第7章　二元关系

7.1 有序对与笛卡儿积

5. $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

逆命题$A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$不成立。

证明：

(1) 原命题为真。命题演算法。

(2) 逆命题为假，

当$A=B=\varnothing$时，或者$A\neq\varnothing$且$B\neq\varnothing$时，该命题的结论是成立的；

当A和B之中仅有一个为$\varnothing$时，结论不一定成立。

如，令$A=\varnothing, B=N, C=D=\{1\}$，

$A\times B\subseteq C\times D$，但$B\not\subseteq D$。

例 设$A=\{1,2\}$，求$P(A)\times A$

解：

$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(A)\times A$

$=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\times\{1,2\}$

$=\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\{1\},1>,<\{1\},2>,$

$<\{2\},1>,<\{2\},2>,<\{1,2\},1>,<\{1,2\},2>\}$

例 设A,B,C,D为任意集合,判断以下等式或命题是否成立,说明为什么？

1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

4) $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$(消去律)

5) 存在集合A，使得$A\subseteq A\times A$

解 1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

对于任意的$<x,y>$,

$<x,y>\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge y\in C\cap D$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\wedge <x,y>\in B\times D$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times C)\cap(B\times D)$ 所以等式成立

2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$ 不成立

例，若$A=D=\varnothing$，$B=C=\{1\}$

则有：$(A\cup B)\times(C\cup D)=B\times C=\{<1,1>\}$

$(A\times C)\cup(B\times D)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

反例，若$A=B=C=\{1\}$，$D=\{2\}$

则有：$(A-B)\times(C-D) = \varnothing$

$(A\times C)-(B\times D)=\{<1,1>\}$

所以，原式不成立。

7．2 二元关系Relation

二元关系

二元关系：集合中两个元素之间的某种联系。

例，甲、乙、丙三个人进行乒乓球比赛，如果任何两人之间都要赛一场，那么共要赛__场。

假设三场比赛的结果是乙胜甲、甲胜丙、乙胜丙，这个结果可以记作：

$$R=\{<乙,甲>,<甲,丙>,<乙,丙>\}$$

其中$<x,y>$表示x胜y。

例，有A,B,C三个人和四项工作$\alpha,\beta,\gamma,\delta$，已知A可以从事工作$\alpha,\delta$，B可以从事工作$\gamma$，C可以从事工作$\alpha,\beta$。那么人和工作之间的对应关系可以记作：

$$R=\{\langle A,\alpha\rangle,\langle A,\delta\rangle,\langle B,\gamma\rangle,\langle C,\alpha\rangle,\langle C,\beta\rangle\}$$

类似的如师生关系、教师开课关系、学生选课关系等。

定义 如果一个集合或者为空集，或者它的元素都是有序对，则称这个集合是一个二元关系，简称为关系，一般记作R。

对于二元关系R,

如果$<x,y>\in R$, 则记作xRy；

如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x\not R y$。

例，下列集合是否为关系？

{<1,2>,<a,b>}，{<1,2>,a,b}，$\varnothing$等。

定义 设A,B为集合，A×B的任何子集所代表的二元关系称作<u>从A到B的二元关系</u>；

特别当A=B时，则叫做<u>A上的二元关系</u>。

- $R \subseteq A \times B$, R is a relation from A to B.
- $R \subseteq A \times A$, R is a relation on A.

关系表示方法

1. 列举法

如，胜负关系R={<乙,甲>,<甲,丙>,<乙,丙>}

2. 描述法

例：实数集R上的大于关系。

$$\text{“}>\text{”} = \{\langle x,y\rangle \mid x\in R \wedge y\in R \wedge x>y\}$$

父子关系：

$$F=\{\langle x,y\rangle \mid x\text{是}y\text{的父亲}\}$$

关系表示方法

3. 关系矩阵表示法

- 适用于有限集上的关系。
- 设 A 、 B 都是有限集， $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$， $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$， 从A到B的关系R可以用一个m×n的矩阵M_R来表示， M_R的第i行第j列的元素r_{ij}取值如下：

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 若 a_i R b_j \\ 0 & 若 \langle a_i, b_j\rangle \notin R\end{cases}(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$$

矩阵M_R称为R的关系矩阵。

关系表示方法

例，设A＝{1,2,3,4}，A上的关系R={<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>} 。则R的关系矩阵：

4×4的矩阵，

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系表示方法

4. 关系图表示法

适用于有限集上的关系。

设 A 、 B 都是有限集， $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$， R是从A到B的关系，

a) 把A、B集合中的元素以点的形式全部画在平面上；

b) 若$a_i R b_j$， 则a_i和b_j之间画一箭头弧线， 反之不画任何连线。

上例的关系图如下，

关系表示方法

例， 人的集合{A,B,C}到工作的集合{α,β,γ,δ}的关系R={<A,α>,<A,δ>,<B,γ>,<C,α>,<C,β>}

关系矩阵：

关系图：

3种特殊的关系

设A为任意集合，A上有3种特殊的关系：

1. 空关系

$\varnothing \subseteq A\times A$，A上的空关系。

2. 全域关系E_A

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

3. 恒等关系I_A

$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

3种特殊的关系

例： $A=\{0,1,2\}$,则

$$E_A=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<1,1>,<1,2>,<2,0>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$$

常用的关系

1.小于等于关系

$$L_A=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x\leq y\},A\subseteq R$$

2.整除关系

$$D_A=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x\text{整除}y\},A\subseteq Z^+$$

3.包含关系

$$R_{\subseteq}=\{\langle x,y\rangle|x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\},\ A\text{为任意集合。}$$

常用的关系

例: A={-1, 0.5, 4}, B={1,2,3,6}, 求L_A与D_B。

L_A={<-1,-1>, <-1,0.5>, <-1,4>,
<0.5,0.5>, <0.5,4>, <4,4>}

D_B={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,
<2,2>,<2,6>,
<3,3>,<3,6>,
<6,6>
}

例 设$A=\{a,b\}$,

$$R=\{<x,y>|x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$$

则有

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},A\}$$

$$\begin{aligned}R=\{\ &<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,A>,\\ &<\{a\},\{a\}>,<\{a\},A>,\\ &<\{b\},\{b\}>,<\{b\},A>,\\ &<A,A>\\ \}\end{aligned}$$

作业

习题七

1,3,4

10,13