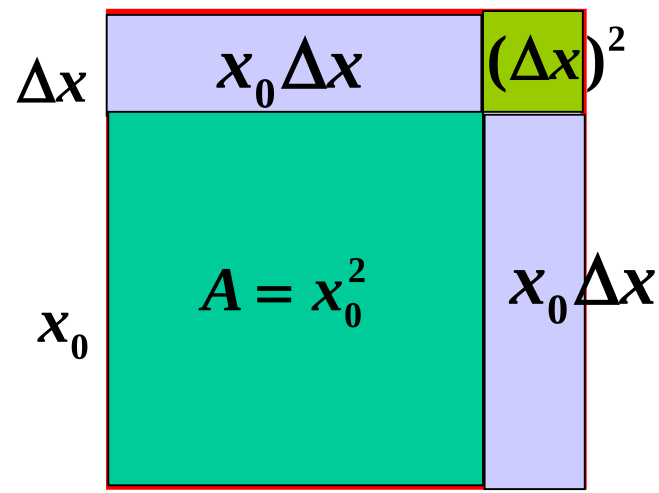
第二节、函数的微分

- 一、微分的概念
- 二、基本初等函数的微分公式与微分运算法则
- 三、微分在近似计算中的应用
- 四、小结
- 五、作业

一、微分的概念

引例：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片面积改变了多少?

设薄片边长为x，面积为A，则 $A=x^2$，当x 在 x_0 取得增量 Δx 时，面积的增量为



$$
\begin{aligned}
\Delta A &= (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 \\
&= \underbrace{2x_0\Delta x}_{\substack{\text{关于}\triangle x\text{ 的}\\ \text{线性主部}}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\substack{\Delta x\to 0\text{时为}\\ \text{高阶无穷小}}}
\end{aligned}
$$

故 $\Delta A \approx \underline{2x_0\Delta x}$

$\boxed{\text{称为函数在 } x_0 \text{ 的微分}}$

定义：若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

（A为不依赖于Δx 的常数）

则称函数$y = f(x)$在点 x_0 可微，而 $A\Delta x$ 称为$f(x)$在点x_0的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或$\mathrm{d}f$，即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

定理：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

定理：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

证：“必要性”

已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\quad=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\therefore\quad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=A.$

定理：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

"充分性" 已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \qquad (\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0)$$

故 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{线性主部}}+o(\Delta x)$

即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

说明: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

所以 $\Delta x \to 0$ 时 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小, 故当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似公式

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$

微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量

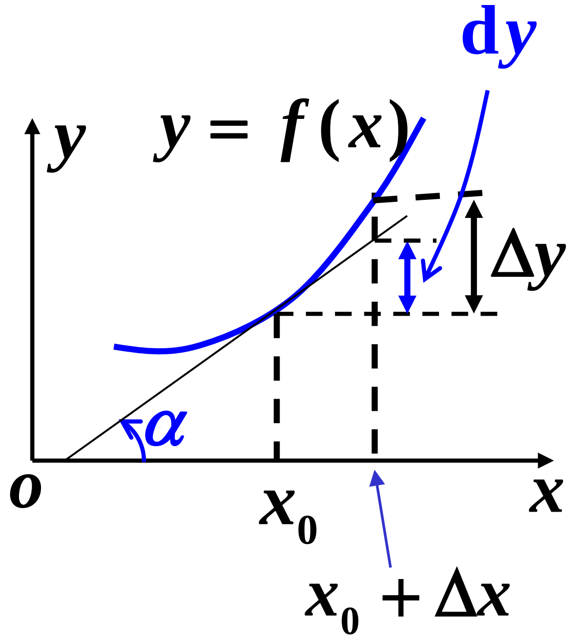
$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \cdot \Delta x$$

当 Δx 很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y$

当 $y = x$ 时，

$$\Delta y = \Delta x \overset{\text{记}}{=} \mathrm{d}x$$

称 Δx 为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$



则有 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ 导数也叫作微商

例如 $y = x^3$,

$$\mathrm{d}y \Big|_{\substack{x=2 \\ \mathrm{d}x=0.02}} = 3x^2 \cdot \mathrm{d}x \Big|_{\substack{x=2 \\ \mathrm{d}x=0.02}} = 0.24$$

二、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

$$dy = f'(x)dx$$

求法： 计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1.基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\mathrm{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

3. 复合函数的微分

$y=f(u),u=\varphi(x)$ 分别可微，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=y'_x\,\mathrm{d}x = f'(u)\boxed{\varphi'(x)\mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$$

无论*u*是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分形式总是

$$\boxed{dy=f'(u)du}$$

微分形式的不变性

例1. $y=\ln(1+e^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解:

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+e^{x^2}}\,\mathrm{d}(1+e^{x^2})$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}x.$$

三、 微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，得近似等式：

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

令 $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则： 1) $f(x_0)$，$f'(x_0)$ 好算；

2) x 与 x_0 靠近.

特别当 $x_0 = 0$, $|x|$ 很小时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式: ($|x|$ 很小)

(1) $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$,

证明: 令 $f(x) = (1+x)^\alpha$

得 $f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha$

$\therefore$ 当 $|x|$ 很小时, $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$,

(2) $\sin x \approx x$

(3) $e^x \approx 1+x$

(4) $\tan x \approx x$

(5) $\ln(1+x) \approx x$

例4. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解: 设 $f(x)=\sin x$,

取 $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $x = 29^\circ = \frac{29}{180}\pi$, 则 $\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{180}$

$$\sin 29^\circ = \sin\frac{29}{180}\pi \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

例5. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

$$3^5 = 243$$

解: $$\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x}$$

$$\approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243}\right)$$

$$= 3.0048.$$

例6．有一批半径为1cm的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克．(铜的密度 : $8.9\,\mathrm{g/cm^3}$)

解： 已知球体体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为V 在 $R = 1, \Delta R = 0.01$ 时体积的增量 ΔV，

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V \Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R = 0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R \Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R = 0.01}} \approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9 \times 0.13 = 1.16（\mathrm{g}）$$

2、 微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A，其近似值为 a，

$|A-a|$称为a 的绝对误差

$\frac{|A-a|}{|a|}$称为a 的相对误差

若$|A-a| \le \delta_A$

δ_A 称为测量 A 的绝对误差限

$\frac{\delta_A}{|a|}$称为测量 A 的相对误差限

误差传递公式 ：

若直接测量某量得 x ，已知测量误差限为 δ_x ，按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x| \le |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y = |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} = \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$

例7. 设测得圆钢截面的直径 $D=60.0$ mm，测量D的绝对误差限 $\delta_D=0.05$ mm，欲利用公式 $A=\dfrac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢截面积，试估计面积的误差.

解：计算 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A=|A'|\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times60.0\times0.05\approx4.715\ (\text{mm})$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|}=\frac{\frac{\pi}{2}D\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.0}\approx0.17\ \%$$

四、内容小结

1. 微分概念

• 微分的定义及几何意义

• 可导 $\rightleftarrows$ 可微

2. 微分运算法则

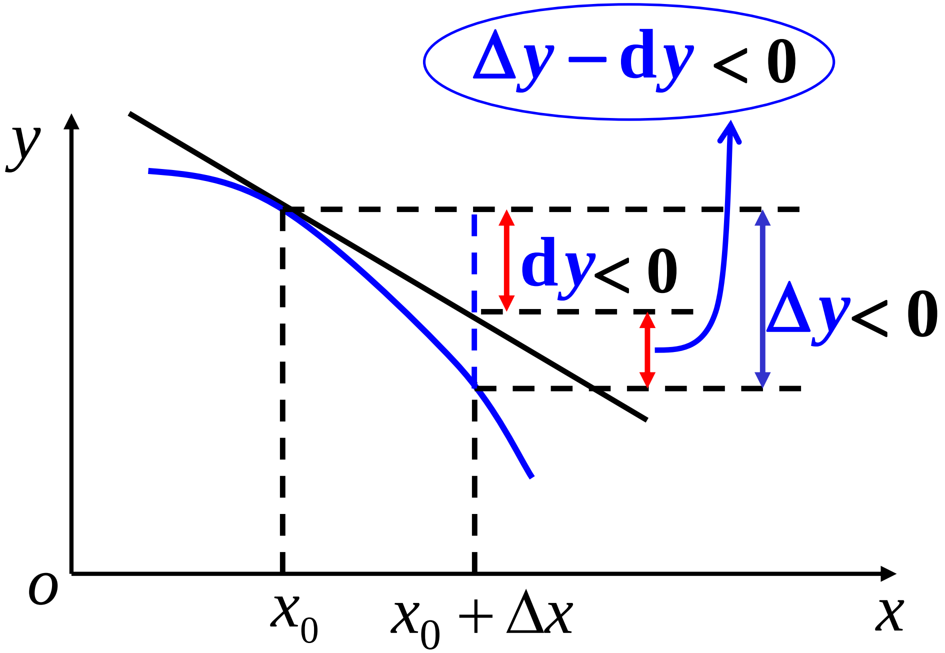
微分形式不变性 ： $\mathrm{d}f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}u$

（ u 是自变量或中间变量 ）

3. 微分的应用 $\begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$

思考与练习

1\. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下，试在图中标出的点 x_0 处的 $\mathrm{d}y, \Delta y$ 及 $\Delta y - \mathrm{d}y$，并说明其正负 .



2. $$\mathrm{d}(\arctan e^{-x}) = \underline{\dfrac{1}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}e^{-x}$$

$$= \underline{\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}x$$

3. $$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x} = \underline{\sec^{3} x}$$

4. $$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right) = \sin 2x\,\mathrm{d}x$$

五、作业

例题

1. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$，求 $\mathrm{d}\,y$.

解：因为

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

所以

$$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\sin\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$