第四节 函数的单调性与极值

- 一、函数的单调性及其判定
- 二、函数的极值及其判定
- 三、最大值与最小值
- 四、小结
- 五、作业

一、 函数单调性的判定法

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导, 若 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$),则 $f(x)$在 I 内单调递增 (递减).

证: 无妨设 $f'(x)>0$, $x\in I$, 任取 $x_1, x_2\in I$ $(x_1<x_2)$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$$

$$\xi\in(x_1, x_2)\subset I$$

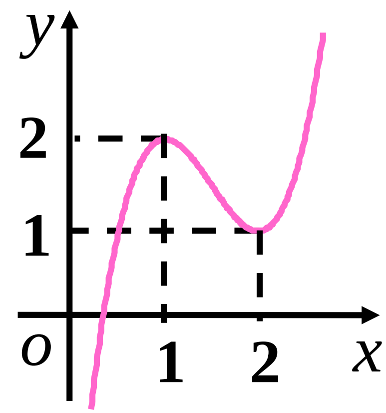
故 $f(x_1)<f(x_2)$. 这说明 $f(x)$ 在 I 内单调递增.

例1. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1,\ x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$



故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1),\ (2,+\infty)$;

$f(x)$ 的单调减区间为 $(1,2)$.

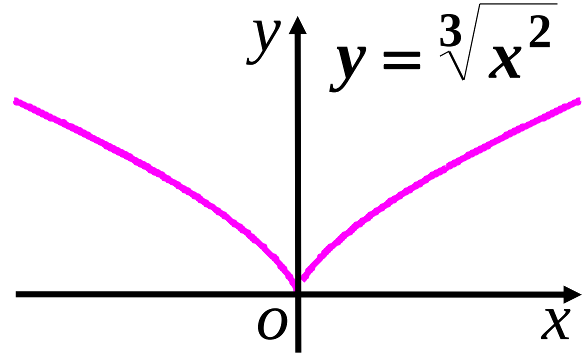
说明:

1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0}=\infty$$

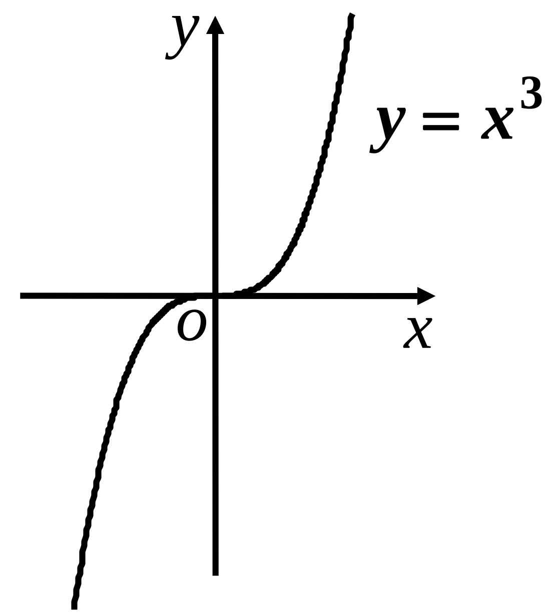


2) 如果函数在某驻点两边导数同号,
则不改变函数的单调性.

例如, $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2$$

$$y'\big|_{x=0}=0$$

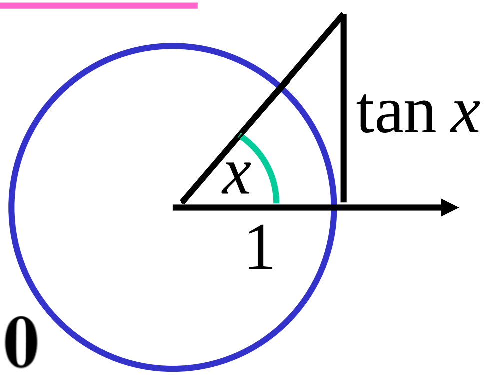


例2. 证明 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$



因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, 因此 $f(x) \ge f(\frac{\pi}{2}) = 0$

从而 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

二、函数的极值及其求法

定义: 设函数 $f(x)$在(a,b)内有定义, $x_0 \in (a,b)$, 若存在 x_0的某邻域, 在其中当 $x \neq x_0$ 时,

(1) $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0为$f(x)$的极大点, 称

$f(x_0)$为函数的极大值;

(2) $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0为$f(x)$的极小点, 称

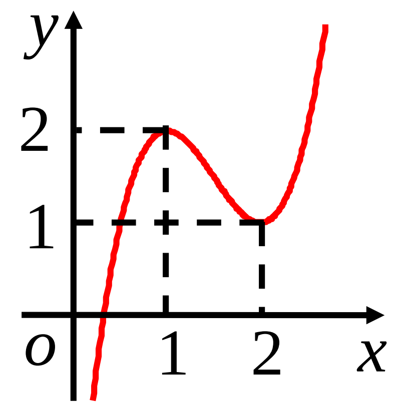
$f(x_0)$为函数的极小值.

极大点与极小点统称为极值点 .

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

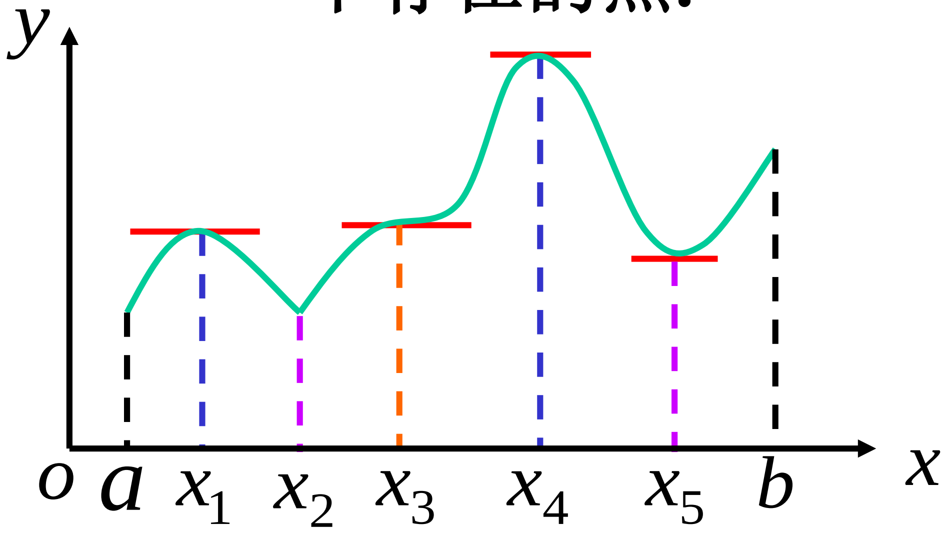
$x=1$为极大点, $f(1)=2$ 是极大值

$x=2$为极小点, $f(2)=1$ 是极小值



注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4为极大点

x_2, x_5为极小点

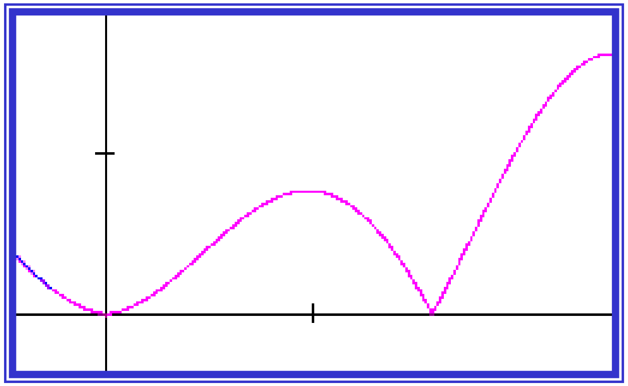
x_3不是极值点

定理2（极值第一判别法）

设函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过 x_0 时,

(1) $f'(x)$ “左正右负”，则 $f(x)$在 x_0 取极大值.

(2) $f'(x)$ “左负右正”，则 $f(x)$在 x_0 取极小值;



点击图中任意处动画播放\暂停

例3. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

解: 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; 令 $f'(x)=\infty$, 得 $x_2=0$

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-0.33	↗

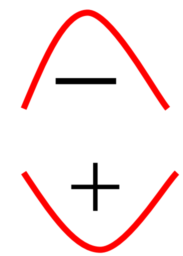
$\therefore x=0$ 是极大点,其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小点,其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

定理3(极值第二判别法) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$在点 x_0 取极大值;

(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$在点 x_0 取极小值.

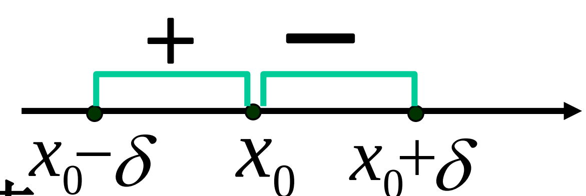


证: (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f'(x)<0$,



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证.

例4. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\quad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

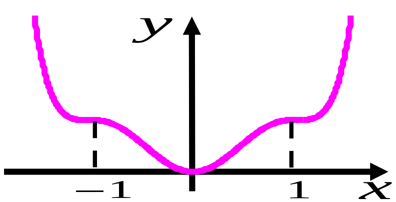
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$，故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

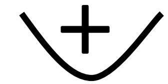
$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.



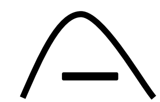
定理4(判别法的推广) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$

则：1) 当 n 为偶数时，x_0 为极值点，且

$f^{(n)}(x_0)>0$ 时，x_0 是极小点；



$f^{(n)}(x_0)<0$ 时，x_0 是极大点.



2) 当 n 为奇数时，x_0 不是极值点.

证： 利用 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式，可得

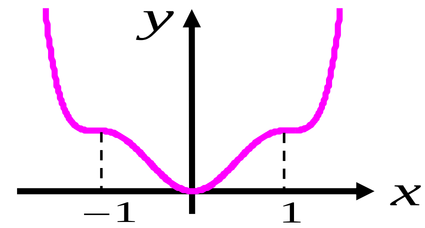
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当 x 充分接近 x_0 时，上式左端正负号由右端第一项确定，故结论正确.

例如, 例2中 $f(x)=(x^2-1)^3+1$

$$f'''(x)=24x(5x^2-3),\ f'''(\pm 1)\neq 0$$

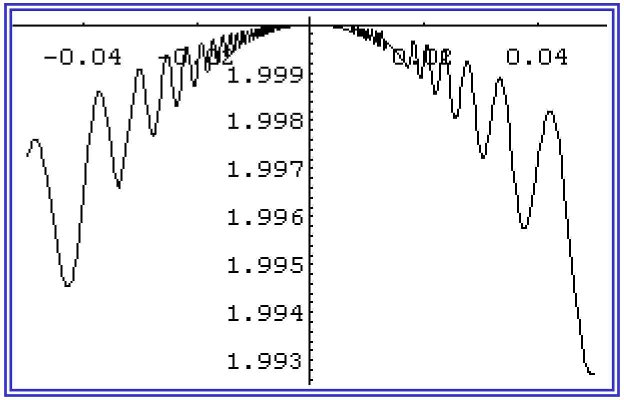
所以 $x=\pm 1$不是极值点.



说明: 极值的判别法(定理1 ~ 定理3) 都是充分的. 当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在.

例如:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$



$f(0)=2$为极大值 , 但不满足定理1 ~ 定理3 的条件.

三、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则其最值只能在极值点或端点处达到.

求函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值可疑点

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

特别:

1)当 $f(x)$在 $[a,b]$ 内只有一个极值可疑点时,

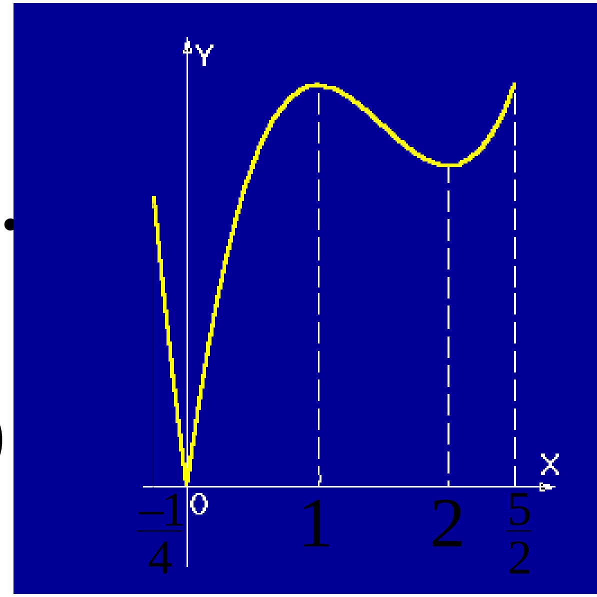
若在此点取极大 (小)值 , 则也是最大(小)值 .

2)当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**单调**时, 最值必在**端点**处达到.

3) 对应用问题 , 有时可根据实际意义判别求出的

可疑点是否为最大 值点或最小值点 .

例5. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值和最小值.



解: 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$,且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

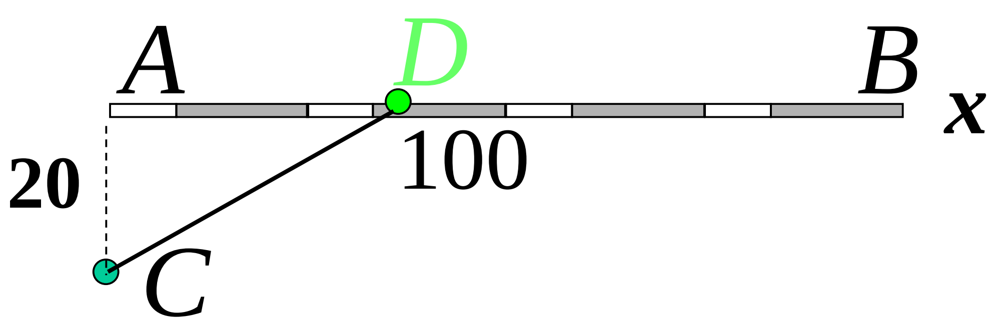
$f(x)$在$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$f(\frac{-1}{4})=3\frac{19}{32}$, $f(0)=0, f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(\frac{5}{2})=5$

故函数在 $x=0$取最小值 0; 在 $x=1$及$\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

注：令 $\varphi(x) = f^2(x)$, 由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同, 因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点. (自己练习)

例6. 铁路上 AB 段的距离为100 km , 工厂C 距 A 处 20Km, AC⊥AB , 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5 , 为使货物从B 运到工厂C 的运费最省, 问 D 点应如何选取?



解: 设 $AD = x$ (km)，则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$，总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \qquad (0 \le x \le 100)$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right), \qquad (\text{k 为某一常数})$$

$$y'' = 5k\frac{400}{(400 + x^2)^{3/2}}$$

令 $y' = 0$，得 $x = 15$，又 $y''\big|_{x=15} > 0$，

所以 $x = 15$ 为唯一的极小点，从而为最小点，

故 AD =15 km 时运费最省.

例7. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁, 问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

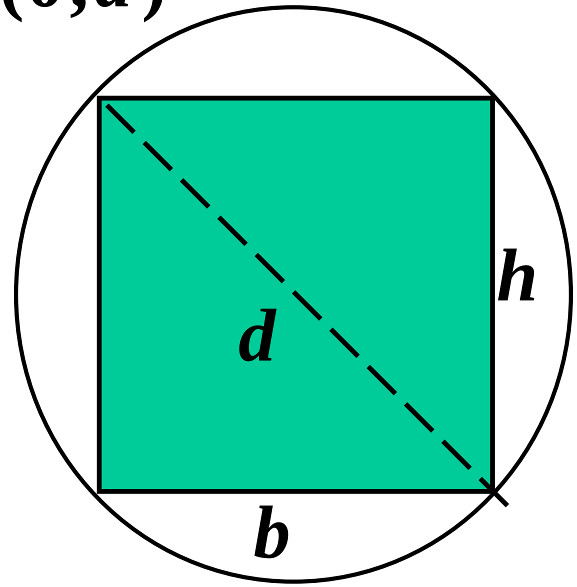
$$w=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}b(d^2-b^2),\qquad b\in(0,d)$$

令 $w'=\frac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$

得 $b=\sqrt{\frac{1}{3}}\,d$

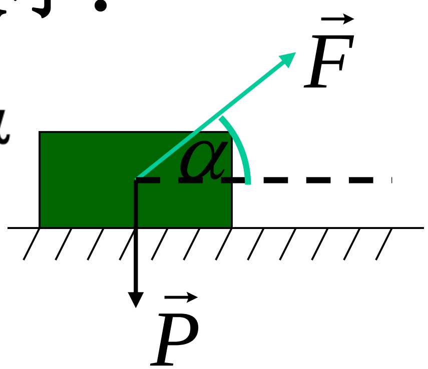
从而有 $h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,d$

即 $d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$



由实际意义可知, 所求最值存在, 驻点只一个, 故所求 结果就是最好的选择.

例8. 设有质量为5 kg 的物体置于水平面，受力 $\vec{F}$ 作用开始移动，设摩擦系数 $\mu = 0.25$，问力 $\vec{F}$ 与水平面夹角 α 为多少时才可使力 $\vec{F}$ 的大小最小？



解: 克服摩擦的水平分力 $F_x = F\cos\alpha$

正压力 $P - F_y = 5g - F\sin\alpha$

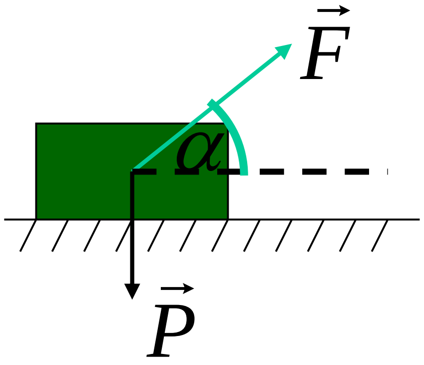
$$\therefore \quad F\cos\alpha = \mu(5g - F\sin\alpha)$$

即
$$F = \frac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

令 $\varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$

则问题转化为求 $\varphi(\alpha)$ 的最大值问题.

$$\varphi(\alpha)=\cos\alpha+\mu\sin\alpha$$



$$\varphi'(\alpha)=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$$

$$\varphi''(\alpha)=-\cos\alpha-\mu\sin\alpha$$

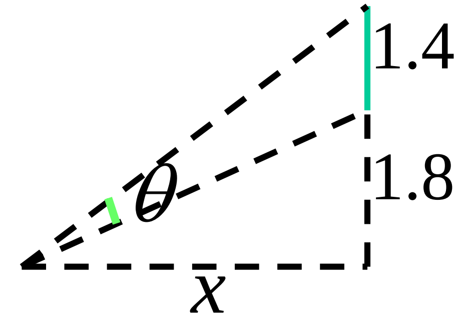
令 $\varphi'(\alpha)=0$， 解得

$$\alpha=\arctan\mu=\arctan 0.25=14^\circ 2'$$

而 $\varphi''(\alpha)<0$， $\therefore \alpha=14^\circ 2'$ 时 $\varphi(\alpha)$ 取最大值，

因而 F 取最小值.

例9. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上, 它的底边高于观察者的眼睛1.8 m,问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角θ 最大)?



解:设观察者与墙的距离为 x m , 则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x}, \quad x \in (0,+\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta' = 0$, 得驻点 $x = 2.4 \in (0,+\infty)$

根据问题的实际意义, 观察者最佳站位存在 , 驻点又唯一, 因此观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚.

四、内容小结

1. 连续函数的极值

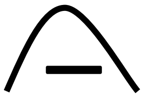
(1) 极值可疑点：使导数为0 或不存在的点

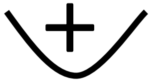
(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由正变负 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由负变正 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值 

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值 

(4) 判别法的推广

2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；

应用题可根据问题的实际意义判别.

五、作业

习题3-4：

2（单），3（单），4（单），5（单）

6，8，13，15