第十四章 图的基本概念

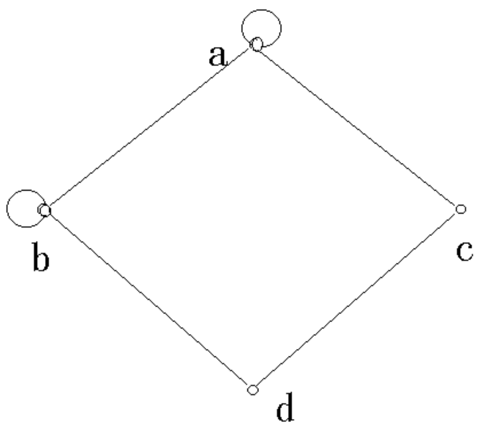
14．1 图

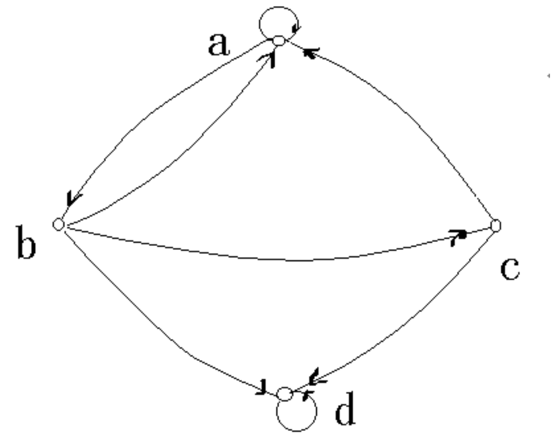
平行边 多重图 简单图

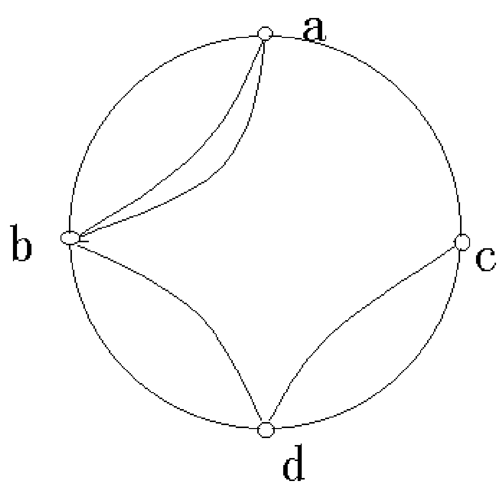
定义

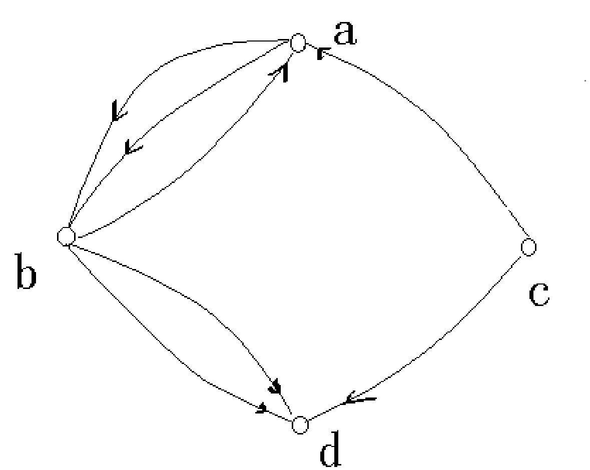
1. 在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多于1条，称这些边为平行边。平行边的条数称为重数。
2. 在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多于1条，且它们的始点与终点相同(方向相同)，则称这些边为平行边。
3. 含平行边的图称为多重图。
4. 既不含平行边，也不含环的图称为简单图。

平行边 多重图 简单图

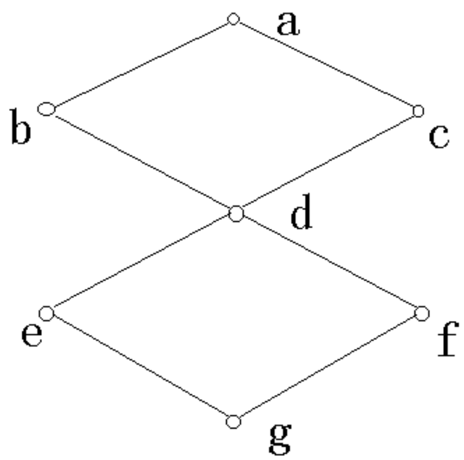


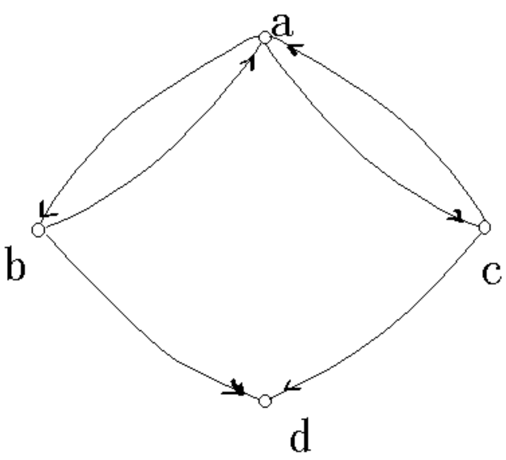






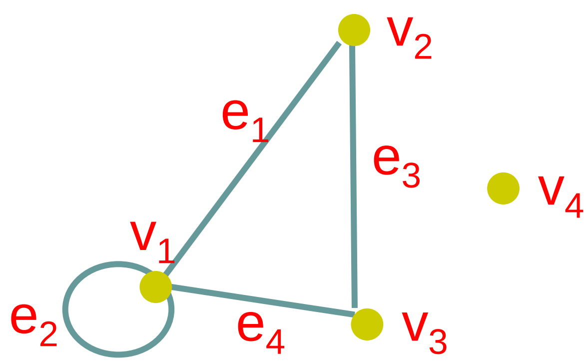
平行边 多重图 简单图





度

定义　设G=<V,E>为一无向图，∀v∈V，称v作为边的端点的次数之和为v的度数，简称度，记作d(v)。

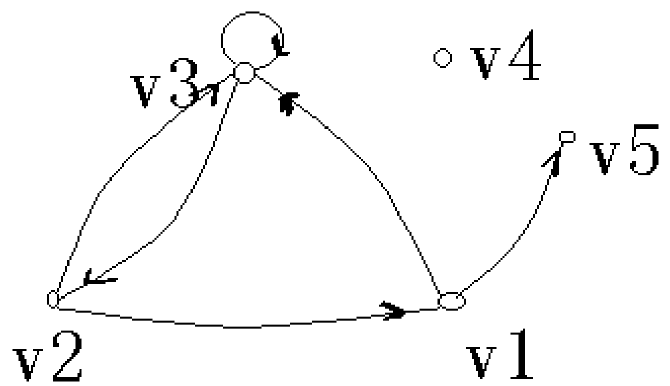


度

定义 设D=<V,E>为一有向图，∀v∈V，

1. 称v作为边的始点的次数之和为v的出度，记作$d^+(v)$；
2. 称v作为边的终点的次数之和为v的入度，记作$d^-(v)$；
3. 称v作为边的端点的次数之和为v的度数，简称度，记作d(v)，显然

$$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$$



1. $d^+(v_1)=2$ ， $d^-(v_1)=1$， $d(v_1)=3$
2. $d^+(v_2)=2$ ， $d^-(v_2)=1$， $d(v_2)=3$
3. $d^+(v_3)=2$ ， $d^-(v_3)=3$， $d(v_3)=5$
4. $d(v_4)=d^+(v_4)=d^-(v_4)=0$
5. $d^+(v_5)=0$ ， $d^-(v_5)=1$， $d(v_5)=1$

度

定义 称度数为1的顶点为**悬挂顶点**，与它关联的边称为**悬挂边**。

度为偶数的顶点称为**偶度顶点**，

度为奇数的顶点称为**奇度顶点**。

最大度和最小度

定义 对于图G=<V,E>(无向图或有向图)，记

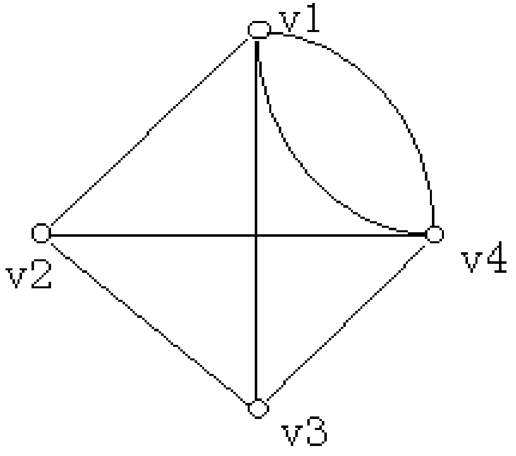
$$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V(G)\}$$

$$\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V(G)\},$$

分别称为G的**最大度**和**最小度**。

$\Delta(G)=4$

$\delta(G)=3$



最大度和最小度

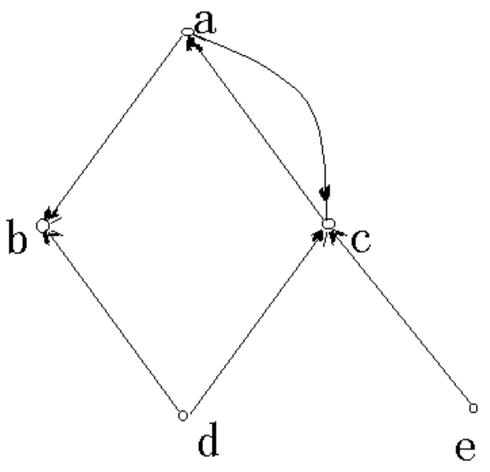
定义 若D=<V,E>是有向图，除了$\Delta(D)$,$\delta(D)$外，还有**最大出度**、**最大入度**、**最小出度**、**最小入度**，分别定义为：

$$\Delta^+(G) = \max\{d^+(v) \mid v\in V(G)\}$$

$$\Delta^-(G) = \max\{d^-(v) \mid v\in V(G)\}$$

$$\delta^+(G) = \min\{d^+(v) \mid v\in V(G)\}$$

$$\delta^-(G) = \min\{d^-(v) \mid v\in V(G)\}$$



握手定理(基本定理)

定理　设G=<V,E>为任意无向图，V={$v_1, v_2, \ldots, v_n$}，|E|=m(m为边数)，则

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(v_i) = 2m$$

证明：

G中每条边(包括环)有两个端点，提供2度，

∴m条边共提供2m度。

握手定理(基本定理)

定理 设D=<V,E>为任意**有向图**，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(v_i) = 2m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}^{-}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}^{+}(v_i) = m$$

D中每条边(包括环)有两个端点，提供1个出度、1个入度，

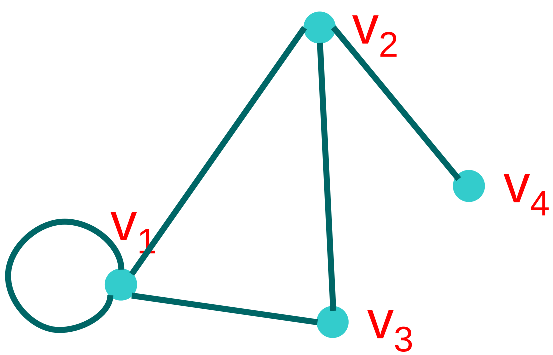
∴m条边共提供m个出度、m个入度。

14．1 图

度数列

定义：设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$为图G的顶点集，称$d=(d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n))$为G的**度数列**。

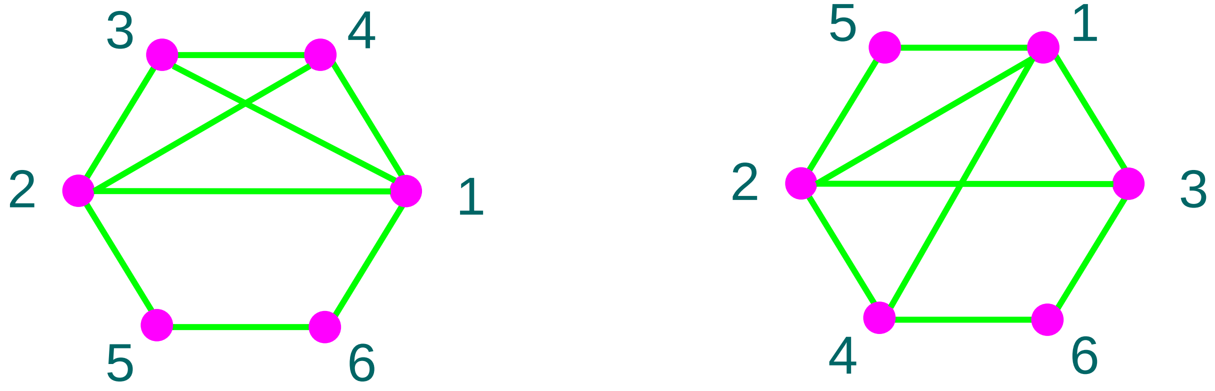
1) 顶点标定的无向图，度数列惟一。



$d_1=(4,3,2,1)$

度数列

2) 一个度数列惟一地确定一个顶点标定的无向图?



d=(4,4,3,3,2,2)

度数列

定义 对于非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，

1. 若存在以$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$为顶点集的n阶无向图G，使得$d(v_i)=d_i$，则称d是**可图化的**。
2. 若G是简单图，则称d是**可简单图化的**。

度数列——可图化

定理 设非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，则d是**可图化的**当且仅当$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数。

例，(3,3,2,3),(5,2,3,1,4)能成为图的度数列吗？

度数列(可简单图化)

定理 设G为任意**n阶无向简单图**，则

$\Delta(G) \leq n-1$

说明：此定理为可简单图化的必要条件。

例，判断下列非负整数列是否可图化?可简单图化?

1. (5,4,3,2,2)
2. (3,3,3,1)
3. (2,3,2,1)