第二部分 集合论

集合论是现代数学的理论基础。

由于集合论的语言适合于描述和研究离散对象及其关系，所以是计算机科学与工程的理论基础。

在程序设计、关系数据库、形式语言和自动机理论等学科领域中都有重要的应用。

第六章 集合代数

集合的基本概念

集合、元素、子集、真子集、

包含、集合相等、

空集、幂集、全集

集合(set)的概念

定义：由确定的相互区别的一些对象组成的整体称为集合。

例：教室内的桌椅、图书馆的藏书、全国的高等学校、自然数的全体、直线上的点、26个英文字母等。

元素

- 集合内的对象称为元素。
- 集合通常用大写英文字母表示。

例如，N：自然数集合

Z：整数集合

Q：有理数集合

R：实数集合

C：复数集合

集合的表示

1. 列举法： $A=\{a,b,c,d\}$

$N=\{0,1,2,\ldots\}$

并不是所有的集合都可用列举法表示。

2. 描述法： $B=\{x|P(x)\}$

$P(x)$：谓词，概括集合中元素的属性。

如 $B=\{x|x\in Z\wedge 3<x\leq 6\}$

即 $B=\{4,5,6\}$

如， $B=\{x|P(x)\wedge G(x)\}$

隶属关系

- 元素a属于集合A，记作$a \in A$。
- 元素a不属于集合A，记作$a \notin A$

基数

集合S的基数(势)：S中的元素的个数。用 $|S|$表示。

有限集合：集合的基数(元素)是有限的。

如，$A=\{a,b,c,d\}$，$|A|=4$

无限集合：集合的基数(元素)是无限的。

例如, N, Z, Q, R等均为无限集。

集合的例子

The set of all positive integers

正整数集 $Z^{+}=\{1,2,3,\cdots\}$

The set of all rational numbers

有理数集 $Q=\{\frac{n}{m}\mid n,m\in Z\wedge m\neq 0\}$

The set of real numbers

实数集 $R=\{x\mid x\text{是实数}\}$

A={a, {b,c}, d, {{d}}}，基数|A|=4

两个特殊集合

全集：如果一个集合包含了所要讨论的每一个元素，则称该集合为全集，用E表示。

符号化表示：$E=\{x|p(x)\vee\neg p(x)\}$, $p(x)$为任意公式。

如，全总个体域

平面上所有的点——平面几何

空间中所有的点——立体几何

全集是相对的。

两个特殊集合

空集：不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示。

符号化表示：$\varnothing=\{x|p(x)\wedge\neg p(x)\}=\{\}$

注意：$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，前者是空集，是没有元素的集合；后者是以$\varnothing$作为元素的集合。基数？

空集是客观存在的，

例如，$\{x|x\in R\wedge x^2+1=0\}$是空集。

集合间的关系

包含，子集

- 符号化表示：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

- 若集合B不包含集合A，可表示成：

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow A \not\subset B \wedge A \neq B$$

- 包含关系性质：

1. 对任意集合A，$\varnothing \subseteq A$, $\varnothing \subseteq \varnothing$；
2. 对任意集合A，$A \subseteq A$；
3. 对任意集合A,B,C，若$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

集合相等

$$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$$
$$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

1. 如果A和B不相等，则记作$A\neq B$。
2. 给定二个集合A和B，A=B当且仅当A和B具有相同的元素。

例：$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$

例：设$A=\{\{1,2\},4\},B=\{1,2,4\}$,则$A\neq B$

真 子 集

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

判断：$\{0,1\}$、$\{1,3\}$、$\{0,1,2\}$是$\{0,1,2\}$的真子集吗？

确定下列命题是否为真

φ集合　{φ}作为元素的集合

元素 ∈ 集合

集合 ⊂ 集合

1. $\varnothing \subseteq \varnothing$ √
2. $\varnothing \in \varnothing$ ×
3. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
4. $\varnothing \in \{\varnothing\}$ √

求$A=\{a,b,c\}$的全部子集

解：将A的子集从小到大分类,

0元子集：即空集,只有1个:$\varnothing$

1元子集：即单元集,有3个:$\{a\},\{b\},\{c\}$

2元子集：有3个:$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$

3元子集：有1个：$\{a,b,c\}$

子集总数：2^n

幂　　集

定义 给定集合A，由A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集，记作$P(A)$(或2^A)。

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$$

1.若A是n元集，则$P(A)$有2^n个元素。

2.对任意集合A，一定有

$A\in P(A),\varnothing\in P(A)$，平凡子集

上例中，$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

作业(习题六)

5,

6,

8(4),