第四节、隐函数和参数方程求导 相关变化率

- 一、隐函数的导数
- 二、由参数方程确定的函数的导数
- 三、相关变化率
- 四、小结
- 五、作业

一、隐函数的导数

若由方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 是 x 的函数，则称此函数为隐函数 .

由 $y=f(x)$ 表示的函数 , 称为显函数 .

例如 $x-y^3-1=0$ 可确定显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$.

$y^5+2y-x-3x^7=0$ 可确定 y 是 x 的函数 ,

但此隐函数不能显化 .

隐函数求导方法: $F(x,y)=0$

$\Big\downarrow$ 两边对 x 求导,视 y 为 x 的函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$$ (含导数 y' 的方程)

例1. 求由方程 $y^3+2xy-x^2+y+e^y-e^x=0$

确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解: 方程两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^3+2xy-x^2+y+e^y-e^x)=0$$

得 $$3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-e^x=0$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^x+2x-2y}{3y^2+e^y+2x+1}$$

$$\boxed{y^3+y+e^y-1=0}$$

因x=0时, y =0 , 故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{1}{2}$

例2. 求曲线 $2x^2+3x+y^2-2y=3$ 在点(0,3)处的切线方程.

解 曲线方程两边对x求导

$$4x+3+2y\cdot y'-2y'=0,\quad y'=\frac{-4x-3}{2y-2}$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=0\\y=3}}=-\frac{3}{4}.$$

故切线方程为 $y-3=-\frac{3}{4}(x-0)$

即 $3x+4y-12=0$

对数求导法　在函数 $y=f(x)$ 的两边取对数, 然后再求出 y 的导数.

例4. 求 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$ 的导数.

解: 两边取对数， 化为隐式

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

两边对 x 求导

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore\quad y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

说明:

1) 对幂指函数 $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$ 可用**对数求导法求导**:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{u' v}{u}$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u' v}{u} \right)$$

注意: $$y' = \underbrace{u^v \ln u \cdot v'}_{\text{按指数函数求导公式}} \; \underbrace{+ v u^{v-1} \cdot u'}_{\text{按幂函数求导公式}}$$

2) 有些显函数用对数求导法求导很方便 .

例如

$$y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\quad\left(a>0\,,b>0\,,\frac{a}{b}\neq 1\right)$$

两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b}+a[\ln b-\ln x]+b[\ln x-\ln a]$$

两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$$

$$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$$

又如 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

$$\big\downarrow \text{两边取对数}$$

$$\boxed{(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

$$\big\downarrow \text{对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

二、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数关系，$\varphi(t), \psi(t)$ 可导，且单调连续。则

$\varphi'(t) \neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\psi'(t) \neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

(此时看成 x 是 y 的函数)

例3. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}.$$

例4. 抛射体运动轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

求抛射体在时刻t的运动速度的大小和方向.

解: 先求速度大小:

速度的水平分量为 $\dfrac{dx}{dt} = v_1$, 垂直分量为 $\dfrac{dy}{dt} = v_2 - gt$,

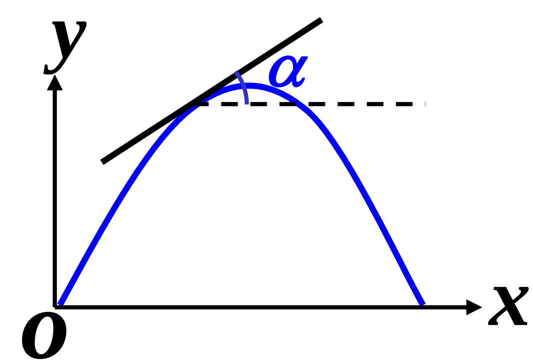
故抛射体速度大小

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_1^{\,2} + (v_2 - gt)^2}$$

再求速度方向 (即轨迹的切线方向):

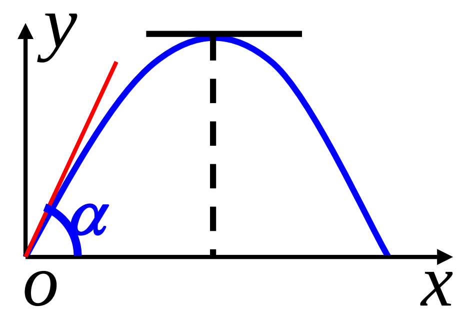
设 α 为切线倾角, 则

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{v_2 - gt}{v_1}$$



在刚射出(即$t=0$)时, 倾角为

$$\alpha=\arctan\frac{v_2}{v_1}$$



达到最高点的时刻$t=\dfrac{v_2}{g}$, 高度$y\Big|_{t=\frac{v_2}{g}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{v_2^2}{g}$

落地时刻 $t=\dfrac{2v_2}{g}$， 抛射最远距离 $x\Big|_{t=\frac{2v_2}{g}}=\dfrac{2v_1v_2}{g}$.

抛射体轨迹的参数方程 $\begin{cases} x=v_1t \\ y=v_2t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

速度的水平分量 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_1$， 垂直分量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_2-gt$,

速度的方向 $\tan\alpha=\dfrac{v_2-gt}{v_1}$

三、相关变化率

$x = x(t)$, $y = y(t)$ 为两可导函数

x , y 之间有联系 $\longrightarrow$ $\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{\text{称为相关变化率}}$ 之间也有联系

相关变化率问题解法:

找出相关变量的关系式

$\Big\downarrow$ 对 t 求导

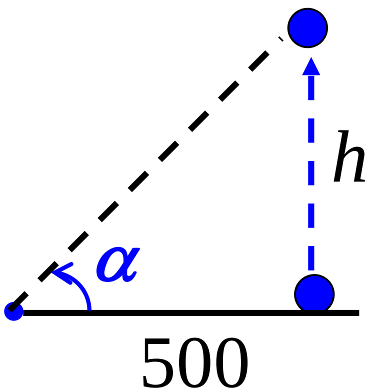
得相关变化率之间的关系式

$\Big\downarrow$

求出未知的相关变化率

例5. 一气球从离开观察员500 m 处离地面铅直上升，其速率为140 m/min，当气球高度为 500 m 时，观察员视线的仰角增加率是多少?

解: 设气球上升t分后其高度为h,仰角为α,



则 $$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$

两边对 t 求导

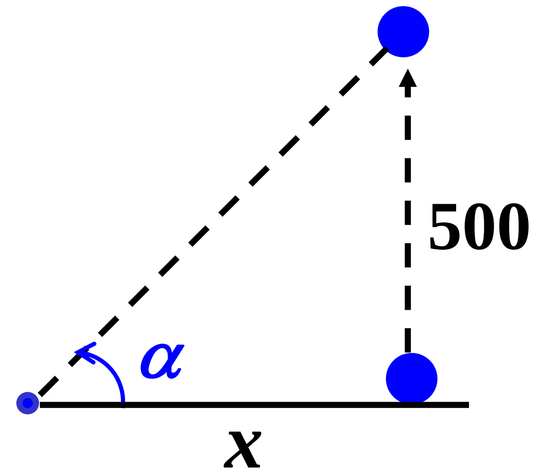
$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha}$$

已知 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 140\,\mathrm{m/min}$, $h = 500\mathrm{m}$ 时，$\tan\alpha = 1$, $\sec^2\alpha = 2$,

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}\cdot 140 = 0.14 \ (\mathrm{rad/min}).$$

思考题：当气球升至500 m 时停住, 有一观测者以 100 m / min 的速率向气球出发点走来，当距离为500 m 时，仰角的增加率是多少 ？



提示：$\tan\alpha = \dfrac{500}{x}$

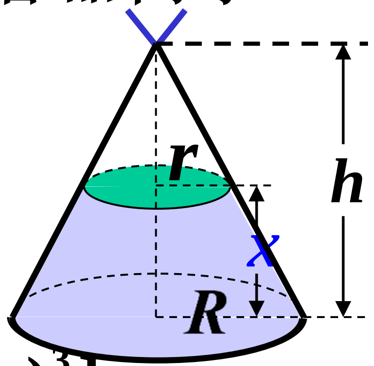
$\downarrow$ 对 t 求导

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{500}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

已知 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -100\,\mathrm{m/min}$，$x = 500\,\mathrm{m}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{500}{500^2}\right)\cdot(-100) = 0.1 \quad (\mathrm{rad/min}).$$

例6. 有一底半径为 R cm, 高为 h cm 的圆锥容器，今以 $25\,\text{cm}^3/\text{s}$ 自顶部向容器内注水，试求当容器内水位等于**锥高的一半时**水面上升的速度.



解: 设时刻t容器内水面高度为 x, 水的体积为V, 则

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi r^2(h-x)=\frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3-(h-x)^3]$$

两边对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot(h-x)^2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \text{而}\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=25\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{25h^2}{\pi R^2(h-x)^2}$, 当 $x=\dfrac{h}{2}$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{100}{\pi R^2}$ (cm/s)

四、内容小结

1. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导
2. 对数求导法 ： 适用于幂指函数及某些用连乘，连除表示的函数

3. 参数方程求导法

求高阶导数时，从低到高每次都用参数方程求导公式

4. 相关变化率问题

列出依赖于 t 的相关变量关系式

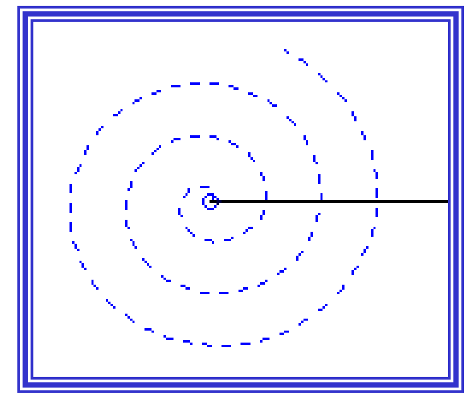
$\big\downarrow$ 对 t 求导

相关变化率之间的关系式

思考与练习

1. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

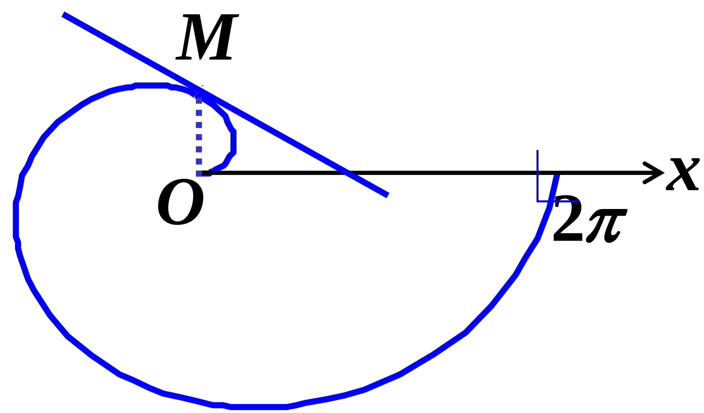
解: 化为参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时对应点 $M\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

斜率 $k = \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}$



∴ 切线方程为 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

2. 设 $y=\underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1}+\underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$， 求 y'.

提示：分别用对数微分法求 y_1', y_2' .

答案：

$$y'=y_1'+y_2'$$

$$=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1)$$

$$+\frac{1}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(2+x)^2}}\left(1-2\ln x-\frac{x}{3(2-x)}-\frac{2x}{3(2+x)}\right)$$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$.

解：方程两边对 x 求导，得

$$e^y y' + y + xy' = 0 \quad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0 \quad ②$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，故由 ① 得

$$y'(0) = -\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得 $y''(0) = \dfrac{1}{e^2}$

五、作业

习题2-4

A:

例题

1. 设 $y = x + e^x$，求其反函数的导数 .

解：方法1 $\because \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + e^x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+e^x}$$

方法2 等式两边同时对 y 求导

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + e^x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+e^x}.$$

2. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

$\boxed{\left.y\right|_{t=0} = 1}$

解：方程组两边同时对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ e^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \middle/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}.$$

练 习 题

一、 填空题：

1、设$x^3-2x^2y+5xy^2-5y+1=0$确定了y是x的函数，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=$__________，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________.

2、曲线$x^3+y^3-xy=7$在点（1，2）处的切线方程是______________.

3、曲线$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的法线方程__________.

4、已知$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$________；$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=$________.

5、设$xy=e^{x+y}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$__________.

二、 求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

1、 $y=1+xe^y$；

2、 $y=\tan(x+y)$；

3、 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\ \ (x>0,\ y>0)$.

三、 用对数求导法则求下列函数的导数：

1、 $y=x^{x^2}$；

2、 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

3、 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

四、 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

1、$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$；

2、$\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ 设$f''(t)$存在且不为零 .

五、 求由参数方程$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$所确定的函数的三阶导数$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

六、设$f(x)$满足$f(x)+2f(\frac{1}{x})=\frac{3}{x}$，求$f'(x)$.

七、 在中午十二点正甲船的 6 公里/小时的速率向东行驶，乙船在甲船之北 16 公里，以 8 公里/小时的速率向南行驶，问下午一点正两船相距的速率为多少？

八、水注入深 8 米，上顶直径 8 米的正圆锥形容器中，其速率为每分钟 4 立方米，当水深为 5 米时，其表面上升的速率为多少？

练习题答案

一、1、$-\frac{4}{3}$, $\frac{6x-4xy-8xy'-20yy'+10x(y')^2}{10xy-2x^2-5}$;

2、$x+11y-23=0$　　3、$\frac{\pi}{2}x-y+\frac{\pi}{2}=0$;

4、$\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$,$-2-\sqrt{3}$;　　5、$\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$.

二、1、$\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$;

2、$-2\csc^2(x+y)c\tan^3(x+y)$;

3、$\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$.

三、1、$x^{x^2+1}(2\ln x+1)$；

2、$\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}]$；

3、$\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\dfrac{1}{x}+\cot x-\dfrac{e^x}{2(1-e^x)}]$.

四、1、$-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$；　　2、$\dfrac{1}{f''(t)}$.

五、$\dfrac{t^4-1}{8t^3}$.　　六、$2+\dfrac{1}{x^2}$.

七、-2.8（公里/小时）.

八、$\dfrac{16}{25\pi}\approx 0.204$（米/分）.