第一章、函数与极限

分析基础

- 函数 — 研究对象
- 极限 — 研究方法
- 连续 — 研究桥梁

第一节、变量与函数

- 一、集合
- 二、函数
- 三、函数的几种特性
- 四、反函数
- 五、复合函数 初等函数

一、集合

1. 定义及表示法

定义 1. 具有某种特定性质的事物的总体称为集合.

组成集合的事物称为元素.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

元素 a 属于集合 M，记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M，记作 $a \overline{\in} M$（或 $a \notin M$）.

注：M 为数集 $\begin{cases} M^* & \text{表示 } M \text{ 中排除 0 的集；} \\ M^+ & \text{表示 } M \text{ 中排除 0 与负数的集.} \end{cases}$

表示法：

（1） 列举法：按某种方式列出集合中的全体元素 .

例： 有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{a_i\}_{i=1}^{n}$

自然数集 $N=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}=\{n\}$

（2） 描述法： $M=\{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$

例： 整数集合 $Z=\{x \mid x\in N \text{ 或 } -x\in N^{+}\}$

有理数集 $Q=\left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p\in Z, q\in N^{+}, \; p\text{与}q\text{互质}\right\}$

实数集合 $R=\{x \mid x\text{为有理数或无理数}\}$

2. 区间

有限区间

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$

半开区间 $[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$

$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$

无限区间

$[a,+\infty)=\{x \mid a\le x\}$

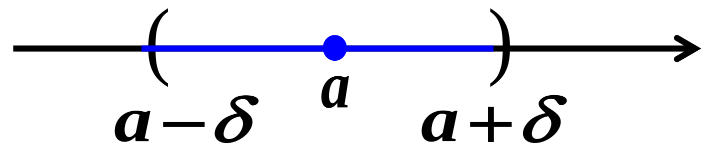
$(-\infty,b]=\{x \mid x\le b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in R\}$

3. 邻域

点a的δ邻域 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$

$$=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$



点a的去心δ邻域 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$

其中, a 称为邻域中心，δ 称为邻域半径 .

左δ 邻域: $(a-\delta,a)$,　右δ 邻域: $(a,a+\delta)$.

4. 集合之间的关系及运算

定义2 ． 设有集合 A, B, 若 $x \in A$ 必有 $x \in B$, 则称A 是 B 的子集, 或称 B 包含 A, 记作 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称A与B相等, 记作 $A = B$.

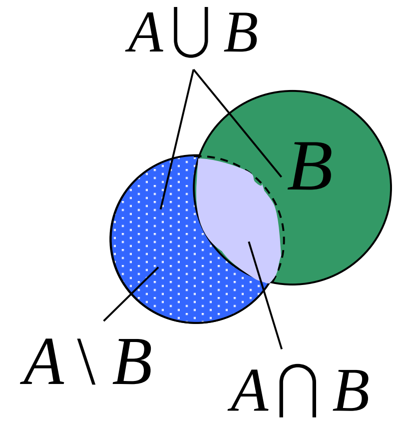
例如 ，$N \subset Z$ ， $Z \subset Q$ ， $Q \subset R$

显然有下列关系 ：

(1) $A \subset A$; $A = A$; $\varnothing \subset A$

(2) $A \subset B$ 且 $B \subset C$ $\Longrightarrow$ $A \subset C$

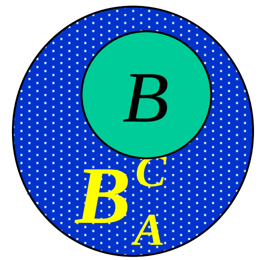
定义 3. 给定两个集合 A, B, 定义下列运算:



并集 $A\bigcup B=\{\,x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\,\}$

交集 $A\bigcap B=\{\,x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\,\}$

差集 $A\setminus B=\{\,x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\,\}$

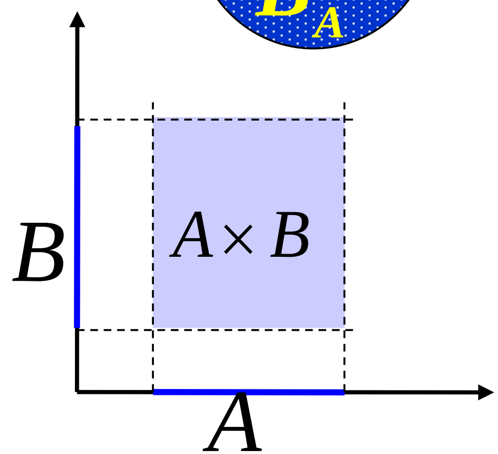


余集 $B_A^c=A\setminus B$ (其中$B\subset A$)

直积 $A\times B=\{\,(x,y) \mid x\in A,\ y\in B\,\}$

特例: $R\times R \overset{\text{记}}{=\!=} R^2$

为平面上的全体点集



二、函数

1. 函数的概念

定义 设非空数集 $D \subset R$，x 和 y 是两个变量, 若存在某个法则 f, 对于每个数 $x \in D$, 变量 y 都有唯一确定的值和它对应, 则称 $f: D \to R$ 为定义在 D上的**函数**,

$$y = f(x),\ x \in D,$$

因变量

自变量

定义域

$$f(D) = \{ y \mid y = f(x), x \in D \}$$ 称为值域.

函数的二要素：定义域、对应法则.

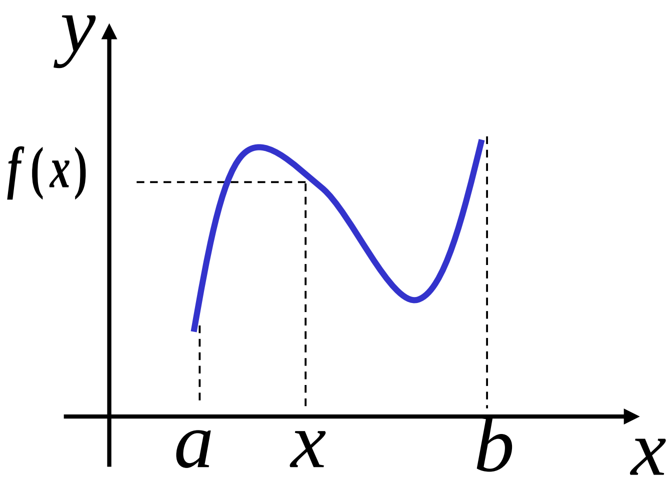
函数的记号： 通常用 f,g,F,φ 等表示，可记作

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x)$$

函数图形：

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

$$\subset D \times f(D)$$



$(D = [a,b])$

$$\forall\, x \in D \xrightarrow{\ f\ } y \in f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

（定义域）　（对应规则）　（值域）

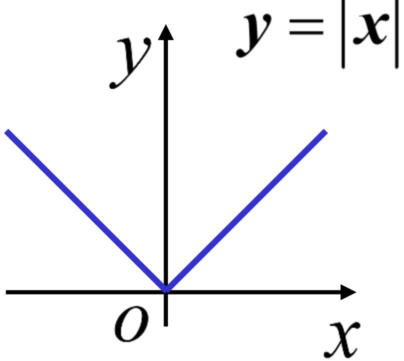
定义域 —使表达式及实际问题都有意义的自变量集合.

对应规律的表示方法： 解析法、图象法、列表法

例如，反正弦主值 $y = f(x) = \arcsin x$

定义域 $D = [-1, 1]$， 值域 $f(D) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

又如，绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



定义域 $D = R$

值域 $f(D) = [0, +\infty)$

例1.已知函数 $y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 1 + x^2, & x > 1 \end{cases}$,

求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(\frac{1}{t}\right)$, 并写出定义域及值域.

解: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{t^2}, & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{t}}, & t \ge 1 \end{cases}$

定义域 $D = [0, +\infty)$

值域 $f(D) = [0, +\infty)$

$t \le 0$ 时

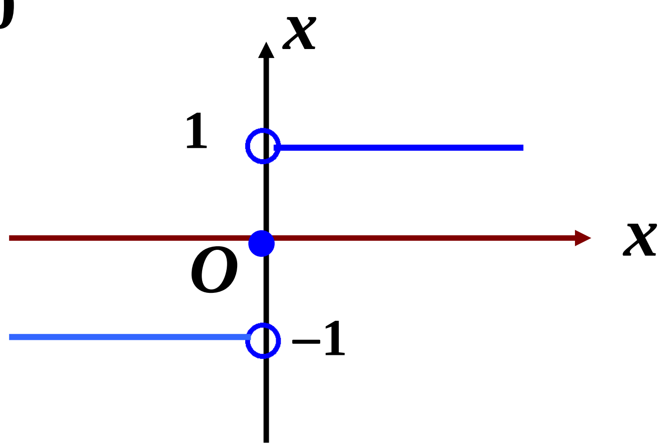
函数无定义

例2 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

称为符号函数，它的定义域为

$D = (-\infty, +\infty)$，值域为

$R_f = \{-1, 0, 1\}$，它的图形为

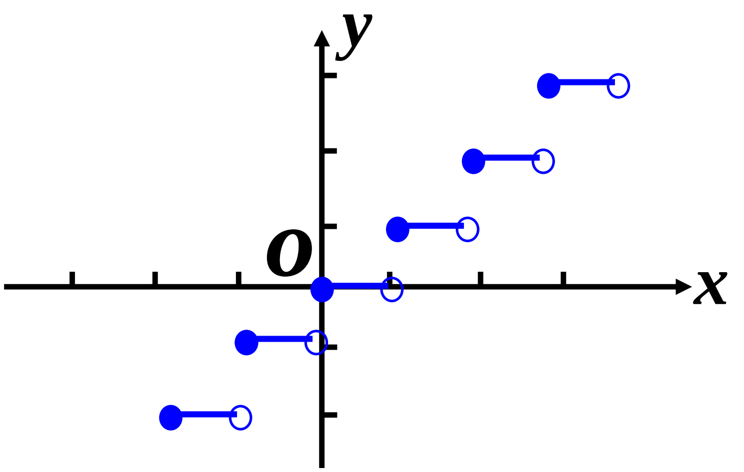


例 取整函数 $y = [x]$，

$x \in R$，$[x]$表示不超过x

的最大整数. 如 $[2.5] = 2$，

$[-3.4] = -4$. 它的图形为



三、函数的几种特性

（1） 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$，且数集 $X \subset D$.

若存在数K_1, 使得对$\forall x \in X$, 都有 $f(x) \le K_1$, 则称函数 $f(x)$ 在X上有上界. K_1称为 f 在X上的一个上界.

若存在数K_2, 使得对$\forall x \in X$, 都有 $f(x) \ge K_2$ 则称函数 $f(x)$ 在X上有下界. K_2称为 f 在X上的一个下界.

若$\exists M > 0, \forall x \in X$，使$|f(x)| \le M$,称 $f(x)$ 在X上有界.

若这样的数M不存在，则称函数 $f(x)$ 在X上无界. 即对$\forall M > 0$, $\exists x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$.

如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界. $y = \dfrac{1}{x}$ 在(0,1)上无界.

$f(x)$在X上有界的充要条件是它在X上既有上界又有下界.

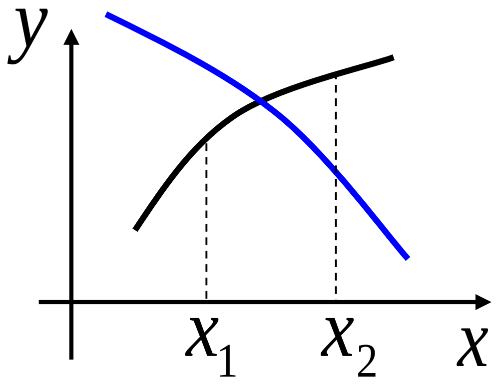
(2) 单调性

设函数 $y = f(x),\ x \in D$，且区间$I \subset D$.

$\forall\, x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) < f(x_2)$，称 $f(x)$ 为I上的

单调增函数;



若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为I 上的

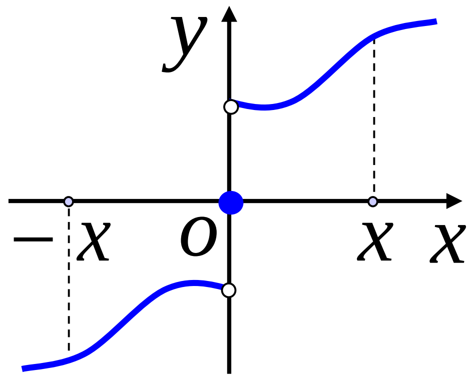
单调减函数.

(3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为D，且D关于原点对称，

若 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.



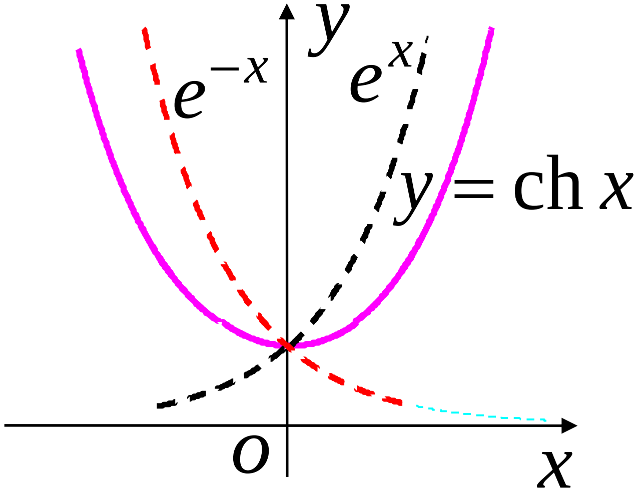
说明：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义，则当

$f(x)$ 为奇函数时，必有 $f(0)=0$.

例如,

$$y=f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$ 偶函数

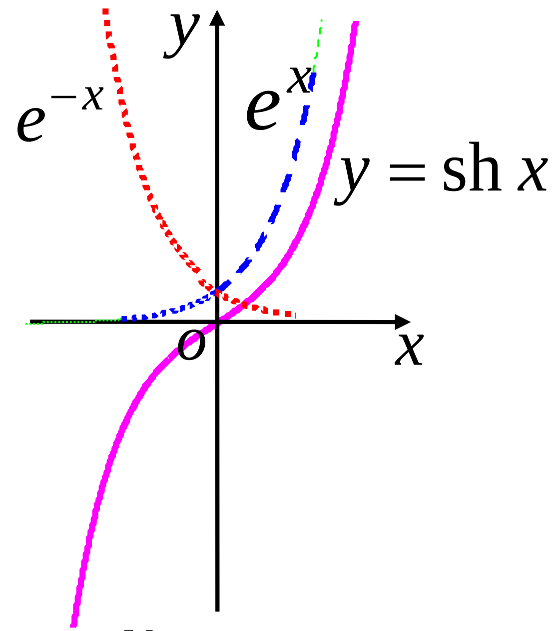
$$\overset{\text{记}}{=}\operatorname{ch}x$$ 双曲余弦



又如,

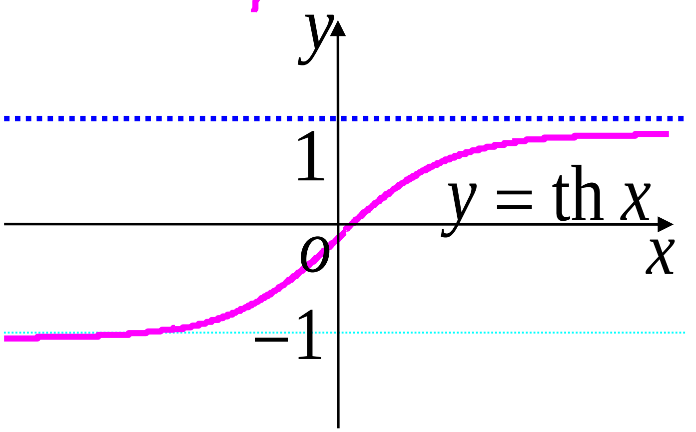
$$y = f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \text{ 奇函数}$$

$$\stackrel{\text{记}}{=} \operatorname{sh} x \text{ 双曲正弦}$$



再如, $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ 奇函数

$$\stackrel{\text{记}}{=} \operatorname{th} x \quad \text{双曲正切}$$

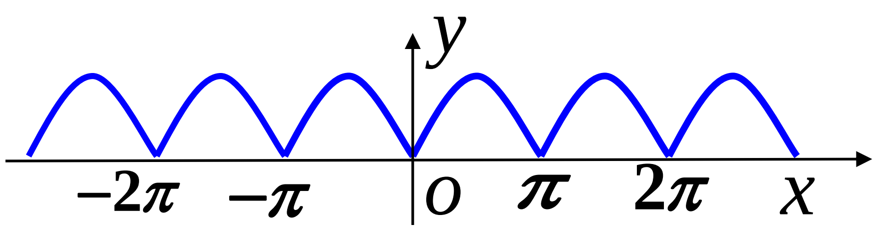


(4) 周期性

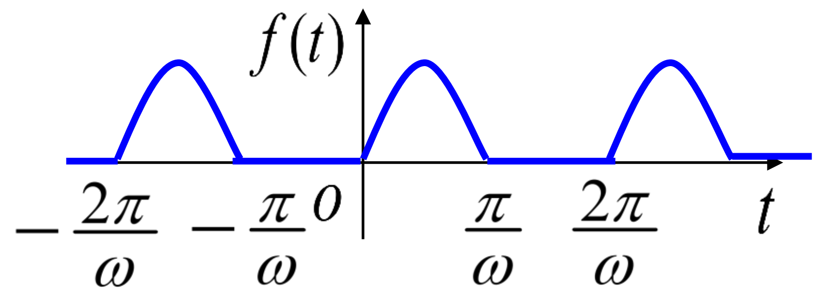
设函数 $f(x)$ 的定义域为D, 若$\exists\, l>0, \forall\, x \in D, x \pm l \in D$,且

$$f(x \pm l) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数** ,称l为**周期**(一般指**最小正周期**).



周期为π



周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$

注: 周期函数不一定存在最小正周期.

例如, 常量函数 $f(x) = C$

狄里克雷(Dirichlet)函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$

四、反函数

1. 反函数的概念（P13）

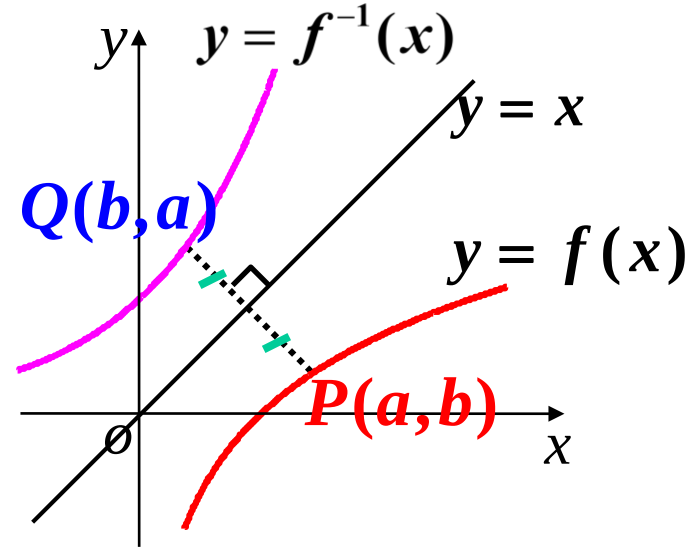
习惯上，$y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

$$y = f^{-1}(x)\ ,\ x \in f(D)$$

2. 反函数的性质：

（1）$y=f(x)$ 单调递增(减)，其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在，且也单调递增(减).

(2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 .



例如

$$\left.\begin{array}{ll}\text{指数函数} & y=e^{x},\ x\in(-\infty,+\infty) \\ \text{对数函数} & y=\ln x,\ x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\ \text{互为反函数}$$

它们都单调递增，其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

四、复合函数 初等函数

1. 复合函数

设有函数链 $y = f(u),\ u \in D_1$ ①

$u = g(x),\ x \in D,$ 且 $g(D) \subset D_1$ ②

则 $y = f(g(x)), x \in D$

称为由$y=f(u)$和$u=g(x)$ 构成的复合函数, u 称为中间变量.

注意: 构成复合函数的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

例如, 函数链 : $y = \arcsin u\,,\ u = 2\sqrt{1 - x^2}$,可定义复合

函数 $y = \arcsin 2\sqrt{1 - x^2},\ x \in D = \left[-1\,,\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

但函数链 $y = \arcsin u, u = 2 + x^2$ 不能构成复合函数 .

两个以上函数也可构成复合函数.　例如,

$$y=\sqrt{u},\ u>0,$$

$$u=\cot v,\ v\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$v=\frac{x}{2},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

可定义复合函数:

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},\qquad x\in\left(2k\pi,(2k+1)\pi\right],k\in Z.$$

$$\because \cot\frac{x}{2}\geq 0,\qquad \therefore k\pi<\frac{x}{2}\leq k\pi+\frac{\pi}{2}$$

2. 初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数

(2) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

否则称为非初等函数 .

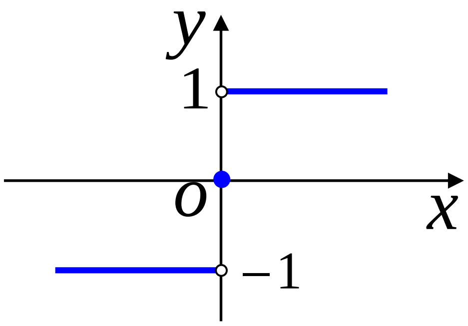
例如 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 可表为 $y = \sqrt{x^2}$，故为初等函数.

又如： 双曲函数与反双曲函数也是初等函数 .

非初等函数举例:

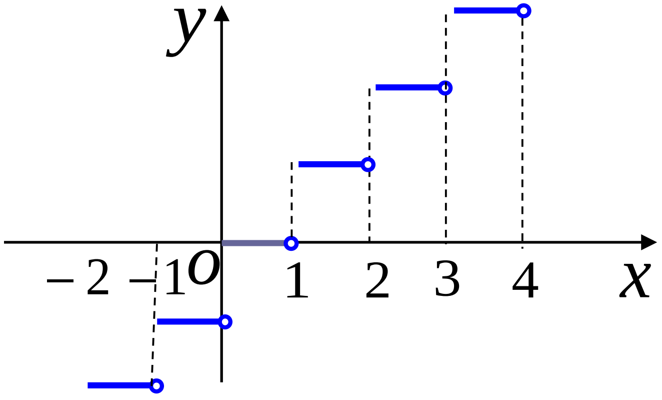
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ 0, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n,\ 当\ n \le x < n+1,\ n \in Z$$



4. 函数的运算

$y = f(x), x \in D_1$, $y = g(x), x \in D_2$, 且 $D = D_1 \cap D_2 \neq \Phi$. 则

$$\left(f \pm g\right)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

$$\left(f \cdot g\right)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}.$$

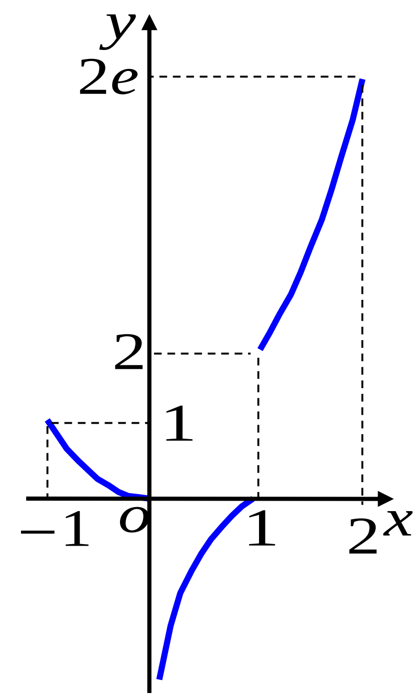
例 设函数 $f(x)$ 的定义域为$(-l, l)$，则函数 $f(x)$必可表示为偶函数与奇函数之和.

解 $g(x) = \dfrac{\left(f(x) + f(-x)\right)}{2}, x \in (-l, l)$ 偶函数

$h(x) = \dfrac{\left(f(x) - f(-x)\right)}{2}, x \in (-l, l)$ 奇函数

$\therefore f(x) = g(x) + h(x).$

例. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.



解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^y$, $y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2}$, $y\in(2,2e]$

反函数 $y=\begin{cases} e^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$ 定义域为 $(-\infty,1]\cup(2,2e]$.

内容小结

1. 集合的概念

2. 函数的定义及函数的二要素：定义域、对应规律

3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性

4. 初等函数

作业

习题1-1:

2，3，4，5，7，8，9，

12（1，2，4），13

1. 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$ 为奇函数 .

证: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$

由
$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \end{cases}$$

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 得 $f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)\quad(x\neq 0)$,

显然 $f(-x)=-f(x)$, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数 .

2． 设函数$=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$，$x=b\,(a<b)$ 均对称，求证$y=f(x)$ 是周期函数.

证：由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(a+x)=f(a-x),\qquad f(b+x)=f(b-x)$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f\big(a+(x-a)\big)\\&=f\big(a-(x-a)\big)=f(2a-x)\\&=f\big(b+(2a-x-b)\big)\\&=f\big(b-(2a-x-b)\big)\\&=f\big(x+2(b-a)\big),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数，周期为 $T=2(b-a)$.