5.3 一阶逻辑推理理论

关于量词的推理规则

1. 全称量词消去规则(∀-)

   $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$或$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$ US

2. 全称量词引入规则(∀+)

   $A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$ UG

3. 存在量词引入规则(∃+)

   $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$ ES

4. 存在量词消去规则(∃-)

   $\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$ EG

一阶逻辑自然推理系统$\mathscr{F}$

定义：自然推理系统$\mathscr{F}$

1. 字母表：同一阶语言的字母表；
2. 合式公式：同一阶语言的合式公式；
3. 推理规则：
   1) 前提引入规则(P规则)：在证明的任何步骤上，都可引入前提。
   2) 结论引入规则(T规则)：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可以作为后续证明的前提，在后续证明中引用。

自然推理系统$\mathscr{F}$

3) 置换规则：在证明的任何步骤上，谓词公式的子公式都可以用与它等值的其它公式置换。

4) 假言推理规则：$A \to B, A \Rightarrow B$

5) 附加规则：$A \Rightarrow A \vee B$

6) 化简规则：$A \wedge B \Rightarrow A$

7) 拒取式规则：$A \to B, \neg B \Rightarrow \neg A$

8) 假言三段论：$A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C$

自然推理系统$\mathscr{F}$

9) 析取三段论规则：$A \vee B, \neg B \Rightarrow A$

10) 构造性二难规则：$A \to B, C \to D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$

11) 合取引入规则：$A, B \Rightarrow A \wedge B$

12) $\forall$-规则；

13) $\forall$+规则；

14) $\exists$+规则；

15) $\exists$-规则。

其中1)~11)同命题逻辑的推理规则

A,B,C,D为任意谓词公式。

例，证明苏格拉底三段论“凡人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的”

证明：

令$P(x)$:x是人；$D(x)$:x是要死的；

a:苏格拉底

前提：$\forall x(P(x) \rightarrow D(x))$，$P(a)$

结论：$D(a)$

①$\forall x(P(x) \rightarrow D(x))$	前提引入
②$P(a) \rightarrow D(a)$	①$\forall$-
③$P(a)$	前提引入
④$D(a)$	②③假言推理

例： 构造下面推理的证明

前提： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x)),\ \exists x(F(x)\wedge R(x))$

结论： $\exists x(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$

证明:

① $\exists x(F(x)\wedge R(x))$	前提引入
② $F(c)\wedge R(c)$	①$\exists$-
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x))$	前提引入
④ $F(c)\rightarrow G(c)\wedge H(c)$	③$\forall$-
⑤ $F(c)$	②化简规则
⑥ $G(c)\wedge H(c)$	④⑤假言推理
⑦ $G(c)$	⑥化简规则
⑧ $F(c)\wedge R(c)\wedge G(c)$	②⑦合取引入
⑨ $\exists x(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$	⑨$\exists$+

说明

- 推导中既用∃-，又用∀-，则必须先用∃-，后用∀-，才可使用相同常量名，反之不行。

例：构造下面推理的证明(p81,21)

前提：$\neg\exists x(W(x)\wedge C(x)),\ \forall x(B(x)\rightarrow W(x))$

结论：$\forall x(B(x)\rightarrow\neg C(x))$

① $\neg\exists x(W(x)\wedge C(x))$	前提引入
② $\forall x(\neg W(x)\vee\neg C(x))$	①置换
③ $\forall x(W(x)\rightarrow\neg C(x))$	②置换
④ $W(y)\rightarrow\neg C(y)$	③$\forall$-
⑤ $\forall x(B(x)\rightarrow W(x))$	前提引入
⑥ $B(y)\rightarrow W(y)$	⑤$\forall$-
⑦ $B(y)\rightarrow\neg C(y)$	⑥④假言三段论
⑧ $\forall x(B(x)\rightarrow\neg C(x))$	⑦$\forall$+

说明

- 推导中连续使用∀-规则时，可用相同变量名。

  如前④⑥

总结——关于量词的推理规则

1. 关于量词的推理规则看课件，课上讲的就足够了。

作业

习题五(p80) :

15,

24,

25,

习题六(p96)

5,

6,

8(4),