极限的四则运算法则

定理1. 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x)\pm \lim g(x) = A\pm B$$

证: 因 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$f(x)=A+\alpha\ ,\ g(x)=B+\beta$$

(其中 α,β 为无穷小)

于是 $f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$

由定理1可知 $\alpha\pm\beta$ 也是无穷小, 再利用极限与无穷小的关系定理, 知定理结论成立.

说明: 定理可推广到有限个函数相加、减的情形.

定理2 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$\lim\big(f(x)g(x)\big)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB.$$

提示: 利用极限与无穷小关系定理及本节定理证明.

说明: 定理2可推广到有限个函数相乘的情形 .

推论1 . $\lim[C\,f(x)]=C\lim f(x)$ (C 为常数).

推论2 $\lim\big(f(x)\big)^n=\big(\lim f(x)\big)^n$ (n 为正整数).

例. 设 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 试证

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0).$$

证 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=a_0+a_1\lim\limits_{x\to x_0}x+\cdots+a_n\lim\limits_{x\to x_0}x^n=P_n(x_0)$

定理3 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，且 $B\neq 0$，则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

证 因 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，有

$f(x)=A+\alpha$，$g(x)=B+\beta$，其中 α,β 为无穷小

设 $$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\underbrace{\frac{1}{B(B+\beta)}}_{\text{有界}}\underbrace{(B\alpha-A\beta)}_{\text{无穷小}}$$

因此 γ 为无穷小，$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\gamma$$

由极限与无穷小关系定理，得 $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

例. 设有分式函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x), Q(x)$ 都是多项式, 若 $Q(x_0)\neq 0$，试证: $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=R(x_0)$.

证:
$$\lim_{x\to x_0} R(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=R(x_0)$$

说明: 若 $Q(x_0)=0$，不能直接用商的运算法则.

例.
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

例. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

解: $x=1$ 时 分母 $=0$, 分子$\neq0$, 但因

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{2x-1}=\frac{1^2-3\cdot1+2}{2\cdot1-1}=0.\quad \lim_{x\to1}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=\infty$$

例 . 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}$.

解: $x\to\infty$ 时, 分母 $\to\infty$, 分子 $\to\infty$.

分子分母同除以 x^2, 则

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3\dfrac{1}{x}+9\dfrac{1}{x^2}}{5+2\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}.$$

一般有如下结果：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}\quad (a_0b_0\neq 0, m, n\text{为非负常数})$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}\, n=m\\ 0\ , & \text{当}\, n>m\\ \infty\ , & \text{当}\, n<m\end{cases}$$

复合函数的极限运算法则

定理. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$，且$x$满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$\phi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f\big(\phi(x)\big)=\lim_{u\to a}f(u)=A \qquad ①$$

证：$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $0<|u-a|<\eta$ 时，有 $|f(u)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|\phi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\phi(x)-a|=|u-a|<\eta$$

故 $|f[\varphi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$，因此①式成立.

定理. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$，且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$\phi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

说明：若定理中 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=\infty$，则类似可得

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)]=\lim_{u\to\infty}f(u)=A$$

例. 求 $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$.

解: 令 $u=\frac{x-3}{x^2-9}$ 已知 $\lim_{x\to 3}u=\frac{1}{6}$

$\therefore$ 原式 = $\lim_{u\to\frac{1}{6}}\sqrt{u}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

例．求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

解：方法 1

$$\text{原式} \xlongequal{u=\sqrt{x}} \lim_{u\to 1}\frac{u^2-1}{u-1}=\lim_{u\to 1}(u+1)=2$$

方法 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2.$$

思考题

1. 若 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 问

$\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答: 不存在. 否则由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$

利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在，与已知条件矛盾.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]=?$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}.$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解法 1

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

解法 2　　令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $t\to 0^+$

$$原式 = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}-\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} = \frac{1}{2}.$$

4. 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0$.

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0.$$

故 $\qquad -1-a=0$

因此 $\qquad a=-1$

例题 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$，

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，求 $f(x)$.

解: 利用前一极限式可令

$$f(x)=2x^3+2x^2+a\,x+b$$

再利用后一极限式，得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a+\frac{b}{x}\right)$$

可见 $a=3\,,b=0$

故 $f(x)=2x^3+2x^2+3x.$

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3}{x-3}=$ ____________.

2、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ ____________.

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})=$ ____________.

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$ ____________.

5、 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$ ____________.

6、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=$ ____________.

7、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4-2x^2+x}{3x^2+2x}=$ ____________.

8、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$ ____________.

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dots+\dfrac{1}{2^n})$

2、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

3、 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

4、 $$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

5、 $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

6、 $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x-1}{4^x+1}$$

7、 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-x^n}{x^m+x^n-2}$$

练习题答案

一、1、-5；　　2、3；　　3、2；　　4、$\frac{1}{5}$；

5、0；　　6、0；　　7、$\frac{1}{2}$；　　8、$\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

二、1、2；　　2、$2x$；　　3、-1；　　4、-2；

5、$\frac{1}{2}$；　　6、0；　　7、$\frac{m-n}{m+n}$.