

第7章 二元关系

7.1 有序对与笛卡儿积

5. $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

逆命题 $A \times B \subseteq C \times D \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$ 不成立。

证明：

(1) 原命题为真。命题演算法。

(2) 逆命题为假，

当 $A=B=\emptyset$ 时，或者 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 时，该命题的结论是成立的；

当 A 和 B 之中仅有一个为 \emptyset 时，结论不一定成立。

如，令 $A=\emptyset, B=N, C=D=\{1\}$,

$A \times B \subseteq C \times D$, 但 $B \not\subseteq D$ 。



例 设 $A=\{1,2\}$, 求 $P(A)\times A$

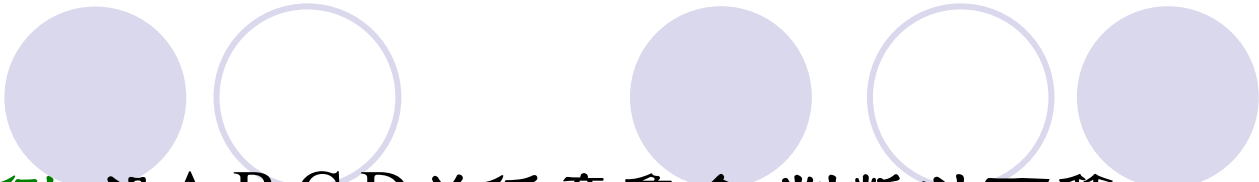
解:

$$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

$$P(A)\times A$$

$$=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\times\{1,2\}$$

$$=\{\langle\emptyset,1\rangle,\langle\emptyset,2\rangle,\langle\{1\},1\rangle,\langle\{1\},2\rangle,\\ \langle\{2\},1\rangle,\langle\{2\},2\rangle,\langle\{1,2\},1\rangle,\langle\{1,2\},2\rangle\}$$



例 设 A, B, C, D 为任意集合,判断以下等式或命题是否成立,说明为什么 ?

1) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

3) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$

4) $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$ (消去律)

5) 存在集合 A , 使得 $A \subseteq A \times A$

解 1) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

对于任意的 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \in B \times D$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times D) \quad \text{所以等式成立}$$

2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ 不成立

例, 若 $A = D = \emptyset$, $B = C = \{1\}$

$$\text{则有: } (A \cup B) \times (C \cup D) = B \times C = \{\langle 1, 1 \rangle\}$$

$$(A \times C) \cup (B \times D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$



3) $(A-B) \times (C-D) = (A \times C) - (B \times D)$

反例，若 $A=B=C=\{1\}$ ， $D=\{2\}$

则有： $(A-B) \times (C-D) = \emptyset$

$$(A \times C) - (B \times D) = \{ \langle 1, 1 \rangle \}$$

所以，原式不成立。



7. 2 二元关系Relation

二元关系

二元关系：集合中**两个元素**之间的某种**联系**。

例，甲、乙、丙三个人进行乒乓球比赛，如果任何两人之间都要赛一场，那么共要赛 场。

假设三场比赛的结果是**乙胜甲**、**甲胜丙**、**乙胜丙**，这个结果可以记作：

$$R=\{<\text{乙},\text{甲}>,<\text{甲},\text{丙}>,<\text{乙},\text{丙}>\}$$

其中 $<x,y>$ 表示 x 胜 y 。




例，有A,B,C三个人和四项工作 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ，已知A可以从事工作 α, δ ，B可以从事工作 γ ，C可以从事工作 α, β 。那么人和工作之间的对应关系可以记作：

$$R = \{ \langle A, \alpha \rangle, \langle A, \delta \rangle, \langle B, \gamma \rangle, \langle C, \alpha \rangle, \langle C, \beta \rangle \}$$

类似的如师生关系、教师开课关系、学生选课关系等。





定义 如果一个集合或者为**空集**，或者它的**元素都是有序对**，则称这个**集合**是一个**二元关系**，简称为**关系**，一般**记作R**。

对于二元关系R,

如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 则记作 xRy ;

如果 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则记作 $x \not R y$ 。

例，下列集合是否为关系？

$\{\langle 1, 2 \rangle, \langle a, b \rangle\}$, $\{\langle 1, 2 \rangle, a, b\}$, \emptyset 等。

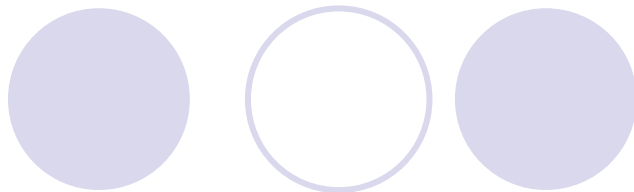
定义 设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所代表的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系;

特别当 $A=B$ 时, 则叫做 A 上的二元关系。

○ $R \subseteq A \times B$, R is a relation from A to B .

○ $R \subseteq A \times A$, R is a relation on A .

关系表示方法



1. 列举法

如，胜负关系 $R = \{ \langle \text{乙}, \text{甲} \rangle, \langle \text{甲}, \text{丙} \rangle, \langle \text{乙}, \text{丙} \rangle \}$

2. 描述法

例：实数集 R 上的大于关系。

$$“>” = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in R \wedge y \in R \wedge x > y \}$$

父子关系：

$$F = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ 是 } y \text{ 的父亲} \}$$

关系表示方法

3. 关系矩阵表示法

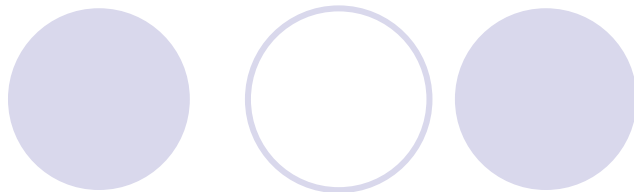
- 适用于有限集上的关系。
- 设 A 、 B 都是有限集， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ， $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ，从 A 到 B 的关系 R 可以用一个 $m \times n$ 的矩阵 M_R 来表示， M_R 的第 i 行第 j 列的元素 r_{ij} 取值如下：

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } a_i R b_j \\ 0 & \text{若 } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

矩阵 M_R 称为 R 的关系矩阵。



关系表示方法

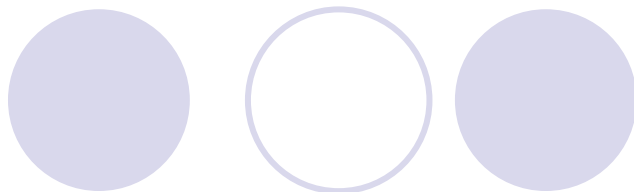


例， 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， A 上的关系 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$ 。 则 R 的关系矩阵：
4×4的矩阵，

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关系表示方法



4. 关系图表示法

适用于有限集上的关系。

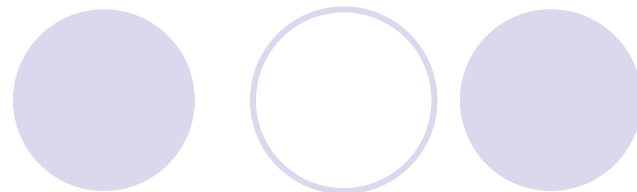
设 A 、 B 都是有限集， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ， $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ， R 是从 A 到 B 的关系，

- a) 把 A 、 B 集合中的元素以点的形式全部画在平面上；
- b) 若 $a_i R b_j$ ，则 a_i 和 b_j 之间画一箭头弧线，反之，不画任何连线。

上例的关系图如下，



关系表示方法



例， 人的集合 $\{A, B, C\}$ 到工作的集合 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ 的关系 $R = \{ \langle A, \alpha \rangle, \langle A, \delta \rangle, \langle B, \gamma \rangle, \langle C, \alpha \rangle, \langle C, \beta \rangle \}$

关系矩阵：

关系图：

3种特殊的关系

设A为任意集合，A上有3种特殊的关系：

1. 空关系

$\emptyset \subseteq A \times A$ ，A上的空关系。

2. 全域关系 E_A

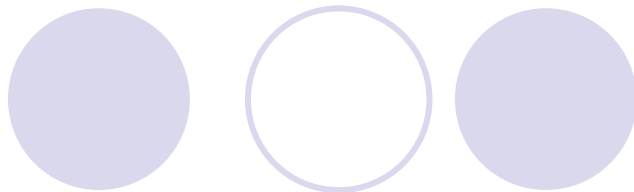
$$E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$$

3. 恒等关系 I_A

$$I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$$



3种特殊的关系



例： $A=\{0,1,2\}$, 则

$$E_A = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \\ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$$

$$I_A = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$$



常用的关系

1. 小于等于关系

$$L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y \}, A \subseteq \mathbb{R}$$

2. 整除关系

$$D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 整除 } y \}, A \subseteq \mathbb{Z}^+$$

3. 包含关系

$$R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \subseteq y \}, A \text{ 为任意集合。}$$



常用的关系

例: $A=\{-1, 0.5, 4\}$, $B=\{1,2,3,6\}$, 求 L_A 与 D_B 。

$$L_A = \{ \langle -1, -1 \rangle, \langle -1, 0.5 \rangle, \langle -1, 4 \rangle, \\ \langle 0.5, 0.5 \rangle, \langle 0.5, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$$

$$D_B = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \\ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \\ \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \\ \langle 6, 6 \rangle \\ \}$$



例 设 $A = \{a, b\}$,

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \subseteq y \}$$

则有

$$P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, A \}$$

$$\begin{aligned} R = \{ & \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{a\} \rangle, \langle \emptyset, \{b\} \rangle, \langle \emptyset, A \rangle, \\ & \langle \{a\}, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, A \rangle, \\ & \langle \{b\}, \{b\} \rangle, \langle \{b\}, A \rangle, \\ & \langle A, A \rangle \\ & \} \end{aligned}$$



作业

习题七

1,3,4

10,13