\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1$

得 $y'=x^x(\ln x+1)$；

（2）$\ln y=x(\ln x-\ln(x+1))$，所以

$$y'=y(\ln x-\ln(1+x)+x(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}))$$
$$y'=(\frac{x}{1+x})^x(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x})$$；

（3）同（1），有 $y'=(\sin x)^{\cos x}(\cot x\cos x-\sin x\ln\sin x)$；

（4）$y'=e^x+e^{e^x}\cdot e^x+e\cdot x^{e-1}\cdot e^{x^e}$；

（5）$y'=x^{x^x}(x^x(1+\ln x)\ln x+x^{x-1})$；

（6）将两个式子分开，$y=(\tan x)^{\sin x}$ 和 $y=x^x$，分别求导有 $y'=(\tan x)^{\sin x}(\cos x\ln\tan x+\sec x)$ 和 $y'=x^x(\ln x+1)$，所以原式

$$y'=x^x(\ln x+1)+(\tan x)^{\sin x}(\cos x\ln\tan x+\sec x)$$；

（7）$y'=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}(\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)})$；

（8）$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}(\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1})$；

（9）$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}(\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}-\frac{e^x}{4(1-e^x)})$；

（10）

$y'=(x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}}(\frac{2}{x-2}+\frac{2}{3(x+3)}-\frac{16x}{3(3-2x^2)}-\frac{2x}{3(1+x^2)}+\frac{3x^2}{5-2x^3})$；

4、（1）$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=(\cos\theta-\theta\sin\theta)\frac{1}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$；

（2）$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=2e^{t}\cdot\frac{1}{-3e^{-t}}=-\frac{2}{3}e^{2t}$；

（3）$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=[\frac{2}{1+t^2}-2(1+t)]\cdot\frac{1+t^2}{2t}=-(1+t+t^2)$。

5、证明题。

（1）证明：在 $x=x_0$ 处，$y_0=(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2$，$y^{'}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$，所以 $y^{'}\big|_{x=x_0}=\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}$，

得切线方程：$y-(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2=\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

当 $x=0$ 时，$y=(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2+\sqrt{ax_o}-x_o$，当 $y=0$ 时，$x=\sqrt{ax_o}$

所以 $x+y=a$ 为定值。

（2）用（1）的方法写出切线方程，求截距并表示三角形面积，即可。

(B)

6、$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f^{'}(e^{3t}-1)\cdot 3e^{3t}\cdot\frac{1}{f^{'}(t)}=\frac{3e^{3t}f^{'}(e^{3t}-1)}{f^{'}(t)}$，

所以 $\frac{dy}{dx}\big|_{t=0}=3$。

7、$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+t^2)(y^2-e^t)}{2(1-ty)}$。

8、解：$y=x^2$，$\frac{dy}{dx}=2x$；又 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}=\frac{dy}{dx}\big|_{t=0}$，因为 $\frac{dy}{dx}\big|_{t\to 0^+}=\frac{dy}{dx}\big|_{t\to 0^-}=0$，

所以 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}=0$。

9、解：$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta\\ y=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}$,

$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$，$x(\frac{\pi}{2})=0, y(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}$，

所以切线方程：$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-x$。

10、解：$\begin{cases}x=\cos\theta-\cos^2\theta\\ y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\end{cases}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{\sin 2\theta-\sin\theta}$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1, x(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}, y(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以切线方程：$y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})$，

法线方程：$x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})+y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=0$, 即 $x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0$。

11、解：设t时刻容器内水面高度为x，水的体积为V，水面半径为r，现已知$\frac{dV}{dt}=4$，要求$x=5$时的$\frac{dx}{dt}$。

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 x$$

上式两端对t求导，得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dx}{dt}$$

代入解得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{48}{25\pi}(m/\min)。$$

12、解：设t时刻仰角为α，气球上升的高度为x，则

$$\tan\alpha=\frac{x}{500},$$

$$\alpha=\arctan\frac{x}{500},$$

两边对t求导，有

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\frac{1}{500}}{1+(\frac{x}{500})^2}\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{1}{500}}{1+(\frac{500}{500})^2}\cdot 140=\frac{7}{50}(rad/\min)。$$

习题 2-5（A）

1（1）解：∵ $f'(x)=[f(x)]^2$

$$f''(x)=(f'(x))'=2f(x)\cdot f'(x)=2![f(x)]^3$$

……

设 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$

则 $f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'=(n+1)![f(x)]^n * f'(x)=(n+1)![f(x)]^{n+2}$ （A）

（2）解：当 x>0 时：$f'(x)=(f(x)-f(0))/(x-0)=4x^2 \Rightarrow f'(0^+)=0$

$$f''(x)=\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=8x\Rightarrow f''(0^+)=0$$
$$f'''(x)=\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=8\Rightarrow f'''(0^+)=8$$

当 x<0 时：$f'(x)=(f(x)-f(0))/(x-0)=2x^2\Rightarrow f'(0^-)=0=f'(0^+)$

$$f''(x)=\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4x\Rightarrow f''(0^-)=0=f''(0^+)$$
$$f'''(x)=\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=4\Rightarrow f'''(0^-)=4\neq f'''(0^+)$$ 所以答案选（C）

2（1）$f'(x)=5x+2e^{2x}+1/x$

$f''(x)=6+4e^{2x}-1/x^2$

（2）$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{e^x}{x^3}(x^2-2x+2)$

（3）$x=0时,e^y+xy=e,即y(0)=1$

对方程两端求导，得$e^y y'+y+xy'=0\Rightarrow y'=\dfrac{-y}{e^y+x}\Rightarrow y'(0)=-\dfrac{1}{e}$

再次求导 得$e^y(y')^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0\Rightarrow y''=-\dfrac{e^y y'+2y'}{e^y+x}$将$y'$代入得

$y''(0)=1/e^2$

（4）$x=0时$，$e^0+y^3-3*0=0\Rightarrow y(0)=-1$

对方程两端求导，$e^{xy}(y+xy')+3y^2y'-3=0$，将 y（0）=-1 代入得 $y'(0)=4/3$

再次求导得：$e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(y'+y'+xy'')+6y(y')^2+3y^2y''=0$

将$x=0,y(0)=-1,y'(0)=4/3$代入得

$y''(0)=7/3$

3（1）解：对方程两边求导得　$1-y'+\dfrac{1}{2}\cos y=0$

即　$y'=\dfrac{2}{2-\cos y}$　注意到 y 即 y 的一阶导数都是 x 的函数

所以对 $y'=\dfrac{2}{2-\cos y}$ 两端再次求导得：$y''=\dfrac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$

（2）解：对方程两边求导得 $y'=\sec^2(x+y)(1+y')\Rightarrow 1+1/y'=\cos^2(x+y)$

所以 $y'=-\csc^2(x+y)$

对上式求导得 $y''=-2\csc(x+y)[-\csc(x+y)\cot(x+y)](1+y')$

$$=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$$

（3）对方程两端求导得：$y'=f'(x+y)(1+y')\Rightarrow y'=\dfrac{f'}{1-f'}$

注意到 f 是 x，y 的函数 所以 $y''=\dfrac{f''(1-f')(1+y')+f'f''(1+y')}{(1-f')^2}=\dfrac{f''}{(1-f')^3}$

（4）观察方程两边，可对其取对数简化计算

$$\ln(x)+f(y)=y$$

再对方程两边求导得 ：$\dfrac{1}{x}+f'y'=y'\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x(1-f')}$

再次求导得：$-\dfrac{1}{x^2}+f''(y')^2+f'y''=y''\Rightarrow y''=-\dfrac{1}{x^2(1-f')}+\dfrac{f''}{x^2(1-f')^3}$

（5）解：有参数方程所确定函数的倒数公式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=-(1+t+t^2)$$

所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=-(1+2t)\dfrac{1+t^2}{2t}=-\dfrac{(1+2t)(1+t^2)}{2t}$

（6）$\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^1}{1+t^2}\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{t}{2}$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{1+t^2}{4t}$$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{4}\frac{2t^2-1-t^2}{t^2}\frac{1+t^2}{2t}=\frac{t^4-1}{8t^3}$$

（7）$\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(t)}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}$$

（8）$\because \frac{dx}{dt}=2+2t, \frac{dy}{dt}=\frac{2t}{1-\varepsilon\cos y}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{t}{1+t}\Big/1-\varepsilon\cos y$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dx)}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{1-\varepsilon\cos y}{(1+t)^2}-\frac{t}{1+t}\varepsilon\sin y\frac{dy}{dt}}{(1-\varepsilon\cos y)^2}\frac{1}{2(t+1)}=\frac{(1-\varepsilon\cos y)^2-2\varepsilon t^2(1+t)\sin y}{2(1+t)^3(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

（9）由于 $(x^2)'=2x,(x^2)''=2,(x^2)^{(2+k)}=0,(k=1,2,\ldots,48)$ 应用莱布尼茨公式，得

$$y^{(50)}=(x^2\sin 2x)^{(50)}=\sum_0^{50}C_n^k(\sin 2x)^{(n-k)}(x^2)^k$$
$$=C_{50}^0(\sin 2x)^{(50)}(x^2)^{(0)}+C_{50}^1(\sin 2x)^{(49)}(x^2)^{(1)}+C_{50}^2(\sin 2x)^{(48)}(x^2)^{(2)}$$
$$=2^{50}(50x\cos 2x-x^2\sin 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x)$$

4（1）因为 $y'=-f'(e^{-x})e^{-x}$

所以 $y''=-f''(e^{-x})e^{-x}(-1)e^{-x}+f'(e^{-x})e^{-x}=f''(e^{-x})e^{-2x}+f'(e^{-x})e^{-x}$

（2）$\because y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\therefore y''=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

（3）$\because y'=f'(\ln x)\frac{1}{x}$

$\therefore y''=f''(\ln x)\frac{1}{x^2}-f'(\ln x)\frac{1}{x^2}$

5（1）解：因为 $f(x)=\frac{2}{1+x}-1$

所以 $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{2n!}{(x+1)^{n+1}},(n=1,2,\ldots)(x\neq -1)$

（2）$\because f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f''(x)=2\cos 2x=2\sin(2x+\pi/2)$

$$f'''(x) = -4\sin 2x = 4\sin(2x+\pi)$$

依此类推 $f^{(n)} = 2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\pi/2)$

（3）$\because f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

$$\therefore f^{(n)} = (-1)^n n![\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^n}](x \neq 2, x \neq 1)$$

（4）$\because y' = \ln x + 1 \qquad y'' = \dfrac{1}{x}$

$$\therefore y^{(n)} = \begin{cases} \ln x + 1, n = 1 \\ (-1)^n \dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}, n > 1 \end{cases} (x \neq 0)$$

（5）$y' = \dfrac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}} \dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, (x \neq \pm 1)$$

6（1）$\because y' = \dfrac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2-2x)$

$$y'' = -\frac{1}{4}(2x-x^2)^{-3/2}(2-2x)^2 - (2x-x^2)^{-1/2}$$

$$\therefore y^3 y'' + 1 = (2x-x^2)^{3/2}[-\frac{1}{4}(2x-x^2)^{-3/2}(2-2x)^2 - (2x-x^2)^{-1/2}] + 1 = 0$$

（2）$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-(\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2}{(\cos t + \sin t)^2}\frac{1}{e^t(\sin t + \cos t)}$$

左式=$e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2e^t}{\cos t + \sin t}$

右式=$2(e^t \sin t \dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} - e^t \cos t) = \dfrac{-2e^t}{\cos t + \sin t}$=左式

（3）$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d(\frac{1}{y'})}{dy}=\dfrac{d(\frac{1}{y'})}{dx}\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d(-\frac{y''}{(y')^3})}{dy}=[\frac{d-\frac{y''}{(y')^3}}{dx}]\frac{dx}{dy}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$$

（4）$y'=\cos(n\arcsin x)n\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y''=-\dfrac{\sin(n\arcsin x)n^2}{1-x^2}+\cos(n\arcsin x)n\dfrac{x}{(1-x^2)^{-3/2}}$ 将之代入方程得：

$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$

（5）$y'=n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})$

$$y''=n(n-1)(x+\sqrt{1+x^2})^{n-2}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}(\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2})$$

将上两式代入方程得 $(1+x)^2y''+xy'-n^2y=0$

习题 2-5（B）

7 解：要使 f（x）在 x=0 处有二阶导数则需满足以下条件

$$\begin{cases}f(0^+)=f(0^-)\\f'(0^+)=f'(0^-)\\f''(0^+)=f''(0^-)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=g(0)\\b=g'(0)\\2a=g''(0)\end{cases}$$

8 解：$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)$

$f''(x)=2g(x)+2(x-a)g'(x)+2(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)$

所以 $f''(a)=2g(a)$

9 解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0+x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0$

$x\neq0$时，$f''(x)=(x^3\sin\dfrac{1}{x})'=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}$，显然 $f''(0)=0$

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$，极限不存在

依导数定义可知 f（x）在 x=0 处存在 2 阶导数，$f'(x),f''(x)$在$x=0$处连续，$f'''(x)$在 x=0 处不连续。

10 解：$y'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\pi/4)$

$$y''=e^x(\sin x+\cos x)-e^x(\sin x-\cos x)=2e^x\cos x=\sqrt{2}^2\sin(x+\pi/2)$$

依此类推 $y^{(n)}=\sqrt{2}^n\sin(x+\frac{n\pi}{4})$

11 解：利用莱布尼茨公式可得：

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{1}{\sqrt{1-x}})^{(n-k)}(1+x)^{(k)}$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{1-x}})^{(n)}(1+x)+n(\frac{1}{\sqrt{1-x}})^{(n-1)}$$
$$=\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n(1-x)^{n-1/2}}(1+x)+n\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2^{n-1}(1-x)^{n-3/2}}$$
$$=\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)(4n-1-x)}{2^n(1-x)^{n-1/2}}=\frac{(2n-3)!!(4n-1-x)}{2^n(1-x)^{n-1/2}}$$

总复习题二

1.（1）A （2）B (3) C (4) C (5) D

2.(1) 连续可导 （2）不连续 （3）连续不可导 （4）a≤0,间断; a>0,连续; 0≤a≤1,不可导;a>1 可导。

3.（1）解：

$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{lntanx}-\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{cotx}\cdot\sec^2\mathrm{x}$$

$$\mathrm{dy}=\left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{lntanx}-\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{cotx}\cdot\sec^2\mathrm{x}\right)dx$$

（2）解：

$$y'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}})=$$

$$dy=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$$

（3）解：两边取对数再求导得：

即得

$$y^{'} = x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x)$$

$$dy = x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x)dx$$

（4）解：
$$y^{'} = -\frac{1}{x^2}\cdot\sec^2(\frac{1}{x})\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$$
$$dy = \left(-\frac{1}{x^2}\cdot\sec^2(\frac{1}{x})\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\right)dx$$

(5) 解：先对原式进行变形：$\left(y^3-1\right)^3 = 1+\sqrt[3]{x}$

再对两边求导数即可得：

$$y' = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{27(y^3-1)^2\cdot y^2}$$

$$dy = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{27(y^3-1)^2\cdot y^2}dx$$

最后将 y 代入即可

（6）解：当 x>0 时 f'（x）$=2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

当 x<0 时 f'（x）$=\frac{3x^2}{x^3-1}$

f'（0）=0

4.（1）解：

$$y^{'} = \frac{1}{x}\cos^2 x - \sin 2x\cdot\ln x$$

$$y^{''} = -\frac{\cos^2 x}{x^2} - \frac{2\sin 2x}{x} - 2\cos 2x\cdot\ln x$$

（2）解：由原式可得：$y^2 = e^{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x\sin x}$ 两边取对数求导得：

$$y^{'} = \frac{y}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\cot x\right)$$

再次求导可得：

$$y^{''} = \frac{y}{2}(\csc^2 x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}) + \frac{(y^{'})^2}{y}$$

将 y 和 y' 代入即可

5.（1）解：$y = 4 + \frac{3}{x^2 - 1} = 4 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$

由已知的 n 次导数可得：

$$y^{(n)} = \frac{3}{2}(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+!)^{n+1}}\right)$$

（2）先对原式求一次导得：$y' = \frac{3}{2} \cdot \sin 2x \cdot \sin x = \frac{3}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos 3x$

则可得：$y^{(n+1)} = \frac{3}{4}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$

继而可得：$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$

7.（1）解：由题可得：

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta \cdot \sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta \cdot \cos\theta$$

则$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\tan\theta$（$\theta \neq \pm\frac{\mathrm{n}\pi}{2}$）

$$\mathrm{y}'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\tan\theta) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\sec^4\theta \cdot \csc\theta}{3a}$$

（2）解：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

（3）解：

$$\frac{dx}{dt}=2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-e^{y}}{te^{y}+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^{y}}{2\left(te^{y}+1\right)}$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{2te^{3y}+e^{2y}}{2\left(te^{y}+1\right)^{3}}$$

8.（1）题目有错

（2）证明：因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 令 x=y=0

则 $f(0)=0$

$$f^{'}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f(0)}{\Delta x}=f^{'}(0)=1$$

即函数 f（x）不但可导，且导数值恒为 1。

（3）解：因为 $f(x+y)=f(x)f(y),f(\mathrm{x})\neq 0$可得$f(0)=1$

$$f^{'}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\left[f(\Delta x)-f(0)\right]}{\Delta x}$$

$$=f(x)f^{'}(0)=f(x)$$

又知$f(0)=1$,则可知$f(\mathrm{x})=e^{x}$

9.（1）解：由题意可知：f（1）=2f（0）=2

$$f^{'}(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\Delta x\right)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f\left(\Delta x\right)-2}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f(0)}{\Delta x}=2f^{'}(0)=2C$$

（3）解：要使 F（x）在点 x=0 处连续，则有

b=f(0),而要函数在 x=0 处可导，则只需有

a= $f_{-}^{'}(0)$

（4）解法一：令 S=x+ $x^{2}+x^{3}+\ldots+x^{m}$

可知有 S$^{'}$=Sm

而 S=$\frac{x(1-x^{m})}{1-x}$

则 Sm=$\dfrac{1-(m+1)x^{m}+mx^{m+1}}{\left(1-x\right)^{2}}$

则 $\lim\limits_{m\to+\infty}Sm=\dfrac{1}{(1-x)^{2}}$

解法二：思路，对 Sm 等式两旁同乘以 x，然后分别减去原等式的两边进行变化即可。

（5）解：由于 $(x^2)^{'''}=0,(x^2)^{''}=2,(x^2)^{'}=2x$ 而所求的导数是 x=0 点，所以只需求莱布尼茨公式的前两项即可：$f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdot(-1)^{n-3}\dfrac{(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$

习题 3-1（A）

1 证明：显然 f（x）在[2,3]上连续、可导，且 f(2)=f(3)

$\because f'(x)=3x^2-12x+11$,显然 $f'(x)$ 在[2,3]连续。

$f'(2)=12-24+11=-1,f'(3)=27-36+11=1$

则有介值定理可知，在[2,3]区间上 $f'(x)$ 必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$

所以罗尔定理对 f（x）在区间[2,3]上成立

2 证明：显然函数在$[0,\pi/2]$上连续、可导，

$\dfrac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0}=-\dfrac{2}{\pi}$，$f'(x)=-\sin x$

又 $f'(0)=0,f'(1)=-1$，而-1<$-\dfrac{2}{\pi}$<0

所以由介值定理可知必存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0}$

所以拉格朗日中值定理对 f（x）在区间$[0,\pi/2]$上成立

3 证明：令 $p(x)=f(x)-\ln 2g(x)$，显然其在[0,1]上连续、可导。

$p(0)=-\ln 2,p(1)=-\ln 2$ 由罗尔定理知，在[0,1]上必存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\ln 2=\dfrac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}$

所以在[0,1]上柯西中值定理对 f（x）和 g（x）成立

4 证明：令 $f(x)=\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=0$ 即 f（x）恒等于一常数，又 f（0）=0，所以 $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5 证明：令 $f(x)=2\arctan(\sec x+\tan x)-x$

则 $f'(x)=2\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{1+(\sec x+\tan x)^2}-1=2(\sec x\tan x+\sec^2 x)\frac{\cos^2 x}{2}-1=0$

即 $f(x)=C$,又 $f(0)=2\arctan 1-0=2\times\pi/4=\pi/2$

6 解：因为 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$，由罗尔定理可知，在[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]区间分别存在四个点 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4，使得 $f'(\xi)=0$

7 证明：（1）设 $f(x)=\sin x$，显然函数在整个定义域内连续、可导，则由拉格朗日中值定理可知：$\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=f'(\xi)=\cos(\xi)\Rightarrow\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le 1$，即 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

（2）设 $f(x)=\arctan(x)$，显然函数在整个定义域内连续、可导，则由拉格朗日中值定理可知：在[a,b]区间上有 $\left|\frac{\arctan(a)-\arctan b}{a-b}\right|=|f'(\xi)|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|\le 1$，

即 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$

（3）设 $f(x)=\ln x$，则在[b,a]上函数连续、可导，由拉格朗日中值定理可知：

存在一点 $\xi\in[b,a]$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\ln\frac{a}{b}\Big/(a-b)$

又因为 $b<\xi<a$，所以 $\frac{1}{a}<f'(\xi)<\frac{1}{b}$，即 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$

8 证明：设 $f(x)=e^x,g(x)=\cos x$，二者在[0，$\pi/2$]上均连续、可导，并且对任意 $x\in(0,\pi/2)$ 都有 $g(x)\neq 0$，由柯西中值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{\cos x_1-\cos x_2}=-\frac{e^{\xi}}{(-\sin\xi)}>\frac{e^{\xi}}{1}>e^{x_1}$，即 $e^{x_2}-e^{x_1}>(\cos x_1-\cos x_2)e^{x_1}$

9 证明：设 $f(x)=x^p$, 则由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in(y,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^p-y^p}{x-y}=p\xi^{p-1}$$

$$\therefore py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$$

10 证明：设 $F(x)=f(x)e^{-kx}$，函数在[a,b]上连续，在（a,b）内可导

则 $F(a)=f(a)e^{-ka}=0=F(b)$

由罗尔定理可知，在（a,b）内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得：

$F'(\xi)=f'(\xi)e^{-k\xi}+f(\xi)e^{-k\xi}(-k)=0$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$

11 证明：设 $F(x)=f(x)(1-e^{-x})$，其在[0,1]上连续，在（0,1）内可导

又 $F(0)=f(0)(1-1)=0=F(1)$，由罗尔定理可得

$\exists\xi\in(0,1),F'(\xi)=f'(\xi)(1-e^{-\xi})+f(\xi)(e^{-\xi})=0$

12 证明：设 $f(x)=e^x-ax^2-bx-c$，利用反证法，

设若方程有至少 4 个根，$x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots$

则 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$，又 f（x）在定义域内至少 4 阶连续、可导，

则由罗尔定理可知，至少存在点 ξ_1,ξ_2,ξ_3，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

再次利用罗尔定理，则存在点 α,β，使得 $f''(\alpha)=f''(\beta)=e^x-2a=0$

由罗尔定理可知，在（α,β）内至少存在一点使得 $f'''(\gamma)=0$

而 $f'''(x)=e^x>0$，即不可能找到一点使得 f（x）的三阶导数为零，所以假设不成立，即方程至多有 3 个根

13 证明：令 $F(x)=f(x)\tan x$，其在[$0,\pi/4$]上连续，在（$0,\pi/4$）内可导

又 $F(0)=F(\pi/4)=0$,所以由罗尔定理可知

至少存在一点 $c\in(0,\pi/4)$，使得 $F'(c)=0$

即 $2f(c)+\sin 2cf'(c)=0$

14 证明：令$F(x)=f(x)-x$，此函数在[0,1]上连续，在（0，1）内可导，又因为

$F(0)=0,F(1/2)=1/2,F(1)=-1$，由介值定理可知，在[1/2,1]之间存在 c 使得

F（c）=0=F(0)，由罗尔定理可知，在[0,c]内至少存在一点ξ使得$f'(\xi)=1$

15 提示：令$g(x)=x^2$，对 f（x）和 g（x）用柯西中值定理即可得证

16 提示：令$g(x)=\ln x$，f（x）、g（x）在[a,b]上用柯西中值定理可证

习题 3-1（B）

17 证明：因为 f（x）在[0,3]上连续，所以 f（x）在[0,2]上连续，且在[0,2]上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$m\le f(0)\le M,m\le f(1)\le M,m\le f(2)\le M$

故$m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$

由介值定理知，至少存在一点$c\in[0,2]$，使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因为 f（c）=1=f（3），且 f（x）在[c,3]上连续，在（c,3）内可导，所以由罗尔定理可知，必存在$\xi\in(c,3)\subset(0,3),使f'(\xi)=0$

18 证明:，因为 f（x）在[a,b]上连续，(a,b)内可导，且 f(a)=f(b)=0,则

由罗尔定理知在（a，b）内必存在一点 c 使得$f'(c)=0$，由于$f''(x)\le 0$

所以$f'(a)>f'(c)>f'(b)$，即$f'(x)在(a,b)$内单调减

在（a，x）（x<c）上利用拉格朗日中值定理知

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$，即$f(x)=f'(\xi)(x-a)\ge 0$

在（c，b）上利用拉格朗日中值定理同理可得$f(x)\ge 0$

即在[a,b]上，$f(x)\ge 0$

19 证明：因为 y=f（x）在 x=0 的某邻域内具有 n 阶导数

由柯西中值定理得：$\exists\xi_1\in(0,x)$，使

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{\ n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{\ n-1}-0}$$

反复运用柯西中值定理，得：

$\exists\xi_2\in(0,\xi_1),\xi_3\in(0,\xi_2),\dots,\xi\in(0,\xi_{n-1})\subset(0,x)$

使得：$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{\,n-1}-0}=\dfrac{f''(\xi_1)-f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{\,n-2}-0}=\ldots=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}$

即$\exists\theta\in(0,1)$,使$\theta x=\xi\in(0,x)$

使得：$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},(0<\theta<1)$

20 证明：设$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，由题知 F（x）在[a,b]上连续，(a,b)内可导

则$F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$，又$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}\equiv 0$

即$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\equiv 0$，即$F'(x)\equiv 0\Rightarrow F(x)=C$

即$f(x)=Cg(x)$

21 证明：令$F(x)=f(x)e^x$，对 F（x）应用拉格朗日中值定理，则存在$\eta\in(a,b)$使得

$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=F'(\eta)=f'(\eta)e^\eta+f(\eta)e^\eta$ 成立

再对e^x在[a,b]上利用拉格朗日中值定理，则存在$\xi\in(a,b)$，使

$f'(\xi)=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi$ 成立

由上两式有$f'(\eta)e^\eta+f(\eta)e^\eta=e^\xi$,即$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

22 证明：（1）令$g(x)=f(x)+x-1$，则 g（x）在[0,1]上连续，且

$g(0)=-1<0,g(1)=1>0,$

所以存在$\xi\in(0,1)$，使得

$g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$

即 f(ξ)=1-ξ

(2)根据拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得

$f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$,

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi},$$

从而 $f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\frac{\xi}{1-\xi}=1$

习题 3—2

(A)

1．用洛必达法则求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$

（2） $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan(ax)}{\ln\tan(bx)}(a>0,b>0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan(ax)}\cdot\frac{a}{\cos^2(ax)}}{\frac{1}{\tan(bx)}\cdot\frac{b}{\cos^2(bx)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{a}{\sin(ax)}\cdot\frac{1}{\cos ax}}{\frac{b}{\sin bx}\cdot\frac{1}{\cos bx}}=$

$\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin 2bx}{\sin 2ax}=\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos(2bx)}{\cos(2ax)}\cdot\frac{2b}{2a}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos x}{\cos 3x})^2=3(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin 3x})^2=\frac{1}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq 0)=\lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2}=-\frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}=-2$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{(x+\tan x)(x-\tan x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\tan x}\cdot\frac{x^3}{x-\tan x}=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\sec^2 x}=-\frac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}=-\frac{3}{4}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\cos x}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}=1$

(10)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}$$

(11) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)+x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+1+\ln x}=\dfrac{1}{2}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{\tan x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x\cdot(x-\sin x\cos x)}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}}=$

$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x)^2}{6x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-1-2x}{3x^2}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)-2}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{3x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^x\sin x+e^x\cos x}{3}=\frac{1}{3}$$

(14)由于 $\lim\limits_{x\to a}\cot(x-a)\cdot\ln(\dfrac{\tan x}{\tan a})=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\tan x-\ln\tan a}{\tan(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{\sec^2(x-a)}=$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\sec^2(x-a)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin 2a}$$

所以 $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{\tan x}{\tan a})^{\cot(x-a)}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}(a\neq\dfrac{k\pi}{2},k$为整数$)$

(15)由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}\cdot\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\sin x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 3x^2}=\frac{1}{3}$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\arcsin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\frac{1}{3}}$

（16）$\lim\limits_{x\to +\infty}x^2(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1})=$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{a}{2}\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^4+x^3}{(x^2+a^2)[(x+1)^2+a^2]}=\frac{a}{2}\cdot 2=a$$

（17）$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)^2\cdot\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{\sin\pi x}=$

$$-2\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos\pi x\cdot\pi}=\frac{2}{\pi}$$

（18）由于$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(x+1)\ln(1+x)}=$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-\ln(1+x)}{(2x+1)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2\ln(1+x)+\frac{2x+1}{x+1}+1}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

2.验证下列极限存在，但不能由洛必达法则得出.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 此极限不存在，洛必达法则不适用.

原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 此极限不存在，洛必达法则不适用.

原极限$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$

3.设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，试求：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$.

解：因 $f(x)$ 具有一阶连续导数，从而 $f(x)$ 连续，$x\to 0$ 时，$f(1-\cos x)\to f(0)=0$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(1-\cos x)\cdot\sin x}{\sec^2 x^2\cdot 2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f'(1-\cos x)=\dfrac{1}{2}f'(0)=1$.

4.设 $f''(x)$ 连续，试用洛必达法则证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$

证：当$h\to 0$时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to 0$，及$h^2\to 0$.且分子、分母（视为 h 的函数）

都有导数，又注意到分母的导数，$2h\neq 0,(h\to 0,$但$h\neq 0)$，故对

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=$$
$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}]=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x)$$

（B）

5.用洛必达法则求下列极限.

(1) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4(2x-1)}{\pi\cos\pi x e^{\sin\pi x}+3\pi\cos 3\pi x e^{-\sin 3\pi x}}=$$

$$4\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2}{\pi^2 e^{\sin\pi x}(\cos^2\pi x-\sin\pi x)-9\pi^2 e^{-\sin 3\pi x}(\cos^2 3\pi x+\sin 3\pi x)}=4\cdot\frac{2}{-\pi^2 e+9\pi^2 e}=\frac{1}{\pi^2 e}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cdot[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{m+nx^2}}(b>0,n>0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{\frac{a}{e^x}+b}\cdot\frac{\sqrt{m+nx^2}}{nx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{nx}{\sqrt{m+nx^2}}}{n}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{x^2}+n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x-\ln b})^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(a^x - x\ln a)-\ln(b^x-\ln b)}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})^x = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{x+1}{x^2})^{\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}} = e$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})^n = e$

6．解：若使 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},1)$ 连续，则满足 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，又

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}[\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}]=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}=$$

$$\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{-\pi\sin\pi x+\pi^2(1-x)\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi^2\sin\pi x}{-\pi^2\cos\pi x+\pi^2+\pi^2(1-x)\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}$$

故当 $f(1)=\dfrac{1}{\pi}$ 时，$f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},1)$ 连续.

7.解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

习题 3—3

(A)

1．解：$f(x)=1+3x+5x^2-2x^3, f(-1)=5;\ f'(x)=3+10x-6x^2, f'(-1)=22;$

$f''(x)=10-12x, f''(-1)=-12; f'''(x)=-12, f'''(-1)=-12;$

$\therefore f(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$

2．解：令 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}, f(0)=0;$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}(-2+3x^2)-\frac{1}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}}(-3+2x), f'(0)=0;$$

同理可得：$f''(0)=\dfrac{1}{3}; f'''(0)=6$，故

$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}=\dfrac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$.

3 .解：$f(x)=\sqrt{x}, f(1)=1;\ f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f'(1)=\dfrac{1}{2};\ f''(x)=-\dfrac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{2}}, f''(1)=-\dfrac{1}{4};$ 故

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o[(x-1)^2].$$

4. 解：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, f(-3)=\frac{1}{2}$; $f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, f'(-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}$;

$f''(x)=\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}, f''(-3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^5}$; $f'''(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}, f'''(-3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^7}$; 故

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}(x+3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^5}(x+3)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^7}(x+3)^3+o[(x+3)^3].$$

5. 解：$f(x)=\arctan x, f(0)=0$; $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, f'(0)=1$;

$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0)=0$; $f'''(x)=-\frac{2}{(1+x^2)^2}-\frac{4x^2}{(1+x^2)^3}, f'''(0)=-2$; 故

$$f(x)=x-\frac{2}{3!}x^3+o(x^3).$$

6. 解：$f(x)=xe^x$, $f'(x)=e^x+xe^x, f''(x)=2e^x+xe^x,\cdots,f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x$; 故

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2,\cdots f^{(n)}(n)=n$; 并得到 $f^{(n)}(\xi)=(n+1+\xi)e^{\xi}$;故

$$f(x)=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^n+\frac{(n+1+\xi)e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}(\xi\text{介于}0\text{于}x\text{之间}).$$

7. 解. $f(x)=\frac{1}{1-x}$，因为

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, f''(x)=-\frac{2(1-x)}{(1-x)^4}=-\frac{2}{(1-x)^3}, f'''(x)=\frac{2\cdot3\cdot(1-x)^2}{(1-x)^6}=\frac{2\cdot3}{(1-x)^4}, \cdots$$

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}, f^{(n+1)}(\xi)=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}}$，所以

$f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=-2, f'''(0)=3!\cdots f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}n!$，所以

$$f(x)=1+x-x^2+x^3+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+\frac{(-1)^{n+2}}{(1-\xi)^{n+2}}x^{n+1}(\xi\text{介于}0\text{与}x\text{之间}).$$

8．解：由已知 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}x^{2n}+o(x^{2n})$，

$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}x^{2n}+o(x^{2n})$，所以

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1})+o(x^{2n}).$$

9. 估计下列近似公式的绝对误差.

解：（1）令$f(x)=\sin x$,则 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})(n=0,1,2,\cdots)$，所以

$f^{(n)}(0)=0(n=2m,m=0,1,2,\cdots),f^{(n)}(0)=(-1)^n(n=2m+1,m=0,1,2,\cdots)$，故

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x),$$

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin[\theta x+(2m+1)\cdot\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0<\theta<1),$$ 当m=2时，

得近似$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$,又$|x|\le\frac{1}{2}$,此时误差 $|R_4(x)|=\left|\frac{\sin[\theta x+\frac{5\pi}{2}]}{5!}x^5\right|\le\frac{|x^5|}{5!}<2.6\times10^{-4}$.

(2)因为$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$，

其中$R_n(x)=\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}(0<\theta<1)$.所以

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$ 当$n=2$时，

得近似值$\sqrt{1+x}\approx1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, 当$0\le x\le1$时，此时误差

$$R_3(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3!}(1+\theta x)^{-\frac{1}{2}}x^3<6.25\times10^{-2}$$

10. 解：$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2m+1}(x)$,其中

$$R_{2m+1}(x)=\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2}=(-1)^{m+1}\cdot\frac{\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}(0<\theta<1),$$

当$\cos x\approx1-\frac{x^2}{2!}$, 则$|R_3(x)|=\frac{\cos(\theta x)}{4!}\cdot x^4\le\frac{x^4}{4!}\le0.0001$, $\therefore|x|<0.22134$

11. 利用三阶泰勒公式求下列各数的近似值并估计误差.

解：（1）$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<x<1)$,

$$e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})^2+\cdots+\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n+o[(\frac{1}{2})^n]，\ e^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})^3\approx 2.667,$$

$$|R_3|=\frac{e^{\theta x}}{4!}\cdot x^4=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{4!}\cdot(\frac{1}{2})^4<0.125.$$

(2) $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$,

其中$R_n(x)=\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}(0<\theta<1)$,

令$x=249,a=\frac{1}{5}$,即可得$(250)^{\frac{1}{5}}\approx 1+\frac{1}{5}\cdot 249-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}(249)^2\approx 3.0171$,其中

$|R_3|<3.45\times 10^{-6}$

（3）$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_n(x)$, 其中

$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}(0<\theta<1)$，令$x=0.2$,

则$\ln 1.2=\ln(1+0.2)\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3\approx 0.18267$,

$$|R_3|=\left|\frac{1}{4\cdot(1+0.2\theta)^4}\cdot 0.2^4\right|<4\times 10^{-4}.$$

12.利用泰勒公式求下列极限.

(1) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+0(x^4)$, $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}x^4+0(x^4)$,所以

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-o(x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

(2)因为. $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+0(x^2),\sin x=x+o(x)$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

（3）$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+0(x^2),\therefore e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+0(\frac{1}{x^3})$,所以

$$\lim_{x\to\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}]=\lim_{x\to\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+0(\frac{1}{x^3}))-\sqrt{x^6-1}]=\frac{1}{6}$$

(4) $\sin x=x+0(x),\therefore\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+0(x)})=0$.

13. 解：由题意可得：$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(x)}{2}$，即得证.

14. 有误，无法证明.

15. 证明：$\because f(1)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(1-\frac{1}{2})^2$,

$f(0)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(0-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(0-\frac{1}{2})^2$, 其中$\frac{1}{2}<\xi_1<1,0<\xi_2<\frac{1}{2}$,

$\therefore f(1)+f(0)=2f(\frac{1}{2})+\frac{1}{8}[f''(\xi_1)+f(\xi_2)]$, 即$\frac{1}{2}=\frac{1}{8}[f''(\xi_1)+f(\xi_2)]$,

令$\xi=\{\xi_1，\xi_2\}$,使$f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$, 则有$\frac{1}{2}=\frac{1}{8}[f''(\xi_1)+f(\xi_2)]\le$

$\frac{1}{8}\cdot 2\cdot f''(\xi)$，即 $2\le f''(\xi)$，（$0<\xi_2<\frac{1}{2}$），

在(0,1)内至少有一点ξ，使 $f''(\xi)\ge 2$.

(B)

16. 解：$\because e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,

$\therefore e^{2x-x^2}=1+2x-x^2+\frac{1}{2}(2x-x^2)^2+\frac{1}{6}(2x-x^2)^3+o(x^6)=$

$1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$.

18. 解：$f^k(x)=chx,k=2n;f^k(x)=shx,k=2n+1;$

$$ch(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{2n!}f^{(2n)}(0)x^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1}+\frac{ch\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

$$=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{2n!}x^{2n}+\frac{ch\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

20. 解：要使$x-(a+b\cos x)\sin x$为关于x的5阶无穷小，

即使$\lim_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}=c(c\ne 0)$,

$\cos x=1-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5),\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$，

$$原式=\frac{x-a(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5))-b(x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5-\frac{1}{3!}x^3-90\frac{1}{2!3!}x^5+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5))}{x^5}$$

欲使$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}=c(c\neq0)$,即$1-a-b=0,\frac{1}{3!}a+\frac{1}{2!}b+\frac{1}{3!}b=0$,所以$a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3}$.

$\therefore a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3}$时$x-(a+b\cos x)\sin x$为$x$的5阶无穷小.

21. 证明：

取$\xi_1\in(a,b),\xi_2\in(a,b)$, $f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)(a-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-\frac{a+b}{2})^2(1)$

$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)(b-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-\frac{a+b}{2})^2(2)$,

$(1)-(2)$得,$0=f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(\frac{a-b}{2})^2[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$,

$\therefore f(b)-f(a)=\frac{1}{2}(\frac{a-b}{2})^2[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$，

$\frac{4}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$, 取$|f(\xi)|=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$,

则有 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]$.

第四节　函数的单调性与极值判定

1.（1）A（2）D（3）B（4）A（5）A（6)B（7）B

2.（1）解　$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=3-3x^2.$$

令$f'(x)=0$，得$x=\pm1$.

当$-1<x<1$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(-1,1)$上单调增加；

当$x<-1$或$x>1$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(-\infty,-1),(1,+\infty)$上单调减少.

（2）解　$f(x)$的定义域为$x\geq0$，

$$f'(x)=\frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}.$$

故 $f(x)$ 在 $[0,100)$ 上单调增加，在 $(100,+\infty)$ 上单调减少.

(3)解　　由于 $f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$，易知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调增加，在 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 上单调减少.

(4)解　　当 $x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in Z)$ 时，$f'(x)=1+2\cos 2x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

　　当 $x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right)(k\in Z)$ 时，$f'(x)=1-2\cos 2x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{5}{6}\pi+k\pi$

由极值的第一充分条件知：$f(x)$ 在 $\left(\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)(k\in Z)$ 内单调增加，在 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)(k\in Z)$ 内单调减少.

（5）解　　$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$ 上单调增加，在 $(-1,1),(1,3)$ 上单调减少.

(6)解　　$f'(x)=\frac{2x-x^2\ln 2}{2^x}$ 故 $f(x)$ 在 $(0,2\log_2 e)$ 上单调增加，在 $(-\infty,0),(2\log_2 e,+\infty)$ 上单调减少.

(7)解　　$f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$ 故 $f(x)$ 在 $[0,n)$ 上单调增加，在 $(n,+\infty)$ 上单调减少.

(8)解　　利用对数求导法，得 $f'(x)=\frac{2(3x-2a)}{3(2x-a)^{\frac{2}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}}}$. 故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3}a,a\right)$ 上单调减少，在 $\left(-\infty,\frac{2a}{3}\right),(a,+\infty)$ 上单调增加.

3.（1）解　$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

令 $f'(x)$=0，得 $x=0,\pm1$．$f''(x)=4(3x^2-1)$，$f''(0)<0, f''(\pm1)>0$，故该函数在 $x=0$ 处取得极大值 5，在 $x=\pm1$ 处该函数取得极小值 4.

（2）解　$f'(x)=\dfrac{x(x+4)(x-1)}{(x+1)^3}$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=0,-4,1$．$x=-1$ 处导数不存在. 列表讨论易知：极大值为 $f(-4)=-\dfrac{32}{3}$，$f(0)=0$，极小值为 $f(1)=-\dfrac{1}{4}$.

（3）解　$f'(x)=\begin{cases}3-3x^2 & x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})\\ 3x^2-3 & x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)\end{cases}$

根据极值的第一充分条件知：$x=0,\pm\sqrt{3}$ 处该函数取得极小值 0，$x=\pm1$ 处该函数取得极大值 2.

（4）解　$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{3}{4}\pi+k\pi(k\in Z)$。易知极小值为 $f\left(-\dfrac{1}{4}\pi+2k\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi+2k\pi}$，极大值为 $f\left(\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}$.

（5）解　$f'(x)=2x+\dfrac{54}{x^2}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-3$，易知极小值为 $f(-3)=27$.

（6）解　$f'(x)=\dfrac{1-x}{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，极大值为 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

4. (1) 证　令 $f(x)=e^x-xe^x-1$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$.

$x>0$ 时，$f'(x)=-xe^x$，显然 $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，$x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $e^x-1<xe^x$.

（2）证　令 $f(x)=\sin x+\cos x-1-x+x^2$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$．$x>0$ 时，$f'(x)=\cos x-\sin x+2x-1$，显然 $f'(0)=0$．$x\ge0$ 时，$f'(x)$ 连续. 又由于 $x>0$ 时，$f''(x)=-\sin x-\cos x+2>0$，故 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，即 $f'(x)>f'(0)=0$. 进而有 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，

$x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即 $\sin x+\cos x>1+x-x^2$.

（3）证　令$f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上连续，且$f(0)=0$．$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0$，故$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，从而$f(x)>f(0)=0$，即$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$．

（4）证　令$f(x)=2^x-x^2$，$f(x)$在$(4,+\infty)$连续，且$f(4)=0$．$x>4$时，$f'(x)=2^x\ln 2-2x$，$f'(4)>0$，$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2>0$，故$f'(x)$在$[4,+\infty)$内单调增加，且$f'(x)>0$恒成立，进而表明$f(x)$在$[4,+\infty)$内单调增加，即当$x>4$时，$f(x)>f(4)=0$，于是$2^x>x^2$得证.

（5）证　令$f(x)=\ln(1+x)-\frac{\arctan x}{1+x}$，$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，且$f(0)=0$。$x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{\arctan x}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{\arctan x}{(1+x)^2}+\frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)}>0$，即$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，$f(x)>f(0)=0$，即$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$.

（6）证　令$f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$，$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，且$f(0)=0$．$x>0$时，$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0$，即$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，$f(x)>f(0)=0$，即$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$．

5.（1）解　函数$f(x)$在$[-3,10]$上连续，必能取得最大值和最小值.

$f'(x)=2x-4=2(x-2)$，$f(x)$有一个驻点$x=2$．因为$f(-3)=27,\ f(2)=2$，$f(10)=66$，比较后知$f(x)$在$[-3,10]$上的最大值为$f(10)=66$，最小值为$f(2)=2$．

（2）解　由于$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

令$f'(x)=0$解得$x=\pm 1$．又因为$x\geq 0$，所以$x=1$是唯一的驻点. $f(1)=\frac{1}{2}$是极大值点即是最大值点. 又因为对任意的$x>0$有$f(x)>0$，故$f(0)=0$即

为最小值点.

（3）解　当$1 \le x \le 2$时，$f(x)=-x^2+3x-2$；

当$-10 \le x < 1$或$2 < x \le 10$时，$f(x)=x^2-3x+2$；

由$f'(x)=0$得$x=\frac{3}{2}$，$f(-10)=132, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$，$f(10)=72$，比较知$f(x)$的最大值为$f(-10)=132,$，最小值为$f(1)=f(2)=0$.

（4）解　$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$，令$f'(x)=0$得$x=\frac{3}{4}$. 由$f(-5)=-5+\sqrt{6}$，$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，$f(1)=1$知

函数$f(x)$的最大值为$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，最小值为$f(-5)=-5+\sqrt{6}$.

6. 解　令$f(x)=x^3-6x^2+9x-10$，$f'(x)=3x^2-12x+9$. 由$f'(x)=0$得$x_1=3, x_2=1$，根据定理 4. 1，有

$f(x)$在$[1,3]$内单调减少，在$(-\infty,1],[3,+\infty)$内单调增加，$f(1)=-6<0$，$f(3)=-10<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，所以$f(x)$仅在$(3,+\infty)$内有一实根.

7. 解　令$f(x)=\ln x-ax$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$。由$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{a}$，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调增加，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调减少，$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$，$f(x)$的根的数目取决于$a$的取值范围.

当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，此时$\ln x=ax$有两个实根.

当$a=\frac{1}{e}$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，此时$\ln x=ax$有唯一实根$x=e$.

当$a>\frac{1}{e}$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)<0$，此时$\ln x=ax$无实根.

8. 证　$f(x)=e^x-x-1$，$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)=0$得$x=0$. 当$x<0$时$f'(x)<0$,当$x>0$时，$f'(x)>0$，且$f(0)=0$，故而$e^x=x+1$只有一个实根.

9. 解　$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，$\Delta=36a^2-60b<0$，故$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为增函数. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，所以方程$x^5+2ax^3+3bx+4c=0$有且仅有一个实根.

10. 解　$f'(x)=\frac{x(2b^2-3x^2)}{\sqrt{b^2-x^2}}$. 令$f'(x)=0$，当$0\le x\le b$时，$x_1=0,x_2=\frac{\sqrt{6}b}{3}$. 又因为$f(0)=f(b)=0$，$f\left(\frac{\sqrt{6}b}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}b^3$. 比较知$f(x)$的最大值为$f\left(\frac{\sqrt{6}b}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}b^3$，最小值为$f(0)=f(b)=0$.

11. 解　$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$

$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$，当$n$为偶数时，$f'(x)\le 0$恒成立，故此时$f(x)$无极值；

当n奇数时，令$f'(x)=0$得$x=0$，由极值的第一充分条件知：

$f(x)$在$(-\infty,0)$内为增函数，在$(0,+\infty)$内为减函数，该函数在$x=0$处取得极大值$f(0)=1$.

12. 解　设内接矩形与椭圆在第一象限的交点为$P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，内接矩形的面积记为$S$，则

$$S=4ab\sin\theta\cos\theta=2ab\sin 2\theta$$

显然当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，$S_{\max}=2ab$，即为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的内接矩形中面积的最大值.

13. 解　设切点坐标为$P\left(\frac{1}{2}\cos\alpha,\sin\alpha\right)\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，所求的三角形面积为$S$，则切线的直线方程为

$$(2\cos\alpha)x+(\sin\alpha)y=1$$

切线与坐标轴的交点为$A\left(\frac{1}{2\cos\alpha},0\right)$，$B\left(0,\frac{1}{\sin\alpha}\right)$，于是该切线与坐标轴所围成的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\cos\alpha}\times\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin 2\alpha}$$

显然当$\alpha=\frac{\pi}{4}$，即切点坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$S_{\min}=\frac{1}{2}$

14. 解　设圆锥形漏斗的高为h，体积为V，由题意知

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(400-h^2\right)h,\quad 0<h<20$$

$V'=\frac{1}{3}\pi\left(400-3h^2\right)$，令$V'=0$得$h=\frac{20}{\sqrt{3}}$. 由于$V''=-2\pi h<0$，故当$h=\frac{20}{\sqrt{3}}$时，$V$取得极大值同时也是最大值.

15. 解　设漏斗的高为h，体积为V，由题意得

$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-h^2\right)h$，$V'=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-3h^2\right)$，令$V'=0$得$h=\frac{R}{\sqrt{3}}$，截取的扇形弧长为$l=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi R$，此时留下的扇形的中心角为$\varphi=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

16. 解　记物体受到桌面的支持力为F_N，由力的正交分解原理有

$$\begin{cases}F\sin\alpha+F_N=mg\\ F\cos\alpha=\mu F_N\end{cases}$$

解得　$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$$

$$F'=\frac{-\mu mg\left(\mu\cos\alpha-\sin\alpha\right)}{\left(\cos\alpha+\mu\sin\alpha\right)^2}$$

令$F'=0$，得$\tan\alpha=\mu=\dfrac{1}{4}$，即力与水平线的夹角为$\alpha=\arctan\dfrac{1}{4}$时，力$F$最小.

17. 解　$f(x)=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$运用对数求导法得

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x-5}+\frac{2}{3(x+1)}\right)(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}=\frac{4(2x-1)(x-5)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

令$f'(x)=0$得$x_1=\dfrac{1}{2},x_2=5$，　$x=-1$时该函数不可导.

该函数在$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right),(5,+\infty)$上为单调递增函数，在$(-\infty,-1),\left(\dfrac{1}{2},5\right)$上为单调减少函数.

18. 解　$f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

$$f'(x)=\begin{cases}(1-x)e^{-(x-1)} & x>1\\ (1+x)e^{x-1} & 0<x<1\\ -(1+x)e^{x-1} & x<0\end{cases}$$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1),(0,1)$内为增函数；$f(x)$在$(-1,0)$，$(1,+\infty)$内为减函数，故该函数取得极大值$f(-1)=e^{-2}$，$f(1)=1$，取得极小值$f(0)=0$.

19. 证　$f(x)=1+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}-\sin x$

$f'(x)=x+e^{-x}-\cos x$，$f'(0)=0$，$f'(x)$在$x=0$处连续. 当$0<x<1$时

$f''(x)=1-e^{-x}+\sin x>0$，故$f'(x)$在$(0,1)$上为增函数，从而$f'(x)>0$，即可表明$f(x)$在$(0,1)$上也为增函数，$f(x)>f(0)=0$.

所以当$0<x<1$时，$e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$.

20. 证　对任意的$x\neq 0$有，

$e^{-\frac{3}{|x|}}\le e^{-\frac{1}{|x|}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}\le e^{-\frac{1}{|x|}}$，$\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{3}{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{|x|}}=0$. 由极限的夹逼性知

$\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)} = f(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 可导，又因为

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(2+\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}\operatorname{sgn}x\neq 0$$

$x=0$ 显然为该函数的极值点，也为唯一的极值点.

21. 证 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$ $f'(x)=x^{p-1}-1$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内为递减函数；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为递增函数. $f(1)=0$ 为该函数唯一的极值点同时也是最小值点. 所以 $x>0$ 时有 $f(x)\geq f(1)=0$，即

$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$.

22. 证 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，$f(1)=0$.

$f'(x)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2$，$f'(1)=0$，由函数表达式易知：当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数；由 $f''(x)=1+2\ln x+\frac{1}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内为增函数，$f'(x)>0$，进而 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内为增函数。综上，$f(1)=0$ 为该函数的极小值也为最小值，于是 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$ 得证.

23. 证 $f(x)=x^m(a-x)^n$，$f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{ma}{m+n},x_2=0,x_3=a$。$x=\frac{ma}{m+n}$ 是函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的唯一极大值点即是最大值点，此时 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$。

所以当$0 \le x \le a$时， $x^m(a-x)^n \le \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$

24. 证 记$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$， $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$

令$\phi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$，有$\phi'(x)=-\frac{1}{x(x+1)^2}$. 当$x<-1$时，$\phi'(x)>0$，即$\phi(x)$在$(-\infty,-1)$内单调增加，又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=0$，所以$\phi(x)>0$。进而$f'(x)>0$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$在区间$(-\infty,-1)$内单调增加.

习题 3-5

1. 单项选择题

（1） $y'=3x^2-6$，$y''=6x$ $x\in[0,1]$时，$y'<0$, $y''>0$， ∴单调下降，曲线是凹的

故选（C）

（2） $y'=15x^4-30x^2-360$,$y''=60x^3-60x$，令$y''=0$ 则 x=0, 1 ,−1

故选（C）

（3） 当$x\to0^+$时，$\lim_{x\to0^+}\frac{y''(x)}{x}=1$， 则 $y''(x)>0$

当 $x\to0^-$时，$\lim_{x\to0^-}\frac{y''(x)}{-x}=1$，则 $y''(x)<0$

所以f(x)在$(-\delta, 0)$时是凸的，在$(0, \delta)$是凹的（其中δ是趋于 0 的无穷小）。

由拐点定义可知，选（D）

（4） $x\to a^+$时，$f'(x)<0$; $x\to a^-$时，$f'(x)>0$, 故 x=a 是 f(x)的极大值

故选（B）

2. 求下列函数图形的凹凸区间及拐点

（1） $y=3x^2-x^3$

解：函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$

$y'=6x-3x^2$ $y''=6-6x$

令$y''=0$，得 x=1

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	−
曲线 y	凹	拐点	凸

由表可知：曲线在$(-\infty,1)$内是凹的，在$(1,+\infty)$内是凸的，拐点为（1，2）

（2） $y=\frac{a^2}{a^2+x^2}$ $(a>0)$

解：函数的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$

$y'=a^2\left[-\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\right]$

$y''=-2a\cdot\frac{(a^2+x^2)^2-2(a^2+x^2)\cdot 2x\cdot x}{(a^2+x^2)^4}=-2a\cdot\frac{a^4+2a^2x^2+x^4-4a^2x^2-4x^4}{(a^2+x^2)^4}=-2a\cdot\frac{a^4-2a^2x^2-3x^4}{(a^2+x^2)^4}$

令$y''=0$，得$x^2=\frac{a^2}{3}$ $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a$

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}a)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,+\infty\right)$
y''	+	0	−	0	+
曲线 y	凹	拐点	凸	拐点	凹

由表可知：曲线在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,+\infty\right)$内是凹的，在$(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}a)$内是凸的,拐点为

（$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$\frac{3a^2}{4}$）

（3） $y=x+x^{\frac{5}{3}}$

解：函数的定义域为$x\neq 0$

$y'=1+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ $y''=\frac{5}{3}\times\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ x=0 时二阶导数不存在

当 $x\epsilon(-\infty,0)$时，$y'' < 0$ ，曲线是凸的；当$x\epsilon(0,+\infty)$时，$y'' > 0$ ，曲线是凹的。拐点为（0，0）

（4） $y = x + \sin x$

解：函数的定义域为$(-\infty，+\infty)$

$y' = 1 + \cos x \quad y'' = -\sin x$

令$y'' = 0$ 则$x = k\pi$,其中 k=0,$\pm$1, $\pm$2, $\pm$3……

当 $x\epsilon(2k\pi, 2(k+1)\pi)$时，$y'' < 0$ ，曲线是凸的；当 $x\epsilon(2(k+1)\pi, 2(k+2)\pi)$时，$y'' > 0$ ，曲线是凹的。拐点为$(k\pi, k\pi)$

（5） $y = \ln(1+x^2)$

解：函数的定义域为$(-\infty，+\infty)$

$y' = \frac{2x}{1+x^2} \quad y'' = \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

令$y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
曲线 y	凸	拐点	凹	拐点	凸

由表可知：曲线在$(-1,1)$内是凹的，在$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$内是凸的,拐点为（± 1， $\ln 2$）

（6） $y = x\sin(\ln x) \quad (x > 0)$

解：函数的定义域为$x > 0$

$y' = \sin(\ln x) + x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

$y'' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

令$y''=0$ $\cos(\ln x)-\sin(\ln x)=0$ $\ln x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$

当$x\in\left(e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}\right)$时，$y''>0$，曲线是凹的

当 $x\in\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}\right)$时，$y''<0$，曲线是凸的

曲线的拐点为$\left(e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}，\frac{\sqrt{2}}{2}e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\right)$

（7） $y=x^x$ $(x>0)$

解：$y'=x\cdot x^{x-1}+x^x\cdot\ln x=x^x(1+\ln x)$

$y''=\frac{x^x(1+\ln x)}{x}=x^{x-1}(1+\ln x)$

$\because x>0$

$\therefore y''>0$

曲线无拐点，且图像处处为凹

（8） $y=e^{\arctan x}$

解：函数的定义域为$(-\infty，+\infty)$

$y'=e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

$y''=e^{\arctan x}\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2+e^{\arctan x}\cdot(-1)\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}=e^{\arctan x}\cdot\left[\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}\right]$

令$y''=0$ 则$x=\frac{1}{2}$

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
y''	+	0	−

曲线 y	凹	拐点	凸

由表可知：曲线在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$内是凹的，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内是凸的,拐点为（$\frac{1}{2}$，$e^{\arctan\frac{1}{2}}$）

3. 证明曲线$y=\frac{x-1}{x^2+1}$有三个拐点位于同一条直线上

证明：$x\in(-\infty,+\infty)$　且$y'=\frac{(x^2+1)-(x-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-(x^2+2x+1)\cdot 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

令$y''=0$

即

$2x^3-6x^2-6x+2=2(x^3-3x^2-3x+1)\quad=2[(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)]=(x+1)(x^2-4x+1)=0$

得到$x_1=-1$，　$x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$　相应地$y_1=-1$，$y_2=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，$y_3=-\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

$\because\ \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$　$\therefore$曲线$y=\frac{x-1}{x^2+1}$有三个拐点位于同一条直线上

4. 讨论摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (a>0)$的凹凸性

解：$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t dt}{a(1-\cos t)dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}<0$$

故摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (a>0)$在定义域内是凸的。

5. 证明曲线 $y=x^n\ (n>1),y=e^x,y=x\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的，曲线 $y=x^n\ (0<n<1)$，$y=\ln x$在区间$(0,+\infty)$是凸的

证明：　$Y=x^n\ (n>1)$，$y'=nx^{n-1},y''=n(n-1)x^{n-2}$，$x\in(0,+\infty)$

当$n>1$时$y''>0$，故是凹的；当$0<n<1$时$y''<0$，故是凸的

$y=e^x$，$y'=e^x$，$y''=e^x$，$x\in(0,+\infty)$时$y''>0$，故是凹的

$y=x\ln x$，$y'=\ln x+1$，$y''=\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$时$y''>0$，故是凹的

$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，当$x\in(0,+\infty)$时$y''<0$，故是凸的

6. 试确定曲线$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d,使得曲线在$x=2$有水平切线，$(1,-10)$为拐点，且点$(-2,44)$在曲线上

解：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　　　$f''(x)=6ax+2b$

由题意可知

$$\begin{cases} f'(2)=0 \\ f''(1)=0 \\ f(1)=-10 \\ f(-2)=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a+4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \\ a+b+c+d=-10 \\ -8a+4b-2c+d=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=9 \\ c=0 \\ d=-16 \end{cases}$$

7. 利用曲线的凹凸性，证明下列不等式，并解释其几何意义

解：

（1）可知$f(x)=x^n$

函数的定义域为$(0,+\infty)$

则$f'(x)=nx^{n-1}$　$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$　$n>1$　$f''(x)>0$　曲线是凹的

根据定义可知对任意的 x，y >0 都有等式 $\frac{(x^n+y^n)}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$成立

（2）可知$f(x)=e^x$

函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$

则$f'(x)=e^x$　$f''(x)=e^x$　$f''(x)>0$　曲线是凹的

根据定义可知对任意的$x\neq y$ 都有等式 $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ 成立

（3）可知$f(x)=x\ln x$

函数的定义域为$(0, +\infty)$

则$f'(x)=\ln x+1$　$f''(x)=\frac{1}{x}$　$x>0$　$f''(x)>0$　曲线是凹的

根据定义可知对任意的 x，y >0 且$x\neq y$都有等式 $\frac{(x\ln x+y\ln y)}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$成立

即：$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ 成立

8. 求函数$y=x^4(12\ln x-7)$图形的凹凸区间及拐点

解：函数的定义域为$x>0$

$Y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot\frac{12}{x}=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$

$y''=12x^2(12\ln x-7)+48x^2+36x^2=12x^2(12\ln x-7)+84x^2=144x^2\ln x$

令$y''=0$，$x>0$ $x=1$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	－	0	＋
曲线 y	凸	拐点	凹

由表可知：曲线在$(0,1)$内是凸的，在$(1,+\infty)$内是凹的,拐点为$(1, -7)$

9. 求函数$y=(x+1)^4+e^x$图形的凹凸区间及拐点

解：函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$

$y'=4(x+1)^3+e^x$

$y''=12(x+1)^2+e^x$　$y''>0$

故函数的图形没有拐点，处处是凹的

10. 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连续导数，如果$f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq 0$试问

$(x_0, f(x_0))$是否为拐点，为什么？

解：$\because f'''(x_0) \neq 0$　　假定$f'''(x_0) > 0$　则$f''(x_0)$单调递增

$\therefore x < x_0$时　$f''(x) < f''(x_0)$

$x > x_0$时　$f''(x) > f''(x_0)$

故$(x_0, f(x_0))$是$y = f(x)$的拐点

11. 若对于区间(a, b)内的任意两点x_1与x_2及任意两个数λ_1与λ_2（$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$）有不等式$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$（或对应地，相反的不等式$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$成立），则称$y = f(x)$曲线在区间$(a, b)$上是凹（凸）的

习题 3-6

1. 求曲线$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$的渐近线

解：$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$ 故 y=x+2 为曲线的斜渐近线

2. 求曲线$y=\frac{x^2+x}{(x-2)(x+3)}$的渐近线

解：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x}{(x-2)(x+3)}=\infty$ $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x}{(x-2)(x+3)}=\infty$ 故 x=2,x=−3 为曲线的铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{(x-2)(x+3)}=1$ 故 y=1 为曲线的水平渐近线

3. 求曲线$y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$的渐近线

解：$\because x\to\infty \quad -x^2\to-\infty \quad e^{-x^2}\to 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$ 故 y=1 为曲线的水平渐近线

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)=\infty$ 故 x=0为曲线的铅直渐近线

4.描绘曲线 $y=\frac{x^2}{x+1}$ 的图形

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{y}{x+1}=1$$

$$\lim(y-x)=\lim\frac{-x}{x+1}=1$$

Y=x-1 是渐进线

$x\to -1, y\to\infty$ 垂直渐近线

$y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0$ 时

X=0 或-2

再求 y'' 判断凹凸性

5．描绘曲线 $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$ 的图形

偶函数

$y'=2x-2x^3=2x\left(1-x^2\right)=0$ 时

$x = 0或1$

$y^{"} = 2 - 6x^2$ 只需判断 $x \in (0, \infty)$ 有对称性可画出

6. 描绘曲线 $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$ 的图形

$\lim y = 0$

$x \to \pm 1$ 时， $y = \infty$

Y=0 是水平渐进线， $x = \pm 1$ 是垂直渐近线

$$y^{'} = \frac{(1+x)(1-x)^2 - x(3x^2 - 2x - 1)}{\left[(1+x)(1-x)^2\right]^2} = \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{(\ )}$$

$$y^{"} = \frac{-6x^2 + 2x}{(\ )}$$

7.描绘曲线 $y = x - 2\arctan x$ 的图形

$$y^{'} = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2 - 1}{1+x^2}$$

$$y^{"} = \frac{2x(1+x^2) - 2x(x^2 - 1)}{(1+x^2)^2}$$

渐近线方程 $y = x \pm \prod$

8. 描绘曲线 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ 的图形

$$2x \neq k\prod - \frac{\prod}{2}$$

$$y^{'} = \frac{-\sin x \cos 2x + 2\sin 2x \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x(1 - \sin^2 x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x(3 - 2\sin^2 x)}{(\sin x)^2} = 0$$

9. 描绘曲线 $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$ 的图形

$x \to -1$ $y > \infty$

$$\frac{x^4+4x^3+x^2-2x}{4x^3+12x^2+2x-2}$$

$x(x^3+4x^2+x-2)$

10.描绘曲线 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ 的图形

奇函数

$$y'=\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}2x}{()}$$

第三章：第 7 节

1：解：$f(x)=x^2+3x+2; f'(x)=2x+3; f''(x)=2$

$$\therefore K(x)=\frac{|f''(x)|}{\left[1+f'(x)^2\right]^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+3)^2\right]^2}$$

$$\therefore K(1)=\frac{2}{26^{3/2}}\Rightarrow R(1)=\frac{1}{K(x)}=13\sqrt{26}$$

2：解：$y=\ln x; y'=\frac{1}{x}; y''=-\frac{1}{x^2}$

$$\therefore K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1/x^2}{(1+\frac{1}{x^2})}=\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}(x>0)$$

由于：$K'(x)=\frac{(x^2+1)^{3/2}-x\cdot\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}=\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}}(x>0)$

则有：$0<x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$K'(x)\ge 0$；$x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$K'(x)\le 0$

$\therefore$ 当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$K(x)_{\max}=K(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

3：解：对 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导，得：$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow y'=\frac{b^2x}{a^2y}$

$$\therefore y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{b^2x}{a^2y})=\frac{b^2}{a^2}\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{b^2}{a^2}\frac{y-\frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$$\therefore K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}=\frac{ab}{(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2)^{3/2}}\Rightarrow R=\frac{(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2)^{3/2}}{ab}$$

4：解：由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得：$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

两边对x求导可得：$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

$$\therefore y''=\frac{dy'}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^4}{a^2}\frac{1}{y^3}$$

$$\Rightarrow K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\frac{b^4}{a^2}\frac{1}{|y^3|}}{(1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2})^{3/2}}=\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}=\frac{ab}{(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2)^{3/2}}{ab}$$

5：解：由$\begin{cases}x(t)=a(t-\sin t)\\y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}$得：$\begin{cases}x'(t)=a(1-\cos t)\\y'(t)=a\sin t\end{cases}$；$\begin{cases}x''(t)=a\sin t\\y''(t)=a\cos t\end{cases}$

$$\Rightarrow K=\frac{|x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)|}{\left[x'(t)^2+y'(t)^2\right]^{3/2}}=\frac{|a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t|}{\left[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{a^2(1-\cos t)}{\left[2a^2(1-\cos t)\right]^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{4a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{ay}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{4\sqrt{ay}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2ay}$$

6：解：由$r=a(1+\cos\varphi)$可得：$\Rightarrow r'=-a\sin\varphi, r''=-a\cos\varphi$

$$\Rightarrow K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}=\frac{|a^2(1+\cos^2\varphi)+2a^2\sin^2\varphi-a(1+\cos\varphi)(-a\cos\varphi)|}{\left[a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{a^3\cdot 2\sqrt{2}(1+\cos\varphi)^{3/2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}}=\frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{ar}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{2\sqrt{2ar}}{3}$$

7：解：由 $r^2=a^2\cos 2\varphi$ 两边对 φ 得 $2rr'=-a^2\sin(2\varphi)\cdot 2\Rightarrow r'=-\frac{a^2}{r}\sin(2\varphi)$

$$\Rightarrow r''=\frac{d(-\frac{a^2}{r}\sin(2\varphi))}{d\varphi}=-\frac{r^2\cdot 2a^2\cos(2\varphi)+a^4\sin^2(2\varphi)}{r^3}=-\frac{a^4(1+\cos^2(2\varphi))}{r^3}$$

$$\Rightarrow K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}=\frac{r^4+2a^4\sin^2(2\varphi)+a^4(1+\cos^2(2\varphi))}{\frac{1}{r}(r^4+a^4\sin^2(2\varphi))^{3/2}}=\frac{3r}{a^2}$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{K}=\frac{a^2}{3r}$$

8：证明：由 $y=a\cdot ch\frac{x}{a}$ 得：$y'=a\cdot sh\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}=sh\frac{x}{a};y''=\frac{1}{a}\cdot ch\frac{x}{a}$

$$\therefore K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}|}{(1+sh^2\frac{x}{a})^{3/2}}=\frac{|\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}|}{|ch\frac{x}{a}|^3}=\frac{\frac{1}{a}}{ch^2\frac{x}{a}}=\frac{a}{ch^2\frac{x}{a}}=\frac{a}{y^2}$$

$\therefore R=\frac{1}{K}=\frac{y^2}{a}$ 得证.

9：解：由 $y^2=2px$ 得 $x=\frac{y^2}{2p}\Rightarrow x'=\frac{y}{p};x''=\frac{1}{p}$

根据 $\begin{cases}\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$ 可得：

渐屈线参数方程为：$\begin{cases}\alpha=y-\frac{x'(1+x'^2)}{x''}=-\frac{y^3}{p^2}\\ \beta=x+\frac{1+x'^2}{x''}=3x+p\end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{y^6}{p^4} = \frac{(2px)^3}{p^4} = \frac{8p^3(\frac{\beta - p}{3})^3}{p^4}$$

即：$27p\alpha^2 = 8(\beta - p)^3$.

10：解：由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得：$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}; y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$

由 $\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}(1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2})}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = x - \frac{x(a^4y^2 + b^4x^2)}{a^4b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^4}x^3 \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = y - \frac{y}{a^2b^4}(a^4y^2 + b^4x^2) = -\frac{a^2 - b^2}{b^4}y^3 \end{cases}$ 得：

渐屈线参数方程为：$\begin{cases} \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4}x^3 \\ \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4}y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (\frac{a^4\alpha}{a^2 - b^2})^{1/3} \\ y = -(\frac{b^4\beta}{a^2 - b^2})^{1/3} \end{cases}$

所以渐屈线方程为：$\frac{(\frac{a^4\alpha}{a^2 - b^2})^{2/3}}{a^2} + \frac{(\frac{b^4\beta}{a^2 - b^2})^{2/3}}{b^2} = 1$

即：$(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

11：解：由 $y = \tan x$ 得：$y' = \frac{1}{\cos^2 x}; y'' = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$

$\therefore y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2; y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$

根据公式得：

$$\begin{cases} \alpha|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{2(1+2^2)}{4} = \frac{\pi - 10}{4} \\ \beta|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{1+2^2}{4} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

根据 K 的公式可得：

$$K|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{(1+2^2)^{3/2}} \Rightarrow R|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

则有所求曲率圆方程为：$(x - \frac{\pi - 10}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{125}{16}$.

12：解：由 $y=\dfrac{x^2}{10000}$ 得： $y'=\dfrac{2x}{10000}; y''=\dfrac{2}{10000}$

$$\therefore R|_{x=0}=\frac{1}{K}|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}|_{x=0}=\frac{1}{2/10000}=5000$$

根据 $N-G=m\dfrac{v^2}{R}$ 得：

$$N=G+m\frac{v^2}{R}=m(g+\frac{v^2}{R})=1246(N).$$

13：解：由已知： $\left[(\dfrac{x}{a})^{1/3}\right]^2+\left[(\dfrac{y}{a})^{1/3}\right]^2=1$ 可令 $\begin{cases}x(t)=a\cos^3 t\\ y(t)=a\sin^3 t\end{cases}(t\in[0,2\pi))$ 则有：

$$\begin{cases}x'(t)=3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)=3a\cdot(\sin^3 t-\sin t)\\ y'(t)=3a\sin^2 t\cdot\cos t=3a\cdot(\cos t-\cos^3 t)\end{cases};\begin{cases}x''(t)=3a(3\sin^2 t\cdot\cos t-\cos t)\\ y''(t)=3a(-\sin t+3\cos^2 t\cdot\sin t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\left[x'^2(t)+y'^2(t)\right]^{3/2}}{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}=\frac{|3a\sin t\cos t|^3}{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}=3a|\sin t\cos t|=3|axy|^{1/3}$$

14：解：由 $y=\dfrac{kx^3}{6}$ 得 $y'=\dfrac{kx^2}{2}; y''=kx$

$$\Rightarrow K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|kx|}{\left[1+(\frac{kx^2}{2})^2\right]^{3/2}}=\frac{kx}{(1+\frac{k^2x^4}{4})^{3/2}}(k>0;x\geq 0)$$

$$\Rightarrow K'(x)=\frac{k(1+\frac{k^2x^4}{4})^{3/2}-kx\cdot\frac{3}{2}\cdot(1+\frac{k^2x^4}{4})^{1/2}k^2x^3}{(1+\frac{k^2x^4}{4})^3}=k(1-\frac{5}{4}k^2x^4)(1+\frac{k^2x^4}{4})^{-5/2}$$

$$\therefore 当x=(\frac{4}{5k^2})^{1/4}时,K(x)_{\max}=k(\frac{4}{5k^2})^{1/4}(\frac{5}{6})^{3/2}=\frac{1}{1000}\Rightarrow k^2=\frac{6^6}{4*5^5*10^{12}}$$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{4}{5\cdot\frac{6^6}{4*5^5*10^{12}}}\right)^{1/4}=\frac{10^4}{6\sqrt{6}}$$

15：解：可另： $\begin{cases}x(t)=a\cos^3 t\\ y(t)=a\sin^3 t\end{cases}(t\in[0,2\pi))$ ，则有：

$$\begin{cases} x'(t)=3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)=3a\sin^3 t-3a\sin t \\ y'(t)=3a\sin^2 t\cdot\cos t=3a\cos t-3a\cos^3 t \end{cases};\begin{cases} x''(t)=3a\cos t(3\sin^2 t-1) \\ y''(t)=3a\sin t(3\cos^2 t-1) \end{cases}$$

由此可得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\tan t)=\frac{d(-\tan t)/dt}{dx/dt}=\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}$$

根据公式可得曲率中心为：

$$\begin{cases} \alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=a\cos t(1+2\sin^2 t) \\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=a\sin t(1+2\cos^2 t) \end{cases}$$

所有所求的渐屈线参数方程为：$\begin{cases} x(t)=a\cos t(1+2\sin^2 t) \\ y(t)=a\sin t(1+2\cos^2 t) \end{cases}$.

16：解：由$r(\varphi)=ae^{m\varphi}$得：$r'(\varphi)=mae^{m\varphi};r''(\varphi)=m^2ae^{m\varphi}$

则有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}=\frac{1}{(r^2+r'^2)^{3/2}}=\frac{1}{a\sqrt{m^2+1}e^{m\varphi}}$$

根据公式得曲率中心为：

$$\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=r\cos\varphi-\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3}(r^2+r'^2)^{3/2}$$

$$\beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=r\sin\varphi+\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}=ae^{m\varphi}\left[\sin\varphi+\frac{(m^2+1)^{3/2}}{(m\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\right]$$

则有渐屈线的参数方程为：

$$\begin{cases} x(\varphi)=ae^{m\varphi}\left[\cos\varphi-\dfrac{(m^2+1)^{3/2}(m\sin\varphi+\cos\varphi)}{(m\cos\varphi-\sin\varphi)^3}\right] \\ y(\varphi)=ae^{m\varphi}\left[\sin\varphi+\dfrac{(m^2+1)^{3/2}}{(m\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\right] \end{cases}$$

第三章总复习题

4、设 f（x）在[0.1]上连续，在(0.1)内可导，且 f（0）=0，对任意的 x∈（0. 1）有 f（x）≠0 证明：存在$\zeta\in$（0. 1）使$\dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\dfrac{f'(1-\zeta)}{f(1-\zeta)}$。

证明：设 F（x）=f（x）f（1−x）

$$F'(x)=f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)$$

因为$f(0)=0\therefore F(0)=0,F(1)=0$

f（x）在[0.1]上连续，在(0.1)内可导∴F（x）在[0.1]上连续，在(0.1)内可导

根据罗尔定理得

在[0.1]内必有ζ使$F'(x)$=0∴ $f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)$=0

$\therefore\dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\dfrac{f'(1-\zeta)}{f(1-\zeta)}$在[0.1]内 f（x）≠0 此式成立。

5、设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内可导，且$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，证明存在一点$\zeta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$使得$f(\zeta)+\tan(\zeta)f'(\zeta)=0$。

证明：设$F(x)=f(x)\cdot\sin(x)$，则$F'(x)=\cos(x)f(x)+\sin(x)f'(x)$，

因为$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，∴F（0）=0，F（$\dfrac{\pi}{2}$）=0

且$f(x)$，sin（x）在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$连续在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内可导∴$F(x)$在此区间上有同样的性质

根据罗尔定理得在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上必有一点$\zeta$使$F'(x)$=0

即$\cos(\zeta)f(\zeta)+\sin(\zeta)f'(\zeta)=0$

整理后既得所证结果$f(\zeta)+\tan(\zeta)f'(\zeta)=0$

7 设$f(x)$和$g(x)$都是可导函数，且$|f'(x)|<g'(x)$证明：当 x>a 时

$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$

证明：构造函数

$$f'\left(x\right)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad g'\left(x\right)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

因为$\left|f'\left(x\right)\right|<g'\left(x\right)$

所以$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|<\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$又因为 x>a

得$\left|f\left(x\right)-f(a)\right|<g\left(x\right)-g(a)$

8、求极限

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$$

$$\therefore=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4-o(x^4)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4}{x^4}$$

$$=-\frac{1}{12}$$

$$2.\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1+1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$=1+\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$=1+\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-x+1}{\left(x-1\right)\ln x}\right)$$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-x+1}{\left(x-1\right)\ln x}\right)$利用罗比达法则，

得

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{(x-1)}{x}+\ln x}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{(x-1)+x\ln x}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x}{(x-1)+x\ln x}\right)$$

罗比达法则得 $\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x}{(x-1)+x\ln x}\right)=-\frac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

罗比达法则：

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x\cdot x}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln^2 x\cdot x}{1-x}$$

罗比达法则

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{-1}$$

=0

4. $\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)$

利用等价无穷小

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x-x+\frac{1}{2}+o(\frac{1}{x^2})\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}\arctan x)^x$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\frac{\pi}{2}\arctan x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(\frac{\pi}{2}\arctan x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}\arctan x)}{\frac{1}{x}}}$$

应用罗比达法则得

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}\arctan x}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\arctan x}}$$

$$=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

6 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi)\ln(\tan x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{(2x-\pi)}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot 2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x}}$$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{8x-4\pi}{2\sin x}}$

$=e^{o}=1$

7， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}}$

应用罗比达法则得

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{1+n}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}}}$

$=e^{0}$

=1

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{x}-\cot x)}{x}$

应用罗比达法则

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-\frac{1}{x^2}+\csc^2 x)}{1}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\csc^2 x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)$$

应用罗比达法则，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-2\sin x\cos x)}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-2\sin x\cos x)}{4x^3}$$

应用一次罗比达法则

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x-\cos^2 x)}{6x^2}$$

再使用一次罗比达

$$=\frac{1}{3}$$

12、确定下列函数的单调区间。

（1） $y=2x-\ln(4x)^2$

解：$y'=2-\dfrac{2\cdot 4x\cdot 4}{(4x)^2}=2-\dfrac{2}{x}$，

$y'>0$，即 $2-\dfrac{2}{x}>0$，解得 $x\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$

$y'<0$，$2-\dfrac{2}{x}<0$，解得 $x\in(0,1)$。

所以，该函数的增区间为 $x\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$，减区间为 $x\in(0,1)$。

（2） $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解：$y'=\dfrac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，故函数在整个定义域内单调递增，该函数的

定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以该函数在$(-\infty,+\infty)$内单调递增。

13 求下列函数的极值。

（1）$y=x^{\frac{1}{x}}$

解：$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$，$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}=(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}$。

令$y'=0$，即$(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}=0$，因为$x^{(\frac{1}{x}-2)}\neq 0$，故$1-\ln x=0$，$x=e$。

当$x<e$时，$y'>0$，为增；

$x>e$时，$y'<0$，为减。

所以，该函数存在极大值，当$x=e$时，极大值为$y=e^{\frac{1}{e}}$。

（2）$y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

解：$\ln y=\frac{1}{3}\ln x+\frac{2}{3}\ln(1-x)$，$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}$，

$y'=[\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}][x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}]$，

令$y'=0$，即$[\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}][x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}]=0$，$\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(1-x)}=0$，解得$x=\frac{1}{3}$。

且$x=0$和$x=1$时，函数的导数不存在，现列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	+	0	−	不存在	+
$f(x)$	增	极大值	增	极大值	减	极小值	增

所以，该函数在$x=\frac{1}{3}$处存在极大值，极大值为$y=\frac{1}{3}^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$；在$x=1$处存在极

小值，极小值为 0。

14　求数列{$\sqrt[n]{n}$}的最大项。

解：先求$y=\sqrt[x]{x}$的最大值：

$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$，$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}=(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}$。

令$y'=0$，即$(1-\ln x)x^{(\frac{1}{x}-2)}=0$，因为$x^{(\frac{1}{x}-2)}\neq 0$，故$1-\ln x=0$，$x=e$。

当$x<e$时，$y'>0$，增；

$x>e$时，$y'<0$，减。

所以，当$x=e$时，函数有最大值，因为数列{$\sqrt[n]{n}$}中，取$n=2$和$n=3$分别代入原函数，解得$y=\sqrt{2}$和$y=\sqrt[3]{3}$，因为$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$。

所以，$n=3$时，当数列的最大项为$\sqrt[3]{3}$。

15 证明不等式$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$。

证明：因为$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$（可以利用两式相减，通分后得到），

$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|},$$

所以，$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$。

17　求$\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$在闭区间[0，2]上的最大值和最小值。

解：令$f(x)=\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$，$\ln y=\frac{2}{3}\ln(x-1)-\ln(x+3)$，$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{x+3}$，

$$y'=[\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{x+3}]\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3},$$

令$y'=0$，解得$x=9$，不在闭区间[0，2]上。

该y'在$x=-3$和$x=1$处不存在，所以y'在闭区间[0，2]可能的极值点为$x=1$。

$x=0$时，$y=\dfrac{1}{3}$；

$x=1$时，$y=0$

$x=2$时，$y=\dfrac{1}{5}$。

所以，$\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)}}{x+3}$在闭区间[0，2]上的最大值和最小值分别是$f(1)=\dfrac{1}{3}$和$f(1)=0$。

19 研究曲线$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$的凹凸性与渐近线。

解：（1）凹凸性

$\ln y=3\ln(x+1)-2\ln(x-1)$，$(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{2}{x-1}$，

$y'=[\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}]y$。

$y''=[-\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}]y+(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2y=6y(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2$，

令$y''>0$，则$6y(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2>0$，即$y>0\Rightarrow\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\Rightarrow x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

$y''<0$，则$6y(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1})^2<0$，即$y<0\Rightarrow\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\Rightarrow x\in(-\infty,-1)$；

所以，$x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$时，函数为凹函数；

$x\in(-\infty,-1)$时，函数为凸函数。

（2）渐近线

因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$，所以$x=1$为函数的垂直渐近线。

因为$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{x}=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-ax]=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1-x(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=5$$

所以函数的斜渐近线为 $y=x+5$ 。

第四章第一节：定积分的概念

1：$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

注：$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

2：$f(x)=\dfrac{1}{x}$

注：$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$

3：$\int_a^b f(x)dx=0$

注：由均分可得：$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\dfrac{b-a}{n}i)$

再由定义可知：$0\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\dfrac{b-a}{n}i)\le\dfrac{b-a}{n}$

由夹逼原理知：$\int_a^b f(x)dx=0$

4（1）：

$$\int_a^b xdx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{b-a}{n}i)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{b^2-a^2}{2}$$

4（2）：

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{1}{n}i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{n+1}{n}}-e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(e-1)\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}(e-1)\frac{t}{1-e^{-t}}=e-1$$

4（3）：

$$\int_0^b x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{b}{n}i)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3}$$

5（1）：

由 $y=\sqrt{a^2-n^2}$ 得：$x^2+y^2=a^2(y\geq 0)$ 可知：原式的几何意义为：以原点为圆心，a 为半径的圆在第一象限的面积，即为：$\frac{\pi}{4}a^2$

5（2）：

由 $f(x)=\sin(x)(x\in[-\pi,+\pi])$ 图象可知：面积代数和为：0

所以：$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)dx=0$

5（3）：

由 $f(x)=|x-\frac{a+b}{2}|$ 图象知：$f(a)=f(b)=\frac{b-a}{2}$

所以：$\int_a^b|x-\frac{a+b}{2}|dx=\frac{1}{2}(b-a)f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}$

6：金属丝的质量为：

$$m=\int_0^a kxdx=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}k(0+\frac{a}{n}i)=\lim_{n\to\infty}\frac{ka^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{ka^2}{2}$$

7：以水面上任意一点为原点，垂直向下为 x 轴方向建立直角坐标系，在 x 处 $(0\leq x\leq a)$ 所受到的压强为：$p_x=\rho gx=gx$；面积元为：bdx

所以：$F=\int_0^a gxbdx=gb\int_0^a xdx$

8：当 $f(x)$ 为奇函数时，函数关于原点对称，则有 $\int_{-a}^{0}f(x)dx$ 与 $\int_0^a f(x)dx$ 与 x 轴围成的图形面积相等，符号相反，所以有：$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

当 $f(x)$ 为偶函数时，函数关于 y 轴对称，则有 $\int_{-a}^{0}f(x)dx$ 与 $\int_0^a f(x)dx$ 与 x 轴围成的图形面积相等，符号相同，所以有：$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

习题 4-2 （A）

1.比较下列积分大小

（1）$\int_0^1 e^x dx$和$\int_0^1 e^{x^2} dx$

解：利用例 2.1 的结果，当 f(x)不等于 0 时，因为 f(x)⩾0, 而$\int_a^b f(x)dx$是数值，它只有是零和不是零两种可能，设若$\int_a^b f(x)dx$=0，则由已证得例 2.1 结果，在[a,b]上必有 f(x)≡0,与 f(x)不恒等于 0 矛盾，所以得出结论：若在[a,b]上，f(x)⩾0 且 f(x)不恒等于 0，则$\int_a^b f(x)dx$>0.

$\int_0^1 (e^x - e^{x^2})dx$ 在[0,1]上 e^x- e^{x^2} ⩾0 且 e^x- e^{x^2} 不恒等于 0，所以$\int_0^1 (e^x - e^{x^2})dx$>0，所以$\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$。

（2）$\int_0^1 x^2 dx$和$\int_0^1 x^3 dx$

解：$\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$，因为在[0,1]上 x^2-x^3⩾0 且 x^2-x^3 不恒等于 0，所以$\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$>0，所以$\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$。

（3）$\int_1^2 x^2 dx$和$\int_1^2 x^3 dx$

解：$\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^3 dx = \int_1^2 (x^2 - x^3)dx$，因为在[1,2]上 x^2-x^3 ≤0 且 x^2-x^3 不恒等于 0，所以$\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^3 dx = \int_1^2 (x^2 - x^3)dx$<0，所以$\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x^3 dx$。

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$和$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

解：构造函数 f(x)= sinx-x,则 f’(x)=cosx-1,在（0，$\frac{\pi}{2}$］上单调递减，从而有 f(x)= sinx-x<f(0)=0,所以 sinx<x, 而在（0，$\frac{\pi}{2}$］上 sinx ,x 都是大于 0 的，所以 sinx/x 在（0，$\frac{\pi}{2}$］上小于 1，所以在（0，$\frac{\pi}{2}$］上$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin^2 x}{x^2}$，所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2})$ dx>0，有$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

（5）$\int_0^1 \ln(1+x)dx$和$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$

解：构造函数 f(x)=ln(1+x)- $\frac{\arctan x}{1+x}$,在[0,1]上 f'(x)= $\frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{(1+x)^2}$>0, 所以 f(x)在 [0,1] 上是增函数 f(x)>f(0)=0, 有 $\int_0^1(\ln(1+x)-\frac{\arctan x}{1+x})dx$ >0，于是 $\int_0^1\ln(1+x)dx>\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx$。

2.估计下列各积分的值

（1）$\int_1^4(x^2+1)dx$

解：只须求出 f(x)在区间上的最大、最小值 M 与 m，便可用估值定理估计。显见 x^2+1 在[1,4]上单调增加，有 m=2,M=17,即 2≤x^2+1≤17，x∈[1,4],而 b-a=3,所以 2*3=6≤$\int_1^4(x^2+1)dx$≤17*3=51，即 6≤$\int_1^4(x^2+1)dx$≤51.

（2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx$

解：记 f(x)=1+$\sin^2$x,令 f'(x)=2sinxcosx=sin2x=0.得 f(x)在区间$[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$上的驻点 x_1=$\frac{\pi}{2}$,x_2=π，计算 f($\frac{\pi}{2}$)=1+1=2,f(π)=1+0=1,f($\frac{\pi}{4}$)=1+1/2=3/2,f($\frac{5\pi}{4}$)=1+ $(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ =3/2, 所以 m=minf(x)=1,M=maxf(x)=2,其中 x∈$[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$,这里 b-a=$\pi$,所以$\pi$≤$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx$≤2$\pi$.

（3）$\int_2^0 e^{x^2-x}dx$

解：记 f(x)= e^{x^2-x},x∈[0,2],因为 f'(x)=(2x-1) e^{x^2-x},令 f'(x)=0,得到唯一驻点 x=1/2,又 f(1/2)= $e^{-\frac{1}{4}}$,f(0)=1,f(2)= e^2,所以 m=minf(x)= $e^{-\frac{1}{4}}$,M=maxf(x)= e^2,有因为 b-a=-2，所以-2e≤$\int_2^0 e^{x^2-x}dx$≤-2$e^{-\frac{1}{4}}$.

3.设函数 f(x)与 g(x)在任何有限区间上可积

（1）如果$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，那么 f(x)与 g(x)在[a,b]上是否相等？

（2）如果在任意区间[a,b]上都有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，那么 f(x)是否等于 g(x)?

(3)如果（2）中的 f(x)与 g(x)都是连续函数，那么又有怎么样的结论？

解：（1）不一定。f(x)，g(x)恰巧在某一区间[a,b]积分值相等，但是不能说明 f(x),g(x)是相等的，例如 f(x)= $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 0$,g(x)= $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 0$,但是实际上 sinx≠tanx.

(2) 不恒等，前提必须 f(x),g(x) 都是连续函数。例如 f(x)=sinx(0 ≤ x ≤ π), $g(x)=\begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \pi, x \ne \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.而 $\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} g(x)dx$ 。

（3）反证法：假设 f(x)不恒等于 g(x), 设 f(x)>0, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$,所以 $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = 0$ ，由例 2.1 结果 f(x)≡g(x)矛盾，所以 f(x)≡g(x).

4.证明柯西不等式：若函数 f(x)与 g(x)在区间上可积，则 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le (\int_a^b f^2(x)dx).(\int_a^b g^2(x)dx)$ 。

证：令 L(x)=f(x)+ λ g(x),则 $L^2(x)=f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+ \lambda^2 g^2(x)$≥0,从而有 $\int_a^b L^2(x)dx \ge 0$ ，即 $\lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx$ ≥0.将上式右边视为关于 λ 的二次多项式。因为 Ax^2+Bx+C≥0,可知 B^2-4AC≤0,从而有 $4(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$ ，从而有 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$ 。

5.设 f(x)在区间[a,b]连续，证明 $\int_a^b e^{f(x)}dx.\int_a^b e^{-f(x)}dx \ge (b-a)^2$

证：利用上题的结论，令 f(x)= $\sqrt{e^{f(x)}}$,g(x)= $\sqrt{e^{-f(x)}}$,它们都是连续函数，有 $(\int_a^b e^{\sqrt{e^{f(x)}}}dx)^2.(\int_a^b e^{\sqrt{e^{-f(x)}}}dx)^2 \ge (\int_a^b \sqrt{e^{-f(x)}} * \sqrt{e^{f(x)}}dx)^2 = (b-a)^2$ 。

（B）

6.证明闵可夫斯基不等式：若函数 f(x)与 g(x)在区间[a,b]上可积，则$(\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx)^{\frac{1}{2}} \le (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$。

证明 $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx = \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\le \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}},$$

又 $\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} = \left([\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\right)^2$,

所以 $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

7.设 f(x)在区间[a,b]连续，且$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$，证明：f(x)在（a,b）内至少存在不同的两个零点。

证明：根据积分中值定理，在[a,b]上，存在ξ_1，满足$\int_a^b f(x)dx = f(\xi_1)(a-b)$ =0,得到$f(\xi_1)$=0，ξ_1是 f(x)的一个零点。假设ξ_1是唯一的一个零点。那么在（a, ξ_1）和（ξ_1，b）内 f(x)异号。假设（a, ξ_1）上 f(x)>0, （ξ_1，b）上 f(x)<0.由$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$和$f(\xi_1)$=0 可知 0=$\int_a^{\xi_1} f(x)(x-\xi_1)dx + \int_{\xi_1}^b f(x)(x-\xi_1)dx \ne 0$ 得出矛盾，所以至少在（a,b）上还有一个零点。

习题 4-3 （A）

1. 单项选择题

（1） 设$f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt, g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$，则当 x→0 时 f(x)是 g(x)的 （ B ）

（A） 低阶无穷小 （B）高阶无穷小 （C）等价无穷小 （D）同阶但非等价无穷小

提示：洛必达法则

（2） 设 f(x)是连续一阶导数，f(0)=0,f'(0)≠0, $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$ 。且当 x→0 时，F'(x)与 x^k 为同阶无穷小，则 k 等于（ C ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(3) 把 x→0 时的无穷小 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt, \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt, \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确次序是（ B ）

(A) α,β,γ (B) α,γ,β (C) β,α,γ (D) β,γ,α

2.设 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，c 为某常数，且对任意的 x∈ $(-\infty,+\infty)$，有 $\int_c^x f(t)dt=5x^3+40$，则 f(x)=<u>$15x^2$</u>;c=<u>-2</u>.

3.试求函数 $y=\int_0^x \sin tdt$ 当 x=0 和 x=$\frac{\pi}{4}$ 时的导数。

$\frac{dy}{dx}=(\int_0^x \sin tdt)'=\sin x, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\sin 0=0$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4.证明 $\sin x^2$，$-\cos x^2$ 与 $-\frac{1}{2}\cos 2x$ 都是同一个函数的原函数，你能解释为什么同一个函数的原函数在形式上的这种差异吗？

同一个函数的原函数在形式上的差异只是一个常数 C。例如 $\sin x^2$，$-\cos x^2$ 与 $-\frac{1}{2}\cos 2x$ 都是函数 2sinxcosx 的原函数。$\sin x^2=1-\cos x^2$，$-\frac{1}{2}\cos 2x=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)=-\frac{1}{2}+\sin^2 x$

5.用牛顿-莱布尼兹公式计算下列积分

（1）$\int_0^1 4x^2dx$ （2）$\int_1^e \frac{1}{x}dx$ （3）$\int_0^\pi \sin xdx$ （4）$\int_{-1}^1 |x|dx$

（5）$\int_0^a (3x^2-x+1)dx$ （6）$\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$ （7）$\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$ （8）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$

（9）$\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{1}{a^2+x^2}dx$ （10）$\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$ （11）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$ （12）

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)dx$ （13）设 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

解（1）$\int_0^1 4x^2dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{4}{3}$ （2）$\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^e=1$ （3）$\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-2$

（4）$-2\int_{-1}^{1}|x|dx=-2(\int_{-1}^{0}-xdx+\int_0^1 xdx)=1$

（5）$\int_0^a(3x^2-x+1)dx=(x^3-\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_0^a=a^3-\frac{1}{2}a^2+a$

（6）$\int_1^2(x^2+\frac{1}{x^4})dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3})\Big|_1^2=\frac{21}{8}$

（7）$\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=\int_4^9(\sqrt{x}+x)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)\Big|_4^9=\frac{271}{6}$

（8）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ （9）$\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{\pi}{3a}$

（10）$\int_{-1}^{0}\frac{3x^2(1+x^2)+1}{1+x^2}dx=(x^3+\arctan x)\Big|_{-1}^{0}=1+\frac{\pi}{4}$

（11）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2x-1)dx=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

（12）$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(\frac{\pi}{3}-x)dx=\cos(\frac{\pi}{3}-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

（13）$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{0}xdx+\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=-\frac{1}{6}$

6.求下列各导数

（1）$\frac{d}{dx}\int_0^x\arctan tdt$ （2）$\frac{d}{dx}\int_x^b\frac{1}{t^4+1}dt$ （3）$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$ （4）$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)$ dt

（5）$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln(1+t^6)dt$ （6）$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}(x+t)\varphi(t)dt$，其中 $\varphi(x)$ 是连续函数。

解：(1)　arctanx　(2) $-\frac{1}{1+x^4}$　(3) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$

(4) $-\cos(\pi\cos^2 x)\sin x-\cos(\pi\sin^2 x)\cos x$　(5) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x^3)$

(6)

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}(x+t)\varphi(t)dt=\frac{d}{dx}(x\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)dt+\int_{x^2}^{x^3}t\varphi(t)dt)=\int_{x^2}^{x^3}\varphi(t)dt+3x^3(1+x^2)\varphi(x^3)-2x^2(1+x)\varphi(x^2)$$

7.指出下列运算的错误，错在何处

（1）$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\sqrt{1+t}dt=\sqrt{1+x^3}$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{d}{dt}(1+t)dt=\sqrt{1+x^3}$

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$

(4) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_0^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=0$

解：（1）忘记了 x^3 对 x 的一步求导　正确解：$3x^2\sqrt{1+x^3}$

（2）计算过程失误，先化简，再求导。正确解：$3x^2$

（3）正确

（4）没有谈论（0，2π）上 sinx 的正负性。正确解：4

8.设 k 是正整数，试证明下列各题

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0$　　（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$

（3）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$　　（4）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$

证明 【通过计算左式达到证明.】

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\sin kx=\frac{\sin k\pi}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\cos kx=-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}+0=\pi.$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2k\pi}{2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}-0=\pi.$

9.设 k 及 m 为正整数，且 k≠m,试证明下列各题

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mxdx=0$ （2）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mxdx=0$ （3）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mxdx=0$

证明 【只须计算各左式,从而得证.】

(1)左式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(l+k)x+\sin(l-k)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(l+k)x}{l+k}+\frac{\cos(l-k)x}{l-k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

(2)左式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+l)x}{k+l}+\frac{\sin(k-l)x}{k-l}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

(3)左式 $=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+l)x}{k+l}-\frac{\sin(k-l)x}{k-l}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

10.求由参数方程 $x=\int_0^t\sin^2 sds, y=\int_0^{t^2}\cos\sqrt{s}ds$ 所确定的函数 y=f(x) 的一阶导数。

11.求由方程$(\int_0^{x^2} te^t dt + \int_0^y e^{t^2} dt = 0)'$所确定的 y=f(x)的一阶和二阶导数

$\frac{dx}{ds} = \sin t^2, \frac{dy}{ds} = 2t\cos t$，两式相比得$\frac{dy}{dx} = 2t\cot t\sec t$

12. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ x & x \in [1,2] \end{cases}$，求$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$在[0,2]上表达式，并讨论$\varphi(x)$在[0,2]上的连续性。

解 【应注意 $x \in [1,2]$时，应将 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$分段表示再计算. 下题同.】

当 $0 \leqslant x < 1$ 时，

$$\Phi(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^x = \frac{1}{3}x^3;$$

当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t + \int_1^x t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6},$$

$$\therefore \qquad \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

显见 $\Phi(x)$在$(0,1) \cup (1,2)$内连续，剩下只须讨论它在 $x=1$ 处的连续性. 因为

$$\Phi(1-0) = \lim_{x \to 1^-}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3} = \Phi(1),$$

从而 $\Phi(x)$在 $x=1$ 左连续. 同样地，

$$\Phi(1+0) = \lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = \Phi(1),$$

故 $\Phi(x)$在 $x=1$ 处也右连续，从而 $\Phi(x)$在 $x=1$ 处及$(0,2)$内处处

连续

13.求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\mathrm{x}}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$　　（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x \arctan^2 tdt}{\sqrt{1+x^2}}$　　（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

解：（1）根据洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\mathrm{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$

（2）根据洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+2x^2}=2$

(3)根据洛必达法则和等价无穷小

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2 x\sqrt{\sin(\tan x)}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}}=1,(x\to 0^+\text{时}\,\mathrm{tanx}\sim\mathrm{sinx}\sim\mathrm{x})$$

（4）根据洛必达法则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x \arctan^2 tdt}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan^2 x}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{\pi^2}{4}$

（5）根据洛必达法则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=0$

14.设 f(x)在[a,b]上连续，在（a,b）内可导且 f'(x)≤0,
$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$**.证明：在（a,b）内有 F'(x)≤0.**

证明 【只须演算 $F'(x)$，再设法证之.】由题设，

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}\quad(a\leqslant\xi\leqslant x)$$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=\frac{f'(\eta)(x-\xi)}{x-a}\quad(\xi<\eta<x)$$

$\leqslant 0.$ $(f'(\eta)\leqslant 0, x-\xi\geqslant 0, x-a>0.)$

其中用到积分中值定理和拉格朗日微分中值定理。

15.设函数 f(x)在 x=1 的某个邻域内可导，且 f(1)=0,
$\lim_{x\to 1}f'(x)=1$**,计算**$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x(t\int_t^1 f(u)du)dt}{(1-x)^3}$

根据洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x(t\int_t^1 f(u)du)dt}{(1-x)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x\int_1^x f(u)du}{3(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(u)du+xf(x)}{6(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+xf'(x)}{6}=\frac{2f(1)+f'(1)}{6}=\frac{1}{6}$$

16.求下列极限

（1）$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2})$

（2）$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2})$

（1）解：原式=$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

（2）解：原式$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

（B）

17.设 f(x)在[a,b]上可积，证明：至少存在$\xi\in$[a,b],使得 $\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}f(x)dx$

证明：构造函数$F(x)=\int_a^x f(x)dx-\int_x^b f(x)dx$

$F(a)=-\int_a^b f(x)dx, F(b)=\int_a^b f(x)dx, F(a).F(b)=-(\int_a^b f(x)dx)^2\le 0$，**根据罗尔定理，存在$\xi\in$[a,b]，使得**$\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}f(x)dx$

18.设 f(x)在[a,b]上连续，且 f(x)>0.证明：

（1）存在唯一的$\xi\in$（a,b）,使得$\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(x)}dx$；

（2）$\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt-\int_x^b\frac{1}{f(t)}dt)\ge 2, x\in[a,b]$

证明：构造函数$F(x)=\int_a^x f(x)dx-\int_x^b\frac{1}{f(x)}dx$

$F(a)=-\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx, F(b)=\int_a^b f(x)dx, F(a).F(b)=-(\int_a^b f(x)dx)(\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx)<0$

根据罗尔定理，至少存在一个$\xi\in$（a,b）,使得$\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(x)}dx$。再证唯一性，

$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2>0$，（2）得证。所以 F(x)在[a,b]上连续递增，只能有一个零点$\xi\in$（a,b）,使得$\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(x)}dx$。

习题 4.4

一、选择题

1、（A）

2、（D）

解:求 $f(x)$ 的原函数，即对 f(x)求不定积分

$\int f(x)dx = \int \sin xdx = -\cos x + C$，令 C=1，即得 D。

3、（C）

二、填空题

1、$\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

解：原式=$\int \dfrac{1}{\sin x\sqrt{\cos x}} d\cos x = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}} = \int 2d(\cos x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

2、$xf'(x) - f(x) + C$

解：原式=$\int [d[xf'(x)] - f'(x)]dx = xf'(x) - f(x) = C$

3、$\dfrac{1}{2}x|x| + C$

解：当 $x>0$ 时，$\int |x|dx = \int xdx = \dfrac{1}{2}x^2 + C$

当 $x<0$ 时，$\int |x|dx = \int -xdx = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$

得，$\dfrac{1}{2}x|x| + C$

4、$x^2\sin x^2 + \cos x^2 + C$

解：由已知得 $\int f(x)dx = \sin x^2 + C$，于是有，

$f(x) = (\sin x^2)'$，则

$$\int x^2 f(x)dx = \int x^2 d(\sin x^2) = x^2\sin x^2 - \int 2\sin x^2 dx = x^2\sin x^2 + \cos x^2 + C$$

三、判断题

1、 正确

2、 不正确

3、 正确

4、 不正确

分析，右边=$\dfrac{d[F(t)]}{dx} = f(t)\dfrac{dt}{dx}$，右边=$f(x)$，故不相等

5、 正确

6、 不正确

四、求不定积分

1、解：$\int\frac{1}{x^2}dx=\int-d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}=C$

2、解：$\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}+C$

3、解：$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{x}+C$

4、解：$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}=C$

5、解：$\int(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx=\int 1dx-\int xdx+\int x^3dx-\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-3x^{\frac{1}{3}}=C$$

6、 解：$\int(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx=\int(x^2-2\sqrt{x}+\frac{1}{x})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln x+C$

7、 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(4^x+9^x+2\times6^x)dx=\frac{4^x}{2\ln 2}+\frac{9^x}{2\ln 3}+\frac{2\times6^x}{\ln 6}+C$

8、 $\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

解：令 $x=\sin t$ 则 $\sqrt{4-4x^2}=2\cos t$ ， $dx=\cos tdt$

原式$=\int\frac{3\cos t}{2\cos t}dt=\frac{3}{2}t=\arcsin\frac{3}{2}+C$

9、 解：$\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{3}-\frac{1}{3(1+x^2)})dx=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\arctan x+C$

10、解：$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx=\int(x^2+\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-1)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$

11、解：$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}})=2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

12、解：$\int\frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx=\int(3x^2+\frac{1}{1+x^2})dx=x^3+\arctan x+C$

13、解：$\int \tan^2 xdx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \tan x - x + C$

14、解：$\int \sin^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

15、解：$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx = \int (\cos x + \sin x)dx$

$$= \sin x - \cos + C$$

16、解：$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x})dx = -\cot x - \tan x + C$

17、解：$\int 10^x \cdot 3^{2x} dx = \int 90^x dx = \frac{90^x}{\ln 90} + C$

18、解：$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{8}{15} x^{\frac{15}{8}} = C$

19、解：$\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\arcsin x + C$

20、解：$\int (\cos x + \sin x)^2 dx = \int (1 + 2\sin x \cos x)dx = \int (1 + \sin 2x)dx = x - \frac{\cos 2x}{2} + C$

21、解：$\int \cos x \cdot \cos 2xdx = \int \cos x(1 - 2\sin^2 x)dx = \int (\cos x - 2\cos x \sin^2 x)dx$

$$= \frac{2\sin^3 x}{3} - \sin x + C$$

22、解：$\int (e^x - e^{-x})^3 dx = \int (e^{3x} - e^{-3x} - 3e^x + 3e^{-x})dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} - 3e^x - 3e^{-x} + C$

23、解：$\int \sec x(\sec x - \tan x)dx = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)dx = \tan x - \sec x + C$

24、解：$\int \cos^2 \frac{x}{2}dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C$

25、解：$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right)dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - 4x^{\frac{-1}{4}} + C$

26、解：$\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{2}\sec^2 xdx = \frac{\tan x}{2} + C$

五、解：设任一点该曲线的切线斜率为k，则

$k = f'(x) = \frac{1}{x}$，则有

$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

又曲线经过（e^2,3），即 $\ln e^2 + C = 3$，得 C=1

故该曲线方程为$y=\ln x+1$

六、解：$l=\int 3t^2dx=t^3+C$

当$t=0$时，$l=0$；得 C=0

故$l=t^3$

（1） 将$t=4s$时，$l=4^3=64$

（2） 当经过的路程为512m时，$512=t^3$；解得$t=8s$

七、利用换元积分法求下列不定积分

1、解：$\int\cos(3x+5)dx=\int\frac{1}{3}\cos(3x+5)dx(3x+5)=\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C$

2、解：$\int xe^{2x^2}dx=\int\frac{e^{2x^2}}{4}d(2x^2)=\frac{e^{2x^2}}{4}+C$

3、解：$\int\frac{1}{2x+3}dx=\int\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+3}d(2x+3)=\frac{\ln(2x+3)}{2}+C$

4、解：$\int(1+x)^n dx=\int(1+x)^n d(x+1)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

5、解：$\int(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}})dx=\int\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}d\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}}d\sqrt{3}x$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\sqrt{3}x+C$$

6、解：$\int 2^{3x+5}dx=\int\frac{1}{3}2^{3x+5}d(3x+5)=\frac{2^{3x+5}}{3\ln 2}+C$

7、解：$\int\sqrt{8-3x}dx=-\int\frac{\sqrt{8-3x}}{3}d(8-3x)=-\frac{2(8-3x)^{\frac{3}{2}}}{9}+C$

8、解：$\int\frac{1}{\sqrt[3]{9-5x}}dx=\int-\frac{1}{5}(9-5x)^{-\frac{1}{3}}d(9-5x)=-\frac{3}{10}(9-5x)^{\frac{2}{3}}+C$

9、解：$\int x\cos^2 xdx=\int\frac{1}{2}\cos x^2dx^2=\sin x^2+C$

10、解：$\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}=\int \frac{1}{2}cec^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

11、解：$\int \frac{dx}{1+\cos x}=\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}dx=\tan x+C$

12、解：$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int \frac{1}{\cos\frac{x}{2}+1}dx$

13、解：$\int \frac{x}{4+x^4}dx=\int \frac{1}{2}\frac{dx^2}{4+x^4}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$

14、解： $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int -\frac{1}{2}\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$

15、解： $\int \frac{dx}{x\ln x}=\int \frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\left|\ln x\right|+C$

16、解： $\int \frac{\ln\ln x}{x\ln x}dx=\int \frac{\ln\ln x}{\ln x}d\ln x=\int \ln\ln x d\ln\ln x=\frac{1}{2}(\ln\ln x)^2+C$

17、解： $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx=\int (\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\cos x)dx=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$

18 解：$\int \cos^4 xdx=\int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2dx=\int \frac{1}{4}+\cos 2x+\frac{\cos^2 2x}{4}dx$

$$=\int (\frac{1}{4}+\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8})dx$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C$$

19、解： $\int \sin^2 x\cos^2 xdx=\int \frac{\sin^2 2x}{4}dx=\int \frac{1-\cos 4x}{8}dx=\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$

20、解：$\int \sec^4 xdx=\int \sec^2 x(1+\tan^2 x)dx=\int 1+\tan^2 xd\tan x=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C$

21、解： $\int \csc^3 x\cot xdx=\int \csc^2 x\csc x\cot xdx=\int -\csc^2 xd\csc x=-\frac{\csc^3 x}{3}+C$

22、解:$\int \frac{1}{e^x+1}dx=\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}dx=-\int \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})+C$

23、解：$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}dx=\int\frac{1}{1+2\tan^2 x}d\tan x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$$

24、解：$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\sqrt{1+x^2}}dx=\int -e^{-\sqrt{1+x^2}}d(-\sqrt{1+x^2})=-e^{-\sqrt{1+x^2}}+C$

25、解：$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{d(e^x)}{1+e^{2x}}=\arctan e^x+C$

26、解：$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}=\int\frac{\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{1+x})\sqrt{1+x}}dx=\int\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}d\sqrt{1+x}$

$$=\int\frac{1}{2}(\frac{1+\sqrt{1+x}-1}{1+\sqrt{1+x}})d\sqrt{1+x}=\int\frac{1}{2}(1-\frac{1}{1+\sqrt{1+x}})dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+x}-\ln(1+\sqrt{1+x})\right]+C$$

27、解：$\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}dx=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

28、解：$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$，令 $x=a\sin t$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\,,dx=a\cos x$

变量代换得，原式 $\cos tdt=\int a^2\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

29、解：$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$，令

30、解：$\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)}d\sqrt{1+x^2}=\int(1-\frac{1}{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

八、用分部积分发解下列不定积分.

1、解：$\int \arccos x dx = \arccos x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

2、解：$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x + C$

3、解：$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$

$$= x^2 \sin x - 2x \cos x - \int 2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

4、解：$\int x \operatorname{arc}\cot x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc}\cot x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$$= \frac{x^2}{2} arc \cot x + \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} arc \cot x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

5、解：$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2x \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2\int x \frac{1}{x} dx$

$$= x(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + 2x + C$$

6、解：$\int x^2 arc \tan x dx = \frac{x3}{x} \arctan x - \int \frac{x^3}{3(1+x^2)} dx = \frac{x3}{x} \arctan x - \int \frac{x(x^2+1)-x}{3(1+x^2)}$

$$= \frac{x3}{x} \arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln(1+x^2)}{6} + C$$

7. $\int x \tan^2 x dx = \int x(\sec^2 x - 1) dx = -\frac{1}{2} x - \int x \sec^2 x dx = -\frac{1}{2} x + x \tan x + ln|\cos x| + C$

8、解：$\int x \sin x \cos x dx = \int \frac{\sin 2x}{2} dx = -\frac{x \cos 2x}{4} + \int \frac{\cos 2x}{4} dx$

$$= \frac{1}{8}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$$

9、解：$\int \frac{x}{cos^2 x} dx = \int xcec2xdx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$= x \tan x + \ln|\cos x| + C$$

10、解：$\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx = \int 2x \sin \sqrt{x} d\sqrt{x} = -2x \cos \sqrt{x} + \int 4\sqrt{x} \cos \sqrt{x} d\sqrt{x}$

$$= -2x \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} - 4\int \sin \sqrt{x} d\sqrt{x}$$

$$=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C$$

11、解：$\int\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=-\frac{1}{1+e^x}+\int\frac{1}{1+e^x}dx=-\frac{1}{1+e^x}+\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$=-\frac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^{-x}\right)+C$$

12、解：$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+\int\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+\int\frac{2}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$$

13、解：$\int\arctan\sqrt{x}dx=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{2\left(1+x\right)\sqrt{x}}dx=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\int\left(1-\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)d\sqrt{x}=\left(1+x\right)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$$

14、解：$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-\int e^{\sqrt{x}}dx=2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+C$

15、解：$\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan xdx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$$

16、解：$\int\frac{\ln\left(\tan x\right)}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\ln\left(\tan x\right)}{\tan x\cos^2 x}dx=\int\frac{\ln\left(\tan x\right)}{\tan x}d\left(\tan x\right)=\frac{1}{2}\ln^2\tan x+C$

17、解：$\int\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int e^{\arctan x}d\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$

于是有，$2\int\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}$ 即，$\int\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{\left(1-x\right)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$

18、解：$\int e^x\sin^2 xdx=e^x\sin^2 x-\int e^x\sin 2xdx$

$$\int e^x \sin 2xdx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2xdx = e^x \sin 2x - 2\left(e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2xdx\right)$$

得，$\int e^x \sin 2xdx = \dfrac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{5}$

即，$\int e^x \sin^2 xdx = e^x \sin^2 x - \dfrac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{5}$

19 、解：$\int \dfrac{\ln x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$

20、解：$\int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \dfrac{(x+1)e^x - e^x}{(1+x)^2}dx = \int \dfrac{(x+1)\left(e^x\right)' - (x+1)'e^x}{(1+x)^2}dx = \dfrac{e^x}{1+x} + C$

21、解：$\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^x e^{\frac{1}{x}}dx$

$$= \int x'e^x e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^x\right)'e^{\frac{1}{x}} - x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'e^x dx = xe^x e^{\frac{1}{x}} + C$$

九、证明下列递推公式

（1）证明：$I_n = \int \dfrac{dx}{\sin^n x} = \int \dfrac{cec^2 x}{\sin^{n-2} x}dx = -\dfrac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2)\int \dfrac{\cos^2 xdx}{\sin^n x}$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2)\int \frac{\left(1-\sin^2\right)xdx}{\sin^n x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2)\left(I_n - I_{n-2}\right)$$

可求得，$I_n = \dfrac{1}{n-1}\dfrac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$，即，命题得证;

（2）证明：$I_n = \int \cos^n xdx = \cos^{n-1}\sin x - (n-2)\int \cos^{n-2} x\left(1-\cos^2 x\right)dx$

$$= \cos^{n-1}\sin x - (n-1)\int \cos^n xdx + (n-1)\int \cos^{n-2} xdx$$

整理得，$nI_n = \cos^{n-1}\sin x - (n-1)I_{n-2}$，两边同除以 n 得，

$I_n = \dfrac{\cos^{n-1}\sin x}{n} - \dfrac{(n-1)}{n}I_{n-2}$，即，命题得证。

习题 4.5

一、解不定积分

1、解：$\int \frac{x^3}{x-1}dx = \int \frac{x^3+1-1}{x-1}dx = \int \frac{x^3-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$

2、解：$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} + dx^2 + ex + f\right)dx$

$$= \int \left(\frac{8}{x} + \frac{-4}{x+1} + \frac{-3}{x-1} + x^2 + x + 1\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8\ln|x| - 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C$$

3、解：$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)}dx = \int \frac{1}{(x+5)} + \frac{1}{(x-2)}dx$

$$= \ln|x+5| + \ln|x-2| + C$$

4、解：$\int \frac{dx}{(x^3+1)} = \int \frac{dx}{(x+1)(1+x^2-x)} = \frac{1}{3}\int (\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{1+x^2-x})dx$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)$$

5、解：$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \int \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{2}{(x+2)} + \frac{1}{2(x+3)}dx$

$$= \frac{-1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C$$

6、解：$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$ +C

7、解：$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

8、解：$\int \frac{1}{x^4+1}$

9、解: $\int \frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+2-10}{(2x^2+2x+1)^2}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(2x^2+2x+1\right)}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}-\frac{10}{2}\int\frac{1}{\left(2x+1\right)^2+1}dx$$

$$=-\frac{1}{4\left(2x^2+2x+1\right)}-\frac{5}{2}\arctan\left(2x+1\right)+C$$

10、解：$\int\frac{x}{x^3-3x+2}dx=\int\frac{x}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}dx=\int\frac{1}{3\left(x-1\right)^2}+\frac{2}{9\left(x-1\right)}-\frac{2}{9\left(x+2\right)}dx$

$$=-\frac{1}{3\left(x-1\right)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C$$

11、解：$\int\frac{1}{5-3\cos x}dx=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{8\tan^2\frac{x}{2}+2}dx$

令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $x=\arctan t$， $dx=\frac{1}{t^2+1}dt$ ；代入得

原式$=\int\frac{t^2+1}{8t^2+2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt=\int\frac{1}{4t^2+1}dt=\frac{1}{2}\arctan 2t$

$$=\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+C$$

12、解：$\int\frac{1}{2+\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{3\sin^2 x+2\cos^2 x}dx=\int\frac{1+\tan^2 x}{3\tan^2 x+2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{2}\tan^2 x+1}d\tan x$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}\tan x+C$$

13、解：$\int\frac{1}{\tan x+1}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx;$

$$2\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

即，$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)+C$

14、解：$\int\frac{1}{2+\sin x}dx=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$$=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan^2\frac{x}{2}+2+2\tan\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arc\tan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$$

15、解：$\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}d\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

16、解：$\int\frac{1}{5+2\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+5\cos^2\frac{x}{2}-5\sin^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{4+4\tan\frac{x}{2}+6\tan^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+4\tan\frac{x}{2}+6\tan^2\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}})^2+1}d\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$$

17、解：$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^4 x}dx = \int \left(\sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x\right)dx$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

18、解：$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}dx = \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^3 x \cos^5 x}dx$

$$= \int (\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x \cos^5 x} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^3 x \cos^3 x})dx$$

$$= \int 2\frac{1}{\sin x \cos^3 x} + \frac{\tan x}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^3 x \cos x}dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{3}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\cot^2 x + 3\ln\left|\tan x\right|$$

19、解：$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}dx$，令 $\sqrt[6]{x} = t$；则 $x = t^6 \quad dx = 6t^5 dt$，于是

原式= $\int \frac{6t^5}{t^3 + t^2}dx = \int \frac{6t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3 - 1 + 1}{t+1}dx = 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln\left(t+1\right) + C,$

将 $\sqrt[6]{x} = t$ 代入得，$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}dx = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C$

20、解：$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)}dx$，令 $\sqrt[4]{x} = t$，则 $t^4 = x, dx = 4t^3 dt$

原式$= \int \frac{4t^3 dt}{t^2\left(1+t\right)^3} = \int [\frac{1}{\left(1+t\right)^2} - \frac{1}{\left(1+t\right)^3}]dx = 2\left(1+t\right)^{-2} - \left(1+t\right)^{-1} + C$

$= 2\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^{-2} - \left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^{-1} + C +$

21、解：$\int \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\frac{1}{x}dx$，令 $\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = t$，于是 $x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, dx = \frac{-4t}{\left(t^2+1\right)^2}$

原式$= -4\int \frac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt - 2\int \frac{1}{1-t^2}dt$

$$= 2\arctan t + \ln\left|1-t\right| - \ln\left|1+t\right| + C$$

$$=2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}+\ln\left|1-\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right|-\ln\left|1+\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right|+C$$

22、解：$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

23、解：$\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+2\sin x}dx$，令$\cos x-\sin x=a(\cos x+2\sin x)+b(\cos x+2\sin x)'$

解得，$a=-\frac{1}{5},b=\frac{3}{5}$

则，原式$=\int-\frac{1}{5}\frac{\cos x+2\sin x}{\cos x+2\sin x}dx+\int\frac{3}{5}\frac{(\cos x+2\sin x)'}{\cos x+2\sin x}dx$

$$=-\frac{x}{5}+\frac{3\ln|\cos x+2\sin x|}{5}+C$$

（B）

二、求不定积分

1、解：$\int\frac{2\cos x+3\sin x}{\cos x-2\sin x}dx$，令$2\cos x+3\sin x=a(\cos x-2\sin x)+b(\cos x-2\sin x)'$

可得，$a=-\frac{8}{3},b=\frac{7}{3}$，代入得：

原式$=\int-\frac{4}{5}\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x-2\sin x}dx+\int\frac{7}{5}\frac{(\cos x-2\sin x)'}{\cos x-2\sin x}dx$

$$=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}\ln|\cos x-2\sin x|+C$$

2、解：$\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$，令$\sqrt[6]{x}=t,$ 则，$x=t^6,dx=6t^5dt$

原式$=\int\frac{t^3}{1-t^2}\cdot6t^5dt=6\int\frac{t^8+1-1}{1-t^2}dt=6\int\frac{t^8-1}{1-t^2}dt+6\int\frac{1}{1-t^2}dt$

$$=6\int(t^6+t^4+t^2+1)dt+3\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+3t^3+t+3\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$$

$$=\frac{6}{7}\sqrt[6]{x}^7+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x}^5+3\sqrt[6]{x}^3+\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{1-\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}\right|+C$$

3、解：$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$，令$\sqrt{1+\ln x}=t,$ 则，$x=e^{t^2-1},\ln x=t^2-1,dx=2te^{t^2-1}dt$

原式$=\int\frac{t\cdot 2te^{t^2-1}}{\left(t^2-1\right)e^{t^2-1}}dt=2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)}dt$

$$=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C$$

三、解：由于，$\left[F^2(x)\right]'=f(x)F(x)$则，

$F^2(x)=2\int f(x)F(x)dx=2\int\frac{arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$，令$\sqrt{x=t}$

则有，$x=t^2,dx=2tdt$，变量代换得：

原式$=2\int\frac{arc\tan t\cdot 2t}{t\left(t^2+1\right)}dt$，解得：$F^2(x)=2\arctan^2 t+C$

即，$F^2(x)=2\arctan^2\sqrt{x}+C$

将$F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$代入得：$C=0$,故，$F^2(x)=2\arctan^2\sqrt{x}$

$$F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x},$$

$$f(x)=F'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

习题 4-6

（A）

3.计算下列积分

(1) 解：

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x+\frac{\pi}{3})d(x+\frac{\pi}{3})=\sin(x+\frac{\pi}{3})\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=-\sqrt{3}$$

(2) 解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^4 xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xd\cos x=-\frac{1}{5}\cos^5 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{5}$$

(3) 解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}(3\pi-4)$$

(4) 解：

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(7+3x)^3}dx=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}\frac{d(7+3x)}{(7+3x)^3}dx=\frac{1}{3}\times-\frac{1}{2}\frac{1}{(7+3x)^2}\Big|_{-2}^{1}=-\frac{1}{6}(\frac{1}{100}-1)=\frac{33}{200}$$

(5) 解：

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xd2x)=\frac{1}{2}(x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(6) 解：

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2x^2}dx=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2x^2}dx\xrightarrow{令x=2\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\cos t\cos tdt$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=4\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}})=\sqrt{2}(2+\pi)$$

(7) 解：

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\xrightarrow{令x=\sin t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sin^2 t}-1)dt=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}$$

(8) 解：

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-2}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_{-2}^{0}=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}$$

(9) 解：

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}dx \xrightarrow{令t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}dt \xrightarrow{令t=\sin\theta} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(10)解：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^x}de^x=\int_0^1 \frac{de^x}{e^x+e^{2x}}=\int_0^1 (\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x})de^x$$

$$=\ln e^x|_0^1-\ln(1+e^x)|_0^1=1-\ln(1+e)+\ln 2$$

(11)解：

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \xrightarrow{令x=a\sin t} =\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 ta^2\cos^2 tdt=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^2dt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{a^4}{8}\times\frac{\pi}{2}-\frac{a^4}{8}\times\frac{1}{4}\sin 4t|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4\pi}{16}$$

(12)解：

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{令\mathrm{x=tant}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$=-\frac{1}{\sin t}|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(13)解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}d\cos x=\frac{2}{3}cox^{\frac{3}{2}}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

(14)解：

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}de^x=\arctan e^x|_0^1=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

(15)解：

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \xrightarrow{t=1+\sqrt{x}} \int_1^3 \frac{2(t-1)}{t}dx=\int_1^3 (2-\frac{1}{t})dx=4-2\ln t|_1^3=4-2\ln 3$$

(16)解：

$$\int_1^e \frac{2+3\ln x}{x}dx=\int_1^e 2+3\ln xd\ln x=2\ln x|_1^e+\frac{2}{3}\ln^2 x|_1^e=\frac{7}{2}$$

(17)解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(18)解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x de^x = \sin x e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\sin x = \sin x e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\sin x$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x de^x = e^{\frac{\pi}{2}} - \cos x e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

$$\therefore 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

(19)解：

$$\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}} dx \xrightarrow{\sqrt[3]{x}=t} = \int_0^1 3t^2 e^t dt = 3\int_0^1 t^2 de^t = 3(e - 2\int_0^1 te^t dt)$$

$$= 3e - 6e^t t\Big|_0^1 + 6\int_0^1 e^t dt = 3(e-2)$$

(20)解：

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln|x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x dx \xrightarrow{x=e^t} = \int_{-1}^{1} te^t dt = te^t \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^t dt = \frac{2}{e}$$

(21)解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \sin x} dx (\text{利用书P302例6.5的结论})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx | = \frac{\pi}{4}$$

(22)解：

$$\int_0^1 \arctan x dx \xrightarrow{\text{令}\arctan x=t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t d\tan t = t\tan t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(23)解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx \xrightarrow{x=t+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos^2 t dt + \int_{-\pi}^{\pi} t\cos^2 t dt$$

$$\because \int_{-\pi}^{\pi} t\cos^2 t dt = 0(\text{奇函数})$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos^2 t dt = 2\pi\int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} (\cos 2t + 1) d2t = \pi^2$$

(24)解：

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} dx \xrightarrow{令x=\tan t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t^2}{\sec t^4} d\tan t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t^2}{\sec t^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

4.利用函数的奇偶性计算下列积分

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^6 \sin x dx = 0$

解：因为 $x^6 \sin x$ 在区间 $\left[-\pi, \pi\right]$ 上是奇函数，所以 $\int_{-\pi}^{\pi} x^6 \sin x dx = 0$

(2) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$

解：$\cos^6 x$ 在区间 $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$ 上是偶函数，所以

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = 2\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5}{16}\pi$$

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

解：$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$

$$= \frac{2}{3}(\arcsin x)^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}$$

(4) $\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^4 x}{x^4 + x^2 + 1} dx$

解：$\frac{x^5 \sin^4 x}{x^4 + x^2 + 1}$ 在[-5，5]上是奇函数，所以 $\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^4 x}{x^4 + x^2 + 1} dx = 0$

5.设 f 为以 T 为周期的连续周期函数，证明对于任意的实数 a,恒有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

证明：$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

对于等式右端第二个积分，设 x-T=t,则

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt$$

于是 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

6．设 f 为连续函数，证明：

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

证明：令 x=a+b-t,dx=d(-t),当 x=a 时 t=b，当 x=b 时 t=a.

于是：$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-1)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$

而 $\int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx$

所以 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

(2) $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

证明：令 $x^2 = t$,于是：

$$\int_0^{a^2} t\sqrt{t} f(t)d\sqrt{t} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$$

(3) $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$

证明：令 $x = t+\pi, t = x-\pi, t \in (-\pi, \pi)$，于是：

$$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(|\cos(t+\pi)|)dt = 2\int_0^{\pi} f(|\cos t|)dt$$

再令 $t = x+\dfrac{\pi}{2}, x = t-\dfrac{\pi}{2}, x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

$$2\int_0^{\pi} f(|\cos t|)dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos(x+\frac{\pi}{2})\right|\right)dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$$

(B)

7.设$J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n xdx(m,n\text{为整数})$，证明

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)$$

证明：因为

$$\begin{aligned}J(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}xd\sin^{m+1}x\\&=\frac{1}{m+1}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2}x\cos^{n-2}xdx\\&=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}xdx\\&=\frac{n-1}{m+1}J(m,n-2)-\frac{n-1}{m+1}J(m,n)\end{aligned}$$

所以 $J(m,n)=\dfrac{n-1}{m+n}J(m,n-2)$

同理：

$$J(m,n) = -\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d\cos^{n+1} x$$
$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\cos^{n+2} xdx$$
$$= \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)\cos^n xdx$$
$$= \frac{m-1}{n+1}J(m-2,n) - \frac{m-1}{n+1}J(m,n)$$

即 $J(m,n) = \frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)$

8.求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

解：利用积分中值定理，在$[0,1]$上，$x^n \geq 0$，

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx$，（$\xi \in [0,1]$）

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\times\frac{1}{1+n} = 0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx$

解：$f(x) = \frac{\sin x}{x}$在$[n,n+p]$连续，由积分中值定理：

$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\sin\xi}{\xi}\times p, \xi \in [n,n+p]$

当 $n\to\infty$时，$\xi\to\infty, |\sin\xi| \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\times p = 0$$

9.证明：$F(t) = \int_a^t [f(x)-f(a)]dx - \int_t^b [f(b)-f(x)]dx,$

则 $F(t)$在$[a,b]$上连续可导，由 $f(x)$为严格增函数，可得：

$F(a) = -\int_a^b [f(b)-f(x)]dx < 0$，$F(b) = \int_a^b [f(x)-f(a)]dx > 0$

于是 在(a,b)内存在一点ξ，使得

$$F(\xi) = 0$$

即：$\int_a^{\xi}\left[f(x)-f(a)\right]dx=\int_{\xi}^{b}\left[f(b)-f(x)\right]dx,$

上式两端恰为两部分的面积。

10.证明下列积分等式

(1) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

证明：令 1-x=t,则

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=-\int_1^0(1-t)^m t^n dt=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

即 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^m xdx=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m xdx(m为整数)$

证 明 ：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^m xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x)^m dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin 2x}{2})^m dx=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^m dx$$

令 $2x=\frac{\pi}{2}-t,x=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}$，则

$$\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^m dx=\frac{1}{2^m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos^m td(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})$$

$$=-\frac{1}{2^{m+1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos^m tdt=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m tdt$$

即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^m xdx=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m xdx$

11.求下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

解：$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{2}{n})\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\lim_{\xi\to 0^+}\int_{\xi}^{1}\ln(1+x)dx$$
$$=\left[(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]\Big|_0^1$$
$$=\ln 4-1$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{1}{4n^2-2^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2})$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{1}{4n^2-2^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2})$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{4-\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{\frac{n-1}{n}}{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx^2}{4-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

12.

(1) 解：当 $x\neq 0$ 时

由于 $\psi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\xrightarrow{令x=\frac{u}{t}}=\frac{1}{x}\int_0^1 f(u)du$

所以 $\psi'(x)=\frac{-\int_0^1 f(u)du}{x^2}+\frac{f(x)}{x}$

当 x=0 时，由：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$

$$f'(0)=A,f(0)=0$$

所以：

$$\psi'(0)=\lim_{x\to 0}\psi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^1 f(u)du}{x^2}+\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^1 f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)-f(x)}{2x}$$
$$=\frac{f'(0)}{2}=\frac{A}{2}$$

所以 $\psi'(x)\begin{cases} \dfrac{-\int_0^1 f(u)du}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0) \\ \dfrac{A}{2} & (x=0) \end{cases}$

(2)

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\psi'(x)=\psi'(0)=\dfrac{A}{2}$，所以 $\psi'(x)$ 连续

13.证明：由于 f(x)在 $[a,b]$ 上有连续导数，

由积分中值定理 $\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = f(\xi)\int_a^b \cos\lambda x dx$

所以：$\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\xi)\int_a^b \cos\lambda x dx = f(\xi)\lim\limits_{\lambda\to\infty}\dfrac{\sin\lambda x}{\lambda}$

$\because |\sin\lambda x|\leq 1$，$f(\xi)\lim\limits_{\lambda\to\infty}\dfrac{\sin\lambda x}{\lambda}=0$

14.证明：$\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}dx$

$=\int_a^b\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)dx$

$=\int_a^b f'(x)dx$

$=f(x)|_a^b = f(b)-f(a)$

15.证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin t-\cos t}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t-\sin t}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}dx$$

$$\because \frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\geq\frac{\cos x-\sin x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}, x\in[0,\frac{\pi}{4}]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}dx\geq 0$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx\geq 0$

即$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$

16.

(1) 证明：$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt\xrightarrow{令u=-t}=\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)d(-u)$

由于 f(x)是偶函数，

所以 $\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)d(-u)=\int_0^{x}(x-2u)f(u)du=F(x)$

即$F(x)$是偶函数

(2) 证明：由于$F(x)=x\int_0^{x}f(t)dt-2\int_0^{x}tf(t)dt$

$$F'(x)=\int_0^{x}f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^{x}f(t)dt-xf(x)$$

又由于 f(x)单调不减

所以 $\int_0^{x}f(t)dt\le xf(x)$

即 $F'(x)\le 0$

因此$F(x)$单调不减

习题 4-7

（A）

1.求下列各曲线围成的平面的面积

(1) 所求的面积为：

$$A=\int_2^4(\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2-2)$$
$$=\frac{3}{4}x^2\mid_2^4-\frac{1}{12}x^3\mid_2^4-2x\mid_2^4$$
$$=12-3-\frac{16}{4}-\frac{2}{3}-8+4$$
$$=\frac{1}{3}$$

(2) 所求的面积为：

$$A=\int_0^1 9-2x^2$$
$$=9x\,|_0^1-\frac{2}{3}x^3\,|_0^1$$
$$=9-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{25}{3}$$

(3) 所求的面积为：

$$y=a+x-2\sqrt{ax}$$
$$A=\int_0^a a+x-2\sqrt{ax}dx=\frac{a^2}{6}$$

(4) 所求的面积为：

$$2-x^2=x^2,x=\pm 1.$$
$$\int_{-1}^1(2-2x^2)dx=(2x-\frac{2}{3}x^3)\,|_{-1}^1$$
$$=\frac{8}{3}$$

(5) 所求的面积为：

$$A=\int_{\frac{1}{10}}^{10}\left|\ln x\right|$$
$$=\int_{\frac{1}{10}}^{1}(-\ln x)dx+\int_1^{10}\ln x$$
$$=-[x\ln x\,|_{\frac{1}{10}}^1-\int_{\frac{1}{10}}^1 xd\ln x+(x\ln x\,|_1^{10}-\int_1^{10}xd\ln x)$$
$$=\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}$$

(6) 所求的面积为：

$$x(x-1)(x-2)=3(x-1)$$
$$x=1,3,-1$$
$$A=\int_{-1}^1(x^3-3x^2+2x-3x+3)dx+\int_1^3(3x-3-x^3+3x^2-2x)dx$$
$$=(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x)\,|_{-1}^1+(-\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}-3x)\,|_1^3$$
$$=8$$

(7) 所求的面积为：

$$y^2 = x^2 - x^4 = -(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}\cos\theta$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(1+\sin\theta)$$

$$y = x\sqrt{1-x^2}(x>0, y>0)$$

$$A = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{4}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$$

$$= -\frac{4}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

(8) 所求的面积为：

$$\ell^2 \geq 0 \quad \sin 2\theta \geq 0 \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi]$$

$$A = 4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin 2\theta d2\theta = 4$$

(9) 所求的面积为：

$$\ell = 1, \cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2\theta d\theta$$

$$= 2\sin 2\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{3}$$

(10)所求的面积为：

$$S_c = \pi a^2$$

$$S_s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 td(a\cos^3 t)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\sin^3 t\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt - 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^2$$

$$S = S_c - S_s = \frac{5}{8}\pi a^2$$

(11)所求的面积为：

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(ae^{\theta})^{2}d\theta$$
$$=\frac{a^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\theta}d2\theta$$
$$=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$$

2.由图得，当弦垂直于 x 轴时面积最小。因为无论弦由垂直位置向顺时针或逆时针方向转动时，（以 x 轴将图像分为两部分考虑）增大面积总是大于极小面积。因此当弦垂直于 x 轴时面积最小。

此时：

$$S=2\int_{0}^{a}\sqrt{4ax}dx$$
$$=4\int_{0}^{a}\sqrt{ax}dx$$
$$=\frac{8}{3a}ax\sqrt{ax}\,|_{0}^{a}$$
$$=\frac{8}{3}a^2$$

3.

(1) 绕 y 轴

$$V_y=\int_{-|b|}^{|b|}\pi r^2dy=\int_{-|b|}^{|b|}\pi a^2(1-\frac{y^2}{b^2})dy=\pi a^2(y-\frac{y^3}{3b^2})\,|_{|b|-(-|b|)}=\frac{4}{3}|b|a^2\pi$$

绕 x 轴

$$V_x=\int_{-|a|}^{|a|}\pi r^2dx=\int_{-|b|}^{|b|}\pi b^2(1-\frac{y^2}{a^2})dy=\pi b^2(y-\frac{y^3}{3a^2})\,|_{|a|-(-|a|)}=\frac{4}{3}|a|b^2\pi$$

(2) 绕 x 轴

$$V_x=\int_{0}^{\pi}\pi\sin^2 xdx=\int_{0}^{\pi}\pi(\frac{1-\cos 2x}{2})dx=\pi(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x)\,|_{0}^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

绕 y 轴

$$V_y = \int_0^{\pi} \pi \sin x \left[\left(x + dx \right)^2 - x^2 \right] = \int_0^{\pi} 2\pi \sin x dx = -2\pi \cos x \mid_0^{\pi} = 2\pi$$

绕直线以 y=1

$$V_{y=1} = \int_0^{\pi} \pi \left(1 - \sin x \right)^2 dx = \int_0^{\pi} \pi \left(\frac{3 - \cos 2x}{2} - 2\sin x \right) dx = \pi \left(\frac{3}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + 2\cos x \right) \mid_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi^2 - 4\pi$$

(3)

$$V = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} \bullet \pi \left[\left(b + x + dx \right)^2 - \left(b + x \right)^2 \right]$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} 2\left(b + x \right) dx \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(r^2 - x^2)^3} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right] \mid_{-r}^{r}$$

$$= 2\pi^2 r^2 b$$

(4)

$$x = a(1 + \cos\theta)\cos\theta, y = a(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

$$dx = -\sin\theta(1 + 2\cos\theta)$$

设dx=0, θ=0, $\frac{2}{3}\pi$.取 $\theta = \frac{2}{3}\pi$

$$V = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \pi a^2 (1 + \cos\theta)^2 \sin^2\theta da(1 + \cos\theta)\cos\theta + \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \pi a^2 (1 + \cos^2\theta) \sin^2\theta da(1 + \cos\theta)\cos\theta$$

$$= -\pi a^3 [\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (1 + \cos)^2 \sin^3\theta(1 + 2\cos\theta)d\theta + \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (1 + \cos\theta)^2 \sin^3\theta(1 + 2\cos\theta)d\theta]$$

$$= \frac{8}{3}\pi a^3$$

(5)

$$V = \int_0^{2\pi a} \pi a^{2(1-\cos\theta)^2} da(\theta - \sin\theta)$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2\theta - 3\cos\theta)(1 - \cos\theta)$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 4\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta)d\theta$$

$$= \pi a^3 \left[\frac{5}{2}\theta - 4\sin\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin^2\theta \mid_0^{2\pi} \right]$$

$$= \pi a^3 \bullet 5\pi$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

(6)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} \pi a^2 \sin^6 \theta da \cos^3 \theta \\
&= -3\pi a^3 \int_{-\pi}^{0} \sin^7 \theta \cos^2 \theta d\theta \\
&= -3\pi a^3 \left[\frac{1}{9} \sin^8 \theta \cos\theta - \frac{1}{63} \sin^6 \cos\theta - \frac{2}{105} \sin^4 \cos\theta + \frac{8}{415} \cos^3 \theta - \cos\theta \bullet \frac{8}{105} \right] |_{-\pi}^{0} \\
&= \frac{32}{105} \pi a^3
\end{aligned}
$$

4 证明

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi \left[\left(x + dx \right)^2 - x^2 \right] f\left(x \right) \\
&= \int_a^b \pi \left(2xdx + d^2 x \right) f\left(x \right) \\
&= \int_a^b 2\pi x f\left(x \right) \\
&= 2\pi \int_a^b x f\left(x \right) dx \text{得证}
\end{aligned}
$$

5 解：椭圆方程：$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{10^2} = 1$

$$
V = \int_{-10}^{10} \frac{2x\sqrt{3}x}{2} dy = 2\sqrt{3} \int_0^{10} (25 - \frac{y^2}{4}) dy = 2\sqrt{3} (25y - \frac{y^3}{12}) \Big|_0^{10} = \frac{1000\sqrt{3}}{3}
$$

6 解：

$$
\begin{aligned}
V &= \int_2^a 2yd(x^2 tg\alpha) \\
&= 2\int_2^a \sqrt{a2 - x2} x \cdot tg\alpha \cdot dx \\
&= 2tg\alpha \left[-\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Bigg|_0^a \\
&= \frac{2}{3} a^3 tg\alpha
\end{aligned}
$$

7 解：

$$
\begin{aligned}
&\because x > 0, y > 0. \\
&\therefore y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \\
&\text{求交点:} \sqrt{y} = y^2 \\
&y = 0 \text{或} y = 1 \\
&\therefore V = \int_0^1 \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = \int_0^1 \pi \left[(\sqrt{x})^2 - x^4 \right] dx
\end{aligned}
$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]\bigg|_0^1=\frac{2\pi}{10}$$

8 解：$y=x(x-1)(x-2)$，$设y=0,则x=0,1,2$

$$V=\int_0^1\pi\left[(x+dx)^2-x^2\right]y+\int_2^1-\pi\left[(x+dx)^2-x^2\right]y$$
$$=\pi\left[\int_0^1 2x^2(x-1)(x-2)dx-\int_1^2 2x^2(x-1)(x-2)dx\right]$$
$$=2\pi\left[(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3)\bigg|_0^1-(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3)\bigg|_1^2\right]$$
$$=\pi$$

9 求下列曲线段的长度

(1).弧长$S=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

换元设x=tanθ, $\theta\in\left[\arctan\sqrt{3},\arctan\sqrt{8}\right]$

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\left(\tan\theta\right)$$
$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin^2+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\csc\theta)d\theta=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}+\ln|\tan\frac{\theta}{2}|\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$
$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

(2). $设\sqrt{x}=t则x=t^2,1\le t\le\sqrt{3}.$

曲线的方程为：$\begin{cases}x=t^2\\ y=t-\frac{1}{3}t^3\end{cases}$

弧长 $S=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+(1-t^2)^2}dt$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}(t^2+1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_1^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$$

(3).$上半部分方程为y=\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^2}$

$设t=x-1则0\le t\le 1$，

$$y=\sqrt{\frac{2}{3}}t^{\frac{3}{2}}$$

$$S=2\int_0^1\sqrt{(\frac{3}{2}t+1)^3}dt$$

$$=2\times\frac{2}{3\times\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\frac{3}{2}t+1\right)^3}\Big|_0^1=\frac{8}{9}(\left(\frac{5}{2}\right)^3-1)$$

(4). $y^2=2px,x=\frac{y^2}{2p},\frac{dx}{dy}=\frac{y}{p}$

$$S=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}dy$$

设$\frac{\mathrm{y}}{p}=\tan\theta,$

$$\mathrm{S}=\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}p\sec^3\theta d\theta=p\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=p\left[\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\frac{dx}{\cos\theta}\right]$$

$$=p\left[\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan O|\right]_0^{\arctan\frac{y}{p}}$$

$$=\frac{y}{2p}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

(5).

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\varphi'^2\left(t\right)+\phi'^2(t)}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-3a\cos^2t\sin t\right)^2+\left(3a\sin^2t\cos t\right)^2}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin tdt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt$$

$$=6a$$

(6).

$$x=\ell\cos\theta=a\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{3}$$

$$y=\ell\sin\theta=a\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{3}$$

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin\theta\sin^3\frac{\theta}{3}+a\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$\frac{dy}{dt}=a\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{3}+a\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$S=\int_o^{3\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta$$

$$=a\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{3}{4}\sin\frac{2}{3}\theta\right)|_0^{3\pi}$$

$$=\frac{3\pi}{2}a$$

(7).

有问题

10 解：

$$\frac{dx}{dt}=at\cos t,\frac{dy}{dt}=at\sin t$$

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{\pi}atdt$$

$$=\frac{a}{2}t^2|_0^{\pi}$$

$$=\frac{a}{2}\pi^2$$

11

12 解：

$$
\begin{aligned}
w &= \int_0^{15} \pi y^2 dx \ell g(15-x) \\
&= \int_0^{15} \frac{4}{9} \ell g \pi x^2 (15-x) dx \\
&= \frac{4}{9} \ell g \pi \left(5x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^{15} \\
&= 5.8 \times 10^7 J
\end{aligned}
$$

13

（1）设在 h_0 高度时重力加速度为 g' 则

$$
\begin{aligned}
g' &= \frac{R^2}{\sqrt{R+h_0}} g \\
w &= \int_0^h mg' dh_0 \\
&= \int_0^h \frac{mgR^2}{\left(R+h_0\right)^2} dh_0 \\
&= -\frac{mgR^2}{R+h_0} \Big|_0^h \\
&= \frac{mgRh}{R+h}
\end{aligned}
$$

（2）由(1)得

$$
w = \frac{mgRh}{R+h} = 9.72 \times 10^8 J
$$

14 解：弹簧压缩 1m 需要 4.9N 的力

$$
\begin{aligned}
F &= 4.9(1-x) \\
W &= FS \\
&= \int_{0.6}^{0.8} 4.9(1-x) dx \\
&= 0.294 J
\end{aligned}
$$

15

(1) 解：

一边方程为$x=\frac{b}{2a}y+\frac{b}{2}$

压力

$$F=\int_0^{-a}\ell gy2xdy$$

$$=\int_0^{-a}\ell gy\left(\frac{b}{a}y+b\right)dy$$

$$=\ell g\left(\frac{b}{3a}y^3+\frac{1}{2}by^2\right)|_0^{-a}$$

$$=\frac{1}{6}\ell ga^2b$$

(2) 解：

一边方程为y=$-\frac{2a}{b}x$

压力

$$F=\int_0^{-a}\ell gy2xdy$$

$$=\int_0^{-a}\ell gy\left(-\frac{b}{a}y\right)dy$$

$$=-\frac{b}{3a}\ell gy^3\ |_0^{-a}$$

$$=\frac{1}{3}\ell ga^2b$$

16 解：

一边方程为y=$-\frac{2a}{b}x$

压力

$$F=\int_0^{-a}\ell gy2xdy$$

$$=\int_0^{-a}\ell gy\left(-\frac{b}{a}y\right)dy$$

$$=-\frac{b}{3a}\ell gy^3\ |_0^{-a}$$

$$=\frac{1}{3}\ell ga^2b$$

17 解：

$$w=2, g=9.8$$
$$FS=\int_2^5 \ell ghwdh$$
$$=\frac{1}{2}\ell gwh^2 |_2^5$$
$$=205.8KN$$

18 解：

$$\Delta m=\frac{M}{\pi R}, \Delta l=R\Delta\theta$$

由对称性可知作用力在x轴上

$$F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gmdm}{R^2}$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{GmR\frac{M}{\pi R}}{R^2}d\theta$$
$$=\frac{GMm}{R^2}$$

19 解：

由对称性可知，圆心电荷的受力方向在x轴方向

$$F=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{kqR\delta}{R^2}\cos\theta d\theta$$
$$=\frac{2kq\delta}{R}$$

20 解：

21

22 解：

雪堆融化的速度：$U = KS = 4\pi r^2(t) \bullet k$

$\therefore \Delta v = \int_0^t u dt = \frac{2}{3}\pi r_0^3 - \frac{2}{3}\pi r^3(t)$

对等式两边求导得：

$u = 4\pi r^2(t) k = -2\pi r^2(t) r'(t)$

$\therefore r'(t) = -2k$

$r(t) = -2kt + c$

$\because t = 3$时，$\mathrm{r}(3) = \frac{1}{2} r_0$且$\mathrm{t} = 0$时，$r(t) = r_0$得

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} r_0 = -6k + c \\ r_0 = c \end{cases}$$

$\therefore k = -\frac{1}{12} r_0$

$\therefore r(t) = 0$时，$\mathrm{t} = 6h$

23 解：

阻力$f = -kh$

第一次打桩阻力做功：$\mathrm{W}_f = \int_0^a |f| dh = \frac{1}{2} kh^2 |_0^2 = \frac{1}{2} ka^2$

且打桩做功和阻力相等

$\therefore$每次做功$\mathrm{W}_f(i) = \left(\frac{1}{2} ka^2\right) \bullet r^i, i$为打击次数。

(1)设打击三次后深度为h_3

则$\mathrm{W_f}(1) + \mathrm{W_f}(2) + \mathrm{W_f}(3) = \int_0^h |f| dh = \frac{1}{2} kh^2 |_0^{h_3}$

即$\frac{1}{2} ka^2 (1 + r^4 + r^2) = \frac{1}{2} kh_3^2$

$\therefore h_3 = a\sqrt{1 + r + r^2}\,(m)$

$(2)\, h_n = a\sqrt{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}}\,(0 < r < 1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{\frac{(1 - r^n)}{1 - r}}$

$= \frac{a}{\sqrt{1 - r}}(m)$

24 解：

$x^2+y^2\le 2x$和$y\ge x$所围成的区域

其中$0\le x\le 1,0\le y\le 1.$

由$x_1^2+y^2=2x_1\Rightarrow x_1=1-\sqrt{1-y^2}$

由$y=x_2\Rightarrow x_2=y$

$\therefore V=\int_0^1\left[1-y^2-(1-y)^2\right]dy$

$=\dfrac{\pi}{3}$

25

26 解：棒的密度：$k=\dfrac{M}{l}$

$$F_x=\int_0^l\frac{G\frac{M}{l}\cos\theta m}{(l-x)^2+a^2}dx=\int_0^l\frac{\frac{GMm}{l}\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+a^2}}}{(l-x)^2+a^2}dx$$

$$=\frac{GMm}{l}\int_0^l\frac{l-x}{\left[(l-x)^2+a^2\right]^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{GMm}{2l}\int_0^l\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\left(x^2+a^2\right)$$

$$=\frac{GMm}{2l}\left[-2\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^l=\frac{GMm}{l}\left(l-\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}\right)$$

$$F_y=\int_0^l\frac{G\frac{M}{l}\sin\theta m}{(l-x)^2+a^2}dx=\int_0^l\frac{\frac{GMm}{l}\frac{a}{\sqrt{(l-x)^2+a^2}}}{(l-x)^2+a^2}dx$$

$$=\frac{GMma}{l}\int_0^l\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{GMma}{l}\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Big|_0^l$$

$$=\frac{GMm}{la\sqrt{a^2+l^2}}$$

习题 4-8

1.

$$(1)\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{5}}dx=\frac{-1}{4x^{4}}\Big|_{1}^{+\infty}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x>1)$$

$$(2)\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty,\text{所以发散}$$

$$(3)\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}dx(a>0)=\frac{-e^{-ax}}{a}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{a}$$

$$(4)\int_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx,\text{令}\mathrm{t}=-\sqrt{x},\text{则}\int_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx=\int_{0}^{-\infty}2te^{t}dt=2te^{t}-\int_{0}^{-\infty}2td(e^{t})=2(t-1)e^{t}\Big|_{0}^{-\infty}=2$$

$$(5)\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{arctanx}}{(1+\mathrm{x}^{2})^{\frac{3}{2}}}dx,\text{令}\mathrm{t}=\arctan x,\text{则}x=\tan t.\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{arctanx}}{(1+\mathrm{x}^{2})^{\frac{3}{2}}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=t\sin t+\cos t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$(6)\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt=\int_{0}^{+\infty}\frac{-1}{p}\sin wtd(e^{-pt})=\frac{-e^{-pt}}{p}\sin wt+\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{p}w\cos wtdt=$$

$$\frac{-e^{-pt}}{p}\sin wt+\int_{0}^{+\infty}\frac{-w}{p^{2}}\cos wtd(e^{-pt})=\frac{-e^{-pt}}{p}\sin wt-\frac{we^{-pt}}{p^{2}}+\int_{0}^{+\infty}\frac{-w^{2}}{p^{2}}e^{-pt}\sin wtdt$$

$$\text{所以}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin wtdt=\frac{p^{2}}{w^{2}+p^{2}}(\frac{-e^{-pt}}{p}\sin wt-\frac{we^{-pt}}{p^{2}})_{0}^{+\infty}=\frac{w}{w^{2}+p^{2}}$$

$$(7)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^{2}+2x+2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^{2}+1}d(x+1)=\arctan(x+1)_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$

$$(8)\text{令}x=\sin t,\text{则}\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t}\cos tdt=-\cos t_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$(9)\int_{0}^{2}\frac{1}{x^{2}-4x+3}dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})dx=\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_{0}^{1}+\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_{1}^{2}$$

因为$\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_{0}^{1}$和$\frac{1}{2}\ln(\frac{x-3}{x-1})_{1}^{2}$都是发散的，所以原反常积分也是发散的

$$(10)\text{令x=sect, 则}\int_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^{2}-1}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan tdt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}dt=\frac{\pi}{3}$$

$$(11)\text{令}\mathrm{t}=\sqrt{x-1},x=t^{2}+1,\text{所以}\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{x-1}}dx=\int_{0}^{1}\frac{t^{2}+1}{t}2tdt=\frac{2}{3}t^{2}+2t_{0}^{1}=\frac{8}{3}$$

$$(12)\text{令}\mathrm{t}=\frac{1}{x},\text{则}x=\frac{1}{t},\text{所以}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\mathrm{x}^{4}-1}}dx=\int_{1}^{0}\frac{-t}{\sqrt{1-t^{4}}}dt=\int_{1}^{0}\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-t^{4}}}d(t^{2})$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin(t^{2})_{1}^{0}=\frac{\pi}{4}$$

$$(13)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}-\sin\frac{1}{x}d(\frac{1}{x})=\cos\frac{1}{x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}$$,所以发散

(14) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$,令$t=\sqrt{x-1}, x=t^2+1$,则$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$

2.

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$

(2) 令$x=\sin t$,则$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin t}{\cos t}\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

$$(3)\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\pi}\frac{x}{\tan\frac{x}{2}}dx$$,令$t=\frac{x}{2}, x=2t$

则$\int_0^{\pi}\frac{x}{\tan\frac{x}{2}}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\tan t}dt$,由一式得$=4*\frac{\pi}{2}\ln 2=2\pi\ln 2$

4.

(1)令$x=\tan t$,则$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sec t)^4}(\sec t)^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$,令$u=\sqrt{\tan x}, x=\arctan(u^2)$,则

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}du$,令$t=\frac{1}{u}, u=\frac{1}{t}$,则

$=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}dt$,因为$\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}du=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}dt$

所以$2\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}du=\int_0^{+\infty}\frac{2+2u^2}{1+u^4}du=2\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}du=2\int_0^{+\infty}\frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}$

$$=2*\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}})\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi$$

所以原式等于$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^4}du=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

《高等数学》上册，总复习题四 参考答案

负责人：代兵 学号：S20090398

PS：第 **2** 题第（**4**）小题书后答案为$\dfrac{29}{270}$，我的计算答案为$\dfrac{29}{1080}$，麻烦老师指正。

总习题四：、

1.

$$(1).\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{x\to\infty}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\ldots+(\frac{n}{n})^p]\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n})=\int_0^1\sin x\pi dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin x\pi dx\pi$$

$$=\frac{-1}{\pi}(\cos\pi x)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$(4).\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n)-\frac{1}{n}n\ln n]}=e^{\int_0^1\ln xdx}=e^{-1}$$

$$(5)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})$$

$=\dfrac{1}{b-a}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$($x_i$为（a，b）区间上一点）

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$(6)\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\arctan x)^2=\frac{\pi^2}{4}$$

$$(7)\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\bullet\frac{1}{\cos^2 x}\bullet\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\bullet\frac{1}{\cos^2 x}\bullet\cos x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\cos x}=1$$

(8)因为f(x)连续，故由第一积分中值公式有

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = f(\xi)(x-a)$$

其中ξ介于x与a之间，因此

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt = \lim_{\substack{x\to a\\ \xi\to a}} xf(\xi) = af(a)$$

2.

$$(1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xd(\tan\frac{x}{2}) - \ln(1+cox)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = (x\tan\frac{x}{2})\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx + \ln 2 = \frac{\pi}{2}$$

$$(2)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\cos 3x}{2}\sin 3xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin 3xdx - \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\sin 3xdx = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 4xdx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$$

$$-\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 6xdx = \frac{1}{6}$$

$$(3)\int_{0}^{3}\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$$

令$t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$　　$\therefore x = \frac{t^{2}}{1-t^{2}}$

当$x=0$时t=0　　x=3时　$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore 原式 = \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arcsin td\frac{t^{2}}{1-t^{2}} = \arcsin t \bullet \frac{t^{2}}{1-t^{2}}\Big|_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^{2}}{1-t^{2}}d\arcsin t$$

$= \pi - \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^{2}}{1-t^{2}} \bullet \frac{1}{\sqrt{1-t^{2}}}dt$　　令$t=\sin y$　　$t=0$时$y=0$　$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$时$y=\frac{\pi}{3}$

$$\therefore 原式 = \pi - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^{2}y}{\cos^{2}y-\cos y}\cos ydy = \pi - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^{2}y}{\cos^{2}y}dx = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$(4)\int_{0}^{1}x^{15}\sqrt{1+3x^{8}}dx = \frac{1}{8}\int_{0}^{1}x^{8}\sqrt{1+3x^{8}}dx^{8} = \frac{1}{8}\int_{0}^{1}t\sqrt{1+3t}dt$$

令$\sqrt{1+3t}=x$　当$t=0$时　x=1　　t=1时x=2

$$= \frac{1}{8}\int_{1}^{2}\frac{x^{2}-1}{3} \bullet x \bullet \frac{x}{6}dx = \frac{1}{144}\int_{1}^{2}x^{4}-x^{2}dx = \frac{1}{144}(\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{3}}{3})\Big|_{1}^{2} = \frac{29}{1080}$$

$$(5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-2\cos x}{3\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{10}(3\sin x+\cos x)-\frac{7}{10}(3\cos x-\sin x)}{3\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{7}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3\sin x+\cos x}d3\sin x+\cos x$$

$$=\frac{\pi}{20}-\frac{7}{10}\ln 3=\frac{1}{20}(\pi-14\ln 3)$$

$$(6)\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3})\pi$$

4.

证明:$(1)F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$

由题设可知：$\text{F}'(x)=[\sqrt{f(x)}-\frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2+2\geq 2$

$(2)F(a)=\int_a^a f(t)dt+\int_b^a\frac{dt}{f(t)}=-\int_a^b\frac{dt}{f(t)}<0$

而$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b\frac{dt}{f(t)}=\int_a^b f(t)dt>0$

由定理可知，F(x)在[a,b]上连续，又由零点定理知：

方程F(x)=0在(a,b)上内至少有一根。

$$8.f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geq 0\\ 1+x^2 & x<0\end{cases}$$

令$t-1=x\quad t=x+1$

$\therefore x\geq 0$时 $t\geq 1\quad x<0$时 $t<1$

$$f(t-1)=\begin{cases}e^{1-t} & t\geq 1\\ 1+(t-1)^2 & t<1\end{cases}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t-1)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^1[1+(t-1)^2]dt+\int_1^2 e^{1-t}dt=\frac{29}{8}-\frac{1}{e}$$

12.解：令f(x)=x^2-ax+b

$$\therefore f(x)=x^2-x\int_0^2(x^2-ax+b)dx+2\int_0^1(x^2-ax+b)dx$$

$$=x^2-x(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+bx)|_0^2+2(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+bx)|_0^1$$

$$=x^2-x(\frac{8}{3}-2a+2b)+2(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+b)$$

$$\therefore\begin{cases}\frac{8}{3}-2a+2b=a\\2(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+b)=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\b=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

22.A：$S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$

$=\int_0^{\pi}|\cos t|dt+\int_{\pi}^{2\pi}|\cos t|dt+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\cos t|dt+\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos tdt+...+\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt$

$=(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)-(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2})+...+\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt$

$=2+2+...+2+\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt=2n+\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt$

$\therefore$ 只需证明$0\le\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt<2$

因为$|\cos t|\ge 0\therefore\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt\ge 0$

讨论:1.当n为偶数且$x-n\pi<\frac{\pi}{2}$时

$\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt=\int_{n\pi}^{x}\cos tdt=\sin x-\sin n\pi=\sin x<2$

当$\pi>x-n\pi>\frac{\pi}{2}$时 $\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt=\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\cos tdt-\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{x}\cos tdt$

$=\sin(n+\frac{1}{2}\pi)-\sin\pi-\sin x+\sin(n+\frac{1}{2})\pi=1-0-\sin x+1<2$

2.当x为奇数时，$x-n\pi<\frac{\pi}{2}$时

$\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt=-\int_{n\pi}^{x}\cos tdt=-\sin x+\sin n\pi=-\sin x<2$

$x-n\pi>\frac{\pi}{2}$时 $\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt=-\int_{n\pi}^{x}\cos tdt=-\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\cos tdt+\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{x}\cos tdt$

$=-\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})+\sin n\pi+\sin x-\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})=-(-1)+0+\sin x-(-1)=2+\sin x<2$

$\therefore\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt<2\Rightarrow 2n\le S(x)<2n+2$成立

B:$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}$

25.解：

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx,n=1,2,...$$

$$=f(1)+f(2)+...+f(n)-[\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_{n-1}^n f(x)dx$$

$$=f(1)+[f(2)-\int_1^2 f(x)dx]+[f(3)-\int_2^3 f(x)dx]+...+[f(n)-\int_{n-1}^n f(x)dx]$$

因为$f(x)$在$[0,+\infty]$上单调减少并且非负，

当$x\in(1,2)$时，f(x)>f(2)

同理$x\in(n-1,n)$时,$f(x)>f(n)$

$$\therefore a_n<f(1)+[f(2)-\int_1^2 f(x)dx]+[f(3)-\int_2^3 f(x)dx]+...+[f(n)-\int_{n-1}^n f(x)dx]<f(1)$$

又因为$a_n=f(1)+f(2)+...f(n)-\int_1^2 f(x)dx-...-\int_{n-1}^n f(n)dx$

$$=f(1)-\int_1^2 f(x)dx+f(2)-\int_2^3 f(x)dx+...+f(n-1)-\int_{n-1}^n f(x)dx+f(n)$$

$$>0+0+...+0+f(n)=f(n)$$

$$\therefore f(n)<a_n<f(1)$$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的极限存在