第四节 函数展开成幂级数

两类问题：在收敛域内

$$\text{幂级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\underset{\text{展开}}{\overset{\text{求和}}{\rightleftarrows}}\; \text{和函数 } S(x)$$

本节内容：

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、函数展开成幂级数

一、泰勒 (Taylor) 级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 , 其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

称为拉格朗日余项 .

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数.

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数.

待解决的问题:

1) 对此级数, 它的收敛域是什么?

2) 在收敛域上, 和函数是否为 $f(x)$?

定理1． 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\bigcup(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0.$

证明: $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,\quad x\in\bigcup(x_0)$$

令 $$S_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-S_{n+1}(x)\right]=0\,,\quad x\in\bigcup(x_0)$$

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是**唯一**的 , 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则 $\qquad a_0 = f(0)$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots; \qquad a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots; \qquad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0)$$

$\cdots\cdots \qquad \cdots$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots; \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$\cdots\cdots \qquad \cdots$

显然结论成立 .

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{cases}$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步 写出麦克劳林级数 , 并求出其收敛半径 R；

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\Big/\dfrac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与x 之间)

故 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 **x** 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0\,, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 **x** , 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

类似可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 **x** 的幂级数, 其中 ***m*** 为任意常数 .

解: 易求出 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1)$,

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,,\ \cdots$$

于是得 级数 $1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|=1$

因此对任意常数 ***m***, 级数在开区间 **(－1, 1)** 内收敛.

为避免研究余项，设此级数的和函数为 $F(x), -1 < x < 1$

则 $F(x) = 1 + m\,x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$F'(x) = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \cdots + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots\right]$$

$$(1+x)F'(x) = mF(x), \quad F(0) = 1$$

推导

$$\int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^x \frac{m}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\ln F(x) - \ln F(0) = m\ln(1+x)$$

$$F(x) = (1+x)^m$$

例3 附注

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^n+\cdots\right]$$

$$xF'(x)=m\left[\;x+\frac{m-1}{1}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots\right]$$

$$(1+x)F'(x)=m\left[\;1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]=mF(x)$$

由此得

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

称为**二项展开式**.

说明:

(1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关.

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的**二项式定理**.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$(-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成 幂级数.

例4. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad \boxed{-1<x\le 1}$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛区间为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例6. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

例7. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$(|x-1|<2)$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数 .

2. 常用函数的幂级数展开式

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$

  $x \in (-1, +1]$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同？

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数？

提示: $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in[-1,1)$$

2. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在 $x=0$ 处展为幂级数.

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此 $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

函数的幂级数展开式的应用

- 一、近似计算
- 二、计算定积分
- 三、欧拉公式

一、近似计算

$$\because \quad A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

$$\therefore \quad A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

误差 $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$

两类问题:

1.给定项数,求近似值并估计精度;

2.给出精度,确定项数.

关键: 通过估计余项,确定精度或项数.

常用方法:

1.若余项是交错级数,则可用余和的首项来解决;

2.若不是交错级数,则放大余和中的各项,使之成为等比级数或其它易求和的级数,从而求出其和.

例1 计算e的近似值,使其误差不超过10^{-5}.

解 $\because e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

令 $x = 1,$ 得 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$

余和:

$$r_n \approx \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots = \frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+2}+\cdots)$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots) = \frac{1}{n\cdot n!}$$

欲使 $r_n \le 10^{-5}$, 只要 $\frac{1}{n\cdot n!} \le 10^{-5}$,

即 $n\cdot n! \ge 10^5$, 而 $8\cdot 8! = 322560 > 10^5$,

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{8!} \approx 2.71828$$

例2　利用$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$计算$\sin 9^0$的近似值，并估计误差.

解　$\sin 9^0 = \sin\dfrac{\pi}{20} \approx \dfrac{\pi}{20} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^3,$

$$|r_2| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{300000} < 10^{-5},$$

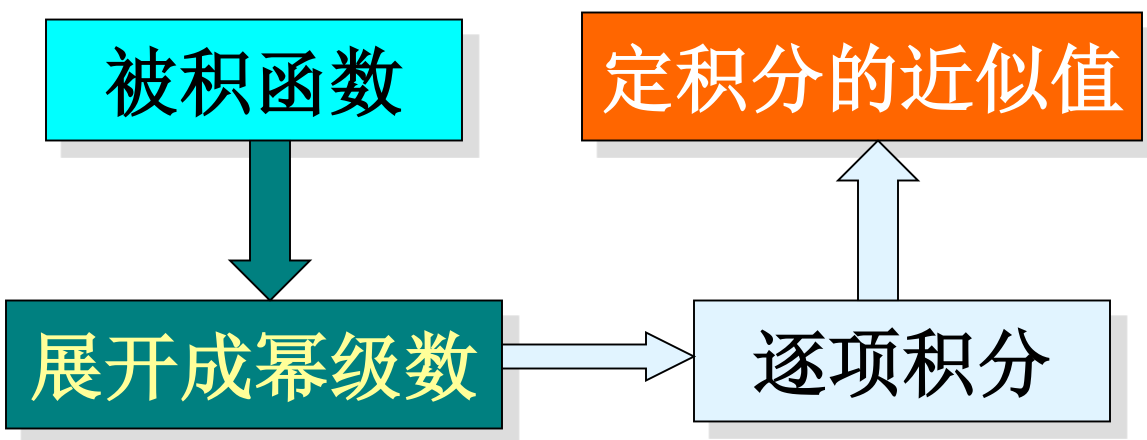
$$\therefore \sin 9^0 \approx 0.157079 - 0.000646 \approx 0.156433$$

其误差不超过10^{-5}.

二、计算定积分

例如函数 $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$，原函数不能用初等函数表示，难以计算其定积分.

解法



例3 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值，精确到 10^{-4}.

解 $\because \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$$

收敛的交错级数

第四项 $\frac{1}{7\cdot 7!} < \frac{1}{3000} < 10^{-4}$,

取前三项作为积分的近似值,得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0.9461$$

三、欧拉公式

复数项级数:

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \cdots + (u_n + iv_n) + \cdots$$

其中$u_n, v_n (n = 1,2,3,\cdots)$为实常数或实函数.

若$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n)$收敛，且其和为 $u + iv$.

复数项级数绝对收敛的概念

若 $\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\cdots$ 收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛, 称复数项级数绝对收敛.

三个基本展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

由e^x的幂级数展开式

$$e^{ix}=1+ix+\frac{1}{2!}(ix)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(ix)^n+\cdots$$

$$=\underbrace{(1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots)}_{\cos x}$$

$$+i\underbrace{(x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots)}_{\sin x}$$

$$=\cos x+i\sin x.$$

$$\because e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$又 \because e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

欧拉公式

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

揭示了三角函数和复变量指数函数之间的一种关系.

作业

习题 5 - 4

1（单），2（单）