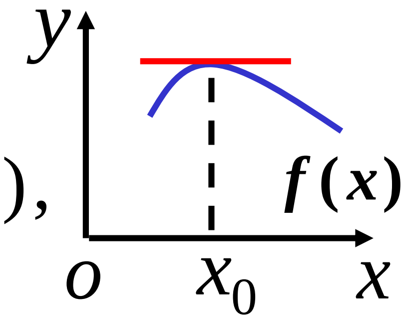
第一节、微分中值定理

- 一、罗尔定理
- 二、拉格朗日中值定理
- 三、柯西中值定理
- 四、小结
- 五、作业

一、罗尔(Rolle)定理

1. 费马(Fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \text{ 在 } \bigcup(x_0) \text{ 有定义,} \\ \text{且 } f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0) \text{ 存在} \\ \qquad (\text{或} \ge) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

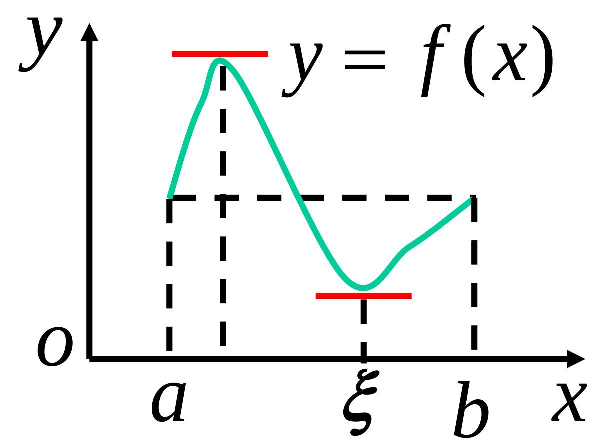


证: 设 $\forall x_0+\Delta x \in \bigcup(x_0),\ f(x_0+\Delta x)\le f(x_0),$

则 $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\begin{cases} f'_-(x_0)\ge 0 & (\Delta x\to 0^-) \\ f'_+(x_0)\le 0 & (\Delta x\to 0^+) \end{cases} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

2.罗尔(Rolle)定理



$y = f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a,b) 内可导

(3) $f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi) = 0$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故在 $[a,b]$ 上取得

最大值 M 和最小值 m

若 M = m, 则 $f(x) \equiv M$, $x \in [a,b]$,

因此 $\forall \xi \in (a,b)$, $f'(\xi) = 0$.

若 M > m, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等,

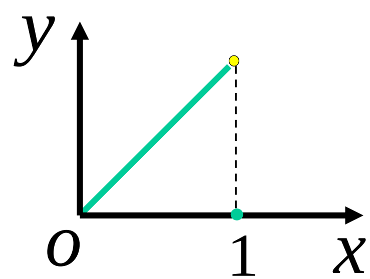
不妨设 $M \neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$f(\xi) = M$,则由费马引理得 $f'(\xi) = 0$.

注意:

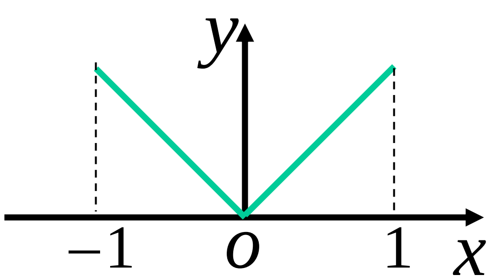
1) 定理条件不全具备, 结论不一定成立. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



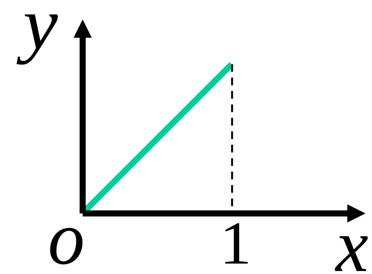
$f(x) = |x|$

$x \in [-1,1]$



$f(x) = x$

$x \in [0,1]$



2) 定理条件只是充分的. 本定理可推广为

$y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0.$

证明提示: 设

$$F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$$

证 F(x) 在 [a , b] 上满足罗尔定理.

例1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根 .

证: 1) 存在性 .

设 $f(x)=x^5-5x+1$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 ,且

$f(0)=1,\ f(1)=-3.$ 由介值定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使

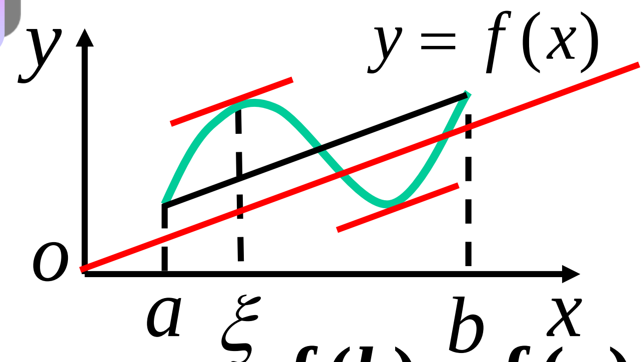
$f(x_0)=0,$ 即方程有小于 1 的正根 $x_0.$

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0, \because f(x)$在以 x_0, x_1为端点的区间满足罗尔定理条件 , $\therefore$ 在 x_0, x_1之间至少存在一点ξ，使 $f'(\xi)=0.$

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0,\ x\in(0,1),$ 矛盾, 故假设不真!

二、拉格朗日中值定理



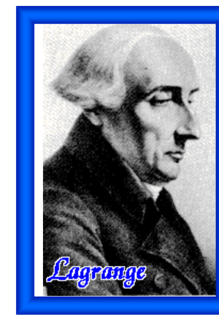
$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在区间 (a,b) 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$



作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}x$

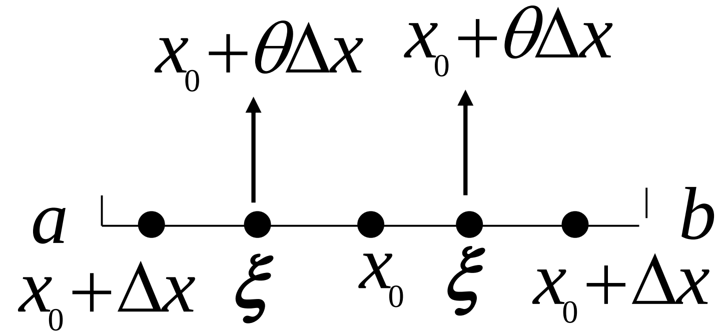
显然, $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$\varphi(a) = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a} = \varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存

在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即定理结论成立.

注：1、上述定理称**拉格朗日（Lagrange）中值定理**，对 $a \geq b$ 的情形仍成立.

2、定理的另种书写形式：



$$x_0, x_0+\Delta x \in (a,b),$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x. \quad (0<\theta<1)$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量 Δy 的精确表达式.

拉格朗日中值定理又称**有限增量定理.**

推论: 若函数 $f(x)$在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv 0$,则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$，在$[x_1, x_2]$上用Lagrange中值公式 , 得

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$$

$$= 0 \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

$$\therefore \quad f(x_2) = f(x_1)$$

由 x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$在 I 上为常数 .

例2. 证明等式 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1,1]$

$$\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

证: 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$， 则在 $(-1,1)$ 上

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0$$

由推论可知 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=C$ **(常数)**

令 $x=0$，得 $C=\frac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1)=\frac{\pi}{2}$，故所证等式在定义域 $[-1,1]$ 上成立.

注: 欲证 $x\in I$ 时，$f(x)=C_0$，只需证在 I 上 $f'(x)\equiv 0$，且 $\exists x_0\in I$，使 $f(x_0)=C_0$.

例3. 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0).$

证: 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0,x]$上满足

Lagrange 中值定理条件, 因此应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \quad 0<\xi<x$$

即 $$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}, \qquad 0<\xi<x$$

因为 $$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$$

故 $$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \qquad (x>0)$$

三、柯西(Cauchy)中值定理

柯西，A. -L.

$f(x)$及 $F(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$ 上连续

(2) 在开区间(a,b) 内可导

(3)在开区间 (a,b) 内$F'(x)\neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析: $F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)\neq 0 \quad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}=0$

$\varphi'(\xi)$

$$\Longrightarrow \varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$$

证: 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,在 (a,b) 内可导, 且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0,$ 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗？

$$\left.\begin{aligned}\because\ f(b)-f(a)&=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)\\ F(b)-F(a)&=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)\end{aligned}\right\}\ \text{两个}\ \xi\ \text{不一定相同}$$

上面两式相比即得结论. 错！

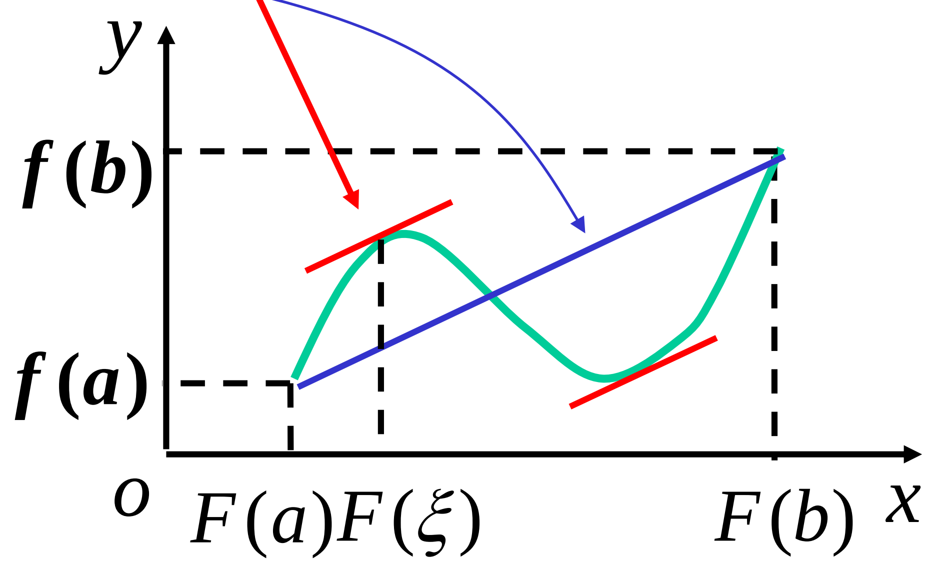
柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}}=\boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

注意: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f'(t)}{F'(t)}$



例4. 设 $f(x)$在 $[0,1]$上连续,在 $(0,1)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证: 结论可变形为

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

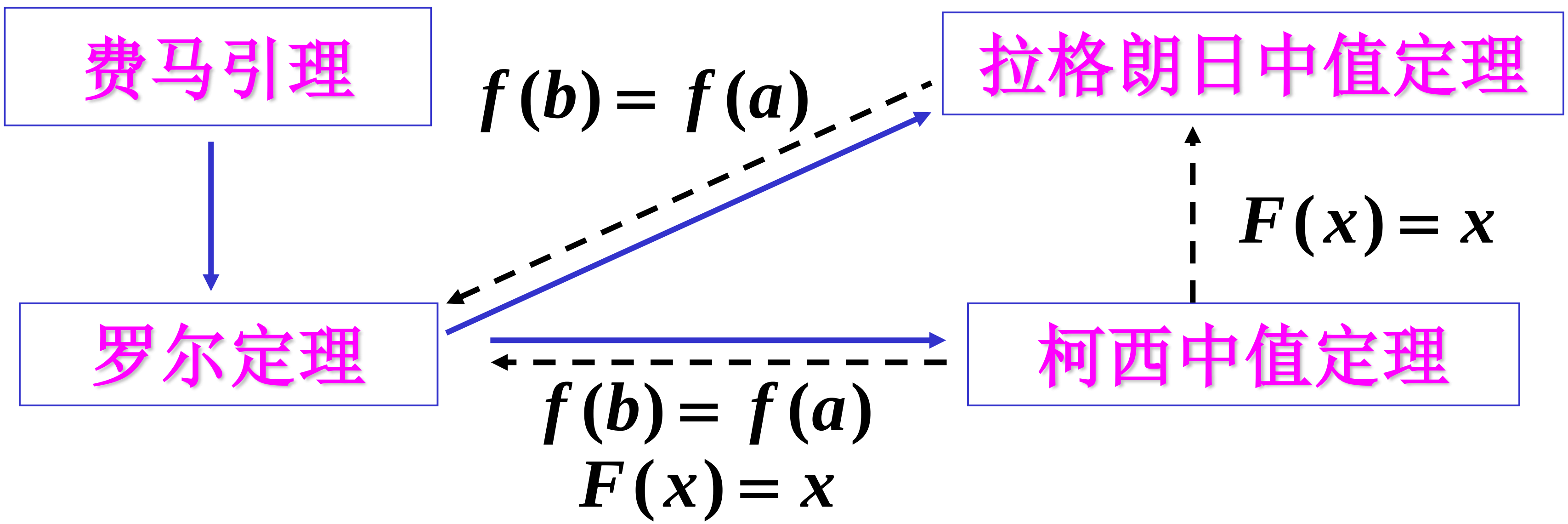
设 $F(x) = x^2$,则 $f(x), F(x)$在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1) - f(0)}{F(1) - F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $\quad f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$

四 小 结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数

五、作 业

中值定理-1（周一）：

习题3-1：1，2，4，6，7，8

中值定理-2（周三）：

习题3-1：10，11，13，15，20