第五节

傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数和余弦级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

(A为振幅, ω为角频率, φ为初相)

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

(谐波迭加)

$$A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0, \; a_n = A_n \sin\varphi_n, \; b_n = A_n \cos\varphi_n, \; \omega t = x$

得函数项级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

一般地, 周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 能表示为一系列周期为 $\frac{2l}{n}\ (n=1,2,3,\ldots)$ 正弦函数之和.

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{l}x+\varphi_n)$$

$$\underline{A_n\sin\varphi_n}\cos\frac{n\pi}{l}x+\underline{A_n\cos\varphi_n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

令 $\frac{a_0}{2}=A_0,\ a_n=A_n\sin\varphi_n,\ b_n=A_n\cos\varphi_n,$

得函数项级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

定理 1. 组成三角级数的函数系

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\cdots,\cos\frac{n\pi}{l}x,\ \sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots$$

在 $[-l,l]$ 上 正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-l,l]$ 上的积分等于 **0** .

证: $$\int_{-l}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}1\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$$\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x=\tfrac{1}{2}\left[\cos\frac{(k+n)\pi}{l}x+\cos\frac{(k-n)\pi}{l}x\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(k+n)\pi}{l}x+\cos\frac{(k-n)\pi}{l}x\right]\mathrm{d}x=0\quad(k\neq n)$$

同理可证：$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}x \, \mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}x \, \mathrm{d}x = 0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在$[-l, l]$上的积分不等于 **0**．且有

$$\int_{-l}^{l} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}x = 2l$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi}{l} x \, \mathrm{d}x = l \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-l}^{l} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, \mathrm{d}x = l \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

二、函数展开成傅里叶级数

定理 2. 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad ①$$

且等式右端级数可逐项积分, 则有

$$\left\{\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)\end{aligned}\right. \qquad ②$$

证: 由定理条件, 对①两边在 $[-l,l]$ 逐项积分, 得

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} \mathrm{d}\,x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi}{l} x\,\mathrm{d}\,x + b_n \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi}{l} x\,\mathrm{d}\,x \right)$$

$$= a_0 l$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$\cos\frac{n\pi}{l}x$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_n\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = a_n l$$

(利用正交性)

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

类似地，$\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 乘 ① 式两边，再逐项积分可得

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n称为函数 $f(x)$的傅里叶系数；以$f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的傅里叶级数 .


傅里叶，J. -B. -J.

定理3 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$ 是周期为$2l$的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 . (证明略)

注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

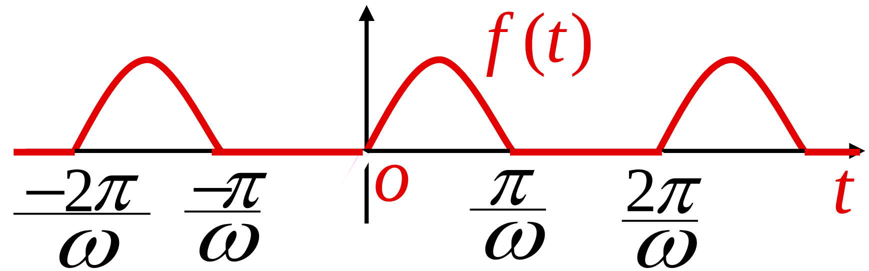
周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x\neq \text{间断点})$$

其中 $$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

注意: 若 x_0为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^{-})+f(x_0^{+})}{2}$

例1. 交流电压 $E(t)=E\sin\omega t$ 经半波整流后负压消失,试求半波整流函数的傅里叶级数.



解: 这个半波整流函数的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$,它在 $[\frac{-\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}]$ 上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & \frac{-\pi}{\omega}\le t<0\\ E\sin\omega t, & 0\le t<\frac{\pi}{\omega}\end{cases}$$

$$\therefore a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t]\mathrm{d}t$$

$$a_1 = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} \sin 2\omega\ t\,\mathrm{d}t = \frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^{\pi/\omega} = 0$$

$n \neq 1$时

$$a_n = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega\,t - \sin(n-1)\omega\,t]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\omega t + \frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\omega t\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{[(-1)^{n-1} - 1]E}{(n^2-1)\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k+3 \\ \dfrac{2E}{(1-4k^2)\pi}, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cdot\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

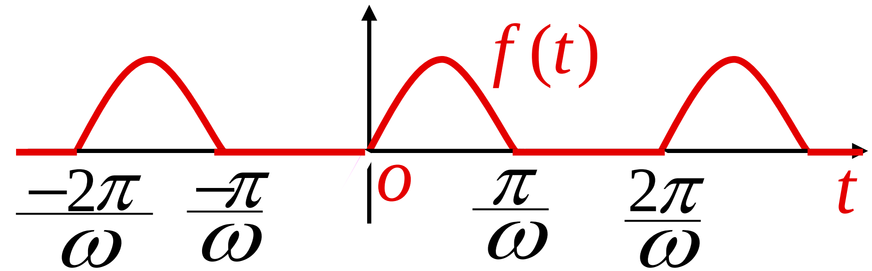
$$b_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cdot\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}(1-\cos 2\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{E\omega}{2\pi}\left[t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = \frac{E}{2}$$

$n > 1$ 时

$$b_n = \frac{E\omega}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega}-\frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = 0$$

由于半波整流函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 由收敛定理可得



$$f(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2k\omega t$$

直流部分　　交流部分　　$(-\infty<t<+\infty)$

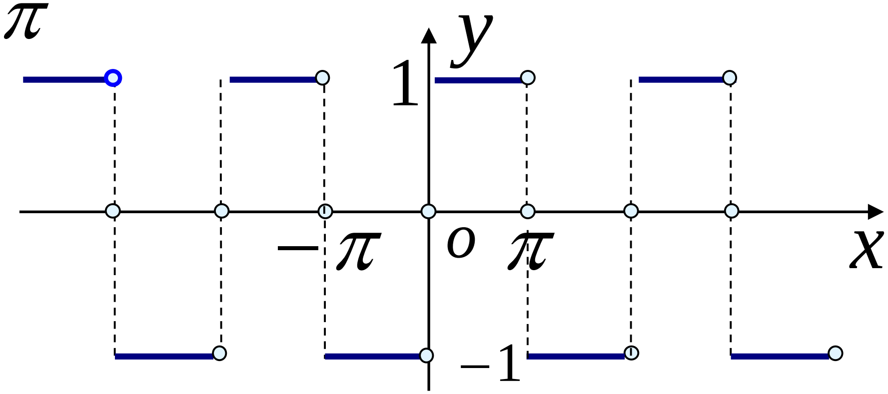
说明: 上述级数可分解为直流部分与交流部分的和.

2 *k* 次谐波的振幅为 $A_k=\frac{2E}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$, ***k*** 越大振幅越小,

因此在实际应用中展开式取前几项就足以逼近 $f(x)$ 了.

例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

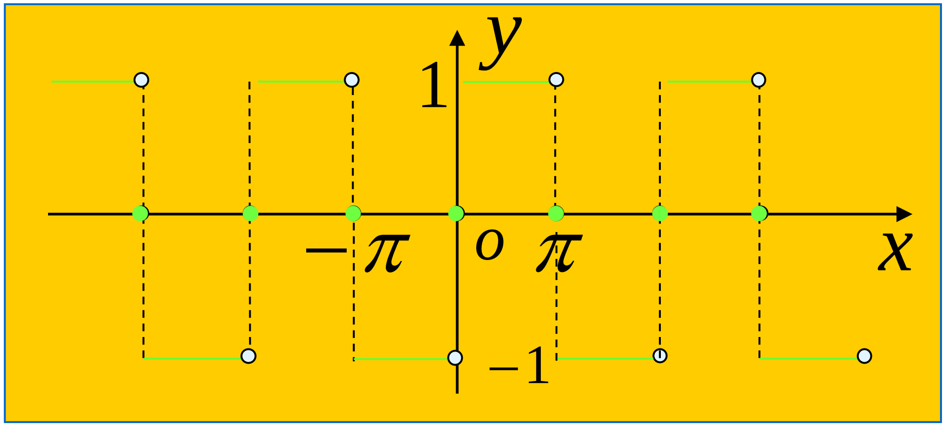
$$= \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当} n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当} n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \cdots)$$

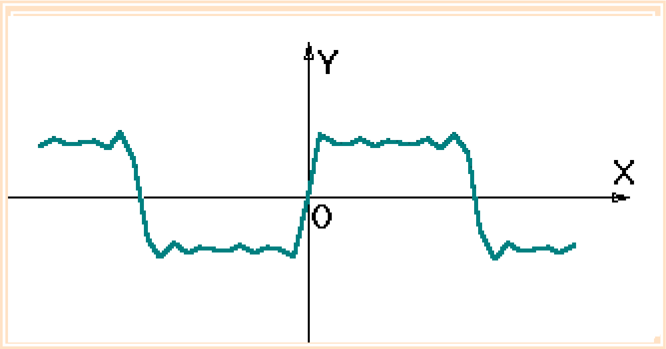


说明:

1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

时,级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

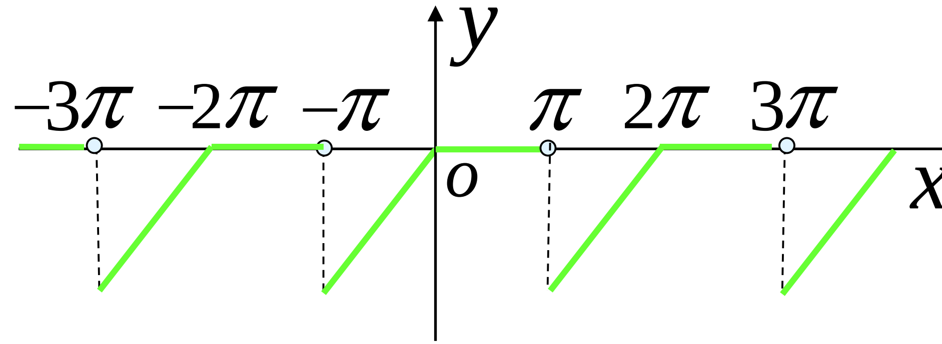


2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.

例3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解:
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx \mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty, \; x \neq (2k-1)\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

说明: 当 $x = (2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{0+(-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$

定义在[–π ,π]上的函数 *f* (*x*)的傅氏级数展开法

$$f(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$\Big\downarrow$ 周期延拓

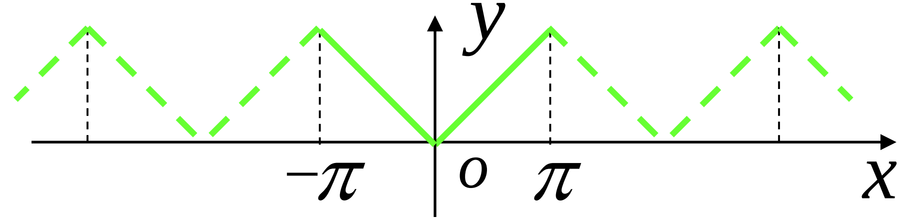
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, \pi) \\ f(x - 2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ 傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数

例4. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数 .

解: 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$,则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

说明: 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, $\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$, $\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$\because \ \sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$, $\therefore \ \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3}$

又 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$

三、正弦级数和余弦级数

1. 周期为$2l$ 的奇、偶函数的傅里叶级数

定理. 对周期为 $2l$ 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数,它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为$2l$的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数 , 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

说明: 如果 ***f*** **(*x*)** 为**奇函数**, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(在 } f(x) \text{ 的连续点处)}$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

如果 ***f*** **(*x*)** 为**偶函数**, 则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(在 } f(x) \text{ 的连续点处)}$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

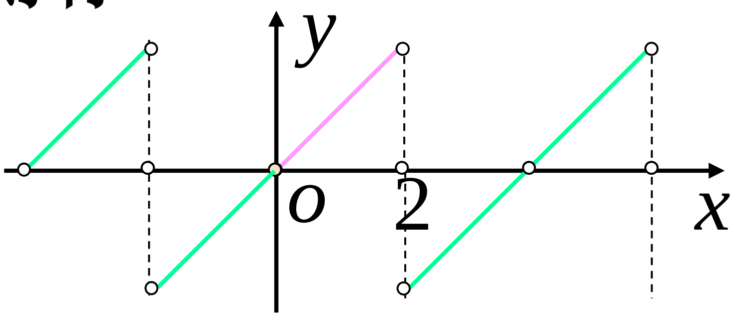
注: 无论哪种情况 , 在 ***f*** **(*x*)** 的间断点 ***x*** 处, 傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例5. 把 $f(x)=x \quad (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

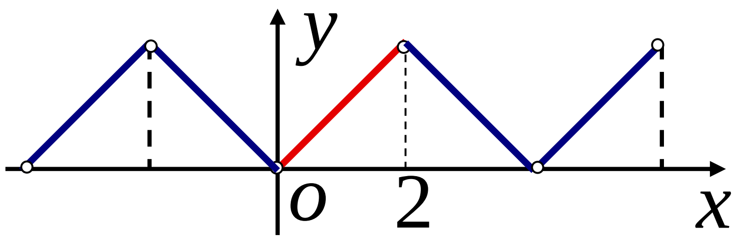
$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (0<x<2)$$

(2) 将 $f(x)$ 作偶周期延拓, 则有



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cdot \cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

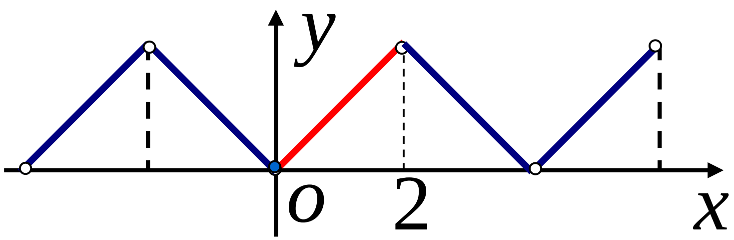
$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore \quad f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$



说明: 此式对 $x=0$ 也成立,

据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

三、正弦级数和余弦级数

2. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

推论. 对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数,它的傅里叶系数为

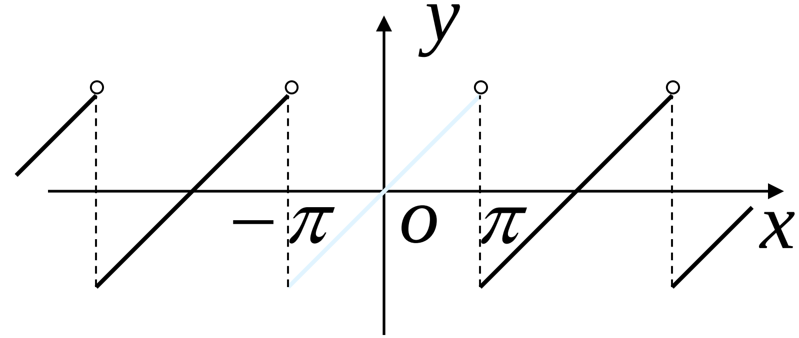
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数 , 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例6. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$,将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 因此



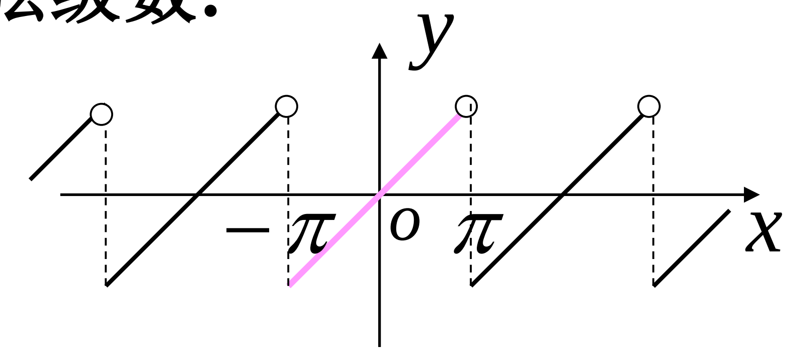
$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 ***f*** **(*x*)** 的正弦级数:



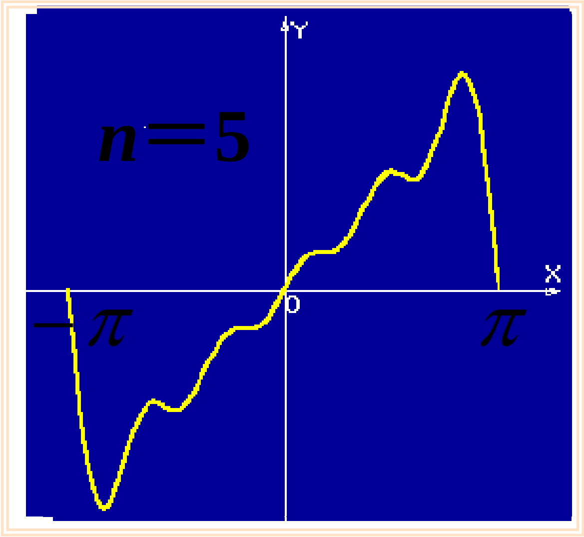
$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

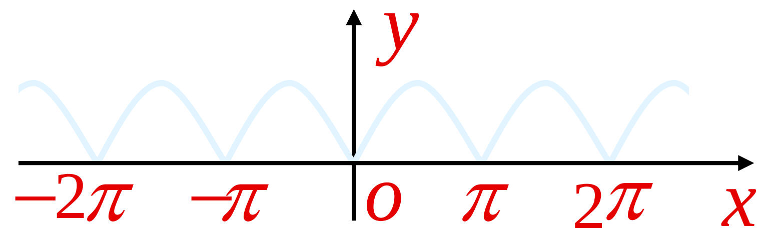
$$(-\infty<x<+\infty\ ,\ x\neq(2k+1)\pi\ ,k=0,\pm 1\ ,\cdots)$$

在$[-\pi,\pi)$上级数的部分和

逼近 ***f*** **(*x*)** 的情况见右图.



例7. 将周期函数 $u(t)=|E\sin t|$ 展成傅里叶级数, 其中 E 为正常数 .



解: $u(t)$ 是周期为2π 的周期偶函数 , 因此

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\therefore\ u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kt$$

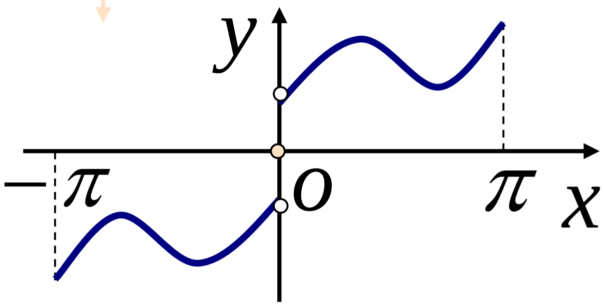
$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

四. 在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x),\ x\in[0,\pi]$

奇延拓

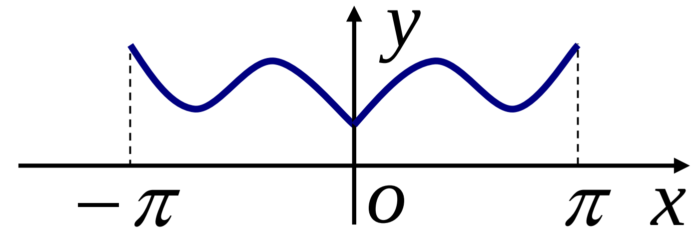


$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数

例8. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

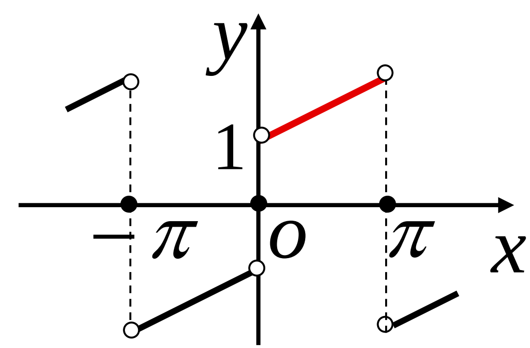
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

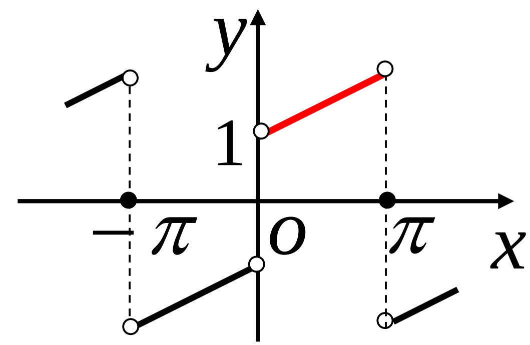
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



因此得

$$x+1=\frac{2}{\pi}\Big[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x$$

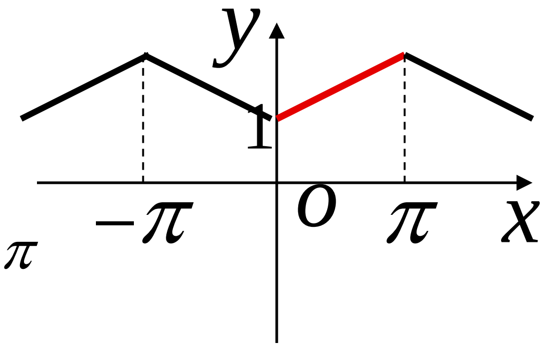
$$+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\Big]\quad(0<x<\pi)$$

注意: 在端点 $x=0,\pi$，级数的和为0，与给定函数

$f(x)=x+1$ 的值不同.

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi+2$$



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

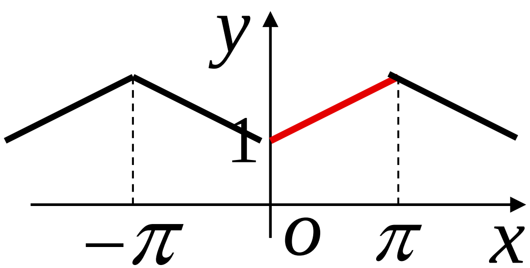
$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\[2ex] 0, & n=2k\end{cases}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le \pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

当函数定义在任意有限区间上时, 其傅里叶展开方法:

方法1 $f(x),\ x\in[a,b]$

$$\downarrow \text{令 } x=z+\frac{b+a}{2},\ \text{即 } z=x-\frac{b+a}{2}$$

$$F(z)=f(x)=f(z+\frac{b+a}{2}),\ z\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$$

$$\downarrow \text{周期延拓}$$

$F(z)$在$[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$上展成傅里叶级数

$$\downarrow \text{将 } z=x-\frac{b+a}{2} \text{ 代入展开式}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

方法2 $f(x)$， $x \in [a,b]$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = z + a\text{，即 } z = x - a$$

$$F(z) = f(x) = f(z+a),\quad z \in [0, b-a]$$

$$\Big\downarrow \text{奇或偶式周期延拓}$$

$F(z)$ 在 $[0, b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

$$\Big\downarrow \text{将 } z = x - a \text{ 代入展开式}$$

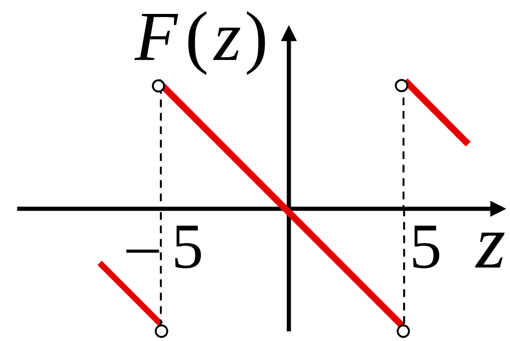
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

例9. 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展成傅里叶级数.

解: 令 $z=x-10$, 设

$$F(z)=f(x)=f(z+10)=-z \qquad (-5<z<5)$$

将*F*(z) 延拓成周期为 10 的周期函数,则它满足收敛定理条件. 由于*F*(z) 是奇函数, 故



$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5 -z\sin\frac{n\pi z}{5}\,\mathrm{d}z=(-1)^n\frac{10}{n\pi} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5} \quad (-5<z<5)$$

$$\therefore\ 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5} \qquad (5<x<15)$$

例题 1. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_3=$ $\underline{\ 2\pi/3\ }$.

提示: $b_3=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x$

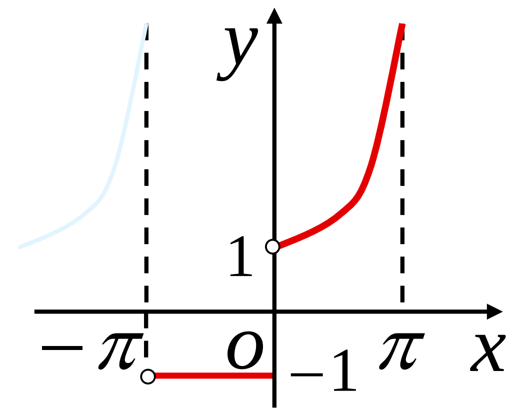
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$$

利用“偶倍奇零”

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{3}\cos 3x+\frac{\pi}{9}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

2. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\pi^2/2}$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

3. 设 $f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$, 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$ 的表达式 .

解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

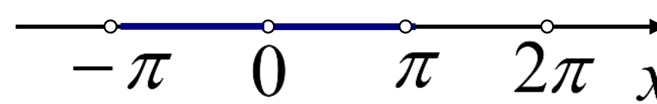
在 $(-\pi,\pi)$ 上, $S(x)=F(x)$; 在 $(\pi,2\pi)$ 上, 由周期性:

$$S(x)=S(x-2\pi)$$

$$=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2$$

$$=x^2-3\pi x+2\pi^2$$

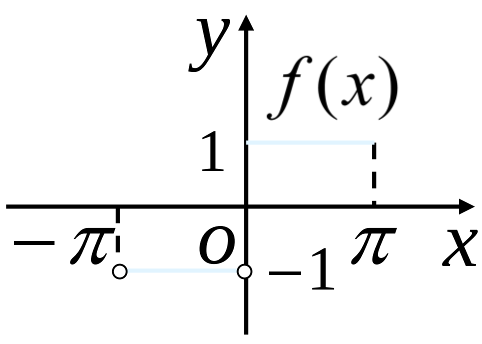
$x-2\pi\in(-\pi,0)$



定义域

4. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅氏级数的和函数 .

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其傅氏系数为 a_n，b_n，则 $f(x+h)$ (h为常数) 的傅氏系数

$a'_n =$ $\underline{a_n \cos nh + b_n \sin nh}$，$b'_n =$ $\underline{b_n \cos nh - a_n \sin nh}$.

提示: $$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,dx$$ $\boxed{令\ t = x+h}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}\,t$$

利用周期函数性质 $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$

$$= \cos nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \sin nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= \cos nh \cdot a_n + \sin nh \cdot b_n$$

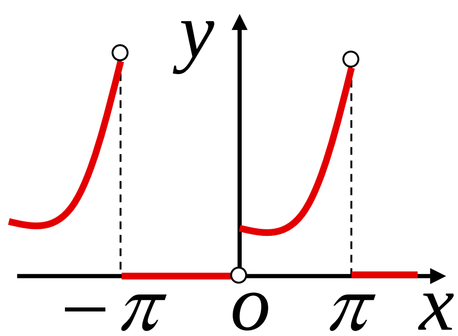
函数的付式级数展开法

系数公式及计算技巧; 收敛定理; 延拓方法

练习:

. 设 $f(x)$是周期为2π的函数, 它在 $[-\pi,\pi)$

上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ e^x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$



将其展为傅氏级数 .

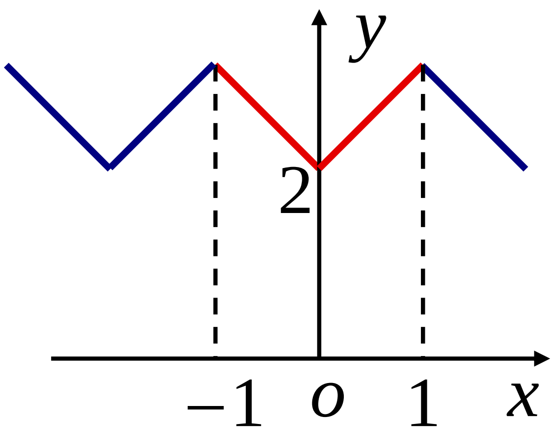
解答提示

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n-1}{1+n^2}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

例题 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解: $f(x)$为偶函数, $\therefore b_n=0$



$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

因 $f(x)$ 偶延拓后在$(-\infty,+\infty)$上连续, 故得

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[-1,1]$$

令 $x=0$, 得

$$2=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

内容小结

1. 周期为2*l* 的函数的傅里叶级数展开公式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

($x\neq$间断点)

$$\text{其中}\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

当*f* (*x*)为奇(偶) 函数时,为正弦(余弦) 级数.

$$\text{2. 在任意有限区间上函数的傅里叶展开法}\begin{cases}\text{变换}\\ \text{延拓}\end{cases}$$

思考与练习

1. 将函数展开为傅里叶级数时为什么最好先画出其图形?

答: 易看出奇偶性及间断点,从而便于计算系数和写出收敛域 .

2. 计算傅里叶系数时哪些系数要单独算 ?

答: 用系数公式计算 a_n, b_n时,如分母中出现因子$\boldsymbol{n-k}$ 则a_k 或 b_k 必须单独计算.

傅里叶 (1768 – 1830)

法国数学家. 他的著作《热的解析理论》(1822) 是数学史上一部经典性文献，书中系统的运用了三角级数和三角积分，他的学生将它们命名为傅里叶级数和傅里叶积分. 他深信数学是解决实际问题最卓越的工具. 以后以傅里叶著作为基础发展起来的傅里叶分析对近代数学以及物理和工程技术的发展都产生了深远的影响.

狄利克雷 (18 05 – 1859)

德国数学家. 对数论, 数学分析和数学物理有突出的贡献, 是解析数论的创始人之一, 他是最早提倡严格化方法的数学家. 1829年他得到了给定函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛的第一个充分条件;证明了改变绝对收敛级数中项的顺序不影响级数的和, 并举例说明条件收敛级数不具有这样的性质. 他的主要论文都收在《狄利克雷论文集 (1889—1897)中.