



# 1. 2命题公式及其赋值

# 命题公式

**命题公式(合式公式或公式)**: 由命题变量、命题常量、联结词、括号等以**规定的格式**联结起来的符号串。通常用大写的英文字母A、B、C等表示。

**定义1.6** 命题演算的**合式公式**, 定义为:

- 1) 单个命题变量或命题常量是合式公式;
- 2) 若A是合式公式, 则 $(\neg A)$ 是合式公式;
- 3) 若A、B是合式公式, 则 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 是合式公式;
- 4) 当且仅当**有限次的**应用了1)、2)、3) 所得到的符号串是合式公式。



# 命题公式

## 说明:

○递归定义。

○这里A、B表示任意的命题公式。

**例**，判断下列符号串是否是合式公式。

(1)  $(p \vee q)$ ,  $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ ,  $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

(2)  $pq \rightarrow r$ ,  $p \vee q) \rightarrow r$ ,

$((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ ,  $(p \rightarrow)$ ,  $(p \vee \neg)$



# 命题公式

**定义1.7** 命题公式的**层次**的定义：

- (1) 若A是单个命题变量或常量，如 $p, q, r, \dots, p_i, q_j, r_k, \dots, 0, 1$ 等，则称A是**0层公式**。
- (2) 称A是 **$n+1 (n \geq 0)$ 层公式**是指A符合下列情况之一：
  - ①  $A = \neg B$ ，B是n层公式；
  - ②  $A = B \wedge C$ ，或 $A = B \vee C$ ，或 $A = B \rightarrow C$ ，或 $A = B \leftrightarrow C$ ，其中B，C分别为i层和j层公式，且  $n = \max(i, j)$ ；
- (3) 若A的最高层次为k，则称A是**k层公式**。

**例：**  $\neg(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

# 命题公式的赋值

**定义1.8** 设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是出现在公式A中的全部命题变量，给 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 各指定一个真值，称为对公式A的一个赋值或解释。

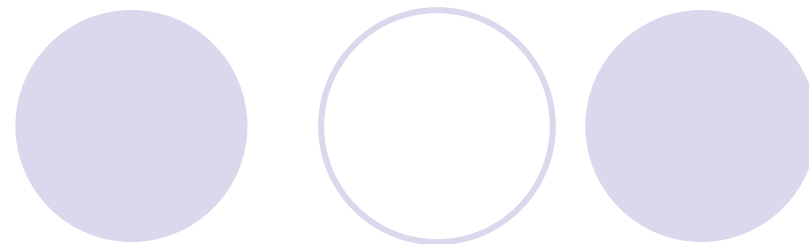
若指定的一组值使A的真值为1，则称这个赋值为A的成真赋值。

若指定的一组值使A的真值为0，则称这个赋值为A的成假赋值。

**说明：**

- 1) 若A中出现的命题变量为 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，A的赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是指 $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \dots, p_n = \alpha_n$ 。

# 命题公式的赋值



**例**，对于公式 $p \vee q \rightarrow r$ ，

○赋值011 ( $p=0, q=1, r=1$ ) 是成真赋值

○赋值110 ( $p=1, q=1, r=0$ ) 是成假赋值

2) 含 $n$  ( $n \geq 1$ ) 个命题变量的公式共有  $2^n$  个不同的赋值。

# 真值表

**定义1.9** 命题公式A的每一个赋值，确定A的一个真值，把**所有赋值**下的A的取值情况列成表，称作A的**真值表**。

## 构造真值表步骤：

1. 找出公式中所含的全体命题变量，按下标顺序或字典顺序排列；
2. 按从低到高的顺序写出公式的各个层次；
3. 列出所有赋值，从00...0到11...1，**按二进制加法依次写出**（ $2^n$ 行）；
4. 对应每个赋值计算出各层次的真值，直到整个公式的真值。



# 真值表

**例**，求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

1)  $\neg p \vee q$

2)  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3)  $(p \wedge q) \wedge \neg q$

4)  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$



# 真值表

解： 1)  $\neg p \vee q$

按层次列出真值表如下，

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

这里只有10是成假赋值，其它是成真赋值。



# 真值表

2)  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

这里00、11是成真赋值，01、10是成假赋值。

# 真值表

3)  $(p \wedge q) \wedge \neg q$

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge \neg q$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

全部为成假赋值。

# 真值表

4)  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

全部为成真赋值。

# 重言式与矛盾式

**定义1.10** 设A为任一命题公式，

- 1) 若A对任意赋值，真值均为真，则称A为重言式或永真式。
- 2) 若A对任意赋值，真值均为假，则称A为矛盾式或永假式。
- 3) 若A不是矛盾式，则称A是可满足的。

**说明：**①可通过真值表判断公式的类型。

②永真式、永假式互为否定：

$$\neg T = F, \neg F = T$$



## 第二章 命题逻辑等值演算

### 2. 1 等值式

# 等值式

**定义2.1** 设A和B是两个命题公式,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是所有出现于A和B中的命题变量, 如果对于  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的任一组赋值, A和B的真值都相同, 则称公式A和B**等值**, 记为  $A \Leftrightarrow B$ , 称  $A \Leftrightarrow B$  为**等值式**。

**说明:**

1. 两公式等值, 真值表相同;
2.  $A \Leftrightarrow B$  当且仅当  $A \leftrightarrow B$  是重言式;
3. 可用真值表证明逻辑等值。

# 等值式

**注意：**符号“ $\Leftrightarrow$ ”与“ $\leftrightarrow$ ”的区别与联系。

1. “ $\Leftrightarrow$ ”不是联结词， $A\Leftrightarrow B$ 不是命题公式。它表示两个公式间的一种**关系**，即等值关系。

2. “ $\leftrightarrow$ ”是联结词(**运算符**)， $A\leftrightarrow B$ 是一个命题公式。

$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是重言式。

**例**， $(p\rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ 是重言式。



# 等值式

**例.** 判断下列公式是否等值。

1)  $\neg(p \wedge q)$  与  $\neg p \vee \neg q$

2)  $p \leftrightarrow q$  与  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

**解:**

1)  $\neg(p \wedge q)$  与  $\neg p \vee \neg q$  的真值表相同, 且  
 $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$  是重言式。

2) 真值表相同。

# 常用基本等值式(命题定律)

- 1) 双重否定律  $A \Leftrightarrow \neg \neg A$
- 2) 幂等律  $A \wedge A \Leftrightarrow A, A \vee A \Leftrightarrow A$
- 3) 交换律  $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- 4) 结合律  $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$   
 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- 5) 分配律  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$   
 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- 6) 吸收律  $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A, A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
- 7) 德·摩根律  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$   
 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$



# 常用基本等值式(命题定律)

8) 同一律

$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A, A \vee 0 \Leftrightarrow A$$

9) 零律

$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0, A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

10) 排中律

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

11) 矛盾律

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

12) 蕴涵等值式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

13) 等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

14) 假言易位式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

15) 等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg B \leftrightarrow \neg A$$

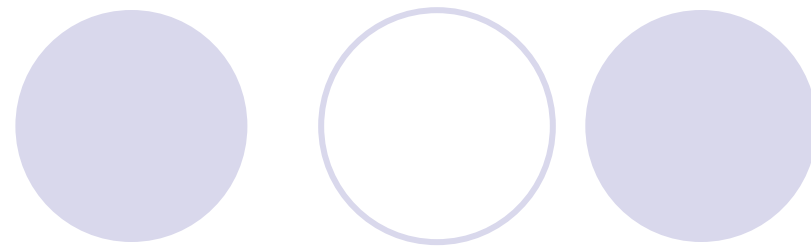
这里的A、B、C代表任意命题公式，可用真值表证明。



# 常用基本等值式(命题定律)

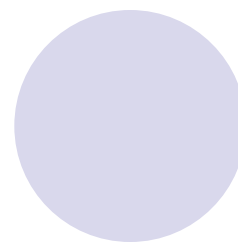
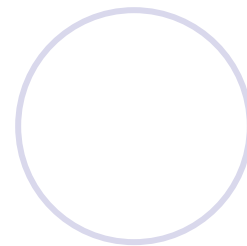
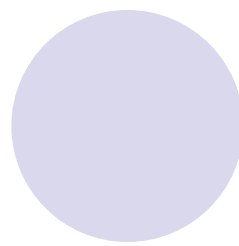
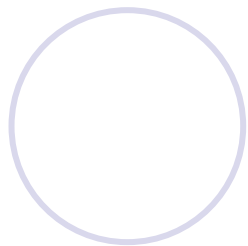
每个等值式实际给出了无穷多个同类型的具体的等值式。

# 证明等值的方法



1. 真值表法;
2. 等值演算法: 由已知的等值式, 推演出另外一些等值式的过程称为**等值演算**。

# 等值演算



**定义2.2** 如果 $X$ 是合式公式 $A$ 的一部分，且 $X$ 本身也是一个合式公式，则称 $X$ 为公式 $A$ 的**子公式**。

**如**， $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 中， $p$ 、 $p \rightarrow q$ 和 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 都是它的子公式。

# 等值演算

**置换规则(等值置换)**: 设 $X$ 是合式公式 $A$ 的子公式, 若 $X \Leftrightarrow Y$ , 如果将 $A$ 中的 $X$ 用 $Y$ 来置换得到公式 $B$ , 则公式 $B$ 与公式 $A$ 等值, 即 $A \Leftrightarrow B$ 。

**证明:**

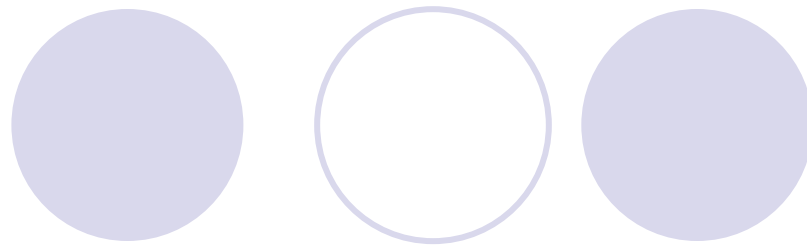
对 $A$ 、 $B$ 的任一赋值,  $X$ 与 $Y$ 的真值相同, 而 $A$ 、 $B$ 的其它部分完全相同, 所以公式 $B$ 与公式 $A$ 的真值必相同, 有 $A \Leftrightarrow B$ 。

# 等值演算

**例**，用置换规则消去公式 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 中的“ $\rightarrow$ ”  
联结词。



# 等值演算的用途



1. 验证两个公式等值
2. 判别命题公式的类型
3. 解决实际问题

# 等值演算的用途

例：用等值演算法证明等值式

$$1) p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$2) p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

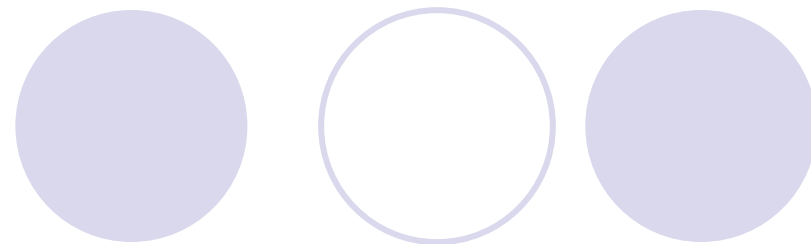
$$3) (p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$4) p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\ ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge \neg q)$$

# 等值演算的用途



**例：** 判别下列公式的类型

1.  $q \vee \neg((\neg p \vee q) \wedge p)$

重言式

2.  $(p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r)$

矛盾式

3.  $(p \rightarrow q) \wedge \neg p$

可满足式

4.  $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

重言式

# 等值演算的用途--解决实际问题

**例**，A,B,C,D四人做百米竞赛，观众甲、乙、丙预报比赛的名次为：

甲：B第二，C第一；

乙：C第二，D第三；

丙：A第二，D第四。

比赛结束后发现甲、乙、丙每人预报的情况都是各对一半，试问实际名次如何(无并列者)？



解:

设 $p_i, q_i, r_i, s_i$ 表示: A,B,C,D是第 $i$ 名,  $i=1,2,3,4$ 。

则**实际情况**为:

① 甲的判断对一半:  $(q_2 \wedge \neg r_1) \vee (\neg q_2 \wedge r_1) \Leftrightarrow 1$

② 乙的判断对一半:  $(r_2 \wedge \neg s_3) \vee (\neg r_2 \wedge s_3) \Leftrightarrow 1$

③ 丙的判断对一半:  $(p_2 \wedge \neg s_4) \vee (\neg p_2 \wedge s_4) \Leftrightarrow 1$

且① $\wedge$ ② $\wedge$ ③ $\Leftrightarrow 1$

① $\wedge$ ② $\Leftrightarrow 1$ , C不能既第一又第二, B和C不能都第二, 所以

④  $(\neg q_2 \wedge r_1 \wedge \neg r_2 \wedge s_3) \vee (q_2 \wedge \neg r_1 \wedge \neg r_2 \wedge s_3) \Leftrightarrow 1$

③ $\wedge$ ④ $\Leftrightarrow 1$  A, B不能同时第二, D不能第三又第四, 所以

$p_2 \wedge \neg s_4 \wedge \neg q_2 \wedge r_1 \wedge \neg r_2 \wedge s_3 \Leftrightarrow 1$

所以C第一, A第二, D第三, B第四。





作业

习题一(p15)

19(4)(5)

20(1)(3)

21(2)



作业

习题二(p39)

4

17(1)(3)

18(2)(3)

20(1)

29\*