

5.1 一阶逻辑等值式 与置换规则



常用等值式

1. 命题逻辑中等值式的推广
2. 消去量词等值式
3. 量词否定等值式
4. 量词辖域收缩与扩张等值式
5. 量词分配等值式
6. 多量词等值式



等值演算的三条规则

1. 置换规则

2. 换名规则

3. 代替规则

5.2 一阶逻辑前束范式



前束范式

定义： 设 A 为一谓词公式，如果 A 具有如下形式：

$$\Delta_1 x_1 \Delta_2 x_2 \dots \Delta_k x_k B$$

则称 A 是**前束范式**。其中 $\Delta_i (1 \leq i \leq k)$ 为 \forall 或 \exists ， B 为**不含量词**的谓词公式。

特征： 所有量词都在公式最前面，辖域为**整个公式**。



前束范式

例： 下列公式是否为前束范式？

1. $\forall x \exists y \forall z (\neg Q(x, y) \vee R(z))$

2. $\forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow R(z)$

3. $\exists x (R(x) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow F(x, y)))$

4. $\forall x \neg \exists y \forall z (\neg Q(x, y) \vee R(z))$



前束范式

前束范式存在定理：一阶逻辑中的任何公式，都存在与之等值的前束范式。

说明：前束范式不惟一。

如， $\forall x \exists y \forall z (\neg Q(x, y) \vee R(z))$
 $\Leftrightarrow \forall x \exists y \forall z (Q(x, y) \rightarrow R(z))$



前束范式

证明：利用等值式和三规则，可求得范式。

1. 利用量词否定等值式深入“ \neg ”；
2. 利用换名规则和代替规则，避免混淆；
3. 利用量词辖域的收缩扩张等值式，把量词移到全式的最前面，辖域为整个公式。

这样一定可得到等值的前束范式。



前束范式

例：求下列公式的前束范式

1) $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall x\neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



前束范式

$$\begin{aligned} & 2) \forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x F(x) \vee \forall y \neg G(y) \\ \Leftrightarrow & \forall x \forall y (F(x) \vee \neg G(y)) \end{aligned}$$



前束范式

$$\begin{aligned} & 3) \forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x) \\ & \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists x G(x) \\ & \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \vee \exists x G(x) \\ & \Leftrightarrow \exists x (\neg F(x) \vee G(x)) \end{aligned}$$

$$4) \exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$$

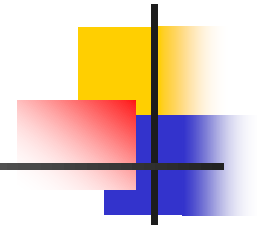
$$\Leftrightarrow \neg \exists x F(x) \vee \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg F(x) \vee \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg F(x) \vee \forall y G(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg F(x) \vee \forall y G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg F(x) \vee G(y))$$



5.3 一阶逻辑推理理论



推理理论

定义 设 A_1, A_2, \dots, A_n, B 都是谓词公式，若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ 是重言式，则称由前提 A_1, A_2, \dots, A_n 推出 B 的推理是**有效的**或**正确的**，称 B 为**有效结论**。推理正确记作 $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$ ，该式常称作**重言蕴涵式**。



推理定律

重言蕴涵式是逻辑推理的重要工具，
一些重要的重言蕴涵式，称作**推理定律**。



基本推理定律

1. 命题逻辑推理定律的代换实例

如, $\forall xF(x) \wedge \exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

$$\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$$

2. 由基本等值式生成的推理定律

如, $\neg \forall xF(x) \Rightarrow \exists x \neg F(x)$

$$\exists x \neg F(x) \Rightarrow \neg \forall xF(x)$$

一个等值式对应两条推理定律。



基本推理定律

3. 关于量词分配的推理定律(p75)

1) $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

2) $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

3) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$

4) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

这些都是可证明的。





关于量词的推理规则

1. 全称量词消去规则($\forall-$)
2. 全称量词引入规则($\forall+$)
3. 存在量词引入规则($\exists+$)
4. 存在量词消去规则($\exists-$)

说明：4条规则只能对**前束范式**使用。



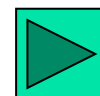
\forall -: 全称量词消去规则

1. $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$ 或

2. $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

两式成立的条件是：

- (1) 在1式中， y 不能是在 $A(x)$ 中约束出现的个体变量名；
- (2) 在2式中， c 为任意的个体常量；
- (3) 用 y 或 c 取代 x 时，一定要取代 x 的一切约束出现。





\forall +：全称量词引入规则

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

成立的条件：

1. y 取任何值时 $A(y)$ 均为真；
2. 取代 y 的 x 不能在 $A(y)$ 中约束出现，否则也会产生错误。





$\exists+$ ：存在量词引入规则

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

成立的**条件**：

1. c 是特定的个体常量；
2. 取代 c 的 **x 不能在 $A(c)$ 中出现过**。





\exists -: 存在量词消去规则

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

1. c 是使 $A(x)$ 为真的**特定的个体常量**；
2. c 不在 $A(x)$ 中出现过；
3. $A(x)$ 中除 x 外还有其它个体变量时，不能用此规则。



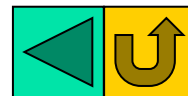
\exists -规则

实例：在自然数集中，设 $O(x)$: x 是奇数， $E(x)$: x 是偶数，则 $\exists x O(x) \wedge \exists x E(x)$ 是真命题。下面的推理是否正确？

- | | | |
|----|--------------------------------|------------------|
| 1. | $\exists x O(x)$ | 前提引入 |
| 2. | $O(c)$ | 1, \exists -规则 |
| 3. | $\exists x E(x)$ | 前提引入 |
| 4. | $E(c)$ | 3, \exists -规则 |
| 5. | $O(c) \wedge E(c)$ | 2,4合取引入 |
| 6. | $\exists x (O(x) \wedge E(x))$ | 5, \exists +规则 |

结论6：**错误**

原因：2,4中的 c 不应该相同，违背了条件1。





\exists -规则

说明：推导中连续使用 \exists -规则时，
使用一次更改一个常量。





一阶逻辑自然推理系统 \mathcal{F}

定义：自然推理系统 \mathcal{F}

1. 字母表：同一阶语言的字母表；
2. 合式公式：同一阶语言的合式公式；
3. 推理规则：
 - 1) 前提引入规则(P规则)：在证明的任何步骤上，都可引入前提。
 - 2) 结论引入规则(T规则)：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可以作为后续证明的前提，在后续证明中引用。



自然推理系统 \mathcal{F}

- 3) 置换规则：在证明的任何步骤上，谓词公式的**子公式**都可以用与它**等值**的其它公式置换。
- 4) 假言推理规则： $A \rightarrow B, A \Rightarrow B$
- 5) 附加规则： $A \Rightarrow A \vee B$
- 6) 化简规则： $A \wedge B \Rightarrow A$
- 7) 拒取式规则： $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$
- 8) 假言三段论： $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$

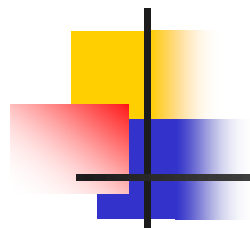


自然推理系统 \mathcal{F}

- 9) 析取三段论规则： $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$
- 10) 构造性二难规则： $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$
- 11) 合取引入规则： $A, B \Rightarrow A \wedge B$
- 12) \forall -规则；
- 13) \forall +规则；
- 14) \exists +规则；
- 15) \exists -规则。

其中1)~11)同命题逻辑的推理规则

A, B, C, D 为任意谓词公式。



作业 (P80)

12 (2)~(5)