1．2命题公式及其赋值

命题公式

命题公式(合式公式或公式)：由命题变量、命题常量、联结词、括号等以**规定的格式**联结起来的符号串。通常用大写的英文字母A、B、C等表示。

定义1.6 命题演算的**合式公式**，定义为：

1）单个命题变量或命题常量是合式公式；

2）若A是合式公式，则$(\neg A)$是合式公式；

3）若A、B是合式公式，则$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$是合式公式；

4）当且仅当**有限次的**应用了1）、2）、3）所得到的符号串是合式公式。

命题公式

说明：

- **递归定义**。
- 这里A、B表示任意的命题公式。

例，判断下列符号串是否是合式公式。

（1） $(p\vee q)$， $p\to(p\to q)$， $(p\wedge q)\leftrightarrow r$

（2） $pq\to r$， $p\vee q)\to r$，

$((p\to q)\to(q\to p)))$， $(p\to)$， $(p\vee\neg)$

命题公式

定义1.7 命题公式的**层次**的定义：

(1)若A是单个命题变量或常量，如p, q, r, …, p_i, q_j, r_k, …, 0, 1等，则称A是**0层公式**。

(2)称A是**n+1(n≥0)层公式**是指A符合下列情况之一：

① $A=\neg B$，B是n层公式；

② $A= B\wedge C$，或$A=B\vee C$，或$A=B\rightarrow C$，或$A=B\leftrightarrow C$，其中B，C分别为i层和j层公式，且 n=max(i, j)；

(3)若A的最高层次为k，则称A是**k层公式**。

例：$\neg(\neg p\wedge q)\rightarrow(r\vee s)$

命题公式的赋值

定义1.8 设$p_1,p_2,...,p_n$是出现在公式A中的**全部**命题变量，给$p_1,p_2,...,p_n$各指定一个**真值**，称为对公式A的一个**赋值**或**解释**。

若指定的一组值使A的真值为1，则称这个赋值为A的**成真赋值**。

若指定的一组值使A的真值为0，则称这个赋值为A的**成假赋值**。

说明：

1）若A中出现的命题变量为$p_1,p_2,...,p_n$，A的赋值$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$是指$p_1=\alpha_1,p_2=\alpha_2,..., p_n=\alpha_n$。

命题公式的赋值

例，对于公式$p \vee q \rightarrow r$，

- 赋值011（p=0，q=1，r=1）是**成真赋值**
- 赋值110（p=1，q=1，r=0）是**成假赋值**

2）含n（n≥1）个命题变量的公式共有__2^n__个不同的赋值。

真值表

定义1.9 命题公式A的每一个赋值，确定A的一个真值，把所有赋值下的A的取值情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表步骤：

1. 找出公式中所含的全体命题变量，按下标顺序或字典顺序排列；
2. 按从低到高的顺序写出公式的各个层次；
3. 列出所有赋值，从00…0到11…1，按二进制加法依次写出（2^n行）；
4. 对应每个赋值计算出各层次的真值，直到整个公式的真值。

真值表

例，求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

1）$\neg p \vee q$

2）$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3）$(p \wedge q) \wedge \neg q$

4）$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

真值表

解： 1）$\neg p \vee q$

按层次列出真值表如下，

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

这里只有10是成假赋值，其它是成真赋值。

真值表

2） $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$\neg p\wedge\neg q$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

这里00、11是成真赋值，01、10是成假赋值。

真值表

3） $(p\wedge q)\wedge\neg q$

p	q	$\neg q$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\wedge\neg q$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

全部为成假赋值。

真值表

4） $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

全部为成真赋值。

重言式与矛盾式

定义1.10 设A为任一命题公式，

1）若A对任意赋值，真值均为真，则称A为**重言式**或永真式。

2）若A对任意赋值，真值均为假，则称A为**矛盾式**或永假式。

3）若A不是矛盾式，则称A是可满足的。

说明： ①可通过真值表判断公式的类型。

②永真式、永假式互为否定：

$\neg T=F, \neg F=T$

第二章 命题逻辑等值演算

2．1 等值式

等值式

定义2.1 设A和B是两个命题公式, $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 是所有出现于A和B中的命题变量，如果对于$p_1,p_2,\ldots,p_n$的任一组赋值，A和B的真值都相同，则称公式A和B**等值**，记为 $A \Leftrightarrow B$，称$A \Leftrightarrow B$为**等值式**。

说明:

1. 两公式等值，真值表相同;
2. $A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是重言式;
3. 可用真值表证明逻辑等值。

等值式

注意：符号“$\Leftrightarrow$”与“$\leftrightarrow$”的区别与联系。

1. “$\Leftrightarrow$”不是联结词，$A\Leftrightarrow B$不是命题公式。它表示两个公式间的一种关系，即等值关系。
2. “$\leftrightarrow$”是联结词(运算符)，$A\leftrightarrow B$是一个命题公式。

$A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\leftrightarrow B$是重言式。

例，$(p\rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p\vee q)$

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$是重言式。

等值式

例．判断下列公式是否等值。

1）$\neg(p\wedge q)$与$\neg p\vee\neg q$

2）$p\leftrightarrow q$与$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

解：

1）$\neg(p\wedge q)$与$\neg p\vee\neg q$的真值表相同，且$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$是重言式。

2）真值表相同。

常用基本等值式(命题定律)

1） 双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

2） 幂等律 $A \wedge A \Leftrightarrow A$，$A \vee A \Leftrightarrow A$

3） 交换律 $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$，$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

4） 结合律 $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

5） 分配律 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6） 吸收律 $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$，$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

7） 德·摩根律 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

常用基本等值式(命题定律)

8） 同一律 $A\wedge 1\Leftrightarrow A$，$A\vee 0\Leftrightarrow A$

9） 零律 $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$，$A\vee 1\Leftrightarrow 1$

10） 排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

11） 矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

12） 蕴涵等值式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

13） 等价等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

14） 假言易位式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$

15） 等价否定等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg B\leftrightarrow\neg A$

这里的A、B、C代表任意命题公式，可用真值表证明。

常用基本等值式(命题定律)

每个等值式实际给出了无穷多个同类型的具体的等值式。

证明等值的方法

1. 真值表法；
2. 等值演算法：由已知的等值式，推演出另外一些等值式的过程称为**等值演算**。

等值演算

定义2.2 如果X是合式公式A的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式A的**子公式**。

如，$(p\rightarrow q)\rightarrow r$中， p、$p\rightarrow q$和$(p\rightarrow q)\rightarrow r$都是它的子公式。

等值演算

置换规则(等值置换)：设X是合式公式A的子公式，若X⇔Y，如果将A中的X用Y来置换得到公式B，则公式B与公式A等值，即A⇔B。

证明：

对A、B的任一赋值，X与Y的真值相同，

而A、B的其它部分完全相同，

所以公式B与公式A的真值必相同，有A⇔B。

等值演算

例，用置换规则消去公式$(p \to q) \to r$中的“$\to$”联结词。

等值演算的用途

1. 验证两个公式等值
2. 判别命题公式的类型
3. 解决实际问题

等值演算的用途

例：用等值演算法证明等值式

1) $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r \Leftrightarrow q\to(p\to r)$

2) $p\to(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\to q)\wedge(p\to r)$

$p\to(q\vee r) \Leftrightarrow (p\to q)\vee(p\to r)$

3) $(p\vee q)\to r \Leftrightarrow (p\to r)\wedge(q\to r)$

$(p\wedge q)\to r \Leftrightarrow (p\to r)\vee(q\to r)$

4) $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

$(p\to q)\wedge(q\to p)$ $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$

$((\neg p\vee q)\wedge p)\vee((\neg p\vee q)\wedge\neg q)$

等值演算的用途

例：判别下列公式的类型

1. $q \lor \neg((\neg p \lor q) \land p)$　　重言式
2. $(p \lor \neg p) \to ((q \land \neg q) \land r)$　　矛盾式
3. $(p \to q) \land \neg p$　　可满足式
4. $(p \to q) \land p \to q$　　重言式

等值演算的用途--解决实际问题

例，A,B,C,D四人做百米竞赛，观众甲、乙、丙预报比赛的名次为：

甲：B第二，C第一；

乙：C第二，D第三；

丙：A第二，D第四。

比赛结束后发现甲、乙、丙每人预报的情况都是各对一半，试问实际名次如何(无并列者)？

解：

设p_i,q_i,r_i,s_i表示：A,B,C,D是第i名，i=1,2,3,4。

则实际情况为：

① 甲的判断对一半：$(q_2\wedge\neg r_1)\vee(\neg q_2\wedge r_1) \Leftrightarrow 1$

② 乙的判断对一半：$(r_2\wedge\neg s_3)\vee(\neg r_2\wedge s_3) \Leftrightarrow 1$

③ 丙的判断对一半：$(p_2\wedge\neg s_4)\vee(\neg p_2\wedge s_4) \Leftrightarrow 1$

且①∧②∧③⇔1

①∧②⇔1，C不能既第一又第二，B和C不能都第二，所以

④ $(\neg q_2\wedge r_1\wedge\neg r_2\wedge s_3)\vee(q_2\wedge\neg r_1\wedge\neg r_2\wedge s_3)\Leftrightarrow 1$

③∧④⇔1 A，B不能同时第二，D不能第三又第四，所以

$p_2\wedge\neg s_4 \wedge\neg q_2 \wedge r_1\wedge\neg r_2\wedge s_3 \Leftrightarrow 1$

所以C第一，A第二，D第三，B第四。

作业

习题一(p15)

19(4)(5)

20(1)(3)

21(2)

作业

习题二(p39)

4

17(1)(3)

18(2)(3)

20(1)

29*