第二节、洛必达法则

- 一、$\dfrac{0}{0}$ 型未定式
- 二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式
- 三、其他未定式
- 四、小结、思考题
- 五、作业

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)

转化 $\big\downarrow$ **洛必达法则**

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$


洛必达，G.-F.-A. de

一、$\dfrac{0}{0}$ 型未定式

定理 1.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}}$$ (洛必达法则)

证: 不妨设 $f(a)=F(a)=0$, 在指出的邻域内任取 $x\neq a$, 则 $f(x), F(x)$在以 x,a为端点的区间上满足柯西定理条件, 故

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x,a \text{ 之间})$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \overset{3)}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} \xlongequal{L'Hospital} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

推论1. 定理 1 中 $x \to a$ 换为

$$x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

推论 2. 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理1条件, 则

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{F''(x)}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

$$\underline{\underline{L'Hospital}}\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

注: 不是未定式不能用洛必达法则 !如

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解: 原式 $\underline{\underline{L'Hospital}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$\underline{\underline{L'Hospital}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=1$

思考: 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n为正整数) ?

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}}$$ (洛必达法则)

证: 仅就极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 存在的情形加以证明.

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}\neq 0$ 的情形

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-1}{F^2(x)}F'(x)}{\frac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\frac{F'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore 1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

从而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=0$ 的情形. 取常数 $k\neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}+k\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}=k\neq 0,$$ 可用 1) 中结论

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+kF'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}+k\right]$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \infty$ 时, 结论仍然成立. (证明略)

说明: 定理中 $x \to a$ 换为

$x \to a^{+}$, $x \to a^{-}$, $x \to \infty$,

$x \to +\infty$, $x \to -\infty$

之一, 条件 2) 作相应的修改, 定理仍然成立.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$.　　（$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n>0,\lambda>0)$.　（$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）

解: (1) n 为正整数的情形.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

(2) n 不为正整数的情形.

存在正整数 k, 使当 $x > 1$ 时,

$$x^k < x^n < x^{k+1}$$

从而 $\dfrac{x^k}{e^{\lambda x}} < \dfrac{x^n}{e^{\lambda x}} < \dfrac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$ （用夹逼准则）

由(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^{\lambda x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}} = 0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}} = 0$$

说明: 1) 例3 , 例4 表明 $x \to +\infty$ 时,

$$\ln x,\quad x^n\ (n>0),\quad e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快.

2) 在满足定理条件的某些情况下

洛必达法则不能解决计算问题. 例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

3) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例如, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin x}{x} \neq \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \cos x}{1}$

极限不存在

$$\| $$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

三、其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ 型

解决方法:

$$\infty-\infty \xrightarrow{\text{通分}} \left\{\begin{matrix}\dfrac{0}{0}\\[2ex] \dfrac{\infty}{\infty}\end{matrix}\right\} \xleftarrow{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix}0^0\\ 1^\infty\\ \infty^0\end{matrix}\right.$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln x\ \ (n>0)$. （ $0\cdot\infty$ 型）

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$. （ $\infty-\infty$ 型）

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$. $(0^0$ 型$)$

解: $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}\overset{\text{利用例5}}{=\!=}e^0=1$

例8. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.　　　($\frac{0}{0}$ 型)

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$.　　($\infty\cdot 0$ 型)

法一： 用洛必达法则

分析： 为用洛必达法则，必须改求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

但对本题用此法计算很繁!

法二： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$　　$\sqrt[n]{n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}\to 1$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}$$

$\boxed{e^u-1\sim u}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$$

四、内容小结

洛必达法则（L’Hospital）

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y = f^g$

取对数

$0 \times \infty$ 型

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

五、作业

习题3-2：

1(单)，3，4，6 (单)，7

思考题

设 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是未定式极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在？举例说明.

练 习 题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} =$ ______

2. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right) =$ ______

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

练习题答案

$$\ln(1+x) \sim x$$

1.解:原式 $= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(3+0) = \frac{3}{2}$

2.解:原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$$\sin x \sim x$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

3.解: 令 $t=\frac{1}{x}$,则

原式 $=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}$$