

第六章 集合代数



集合的运算

定义 设A与B为集合,

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 称它们是**不相交的**。

$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, B对A的**相对补集**。

绝对补集: $\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$ 或

$$\sim A = \{x | x \notin A\}$$

对称差: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
 $= \{x | x \in A \bar{\vee} x \in B\}$





实例

已知： $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c\}$

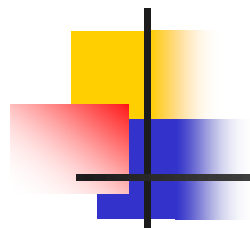
计算： $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $A\oplus B$

解：

$$A\cup B = \{a,b,c\} \quad A\cap B = \{a\}$$

$$A-B = \{b\} \quad B-A = \{c\}$$

$$A\oplus B = \{b,c\}$$



n个集合的并集和交集

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x | (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \dots \vee (x \in A_n)\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x | (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \dots \wedge (x \in A_n)\}$$

可以把n个集合的并和交简记为：

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$



集合运算的主要算律

设 A, B, C 为任意集合,

1. 双重否定律 $\sim(\sim A)=A$
2. 幂等律 $A \cup A=A, A \cap A=A$
3. 交换律 $A \cup B=B \cup A, A \cap B=B \cap A$
4. 结合律 $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$
5. 分配律 $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C),$
 $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$



集合运算的主要算律

6. 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

7. 德·摩根律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B, \sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

$$\sim E = \emptyset, \sim \emptyset = E$$

8. 同一律 $A \cap E = A, A \cup \emptyset = A$

9. 零律 $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup E = E$

10. 排中律 $A \cup \sim A = E$

11. 矛盾律 $A \cap \sim A = \emptyset$



证明集合恒等式的方法

1. 根据定义进行证明

证明用到谓词逻辑的等值式及推理规则。

如, $A - B = A \cap \sim B$

2. 利用已有的集合恒等式证明新的恒等式——恒等演算。

如下例。





恒等演算

求证： $A \cap (A \cup B) = A$

证明：

$$\begin{aligned} & A \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) \\ &= A \cup (\emptyset \cap B) \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

求证： $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

证明(根据定义)： 对任意 x ,

$$x \in A-(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in (B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A-B) \wedge (x \in A-C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A-B) \cap (A-C)$$

故 $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$





集合运算性质(一)

1. $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
2. $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$
3. $A - B \subseteq A$
4. $A - B = A \cap \sim B$
5. $(A - B) \cup B = A \cup B, (A \cup B) - B = A - B$
6. 若 $A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$, 则 $A \cap C \subseteq B \cap D, A \cup C \subseteq B \cup D$
7. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$



实例(方法2)

求证： $(A-B) \cup B = A \cup B$

证明：

$$\begin{aligned} & (A-B) \cup B \\ &= (A \cap \sim B) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= A \cup B \end{aligned}$$



集合运算性质(二)

1. $A \oplus B = B \oplus A$
2. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
3. $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (\sim A \cup \sim B)$
4. $A \oplus A = \emptyset$
5. $A \oplus \emptyset = A$
6. $\sim A \oplus \sim B = A \oplus B$
7. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$



实例(方法2)

化简：

$$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$$

解：

$$\text{原式} = (A \cup B) - A = B - A$$



实例

已知 $A \oplus B = A \oplus C$ ，证明 $B = C$

证明：

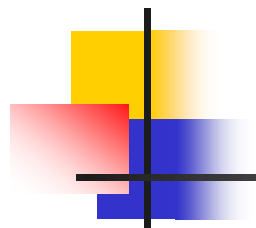
$$A \oplus B = A \oplus C$$

$$\text{则， } A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$$

$$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$$

$$\emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C$$

$$\text{所以， } B = C$$



作业

习题六, p96

8(4),

14(2)

19

28(3)

45