第六节、定积分的换元法与分部积分法

- 一、定积分的换元法
- 二、定积分的分部积分法
- 三、小结、思考题
- 四、作业

一、定积分的换元法

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

2) 在$[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在，且它们的原函数也存在 . 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数，因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

注

1) 当$\beta < \alpha$, 即区间换为$[\beta, \alpha]$时， 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意换元必换限 , 原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用 , 即

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$$

配元不换限

例1. 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ \ (a > 0).$

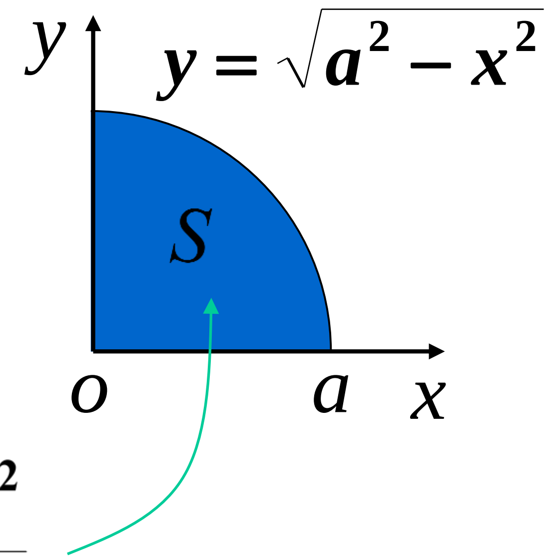
解: 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ 原式 $= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$



例2. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$.

$$\therefore \quad 原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_1^3=\frac{22}{3}$$

例3 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx.$

解 $\because f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

例4. 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

$\boxed{偶倍奇零}$

(1)若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

(2)若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

证: $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x} + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

令 $x=-t$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x)\text{时} \\ 0, & f(-x)=-f(x)\text{时} \end{cases}$$

例5 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式 $=\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx+\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx$

偶函数　　　　奇函数

$$=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-\boxed{4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}$$

单位圆的面积

$$=4-\pi.$$

例 6　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证(1)设　$x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

（2）设 $x=\pi-t \Rightarrow dx=-dt,$

$$x=0 \Rightarrow t=\pi, \qquad x=\pi \Rightarrow t=0,$$

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = -\int_\pi^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt$$

$$=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt,$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin t)dt-\int_0^\pi tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin x)dx-\int_0^\pi xf(\sin x)dx,$$

$$\therefore \int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

例 6　若 $f(x)$在[0,1]上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

由此计算$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解　$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

二、定积分的分部积分法

定理2. 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

证: $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\Big\downarrow \boxed{\text{两端在 } [a,b] \text{ 上积分}}$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

例7.计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$.

解: 令 $u = \arcsin x$, $dv = dx$, 则 $v = x$, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$\text{原式} = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

解 $\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x,$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2} d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left[\ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

例9 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx.$

解 $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}$$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}}dx \longrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \left[\ln(1+x) - \ln(2+x)\right]_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

例10 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx.$

解 因为$\frac{\sin t}{t}$没有初等形式的原函数，

无法直接求出 $f(x)$，所以采用分部积分法

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$\because\ f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt,\qquad f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0,$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例11. 证明 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

证: 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

令 $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, 则 $u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$,

$v = -\cos x$

$$\therefore \quad I_n = \underbrace{\left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\boxed{I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x}$$

由此得递推公式 $\boxed{I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}}$

于是 $I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1$$

而 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$

故所证结论成立 .

例12. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $f(0)=1, f(2)=3,$

$f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x f''(2x)\,dx$.

解: $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\,dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,d f'(2x)$ (分部积分)

$$= \frac{1}{2}\left[x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,dx \right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

三、小结、思考题

内容小结

基本积分法
- 换元积分法
- 分部积分法

换元必换限
配元不换限
边积边代限

思考与练习

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t =$ $\underline{\ \sin^{100} x\ }$

提示: 令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_x^0 \sin^{100} u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$,求 $f(e)$.

解法1 $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(e)=\frac{1}{3}$

解法2 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\frac{1}{3u}$

$\therefore\quad f(e)=\int_1^e f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)=\frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$

3.设 $f(t) \in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t = \ln x$ 求 $f(e)$.

提示: 两边求导, 得

$$f'(x) = \frac{1}{3x^3}$$

$$f(e) = \int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x$$

四、作业

习题4-6： 2，3（单），4（单）
5，6，10，11