第三节 泰勒 (Taylor)公式

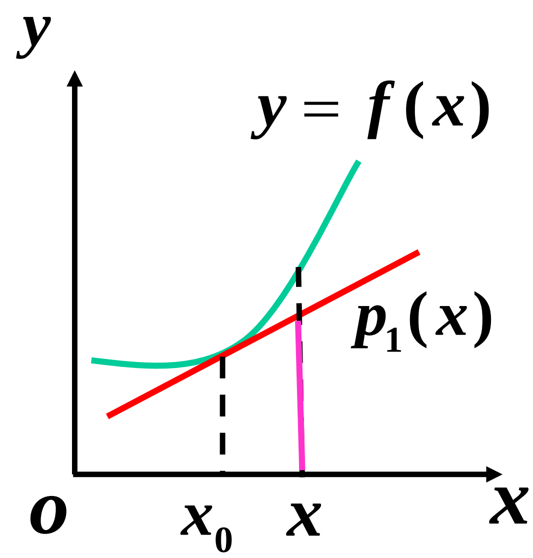
- 一、泰勒公式的建立
- 二、几个初等函数的麦克劳林公式
- 三、泰勒公式的应用
- 四、小结
- 五、作业

一、泰勒公式的建立

微分应用中已知近似公式

$$\underbrace{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

关于 x_0 的一次多项式



以直代曲

特点： $p_1(x_0) = f(x_0)$

$p_1'(x_0) = f'(x_0)$

需要解决的问题：如何提高近似精度？ 如何估计误差？

问题引入

多项式函数 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是一类简单的初等函数.

由于多项式函数只需简单运算就可求出其函数值，因此我们常常用多项式函数来近似表达函数. 而利用简单函数逼近（近似）复杂函数是数学中的重要思想方法.

本节将要介绍的泰勒中值定理就是利用高阶多项式来逼近已知函数.

问题引入

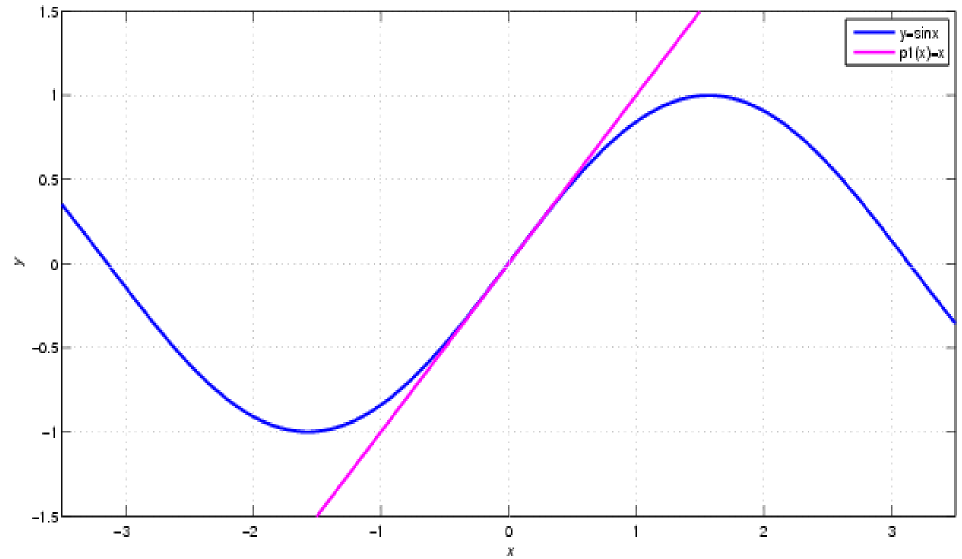
以正弦函数 $y = \sin x$ 为例:

一次多项式（线性）逼近

$x_0 = 0$ 时，有近似多项式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ \boxed{p_1(x) = x}$

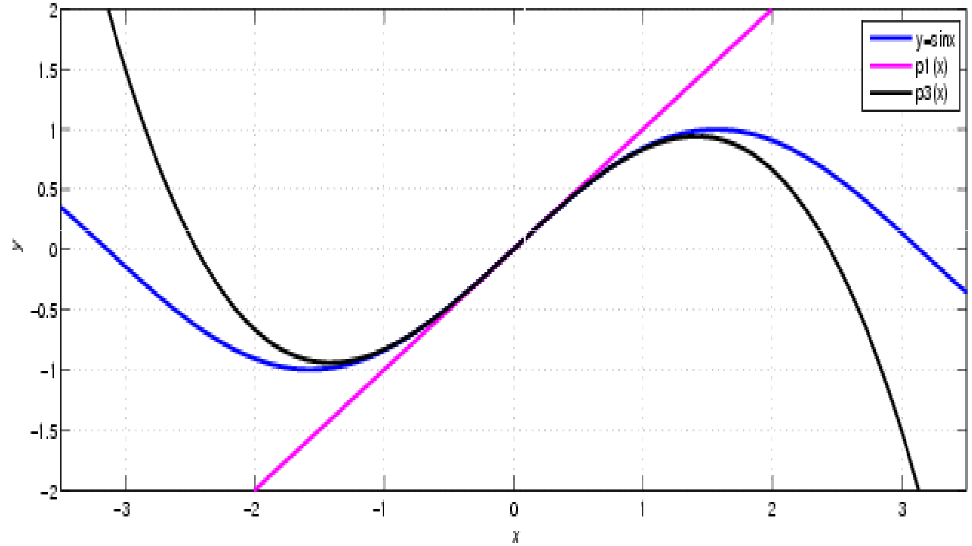


线性逼近优点：以直代曲，形式简单，计算方便；

线性逼近缺点：只在原点足够小的邻域内近似效果好；
离原点越远，近似效果越差；

三次多项式逼近

$$p_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$



令 $p_3(0)=f(0),$

$p_3'(0)=f'(0),$

$p_3''(0)=f''(0),$

$p_3'''(0)=f'''(0).$

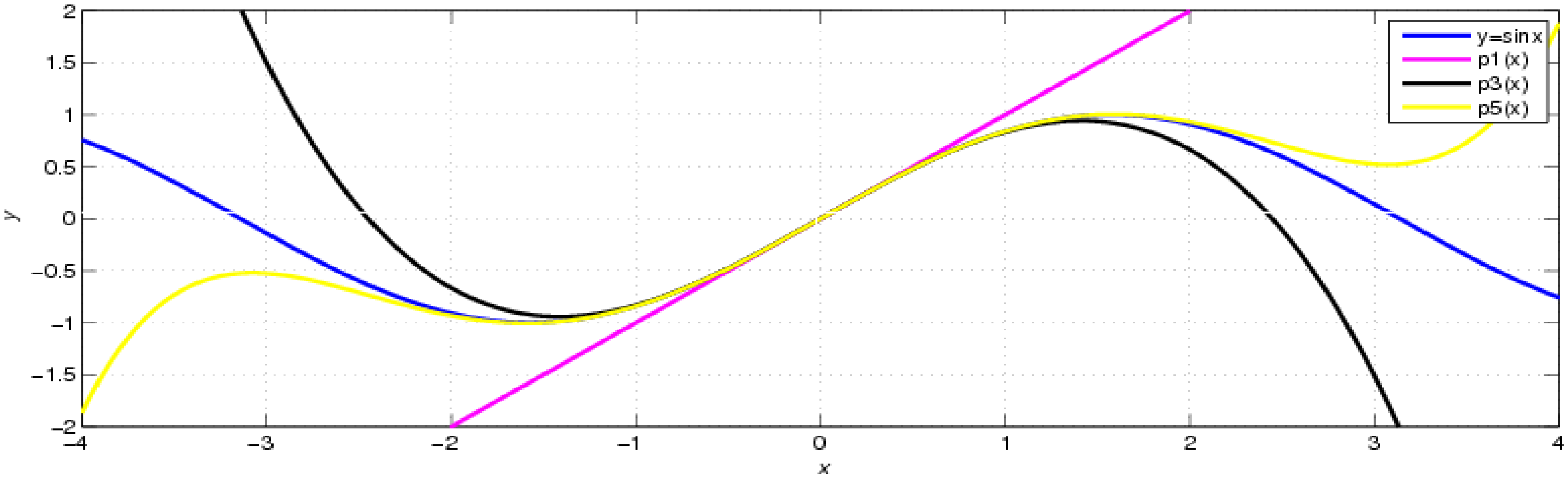
得 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-\dfrac{1}{3!}.$

$$p_3(x)=x-\frac{1}{3!}x^3$$

可以看出，$p_3(x)$要比 $p_1(x)$逼近效果好得多，但仅约在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内.

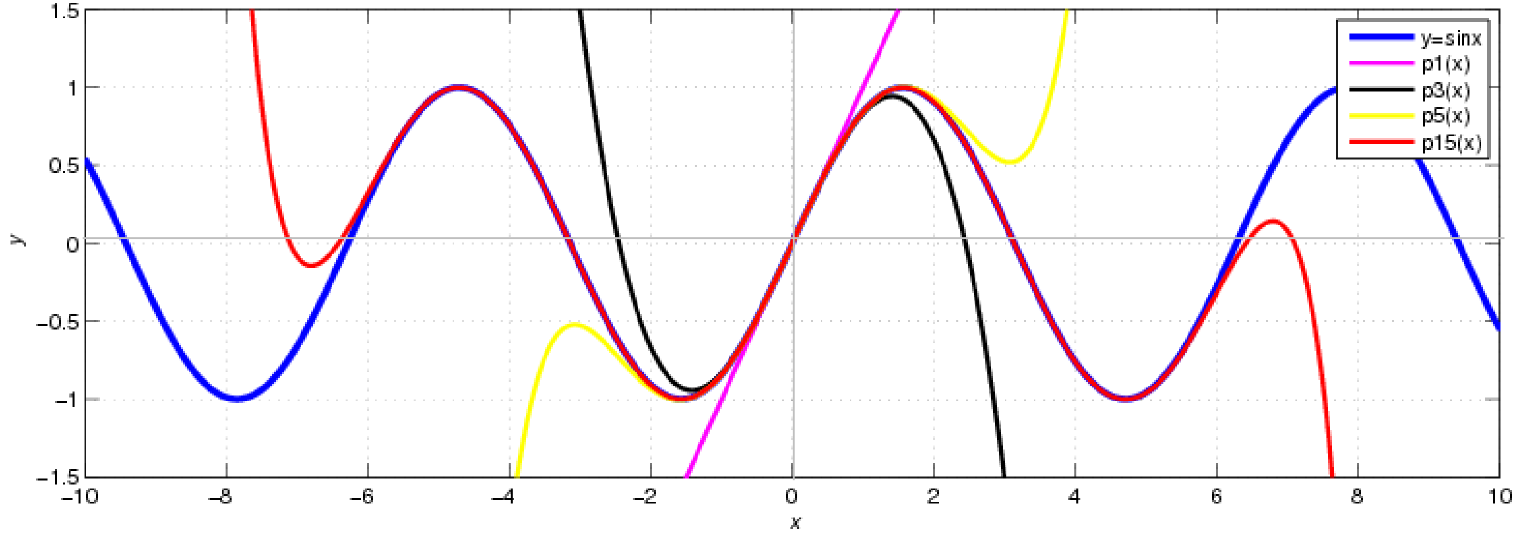
5次多项式逼近 $p_5(x) \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

$$p_5(0) = f(0),\ p_5'(0) = f'(0),\ p_5''(0) = f''(0)\ \ldots,\ p_5^{(5)}(0) = f^{(5)}(0)$$



可以看出，$p_5(x)$ 要比 $p_3(x)$ 逼近效果好，但约在区间$(-2,2)$内.

15次多项式逼近 $p_{15}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}$



可以看出：$p_{15}(x)$ 可在包含原点的较大的范围内逼近 $y = \sin x$.

问题的一般情形：

函数 $f(x)$ 满足什么条件时，可以得到n次近似多项式 $P_n(x)$， 要求：

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ P_n''(x_0)=f''(x_0),\dots,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

使其满足： (1) $P_n(x)$ 可近似表示函数 $f(x)$;

(2) 余项 $f(x)-p_n(x)=o[(x-x_0)^n]$;

(3) 余项 $f(x)-p_n(x)$ 有具体表达式.

1. 求 n 次近似多项式 $p_n(x)$

要求:

$$\boxed{p_n(x_0) = f(x_0),\ p_n'(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)}$$

令 $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$

则 $p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$

$p_n''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$

$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), \qquad a_2 = \frac{1}{2!}p_n''(x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0), \qquad \cdots$$

$$a_1 = p_n'(x_0) = f'(x_0), \qquad a_n = \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

故 $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

2. 余项估计

令 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$，称为余项(Remainder),

则有 $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

(ξ_1 在 x_0 与 x 之间)

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

(ξ_2 在 x_0 与 ξ_1 之间)

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots2(\xi_n-x_0)-0}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ 在 x_0 与 ξ_n 之间)

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because\ p_n^{(n+1)}(x) = 0, \quad \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi \text{在} x_0 \text{与} x \text{之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$ 时,

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

$$\therefore\ R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0)$$

3.泰勒中值定理

定理3.1 若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (3.1)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ在x_0与x之间） (3.2)

泰勒

(1685-1731)

公式(3.1) 称为 $f(x)$ 的 **n阶泰勒公式.**

公式(3.2) 称为 n阶泰勒公式的 **拉格朗日余项.**

3.泰勒中值定理

特殊情形：

(i) 当 $n=0$ 时，泰勒公式即为拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

(ii) 当 $n=1$ 时，泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{\boxed{f'(x_0)(x-x_0)}}_{df}+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

误差 $$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ (3.3)

在不需要余项的精确表达式时,泰勒公式可写为:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n] \tag{3.4}$$

式(3.3)称为 n 阶泰勒公式的佩亚诺(Peano)余项.

注: 可以证明

$f(x)$ 在点 x_0 有直到 n 阶的导数

$\Longrightarrow$ (3.4)式成立

3.泰勒中值定理

定理3.2 若 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则有

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\
& + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

公式(3) 称为 带有佩亚诺(Peano) 余项的n阶泰勒公式.

在泰勒公式中若取 $x_0=0, \xi=\theta x \ (0<\theta<1)$，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为麦克劳林(Maclaurin)公式.

由此得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$，则有误差估计式

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x)=e^x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=e^x,\ f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$

(2) $f(x)=\sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2} \quad =\begin{cases}0, & k=2m \\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1} \qquad (0<\theta<1)$

(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)\,!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta\, x)}{(2m+2)\,!}\, x^{2m+2} \quad (0<\theta<1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)= \quad \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

三、泰勒公式的应用

1. 在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

M 为 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1) 已知 x 和误差限, 要求确定项数 n ;

2) 已知项数 n 和 x, 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限,确定公式中 x 的适用范围.

例1. 计算无理数 e 的近似值, 使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

令 $x = 1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$, 欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立, 因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281$$

说明: 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 6 位, 则

各项舍入误差之和不超过 $7\times 0.5\times 10^{-6}$,

总误差为 $7\times 0.5\times 10^{-6}+10^{-6}<5\times 10^{-6}$

这时得到的近似值不能保证误差不超过 10^{-6}.

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位.

例2. 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值,

使其精确到 0. 005, 试确定 x 的适用范围.

解: 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \le \frac{|x|^4}{24}$$

令 $$\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$$

解得 $$|x| \le 0.588$$

即当 $|x| \le 0.588$ 时, 由给定的近似公式计算的结果

能准确到 0. 005.

2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解: 用泰勒公式将分子展到x^2项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0).$

证： $\because \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

四、内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$$

(ξ在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0=0$ 时为麦克劳林公式.

2. 常用函数的麦克劳林公式

e^x，$\ln(1+x)$，$\sin x$，$\cos x$，$(1+x)^\alpha$

3. 泰勒公式的应用

（1）近似计算

（2）利用多项式逼近函数, 例如 $\sin x$

（3）其他应用——求极限, 证明不等式等.

思考与练习

1.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

2. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续导数,且 $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(\frac{1}{2})=0$, 证明（0，1）内至少存在一点ξ,使$|f'''(\xi)|\geq 24$.

3. 证明e为无理数.

练习解答

1. 解：$\because \quad e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$\therefore \quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

2. 证: 由题设对 $x \in [0,1]$有

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\frac{1}{2})^3$$

$$=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\frac{1}{2})^3$$

(其中ζ在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1,$得

$$1 = f(0) = f(\frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\frac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\frac{1}{2})^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \frac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f(\frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\frac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\frac{1}{2})^3 \quad (\zeta_2 \in (\frac{1}{2}, 1))$$

下式减上式, 得

$$1 = \frac{1}{48}[\ f'''(\zeta_2) - f'''(\zeta_1)\ ] \le \frac{1}{48}[\ |f'''(\zeta_2)| + |f'''(\zeta_1)|\ ]$$

令 $|f'''(\zeta)| = \max(|f'''(\zeta_2)|, |f'''(\zeta_1)|)$

$$\le \frac{1}{24}|f'''(\zeta)| \quad \zeta \in (0,1)$$

$$\Longrightarrow |f'''(\zeta)| \ge 24$$

3. 证: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$

$\xrightarrow{\text{两边同乘} n!}$

$$n!e = \text{整数} + \frac{e^{\theta}}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设e为有理数 $\frac{p}{q}$ （p，q为正整数），

则当 $n \geq q$ 时，等式左边为整数；

当 $n \geq 2$ 时，等式右边不可能为整数.

矛盾！故e为无理数 .