第二节、数列的极限

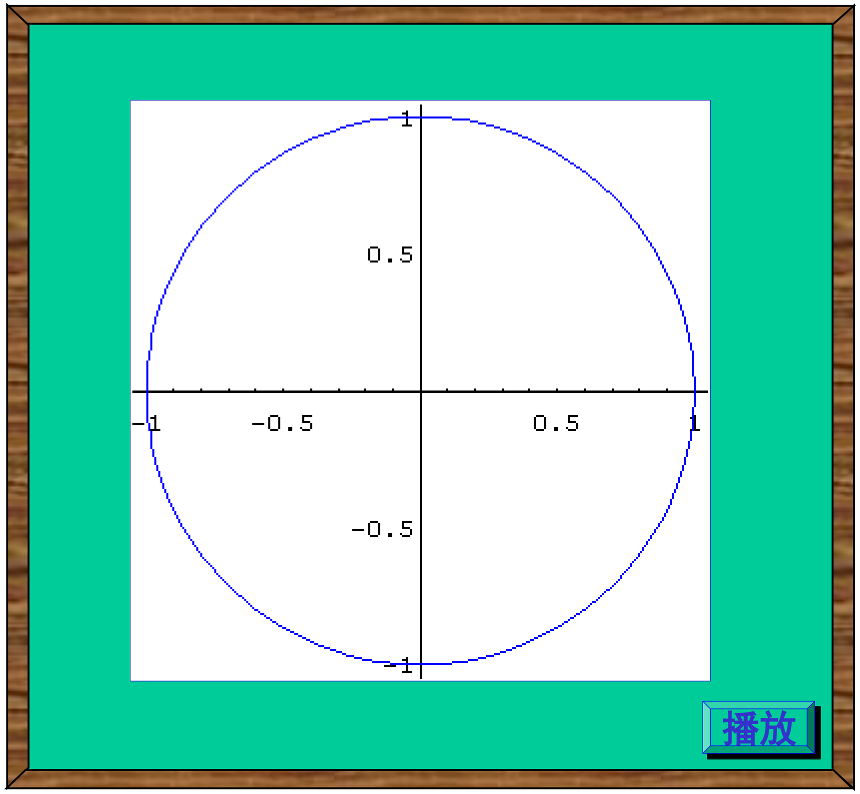
- 一、数列极限的定义
- 二、收敛数列的性质
- 三、小结
- 四、作业

一、数列极限的定义

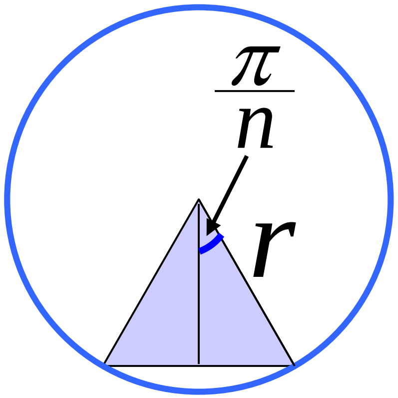
1、割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽



引例. 设有半径为 r 的圆， 用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S . 如图所示 , 可知



$$A_n = n r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$(n = 3, 4, 5, \cdots)$$

当 n 无限增大时, A_n 无限逼近 S (刘徽割圆术）.

数学语言描述: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| A_n - S \right| < \varepsilon.$$

定义 若按照某一法则，对每个 $n \in N^+$，都**对应一个确定的实数** x_n，这些实数 x_n 按下标n从小到大排列得到的一个序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

称为**数列**，简记为数列 $\{x_n\}$． x_n 称为**通项(一般项)**．

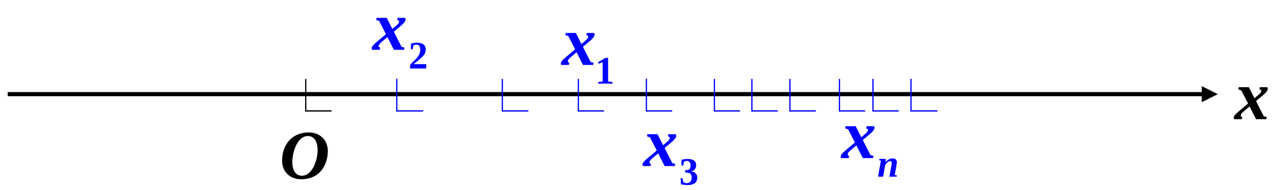
例如 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ $\qquad x_n = \frac{n}{n+1}$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$ $\qquad x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$

$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$ $\qquad x_n = 2^n$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ $\qquad x_n = (-1)^{n+1}$

在几何上，数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 如图



数列也可定义为：自变量取正整数的函数

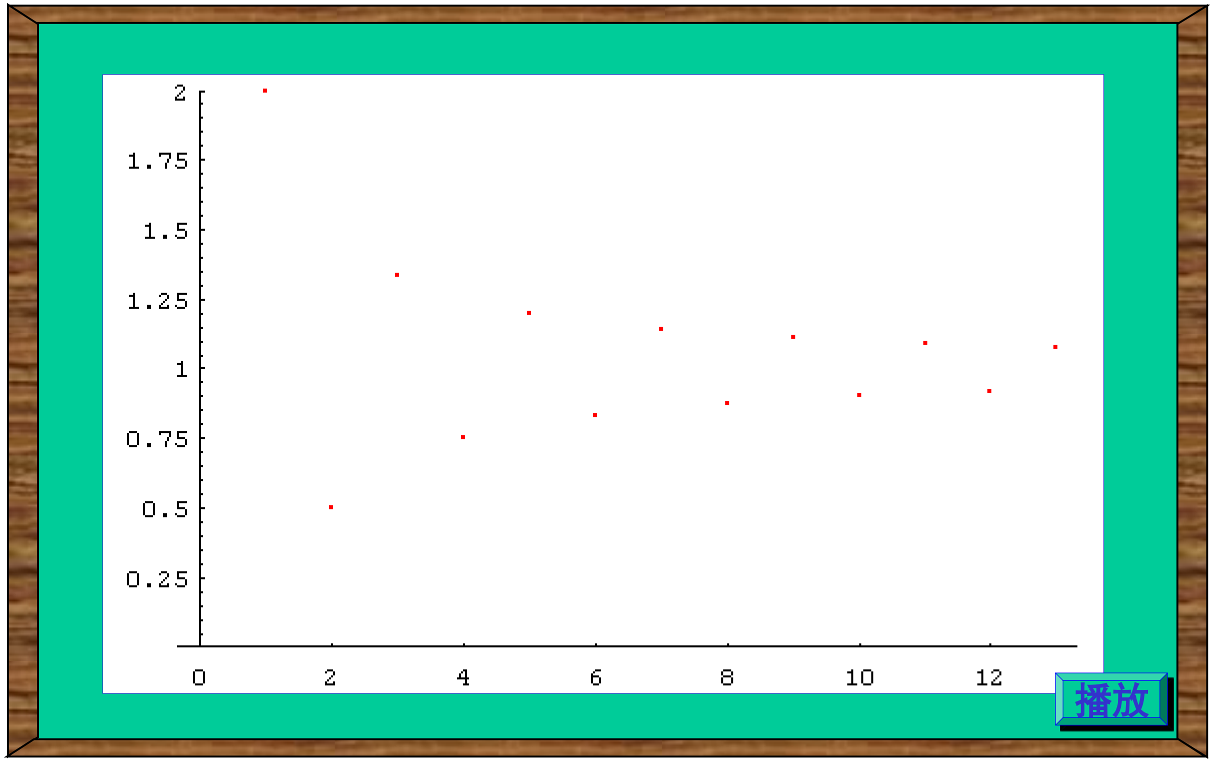
$$x_n = f(n), \quad n \in N^+.$$

称为数列。

1）当n无限增大(即$n \to \infty$)时，对应的x_n能否无限接近某确定的数值？

2）如果能够的话，这个数值等于多少？

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



对于数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

当 $n \to \infty$ 时， $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于1.

因 $|x_n - 1| = \left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$

由此可知：当n越大时，$\frac{1}{n}$ 越小， x_n 越接近于1.

比如： 要使 $|x_n - 1| < \frac{1}{10}$， 只要 $n > 10$;

要使 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$， 只要 $n > 10000$;

一般地，要使 $|x_n - 1| < \varepsilon,$ 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$;

即对$\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists N \in N^+$， 使得当$n > N$ 时， 都有

$|x_n - 1| < \varepsilon,$ x_n 越接近于1的本质.

定义 设$\{x_n\}$为一数列，若存在常数a，对任意 $\varepsilon > 0$ (无论多么小)，总存在正整数N，使得当 $n>N$时，都有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称a为数列$\{x_n\}$的极限， 或称$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad 或 \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

若这样的常数a不存在，则称数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$发散. 习惯说$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

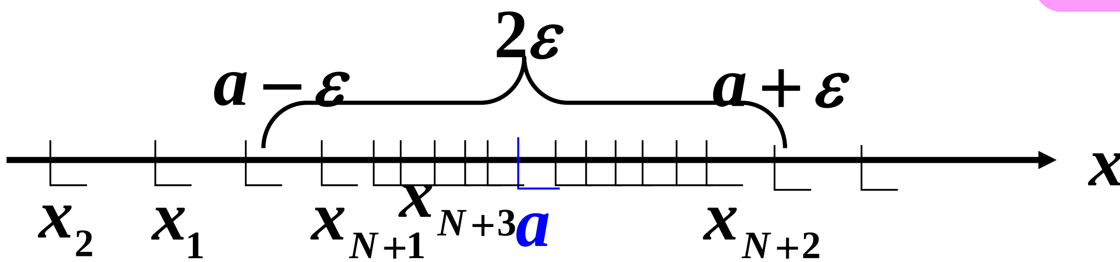
注：1) ε 的任意性.

2) N的相应性. $N = N(\varepsilon)$，但不唯一.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall U(a,\varepsilon), \exists N \in N^+$，当$n>N$时，总有 $x_n \in U(a,\varepsilon)$.

$\forall U(a,\varepsilon), \exists N \in N^{+},$ 总有 $x_n \in U(a,\varepsilon)$.

4） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的几何意义：



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall U(a,\varepsilon)$内都含有$\{x_n\}$的除有限项外的所有项.

5）用极限定义证明问题步骤：

① 化简 $|x_n - a| \le F(n)$; ② 逆推分析求N, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 要使$F(n) < \varepsilon$, 只要$n > g(\varepsilon)$;

③ 按定义作结论.

例1. 已知 $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为1.

证 $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$,

$\forall \varepsilon > 0$, 欲使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 即 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

于是, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1.$$

例2. 已知 $x_n=\dfrac{(-1)^n\cos n}{(n+1)^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

放大法

证: $|x_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^n\cos n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{|\cos n|}{(n+1)^2}\le\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时,就有 $|x_n-0|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\cos n}{(n+1)^2}=0$.

说明: N 与 ε有关, 但不唯一.

不一定取最小的 N.

也可由 $|x_n-0|\le\dfrac{1}{(n+1)^2}$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1\right]$

例3. 设 $|q|<1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限为 0.

证: $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$，欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$，只要 $|q|^{n-1} < \varepsilon$，即 $(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$，亦即 $n > 1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

因此，$\forall \varepsilon \in (0,1)$，$N = \left[1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \right]$，则当 $n > N$时，

就有 $|q^{n-1} - 0| < \varepsilon$

故

$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$$

例4 设$a>1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

证明： 令 $a^{\frac{1}{n}}-1=\alpha$，则 $\alpha>0$，

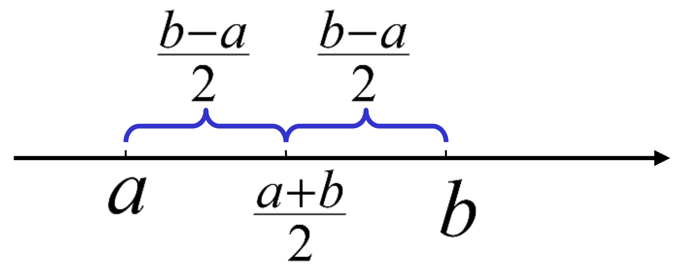
$$a=(1+\alpha)^n\ge 1+n\alpha=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1),$$

$$\therefore\quad a^{\frac{1}{n}}-1\le\frac{a-1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有 $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

二、收敛数列的性质



定理1. 收敛数列的极限唯一.

证: (用反证法) 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在$N_1$, 使当$n > N_1$时,

$$\left| x_n - a \right| < \varepsilon, \quad 从而\ x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

同理, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 故存在 N_2, 使当$n > N_2$时,有

$$\left| x_n - b \right| < \varepsilon, \quad 从而\ x_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

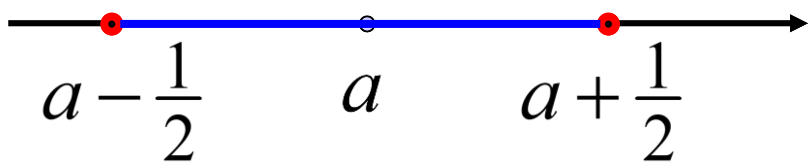
取 $N = \max\{ N_1 , N_2 \}$, 则当$n > N$ 时, $\dfrac{a+b}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$

矛盾. 因此收敛数列的极限必唯一.

例4. 证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$是发散的.

证 （用反证法）假设数列$\{x_n\}$收敛， 则有唯一极限a存在. 取$\varepsilon=\frac{1}{2}$， 则存在N，使当$n>N$时, 有

$$a-\frac{1}{2}<x_n<a+\frac{1}{2}$$



但因x_n交替取值 1 与－1， 而此二数不可能同时落在长度为1的开区间$(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$内，因此该数列发散.

对数列$\{x_n\}$，若$\exists M>0$，使得$\forall n\in N^+$，都有$|x_n|\le M$，则称$\{x_n\}$是有界的； 若这样的M不存在，则称$\{x_n\}$是无界的.

定理2 （收敛数列一定有界） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 一定有界.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对 $\varepsilon = 1$，$\exists N \in N^+$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n - a| < 1, \Rightarrow |x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| \le 1 + |a|$$

取 $M = \max\{\ |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|\ \}$，对 $\forall n \in N^+$，都有 $|x_n| \le M$. 由此证明收敛数列必有界.

说明: 此性质反过来不一定成立.

例如，数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 虽有界但不收敛 .

定理3（收敛数列的保号性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且$a>0$ (或$a<0$),则存在正整数N, 当 $n>N$ 时,都有$x_n>0$ (或$x_n<0$).

证明 不妨设$a>0$, 对 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$ $\exists N>0$, 当$n>N$时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$, 即 $0<\dfrac{a}{2}=a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

推论 (不等式性) 若数列从某项起$x_n\geq 0$ (≤ 0), 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a\geq 0\,(\leq 0)$.(用反证法证明)

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序, 这样得到的数列称为$\{x_n\}$的子数列 (或子列). $\{x_n\}$的子列记为$\{x_{n_k}\}$.

定理4.(收敛数列与子数列关系) 若数列$\{x_n\}$收敛于a, 则它的任一子列也收敛，且极限也是a.

证 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\underline{\forall \varepsilon > 0,}$ $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

现取$\underline{\text{正整数 } K = N,}$ 于是当 $\underline{k > K}$ 时,有

$n_k > n_K = n_N \geq N$ 从而有 $\underline{\left| x_{n_k} - a \right| < \varepsilon,}$

由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

说明:

由此性质可知，若数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列一定发散.

例如 $x_n = (-1)^{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$ 发散！

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1; \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$$

三. 数列极限存在的判别准则

夹逼准则

准则I 若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$ (1)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

则数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

证 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_1 > 0, \ N_2 > 0,$ 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$ (2)

当 $n > N_2$ 时恒有 $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$ (3)

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, (1)、(2)、(3)同时成立.

当 $n > N$ 时, 恒有 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

例　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots\right.$

准则I　若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

$$(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n=1,2,3\cdots)$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

则数列 x_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

解

$$\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{\quad}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{\quad}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$又 \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$ 由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

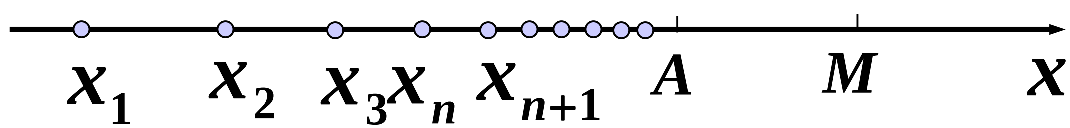
单调有界定理

如果数列 x_n 满足条件

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots, & \text{单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots, & \text{单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则II 单调有界数列必有极限.

几何解释:



例 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1} > x_n$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, $x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的； $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. $\because x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$,

$x_{n+1}^2 = 3 + x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$, $A^2 = 3 + A$,

解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去) $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$

设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

类似地，$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

$\because x_{n+1}>x_n$, $\quad\therefore\{x_n\}$是单调递增的；

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

$\therefore\{x_n\}$是有界的；$\therefore\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记为 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$(e=2.71828\cdots)$

四、小结

数列: 研究其变化规律;

数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;

收敛数列的性质:

有界性、唯一性、子数列的收敛性.

数列极限存在准则:

夹逼准则. 单调有界准则

练 习 题

一、利用数列极限的定义证明：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$；

2、$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n}=1$

二、设数列 x_n 有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$.