

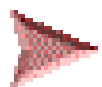
# 第四节、有理函数的积分



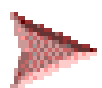
一、有理函数的积分



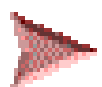
二、三角函数有理式的积分



三、简单无理函数的积分



四、小结、思考题



五、作业

# 一、有理函数的积分

## 1.有理函数的定义:

两个多项式的商表示的函数称之为有理函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

其中 $m$ 、 $n$ 都是非负整数;  $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 及  
 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 都是实数, 并且 $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ .

假定分子与分母之间没有公因式

(1)  $n < m$ , 这有理函数是真分式;

(2)  $n \geq m$ , 这有理函数是假分式;

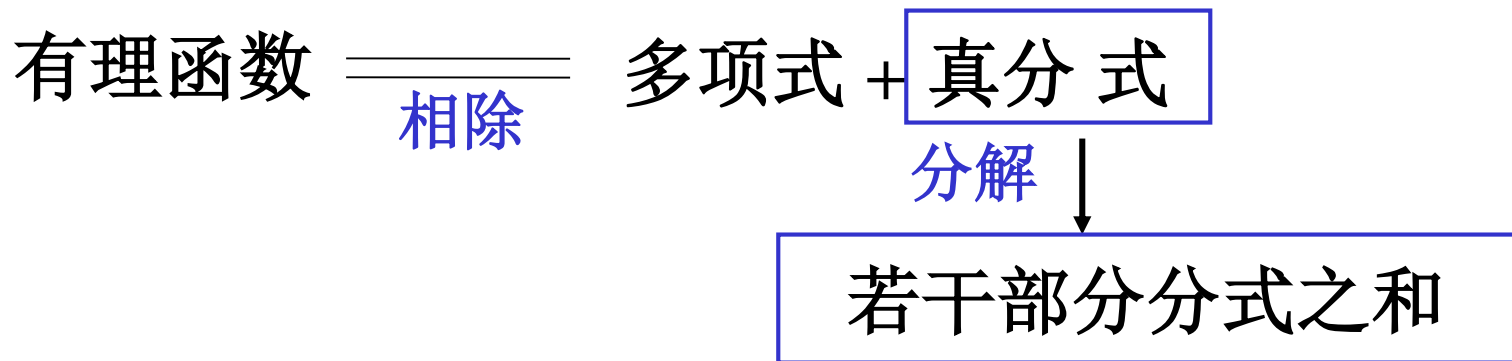
## 2.有理函数的分解:

有理函数  $\xrightarrow{\text{相除}}$  多项式 + 真分式

例  $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}$  . 若干部分分式之和

分解 ↓

难点 将有理函数化为部分分式之和.



有理函数化为部分分式之和的一般规律:

(1) 分母中若有因式  $(x-a)^k$ , 则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x-a},$$

其中  $A_1, A_2, \dots, A_k$  都是常数.

特殊地:  $k=1$ , 分解后为  $\frac{A}{x-a}$ ;

(2) 分母中若有因式  $(x^2 + px + q)^k$  , 其中  $p^2 - 4q < 0$  则分解后为

$$\frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \cdots + \frac{M_kx + N_k}{x^2 + px + q}$$

其中  $M_i, N_i$  都是常数 ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

特殊地:  $k = 1$ , 分解后为  $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ ;

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1) \frac{1}{x(x-1)^2}; \quad (2) \frac{x+3}{x^2-5x+6}; \quad (3) \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解: (1) 用拼凑法

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

## (2) 用赋值法

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

$$\therefore 1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1) \quad (1)$$

代入特殊值来确定系数  $A, B, C$

$$\text{取 } x = 0, \Rightarrow A = 1 \quad \text{取 } x = 1, \Rightarrow B = 1$$

$$\text{取 } x = 2, \text{ 并将 } A, B \text{ 值代入 (1)} \Rightarrow C = -1$$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

### (3) 用待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\because x+3 = A(x-3) + B(x-2),$$

$$\therefore x+3 = (A+B)x - (3A+2B),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$$

$$\text{故 原式} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$



### 3.有理函数的积分:

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} (x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \\ 4. \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{变分子为} \\ \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \\ \text{再分项积分} \end{array}$$

$(p^2 - 4q < 0, n \neq 1)$

例2 求积分  $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$ .

解 
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx &= \int \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right] dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

例3. 求  $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$ .

解: 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5} \left[ \frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{2}{5} \int \frac{d(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C \end{aligned}$$

例4. 求  $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx$ .

解: 原式  $= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 3}{x^2+2x+3} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

**说明：**将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法。

**例5.** 求  $I = \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ .

**解：**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx + \int \frac{2x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^4 + 5x^2 + 4)}{x^4 + 5x^2 + 4} + \int \frac{(x^2 + 1) + (x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^4 + 5x^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + \arctan x + C \end{aligned}$$

例6. 求  $\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$ .

解: 原式  $= \int \frac{(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$

$$= \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1} - \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$
$$= \arctan(x + 1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C$$

例7. 求  $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

解: 原式 =  $\frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

注意本题技巧  
按常规方法较繁

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C \quad (x \neq 0)$$

## 二、三角函数有理式的积分

设  $R(\sin x, \cos x)$  表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

↓ 令  $t = \tan \frac{x}{2}$

万能代换

$t$  的有理函数的积分



$$t = \tan \frac{x}{2}, \text{ 则}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

例8. 求  $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$  .

解: 令  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left( t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} t^2 + 2t + \ln |t| \right) + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

**例9.** 求  $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a b \neq 0) .$

**解:** 原式  $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\mathrm{d} \tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C$$

**说明:** 通常求含  $\sin^2 x, \cos^2 x$  及  $\sin x \cos x$  的有理式的积分时, 用代换  $t = \tan x$  往往更方便.

**例10.** 求  $\int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \quad (ab \neq 0).$

**解法 1**

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{(a \tan x + b)^2 \cos^2 x}$$

↓ 令  $t = \tan x$

$$= \int \frac{dt}{(at + b)^2} = -\frac{1}{a(at + b)} + C$$

$$= -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C$$

**例10.** 求  $\int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \quad (ab \neq 0).$

---

**解法 2** 令  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2 + b^2} \int \frac{dx}{\cos^2(x - \varphi)}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \tan(x - \varphi) + C$$

$$\varphi = \arctan \frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \tan\left(x - \arctan \frac{a}{b}\right) + C$$

**例11.** 求  $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} dx$  .

**解:** 因被积函数关于  $\cos x$  为奇函数, 可令  $t = \sin x$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{(\cos^2 x - 2)\cos x dx}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} = -\int \frac{(\sin^2 x + 1)d\sin x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} \\ &= -\int \frac{(t^2 + 1)dt}{1 + t^2 + t^4} = -\int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + 1 + \frac{1}{t^2}} dt = -\int \frac{d(t - \frac{1}{t})}{(t - \frac{1}{t})^2 + 3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x} + C \end{aligned}$$

### 三、简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式, 可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx, \quad \text{令 } t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx, \quad \text{令 } t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx,$$

令  $t = \sqrt[p]{ax+b}$ ,  $p$  为  $m, n$  的最小公倍数.

**解决方法** 作代换去掉根号.



例12. 求  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$ .

解: 令  $u = \sqrt[3]{x+2}$ , 则  $x = u^3 - 2$ ,  $dx = 3u^2 du$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u} du = 3 \int \frac{(u^2-1)+1}{1+u} du$$

$$= 3 \int \left( u - 1 + \frac{1}{1+u} \right) du$$

$$= 3 \left[ \frac{1}{2} u^2 - u + \ln|1+u| \right] + C$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3 \sqrt[3]{x+2}$$

$$+ 3 \ln \left| 1 + \sqrt[3]{x+2} \right| + C$$

**例13.** 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ .

**解:** 为去掉被积函数分母中的根式, 取根指数 2, 3 的最小公倍数 6, 令  $x = t^6$ , 则有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} \\&= 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\&= 6 \left[ \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln|1+t| \right] + C \\&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C\end{aligned}$$

例14. 求  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$  .

解: 令  $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ , 则  $x = \frac{1}{t^2 - 1}$ ,  $dx = \frac{-2t dt}{(t^2 - 1)^2}$

$$\text{原式} = \int (t^2 - 1)t \cdot \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

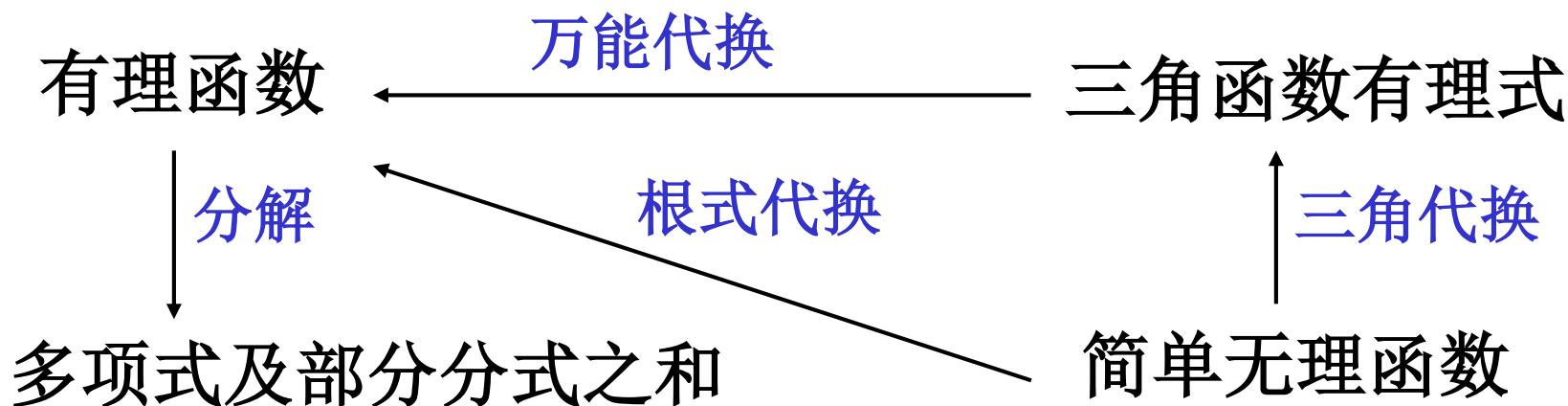
$$= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= -2 \sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln |2x + 2x\sqrt{x+1} + 1| + C$$

## 四、小结、思考题

### 内容小结

#### 1. 可积函数的特殊类型



2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出,但不一定简便,要注意综合使用基本积分法,简便计算.

## 思考与练习

如何求下列积分更简便？

$$1. \int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a > 0)$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

解: 1. 原式 =  $\frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3} \right| + C$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \\ &= \int \frac{d \tan x}{\tan x} + \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} = \ln |\tan x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C \end{aligned}$$

## 五、作业

习题4-5: 1 (单)