第二章、导数与微分

习题课

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、作业

一、主要内容

关系 $\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导数

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

微分

$dy = y'\Delta x$

求导法则

1、导数的定义

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$，即

$$y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

单侧导数

1). 左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2). 右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

函数 $f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等.

2、基本导数公式（常数和基本初等函数的导数公式）

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x tgx \qquad (\csc x)' = -\csc x ctgx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x),v=v(x)$可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(cu)'=cu'$ (c是常数)，

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

(2) 反函数的求导法则

如果函数$x=\varphi(y)$的反函数为$y=f(x)$，则有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

(3) 复合函数的求导法则

设$y = f(u)$,而$u = \varphi(x)$则复合函数$y = f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad 或 \quad y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

(4) 对数求导法

先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

(5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

(6) 参变量函数的求导法则

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

4、高阶导数 (二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数)

二阶导数 $(f'(x))' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$,

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

一般地,函数 $f(x)$ 的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$ 的n 阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{或} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

5、微分的定义

定义 设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数$y=f(x)$在点x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即

$$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部.(微分的实质)

6、导数与微分的关系

定理 函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0处可导,且 $A = f'(x_0)$.

7、 微分的求法

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

求法: 计算函数的导数,乘以自变量的微分.

基本初等函数的微分公式

$$d(C)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x \tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x \ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

8、 微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论u是自变量还是中间变量,函数$y = f(u)$

的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(u)du}$

9　应用

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)'=0;\quad (\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (\sin x)'=\cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分界点处的导数，及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2)用导数定义求极限

(3)微分在近似计算与误差估计中的应用

二、典型例题

例1. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + (\Delta x)^2) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

解:

$$\text{原式} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x + (\Delta x)^2) - f(x_0)}{\Delta x + (\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right]$$

$$= f'(x_0).$$

例2. 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'(1).$$

例3. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$,

求 $f'(2)$.

解: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}[\dfrac{f(x)}{(x-2)}\cdot(x-2)]=0$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3.$$

例4. 设 $y = e^{\sin x}\sin e^{x} + f(\arctan\frac{1}{x})$,其中 $f(x)$可微,求 y'.

解: $$\mathrm{d}y = \sin e^{x}\,\mathrm{d}(e^{\sin x}) + e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin e^{x}) + f'(\arctan\frac{1}{x})\,\mathrm{d}(\arctan\frac{1}{x})$$

$$= \sin e^{x}\cdot \underline{e^{\sin x}}\,\mathrm{d}(\sin x) \underline{+e^{\sin x}}\cdot\cos e^{x}\,\mathrm{d}(e^{x}) + f'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{\sin x}(\cos x\sin e^{x} + e^{x}\cos e^{x}) - \frac{1}{1+x^2}f'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$$

例5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$.

试确定常数 a, b 使 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f'(x)$.

解: $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$

$x<1$时, $f'(x)=a$; $x>1$时，$f'(x)=2x$.

利用 $f(x)$在 $x=1$处可导，得

$\begin{cases} f(1^-)=f(1^+)=f(1) \\ f'_-(1)=f'_+(1) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1) \\ a=2 \end{cases}$

$x<1$ 时，$f'(x)=a$，　$x>1$ 时，$f'(x)=2x$

$a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1)$　$a=2$，　$f'_{+}(1)=2$

$\therefore\quad a=2,\ b=-1,\qquad f'(1)=2$

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\le 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$$

判别:　$f'(x)$ 是否为连续函数

例6. 设 $x \le 0$ 时 $g(x)$ 有定义，且 $g''(x)$ 存在，问怎样选择 a, b, c 可使下述函数在 $x = 0$ 处有二阶导数.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x > 0 \\ g(x), & x \le 0 \end{cases}$$

解：由题设 $f''(0)$ 存在，因此

1） 利用 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，即 $f(0^+) = f(0^-) = f(0)$，得 $c = g(0)$

2） 利用 $f'_+(0) = f'_-(0)$，而

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'_-(0)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(ax^2 + bx + c) - g(0)}{x - 0} = b$$

得

$b = g'_-(0)$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x>0 \\ g(x), & x\le 0 \end{cases}$$

$$c=g(0) \qquad b=g'_-(0)$$

3） 利用 $f''_-(0)=f''_+(0)$，而

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g'(x)-g'_-(0)}{x-0}=g''_-(0)$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2ax+b)-b}{x-0}=2a$$

得 $a=\dfrac{1}{2}g''_-(0)$

三、作业

总2

2（单）； 3（单）；5;

6（单）； 7（单）；8;

例. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解 方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$

$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$\therefore\quad f'(0)=-99!$

(1). 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$， 则

$f^{(n)}(2)=$ $n!\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示： $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$

$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}+\cdots\cdots\cdots$

各项均含因子 $(x-2)$

(2) 已知 $f(x)$任意阶可导，且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 $n\geq 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ $n![f(x)]^{n+1}$

提示： $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3![f(x)]^4$

$\cdots\cdots$

例. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ __2__ .

分析:

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\ f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

又 $$f_-''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x}=0,$$

$$f_+''(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x}=0,$$

$$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}24x, & x\ge 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

但是 $f_-'''(0)=12$, $f_+'''(0)=24$, $\therefore\ f'''(0)$ 不存在 .

练习：

1.设 $y=\cot\frac{\sqrt{x}}{2}+\tan\frac{2}{\sqrt{x}}$，求 y'.

2。设 $y=x^2 f(\sin x)$ 求 y''，其中 f 二阶可导.

3. 设由方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ t^2-y+\varepsilon\sin y=1 \quad (0<\varepsilon<1) \end{cases}$

确定函数 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

测 验 题

一、 选择题：

1、函数 $f(x)$在点 x_0的导数 $f'(x_0)$定义为（　　）

（A） $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（B） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（C） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（D） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

2、若函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的法线（　　）

（A）与 x轴相平行；（B）与 x轴垂直；

（C）与 y轴相垂直；（D）与 x轴即不平行也不垂直：

3、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0（　　）

（A）必不可导；　　（B）必定可导；

（C）不一定可导；　　（D）必无定义.

4、如果 $f(x)$=（　　），那么 $f'(x)=0$.

(A) $\arcsin 2x+\arccos x$；

(B) $\sec^2 x+\tan^2 x$；

(C) $\sin^2 x+\cos^2(1-x)$；

(D) $\arctan x+\operatorname{arccot} x$.

5、如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$ 处处可导，那末（　　）

（A）$a=b=1$；　　（B）$a=-2, b=-1$；

（C）$a=1, b=0$；　　（D）$a=0, b=1$.

6、已知函数 $f(x)$具有任意阶导数，且

$f'(x)=\left[f(x)\right]^2$, 则当$n$为大于 2 的正整数时，

$f(x)$的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$是（　　）

（A）$n![f(x)]^{n+1}$;　　（B）$n[f(x)]^{n+1}$;

（C）$[f(x)]^{2n}$;　　（D）$n![f(x)]^{2n}$.

7、若函数$x=x(t)$, $y=y(t)$对t可导且$x'(t)\neq 0$, 又

$x=x(t)$的反函数存在且可导，则$\dfrac{dy}{dx}$=（　　）

（A）$\dfrac{y'(t)}{x(t)}$;　　（B）$-\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$;

（C）$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$;　　（D）$\dfrac{y(t)}{x'(t)}$.

8、若函数 $f(x)$ 为可微函数，则 dy（　）

（A）与 Δx 无关；

（B）为 Δx 的线性函数；

（C）当 $\Delta x \to 0$ 时为 Δx 的高阶无穷小；

（D）与 Δx 为等价无穷小.

9、设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$ 时，记 Δy 为 $f(x)$ 的增量，dy 为 $f(x)$ 的微分，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ 等于（　）

（A）-1；　　（B）0；

（C）1；　　（D）∞.

10、设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，且$f'(x_0)\neq 0$，

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$等于（ ）.

（A）0；　　　　（B）-1；

（C）1；　　　　（D）∞ .

二、求下列函数的导数：

1、$y=\sin x\ln x^2$；　　　　2、$y=a^{\cosh x}$　（$a>0$）；

3、$y=(1+x^2)^{\sec x}$ ；　　　　4、$y=\ln[\cos(10+3x^2)]$；

5、设y为x的函数是由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$确定的；

6、设$x=y^2+y$，$u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$，求$\dfrac{dy}{du}$.

三、证明$x=e^t\sin t$， $y=e^t\cos t$满足方程

$$(x+y)^2\frac{d^2y}{dx^2}=2(x\frac{dy}{dx}-y)\ .$$

四、已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$其中$g(x)$有二阶连续导数，且$g(0)=1$，

1、确定 a 的值，使$f(x)$在$x=0$点连续；

2、求$f'(x)$

五、设$y=x\ln x$,求$f^{(n)}(1)$.

六、计算$\sqrt[3]{9.02}$的近似值 .

七、一人走过一桥之速率为 4 公里/小时，同时一船在此人底下以 8 公里/小时之速率划过，此桥比船高 200 米，问 3 分钟后人与船相离之速率为多少？

测验题答案

一、1、D；　2、B；　3、A；　4、D；　5、D；
6、A；　7、C；　8、B；　9、B；　10、A；

二、1、$\cos x \ln x^2 + \dfrac{2\sin x}{x}$；

2、$\ln a \sinh x a^{\cosh x}$；

3、$(1+x^2)^{\sec x}[\tan x \ln(1+x^2) + \dfrac{2x}{1+x^2}]\sec x$；

4、$6x\tan(10+3x^2)$；

5、$\dfrac{x+y}{x-y}$；

6、$\dfrac{1}{3(2y+1)(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$.

四、1、$a=g'(0)$；

2、$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}(g''(0)+1), & x=0\end{cases}.$$

五、$f^{(n)}(1)=(-1)^{n-2}(n-2)!$.

六、2. 09.

七、$\dfrac{20}{\sqrt{6}}\approx 8.16$（公里/小时）.