第六章 集合代数

集合的运算

定义 设A与B为集合,

$A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$

$A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$,若$A\cap B=\varnothing$,称它们是**不相交**的。

$A-B=\{x|(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$, B对A的**相对补集**。

绝对补集: $\sim A=E-A=\{x|\ x\in E\wedge x\notin A\}$或

$\sim A=\{x|\ x\notin A\}$

对称差:$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{x|x\in A\,\overline{\vee}\,x\in B\}$

实例

已知： $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c\}$

计算： $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $A\oplus B$

解：

$A\cup B=\{a,b,c\}$ $A\cap B=\{a\}$

$A-B=\{b\}$ $B-A=\{c\}$

$A\oplus B=\{b,c\}$

n个集合的并集和交集

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\}$$

可以把n个集合的并和交简记为：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

集合运算的主要算律

设A,B,C为任意集合,

1. 双重否定律　　$\sim(\sim A)=A$
2. 幂等律　　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$
3. 交换律　　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$
4. 结合律　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
5. 分配律　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
　　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

集合运算的主要算律

6. 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$
7. 德·摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

   $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

   $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$，$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

   $\sim E=\varnothing$，$\sim\varnothing=E$
8. 同一律 $A\cap E=A$，$A\cup\varnothing=A$
9. 零律 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup E=E$
10. 排中律 $A\cup\sim A=E$
11. 矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$

证明集合恒等式的方法

1. 根据定义进行证明

   证明用到谓词逻辑的等值式及推理规则。

   如， $A-B=A\cap\sim B$

2. 利用已有的集合恒等式证明新的恒等式——恒等演算。

   如下例。

?

恒等演算

求证： $A\cap(A\cup B)=A$

证明：

$$
\begin{aligned}
& A\cap(A\cup B) \\
={}& (A\cup\varnothing)\cap(A\cup B) \\
={}& A\cup(\varnothing\cap B) \\
={}& A\cup\varnothing \\
={}& A
\end{aligned}
$$

求证： $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

证明(根据定义)：对任意x,

$x\in A-(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in B\wedge\neg x\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A-B)\wedge(x\in A-C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

故 $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

集合运算性质(一)

1. $A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$
2. $A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$
3. $A - B \subseteq A$
4. $A - B = A \cap \sim B$
5. $(A - B) \cup B = A \cup B$，$(A \cup B) - B = A - B$
6. 若$A \subseteq B$和$C \subseteq D$, 则$A \cap C \subseteq B \cap D$, $A \cup C \subseteq B \cup D$
7. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

实例(方法2)

求证： $(A-B) \cup B = A \cup B$

证明：

$(A-B) \cup B$

$= (A \cap {\sim}B) \cup B$

$= (A \cup B) \cap ({\sim}B \cup B)$

$= (A \cup B) \cap E$

$= A \cup B$

集合运算性质(二)

1. $A \oplus B = B \oplus A$
2. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
3. $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) \cap (\sim A \cup \sim B)$
4. $A \oplus A = \varnothing$
5. $A \oplus \varnothing = A$
6. $\sim A \oplus \sim B = A \oplus B$
7. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

实例(方法2)

化简：

$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B-C)) \cap A)$

解：

原式$= (A \cup B) - A = B - A$

实例

已知$A \oplus B = A \oplus C$，证明$B = C$

证明：

$A \oplus B = A \oplus C$

则，$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$

$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$

$\varnothing \oplus B = \varnothing \oplus C$

所以，$B = C$

作业

习题六， p96

8(4),

14(2)

19

28(3)

45