第四节、有理函数的积分

- 一、有理函数的积分
- 二、三角函数有理式的积分
- 三、简单无理函数的积分
- 四、小结、思考题
- 五、作业

一、有理函数的积分

1.有理函数的定义：

两个多项式的商表示的函数称之有理函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n < m$，这有理函数是真分式；

(2) $n \geq m$，这有理函数是假分式；

2.有理函数的分解：

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$

$\downarrow$ 分解

$\boxed{\text{若干部分分式之和}}$

例 $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \dfrac{1}{x^2+1}$.

难点 将有理函数化为部分分式之和.

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$

$$\boxed{\text{真分式}} \xrightarrow{\text{分解}} \boxed{\text{若干部分分式之和}}$$

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{A}{x-a}$;

（2）分母中若有因式$(x^2+px+q)^k$，其中

$p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i, N_i都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$, 分解后为$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$; (2) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$; (3) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

(2) 用赋值法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$\therefore 1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0, \Rightarrow A=1$ 取 $x=1, \Rightarrow B=1$

取 $x=2$, 并将 A,B 值代入(1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

(3) 用待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$\because \quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$

$\therefore \quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$$

故 原式$=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

3.有理函数的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$(p^2-4q<0, n\neq 1)$

变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

例2 求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

例3. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解：已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{ 原式} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln\left|1+2x\right| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

例4. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

说明: 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行, 但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例5. 求 $I=\int \frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解: $$I=\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int \frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}+\int \frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例6. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

例7. 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解: 原式 $\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧

按常规方法较繁

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C \quad x\neq 0)$$

二、三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$

万能代换

t 的有理函数的积分

$t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例8. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例9. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\quad (a\,b \neq 0)$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{a\,b}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时, 用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .

例10. 求$\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$.

解法 1

原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x + b)^2 \cos^2 x}$

令 $t = \tan x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(a t + b)^2} = -\frac{1}{a(a t + b)} + C$$

$$= -\frac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C$$

例10. 求$\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$.

解法 2　令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi) + C$$

$$\varphi = \arctan\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan\left(x - \arctan\frac{a}{b}\right) + C$$

例11. 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t = \sin x$,

$$\text{原式} = \int \frac{(\cos^2 x - 2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x} = -\int \frac{(\sin^2 x + 1)\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x}$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x} + C$$

三、简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令\ t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令\ t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, p□ m, n的最小公倍□ .

解决方法 作代换去掉根号.

例12. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2,\ \mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \quad =3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\mathrm{d}u$$

$$=3[\ \tfrac{1}{2}u^2-u+\ln\left|1+u\right|\ ]+C$$

$$=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例13. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2, 3 的最小公倍数 6，令 $x=t^6$，则有

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例14. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

四、小结、思考题

内容小结

1. 可积函数的特殊类型

万能代换

有理函数 ← 三角函数有理式

分解

根式代换

三角代换

多项式及部分分式之和

简单无理函数

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便，要注意综合使用基本积分法，简便计算 .

思考与练习

如何求下列积分更简便？

$$1.\ \int \frac{x^2}{a^6 - x^6}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0) \qquad\qquad 2.\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos x}$$

解: 1. 原式 $= \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \dfrac{1}{6a^3}\ln\left|\dfrac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3}\right| + C$

2. 原式 $= \displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x} + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} = \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x} + C$$

五、作业

习题4-5：1（单）