第三节、函数的极限

- 一、自变量趋于有限值时函数的极限
- 二、自变量趋于无穷大时函数的极限
- 三、函数极限的性质
- 四、无穷小与无穷大
- 五、无穷小的性质

一、自变量趋于有限值时函数的极限

问题： 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中，对应

函数值 $f(x)$ 是否无限趋近于确定值 A ?

引例. 测量正方形面积.（真值：边长为 x_0；面积为 A ）

直接观测值
边长 x

$\Downarrow$

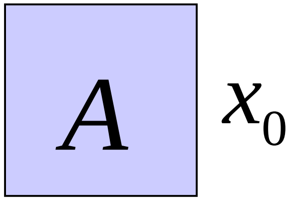
间接观测值
面积 x^2

确定直接观测值精度 δ:

$$|x - x_0| < \delta$$

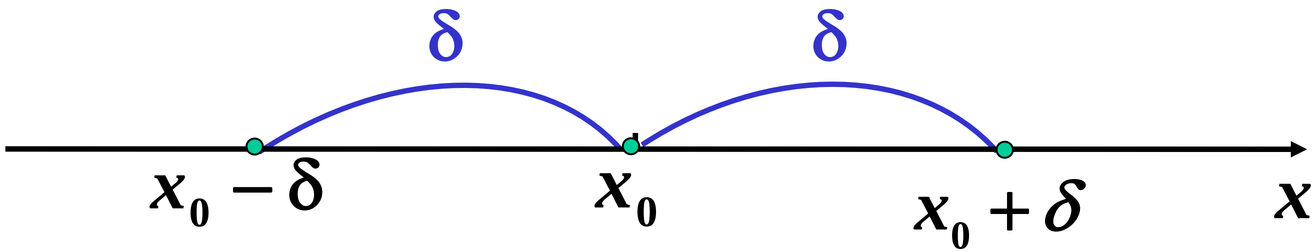
$\Uparrow$

任给精度 ε，要求 $|x^2 - A| < \varepsilon$



$|f(x)-A|<\varepsilon$ 中的ε 表示$f(x)$与A 的接近程度;

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示$x \to x_0$ 的过程.



点x_0 的去心δ邻域, δ体现x接近x_0程度.

1. $f(x)$在点x_0处的极限

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 则称常数A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$时的极限，记作

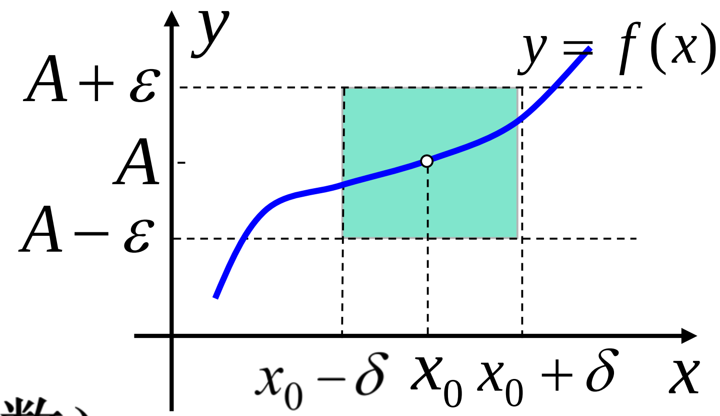
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\,(当 x \to x_0)$$

即

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, 当\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta)\ 时, 有\ |f(x) - A| < \varepsilon}$$

注： 1) $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \neq x_0$， 所以 $f(x)$在点x_0是否有极限与 $f(x)$在点x_0处 是否有定义无关。

2) 几何解释:



例1. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (C为常数).

证: $|f(x)-A| = |C-C| = 0$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时,

总有 $|C-C| = 0 < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$

例2. 证明 $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3.$

证: $\left|f(x)-A\right| = \left|(2x-1)-3\right| = 2\left|x-2\right|$

$\forall \varepsilon>0$, 欲使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$, 只要 $\left|x-2\right|<\varepsilon/2$,

取 $\delta=\varepsilon/2$, 则当 $0<\left|x-2\right|<\delta$ 时, 必有

$$\left|f(x)-A\right| = \left|(2x-1)-3\right| < \varepsilon$$

因此 $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$

例3. 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

证 $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|x+2-4\right|=\left|x-2\right|$

故 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<\left|x-2\right|<\delta$ 时，必有

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

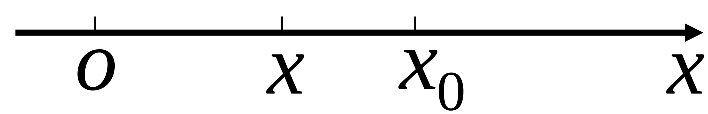
例4. 证明: 当 $x_0 > 0$ 时 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证 $|f(x) - A| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \left|\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \le \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$

$\forall \varepsilon > 0$, 欲使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0}\,\varepsilon$, 且 $x \ge 0$. 而 $x \ge 0$ 可用 $|x - x_0| \le x_0$ 保证 . 故取

$\delta = \min\left\{\sqrt{x_0}\,\varepsilon,\ x_0\right\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 必有

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \varepsilon$$



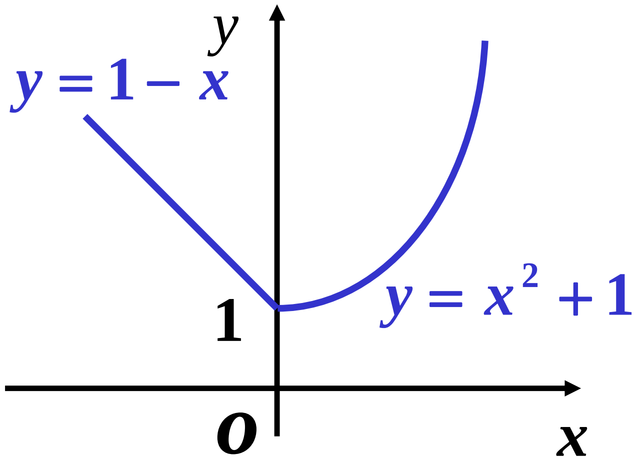
因此 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

2. 单侧极限

例如

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0， 记作 $x\to x_0^-$;

x 从右侧无限趋近 x_0， 记作 $x\to x_0^+$;

左极限： $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

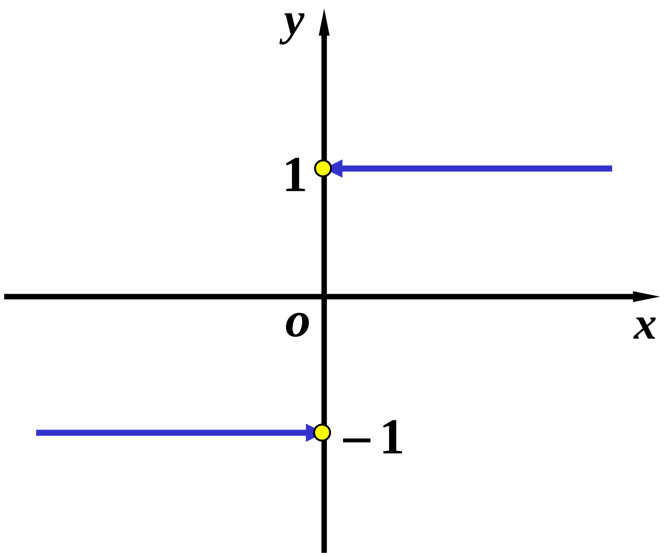
$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限： $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

例5 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.



证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

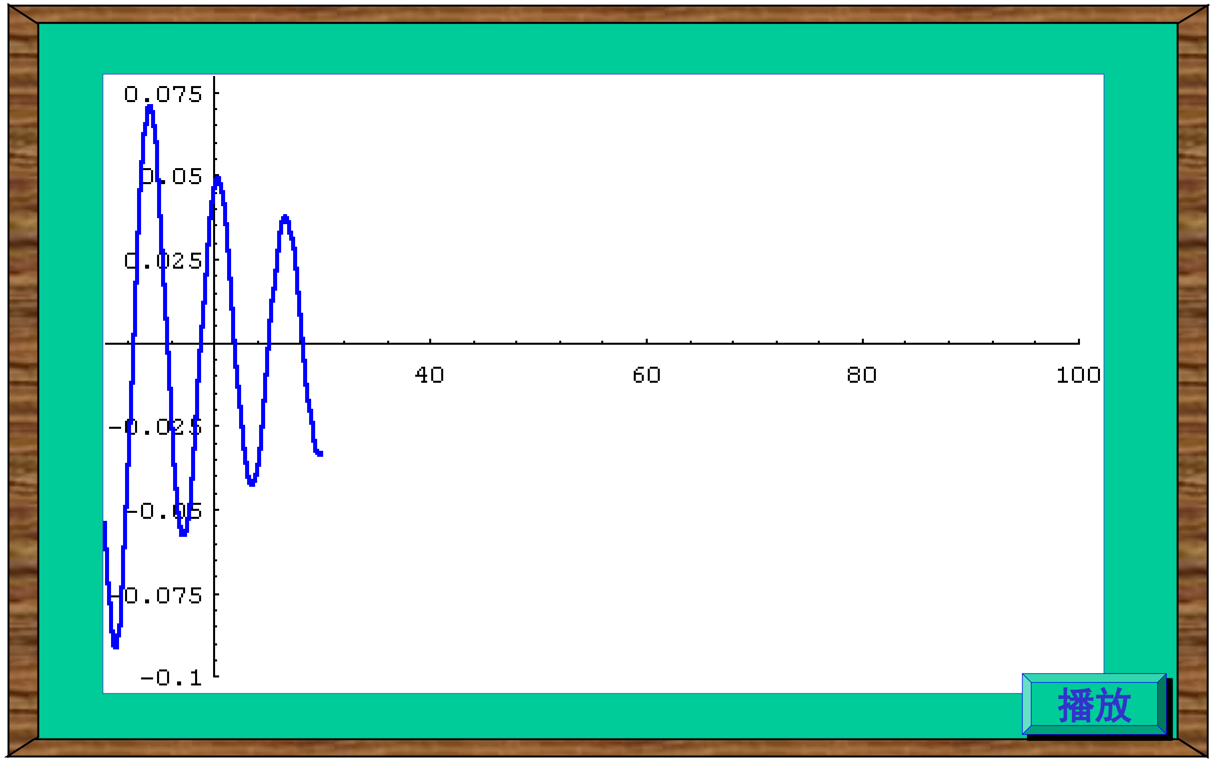
$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1.$

左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



问题: 函数$y=f(x)$在$x\to\infty$的过程中，对应函数值$f(x)$是否无限趋近于确定值A ?

通过上面演示实验的观察:

当x无限增大时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$无限接近于 **0**.

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示$|f(x)-A|$任意小;

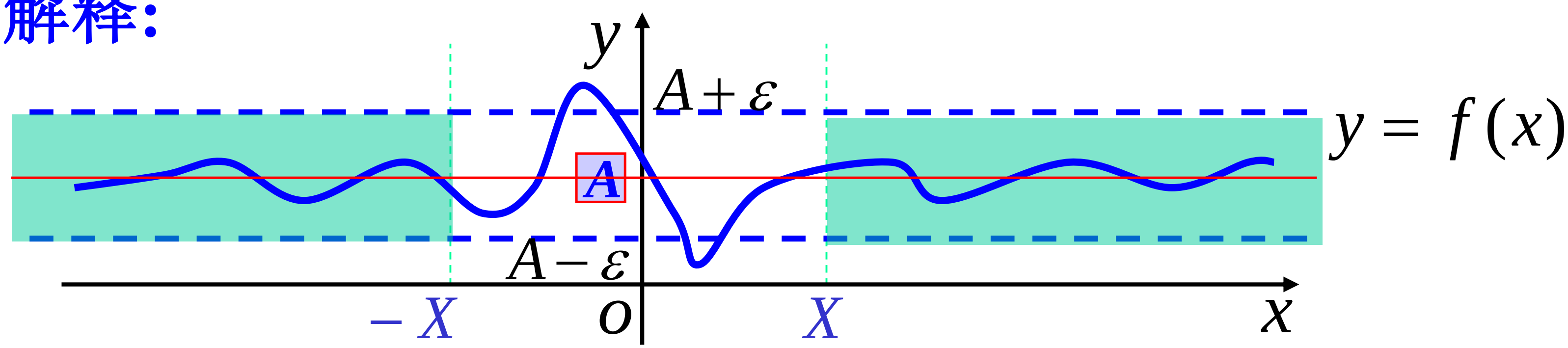
$|x|>X$ 表示$x\to\infty$的过程.

定义2. 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (\text{当} x \to \infty)$$

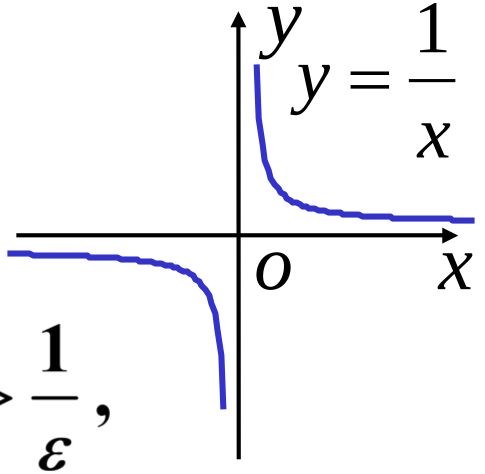
$\boxed{x < -X \text{ 或 } x > X}$ $\boxed{A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon}$

几何解释:



直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

例6. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$



证: $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}$

故 $\forall\varepsilon>0$,欲使 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,

取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$时, 就有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

注: $y=0$为$y=\dfrac{1}{x}$的水平渐近线.

两种特殊情况：

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \rightleftarrows \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,$当 $x>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \rightleftarrows \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,$ 当 $x<-X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

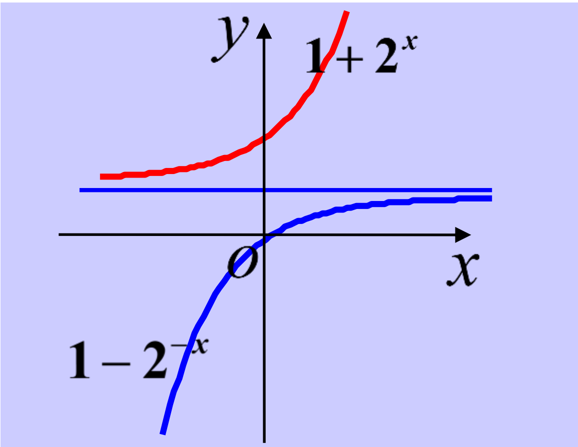
几何意义： 直线 $y=A$ 仍是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 .

例如 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

都有水平渐近线 $y=0$;

又如，$f(x)=1-2^{-x}$, $g(x)=1+2^{x}$

都有水平渐近线 $y=1$.



定理 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

三、函数极限的性质

定理 (函数极限的唯一性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一.

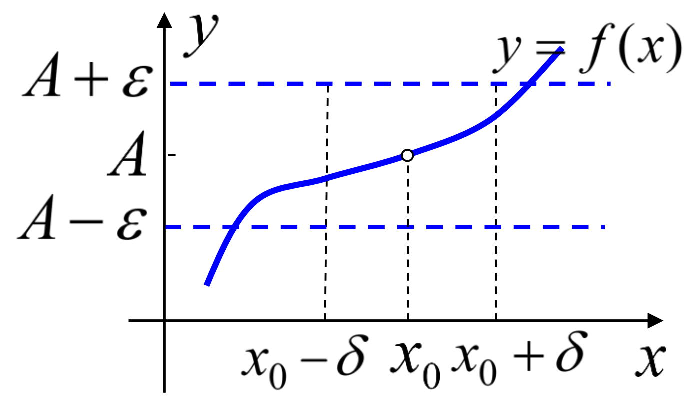
定理 (函数极限的局部有界性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$|f(x)| \le M$.

证明 由 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，取 $\varepsilon = 1$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < 1$，$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |A|$.

定理 (函数极限的局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$ (或$A<0$)， 则 $\exists\delta>0$，使得当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

证 $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， 则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$

当 $A>0$ 时， 取正数 $\varepsilon\le A$，
(<0) $(\varepsilon\le -A)$



则在对应的邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$上

$f(x)>0.$

(<0)

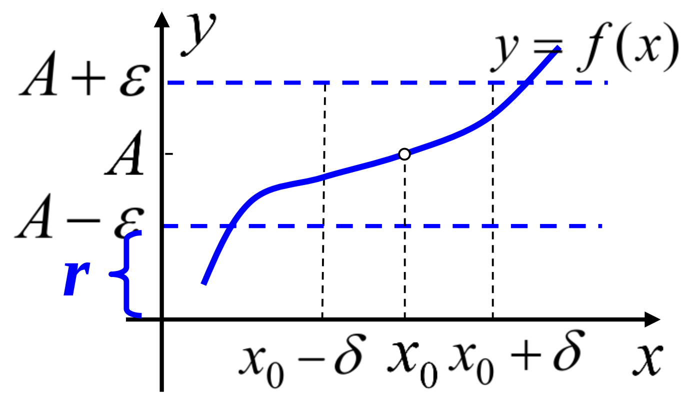
定理 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, 对任意 $r \in (0,|A|)$, 则存在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$, 使当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)| > r$.

分析 $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$

若取 $\varepsilon = |A| - r$, 则在对应的邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 上

$A>0$: $\underline{r < f(x)} < 2A - r$

$A<0$: $2A + r < \underline{f(x) < -r}$



推论　若在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \ge 0$ $(f(x) \le 0)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \ge 0$ $(A \le 0)$.

证　(用反证法)　当 $f(x) \ge 0$时，假设$A < 0$，则由定理5，存在 x_0 的某去心邻域，使在该邻域内 $f(x) < 0$，

与已知条件矛盾，所以假设不真，故 $A \ge 0$.

(同样可证 $f(x) \le 0$ 的情形)

思考：若推论中的条件改为 $f(x) > 0$，是否必有 $A > 0$？

不能！　如 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

定理 (函数极限与数列极限的关系) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数 $f(x)$的定义域内任一收敛于x_0的数列，且满足 $x_n \neq x_0 (n \in N^+)$，则相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

证明：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，故对上述 δ，存在N，当$n > N$时，有 $|x_n - x_0| < \delta$，由假设 $x_n \neq x_0 (n \in N^+)$，故当$n > N$时，$0 < |x_n - x_0| < \delta$，从而 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,$\exists$时刻,从此时刻以后,

恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

过　程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n>N$	$\lvert x\rvert>N$	$x>N$	$x<-N$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			

过　程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

四、无穷小

定义1. 若 $x \to x_0$ 时， 函数 $f(x) \to 0$，则称函数 $f(x)$
(或 $x \to \infty$)

为 $x \to x_0$ 时的无穷小 .
(或 $x \to \infty$)

例如 $\lim_{x \to 2}(x-2)=0$, 函数 $x-2$ 为 $x \to 2$ 时的无穷小;

$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$, 函数 $\frac{1}{x}$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小;

$\lim_{x \to -\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$, 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 为 $x \to -\infty$ 时的无穷小.

注意 （1）无穷小是变量, 不能与很小的数混淆;

（2）零是可以作为无穷小的唯一的数.

定理 . (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha,\text{其中}\alpha\text{ 为}x\to x_0$$

时的无穷小量 .

证 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

$$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{ 当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时, 有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha=f(x)-A} \lim_{x\to x_0}\alpha=0.$$

对自变量的其它变化过程类似可证 .

五、无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义2. 若任给$M>0$, 总存在 $\delta>0$(正数 X), 使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ ($|x|>X$) 的 x, 总有

$$|f(x)|>M \qquad ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty. \qquad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

若在定义中将①式改为 $f(x)>M$ ($f(x)<-M$), 则记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \qquad (\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$$

注意:

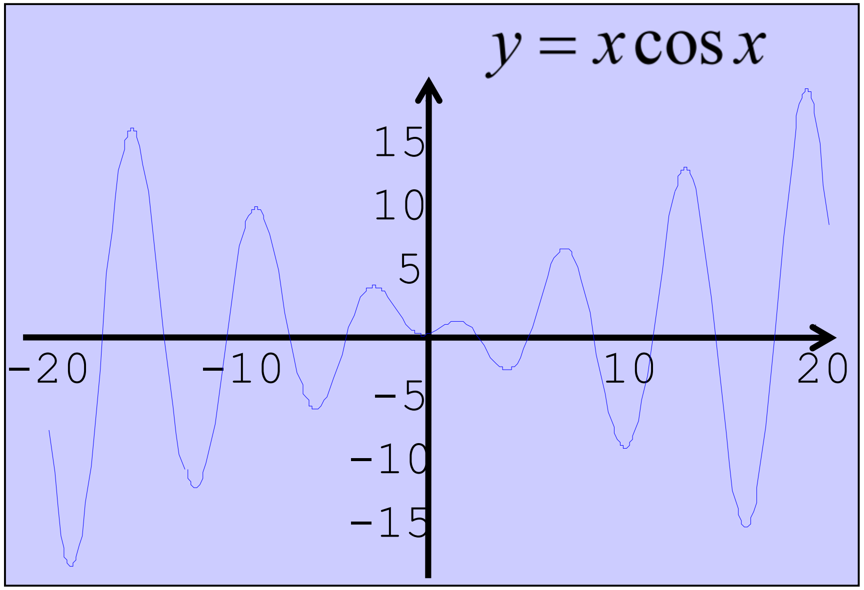
1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种状态.

2. 函数为无穷大, 必定无界. 但反之不真!

例如, 函数 $f(x)=x\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(2n\pi)=2n\pi\to\infty\quad(\text{当}\ n\to\infty)$$

但 $f(\frac{\pi}{2}+n\pi)=0.$



所以 $x\to\infty$ 时,

$f(x)$ 不是无穷大!

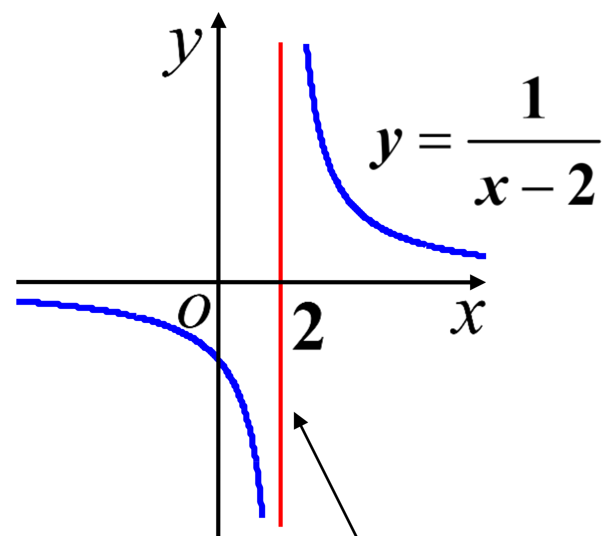
例 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty.$

证：任给正数M，要使 $\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$，即 $|x-2|<\dfrac{1}{M}$，

只要取$\delta=\dfrac{1}{M}$，则对满足 $0<|x-2|<\delta$ 的一切 x,有

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|>M$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty.$



说明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则直线

$x=x_0$为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

渐近线

无穷小与无穷大的关系

定理. 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 ;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

分析: $\forall\varepsilon>0$, 欲使 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$, 只要 $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. $\therefore \forall\varepsilon>0$, 取$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists\delta>0$,

使得当$0<|x-x_0|<\delta$时, 恒有$|f(x)|>M$, 即$\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$.

$\therefore$ 当$x\to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小.

六 无穷小的性质

定理1 有限个无穷小的和还是无穷小.

证 考虑两个无穷小的和. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,有 $|\beta|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0.$

这说明当 $x\to x_0$ 时, $\alpha+\beta$ 为无穷小量.

类似可证: 有限个无穷小之和仍为无穷小 .

说明: 无限个无穷小之和不一定是无穷小！

例如 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小 .

证 设 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$, $|u|\le M$, 又设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$,

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, 有 $|\alpha|\le\frac{\varepsilon}{M}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, 就有

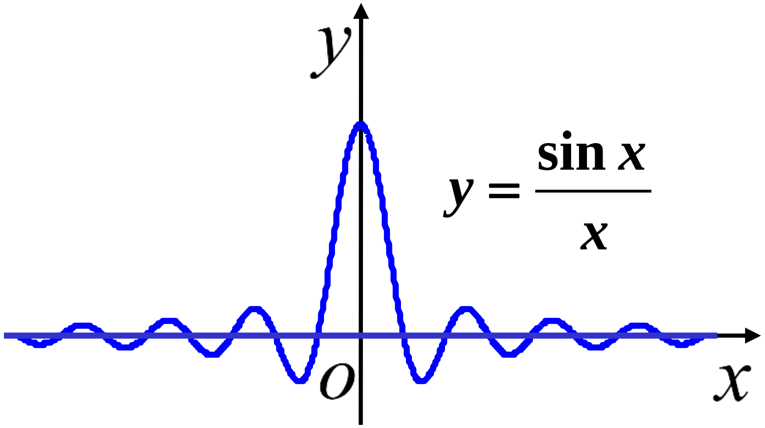
$$|u\alpha|=|u||\alpha|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$ 故 $\lim\limits_{x\to x_0}u\alpha=0$,

即 $u\alpha$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

推论 1． 常数与无穷小的乘积是无穷小．

推论 2． 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.



解: $\because\ \left|\sin x\right|\le 1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

利用定理 2 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

说明：$y=0$ 是 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的渐近线．

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限是否存在？

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$$

思考题解答

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(5+x^2)=5,$$ 左极限存在,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0,$$ 右极限存在,

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)$$ 不存在.

五、作业

练 习 题

一、填空题:

1、当 $x \to 2$ 时，$y = x^2 \to 4$，问当 δ 取____时，只要 $0 < |x-2| < \delta$，必有 $|y-4| < 0.001$.

2、当 $x \to \infty$ 时，$y = \dfrac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$，问当 z 取________时，只要 $|x| > z$，必有 $|y-1| < 0.01$.

二、用函数极限的定义 证明:

1、$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{1-4x^2}{2x+1} = 2$

2、$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

三、试证:函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

四、讨论：函数 $\phi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x \to 0$ 时的极限是否存在?

练习题答案

一、1、0.0002；　　　　　　　2、$\sqrt{397}$.

四、不存在.