第五节 曲线的凹凸性与拐点

- 一、曲线的凹凸性与拐点
- 二、内容小结
- 三、作业

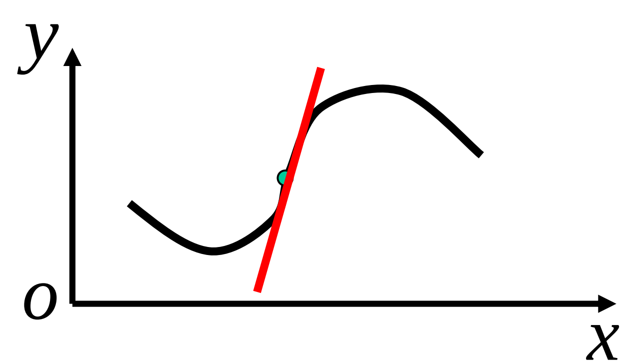
一、曲线的凹凸性与拐点

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$\forall x_1, x_2 \in I$

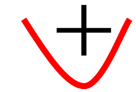
(1) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 的图形是**凹的**;

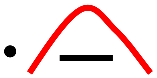
(2) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 的图形是**凸的**.

连续曲线上有切线的凹凸分界点称为**拐点**.



定理. (凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在区间I 上有二阶导数

(1) 在 I 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的； 

(2) 在 I 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的 . 

证: $\forall x_1, x_2 \in I$, 利用一阶泰勒公式可得

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \boxed{\cancel{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}}$$

$$+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \boxed{\cancel{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}}$$

$$+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$$ 两式相加，得

$$f(x_1)+f(x_2)$$

$$=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$$

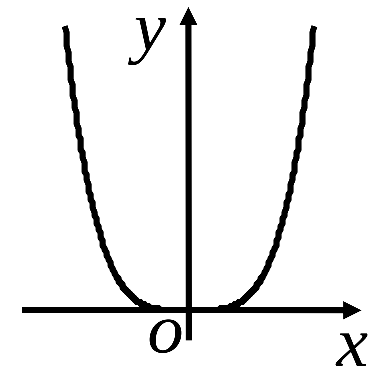
$f''(x)>0$ 时，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

故 (1) 成立；

$f''(x)<0$ 时，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

故 (2) 成立。

例1. 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.



解: $y' = 4x^3,\ y'' = 12x^2$

当 $x \neq 0$ 时，$y'' > 0$； $x = 0$ 时，$y'' = 0$，

故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凹的.

说明:

1)若在某点二阶导数为 0，在其两侧二阶导数不变号，则曲线的凹凸性不变.

2)根据拐点的定义及上述定理，可得拐点的判别法如下:

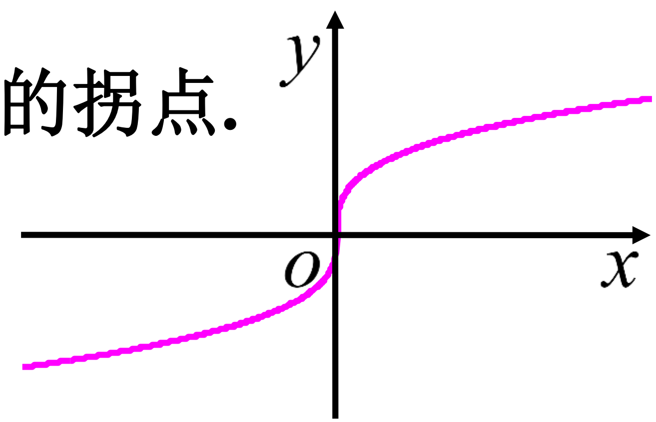
> 若曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续，$f''(x_0) = 0$ 或不存在，但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

例2. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

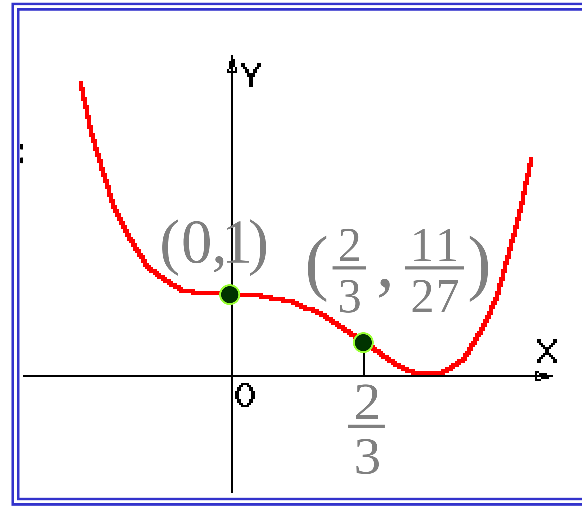
解: $y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	凹	0	凸

因此点 $(0,0)$ 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.



例3. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.



解: 1) 求 y''

$y'=12x^3-12x^2,\ y''=36x^2-24x$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$, 对应

3) 列表判别

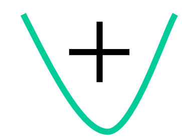
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹

故该曲线在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上是凹的, 在 $(0,\frac{2}{3})$ 上是凸的, 点 $(0,1)$ 及 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 均为拐点.

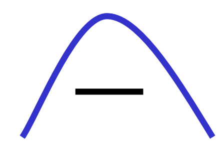
二、内容小结

1.曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凹



$f''(x) < 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凸



拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点

思考与练习

1. 设在[0,1]上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (　　)

(A)　$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B)　$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C)　$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D)　$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 ____________；

凸区间是 ____________；拐点为 ____________.

3.求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

4. 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

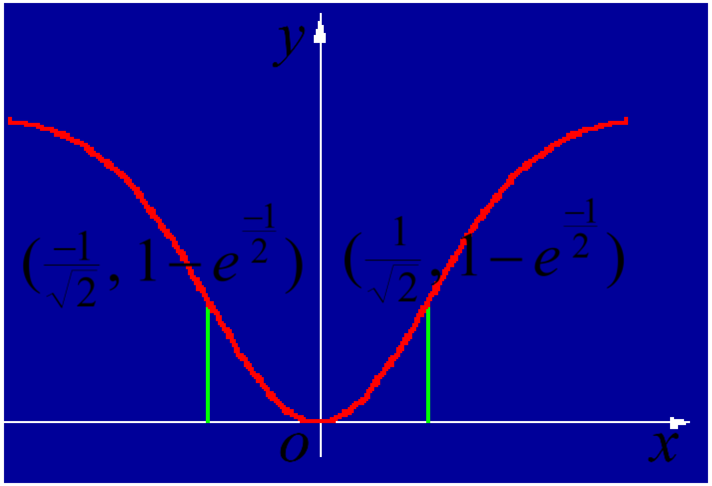
思考与练习答案

1.B 提示: 利用 $f'(x)$ 单调增加，及

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\ \ (0<\xi<1)$$

2. $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ 及 $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-e^{-\frac{1}{2}})$

提示: $y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$



3. 证明:

$$y' = \frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(-2-2x)(x^2+1)^2-(1-2x-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=1,\quad x_2=-2-\sqrt{3},\quad x_3=-2+\sqrt{3}$$

从而三个拐点为

$$(1,1),\quad \left(-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right),\quad \left(-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right)$$

因为

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}-1}{-2-\sqrt{3}-1}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}-1}{-2+\sqrt{3}-1}$$

所以三个拐点共线.

4. 证明: 令 $F(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$ ，则

$$F(0)=0, \qquad F(\frac{\pi}{2})=0$$

$$\because \quad F'(x)=\ \cos x-\frac{2}{\pi}$$

$$F''(x)=-\sin x\ <0$$

$\therefore$ $F(x)$是凸函数

$$\therefore \quad F(x)\geq\ \min\{F(0),F(\frac{\pi}{2})\}\ =0\quad (\text{自证})$$

即 $\quad \sin x>\dfrac{2}{\pi}x \quad (0<x<\dfrac{\pi}{2})$

三、作业

习题3-5：

2（单），3，5，6，7（1），9