实例

4. 设Σ是字母的有穷集，称为**字母表**，Σ中的有限个字母组成的序列称为Σ上的**串**。对任何串ω，串中字母的个数叫做**串的长度**，记作**|ω|**。长度是0的串叫做**空串**。记作λ，对任给的自然数k，令

$$\sum^{k} = \{v_1 v_2 \cdots v_k \mid v_i \in \sum, i = 1, 2, \cdots, k\}$$

特别有: $\sum^{0} = \{\lambda\},$

$\sum^{+} = \sum^{1} \cup \sum^{2} \cup \cdots,$

$\sum^{*} = \sum^{0} \cup \sum^{1} \cup \cdots,$

1) 规定Σ^*上的二元运算$\circ$如下：

$$\forall \omega,\varphi \in \Sigma^*,\ \omega=a_1a_2\ldots a_m,\ \varphi=b_1b_2\ldots b_n$$

$$\omega \circ \varphi=a_1a_2\ldots a_mb_1b_2\ldots b_n$$

运算$\circ$把串φ接在串ω的后面，称之为**连接运算**，它是Σ^*上的二元运算，则有性质：

① 交换律，幂等律： **不满足**

② 结合律，消去律： **满足**

$\forall \omega,\varphi,\gamma \in \Sigma^*$有，$(\omega\circ\varphi)\circ\gamma=\omega\circ(\varphi\circ\gamma)$

③ 单位元：空串λ；$\lambda^{-1}=\lambda$ **零元？可逆元素？**

2) Σ^*上的一元运算：求一个串的反串,记作’，

$\forall\omega\in\Sigma^*$, 若$\omega=a_1a_2\ldots a_n$,有

$$\omega' = a_n \ldots a_2a_1$$

$\forall\omega\in\Sigma^*$,如果$\omega'=\omega$，则称该串是一个回文。

如,1,100001,10101等都是{0,1}*上的回文。

9.2 代数系统

代数系统

定义 非空集合S和S上的k个一元或二元运算 $f_1,f_2,\ldots,f_k$ 组成的系统称为一个**代数系统**，简称**代数**，记作 $<S,f_1,f_2,\ldots,f_k>$。

例，以下代数系统：

1) $<N,+>$，$<Z,+,\cdot>$，$<R,+,\cdot>$，$<M_n(R),+,\times>$

2) $<P(S),\cap,\cup,\sim>$

代数系统

3) $<Z_n,\oplus,\otimes>$是代数系统，其中

$Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$,

$\oplus$和$\otimes$分别表示**模n加法**和**模n乘法**，

$\forall x,y\in Z_n$, $x\oplus y=(x+y) \bmod n$,

$x\otimes y=(x\times y) \bmod n$

代数常数

二元运算的**单位元**或**零元**，对系统性质起着重要的作用，称之为系统的**特异元素**或**代数常数**。

- 强调存在：$<Z,+,0>$, $<P(S),\cap,\cup,\sim,\varnothing,S>$等
- 简记：$Z,R,P(S),Z_n$等

代数系统

代数系统的**构成成分**：集合，运算和代数常数。

定义 如果两个代数系统中：

1. 运算的个数相同；
2. 对应运算的元数相同；
3. 且代数常数的个数也相同，

则称这两个代数系统**具有相同的构成成分**，也称它们是**同类型**的代数系统。

- 如，$<R,+,\times,-,0,1>$、$<P(S),\cup,\cap,\sim,\varnothing,S>$与$<\{0,1\},\vee,\wedge,\neg,0,1>$同类型。
- 但运算性质不一定相同。

代数系统

定义 设V= $\langle S,f_1,f_2,\ldots,f_k\rangle$是代数系统，B$\subseteq$S且B$\neq\varnothing$，如果B对$f_1,f_2,\ldots,f_k$都是**封闭的**，且B和S含有**相同的代数常数**，则称$\langle B,f_1,f_2,\ldots,f_k\rangle$是V的**子代数系统**，简称**子代数**。

说明：

1. f_i在子集B上**封闭**$(i=1,2,\ldots,k)$；
2. 若f_i是一元运算，$\forall b\in B$, $f_i b\in B$；
3. 若f_i是二元运算，$\forall a,b\in B$, $af_i b\in B$。

代数系统

例，

1. <N,+,0>是<Z,+,0>、<R,+,0>的子代数。
   1) N⊆Z⊆R；
   2) N对加法封闭；
   3) 具有相同的代数常数0。
2. <N-{0},+>不是<Z,+,0>、<R,+,0>、<Z,+>、<R,+>的子代数。
   - 因为代数常数0不出现在N-{0}中。

代数系统

任意代数系统$V=<S,f_1,f_2,\ldots,f_k>$，其子代数一定存在。

最大子代数：V

最小子代数：若令V中所有的代数常数构成集合B，则B对V中所有的运算都是封闭的，B构成了V的最小子代数。

平凡子代数

真子代数：$B \subset S$

代数系统

例 设$V = <Z,+,0>$,令

$$A=\{nz|z\in Z\},\ n\in N$$

$$B=\{z^2|z\in Z\}$$

判断A、B是否是V的子代数？

解： 1) $A\subseteq Z$， A关于+运算是否封闭？

$\forall nz_1,nz_2\in A$， 有

$$nz_1+nz_2 = n(z_1+z_2) \in A$$

即A对+运算是封闭的。

代数系统

$0=n\cdot 0\in A$，代数常数相同，

所以，<A,+,0>是<Z,+,0>的子代数。

当n=1时，A=Z，最大子代数

当n=0时,A={0}，最小子代数

2) $B\subseteq Z$

B关于+运算是否封闭？

$2^2+3^2=13\notin B$，所以B不是V的子代数。

作业（习题九p178）

- 2，4，5，6，7
- 8，9，11，12，15

作业（习题十，p203）

- 5