

2.2 析取范式与合取范式

析取范式与合取范式

定义2.2 命题变量及其否定统称作**文字**。

仅由有限个文字构成的析取式称作**简单析取式**。

仅由有限个文字构成的合取式称作**简单合取式**。

例，

文字： $p, \neg p, r, \neg q, \dots$

简单析取式： $p, \neg q, \neg p \vee q, p \vee \neg q \vee r, \dots$

简单合取式： $\neg p, q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$

析取范式与合取范式

定理2.1:

- (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变量及它的否定式。
- (2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变量及它的否定式。

说明: 简单析取式不可能是矛盾式;
简单合取式不可能是重言式。

析取范式与合取范式

定义2.3

- 1) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式。
- 2) 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式。
- 3) 析取范式与合取范式统称为范式。

例，

析取范式： $\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$

合取范式： $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

公式 $p \wedge q \wedge r$ 与 $p \vee \neg q \vee r$ 既是析取范式
又是合取范式

析取范式与合取范式

定理2.2:

1. 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
2. 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

范式特征:

1. 无联结词 \rightarrow 与 \leftrightarrow ;
2. \neg 的作用域为单个命题变量。
如, 无 $\neg\neg A$, $\neg(A\vee B)$ 等形式。

析取范式与合取范式

定理2.3(范式存在定理)任一命题公式都存在与其等值的析取范式与合取范式。

求范式的步骤：

1. 消去联结词 \rightarrow 和 \leftrightarrow ，转换成 \neg 、 \wedge 和 \vee ；
2. 利用**德·摩根律**将否定词“ \neg ”直接移到各命题变量之前；
3. 利用**分配律**将公式规约为合取范式或析取范式。



析取范式与合取范式

例. 求命题公式 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的析取范式与合取范式。

1. 求析取范式

2. 求合取范式

规范: 简单析取式与简单合取式中命题变量按字典顺序或下标顺序排列(交换律)。

命题公式的析取范式与合取范式是**不惟一**的。



析取范式与合取范式

定义2.4 在含有 n 个命题变量的简单合取式(简单析取式)中, 若每个命题变量和它的否定式不同时出现, 但二者之一必须出现且仅出现一次, n 个命题变量按下标或按字典顺序排列, 称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项)。

例, 含 p, q, r 和 s 四个命题变量的

极小项: $p \wedge q \wedge r \wedge s, p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s, \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$ 等

极大项: $p \vee q \vee \neg r \vee s, \neg p \vee \neg q \vee r \vee s, p \vee \neg q \vee r \vee \neg s$ 等

析取范式与合取范式

一般说来,

1. 含 n 个命题变量的极小项（极大项），共有 2^n 个；
2. 每个极小项都有且仅有一个成真赋值 i ，将极小项记作 m_i ；
3. 每个极大项都有且仅有一个成假赋值 j ，将极大项记作 M_j 。

析取范式与合取范式

例 p, q, r 形成的极小项和极大项:

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7



析取范式与合取范式

极小项和极大项之间的关系：

定理2.2 设 m_i 与 M_i 是命题变量 p_1, p_2, \dots, p_n 形成的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$



析取范式与合取范式

定义2.5 设由n个变量构成的析取范式中，所有的简单合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式。

例，由4个变量p,q,r和s构成的主析取范式

$$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

析取范式与合取范式

定义2.5 设由n个变量构成的合取范式中，所有的简单析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式。

例，由4个变量p,q,r和s构成的主合取范式

$$(p \vee q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee \neg s)$$

问题： $p \wedge q \wedge r \wedge s$ 是主析取范式？是主合取范式？

求主析取范式(主合取范式)的方法

1. 等值演算法
2. 真值表法

等值演算法

1. 化归为析取范式(合取范式);
2. 除去永假的简单合取式(永真的简单析取式);
3. 在简单合取式(简单析取式)中补入没有出现的命题变量, 即添加
“ $\wedge(p \vee \neg p)$ ”(“ $\vee(p \wedge \neg p)$ ”), 再用分配律展开。
如 $p \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$
例. 求 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

真值表法

1. 构造命题公式的真值表;
2. 找出公式的成真赋值(成假赋值)对应的极小项(极大项);
3. 这些极小项(极大项)的析取(合取)就是此公式的主析取范式(主合取范式)。

例. 求 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。



真值表法

$(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的真值表:

p	q	r	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

析取范式与合取范式

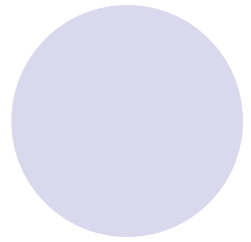
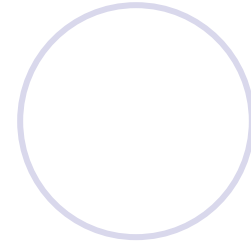
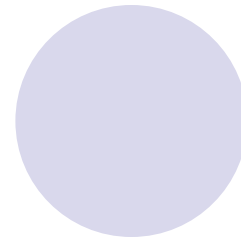


说明：真值表与主范式是两种等价形式。

定理2.3 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是惟一的。

作业

P 38



8(2)

9(2)

10(2)

11(2)