关系幂运算的性质

定理 设A为n元集，R为A上的关系，则存在自然数s和t，使得$R^s = R^t$。

$$\forall m \in N,\ R^m \subseteq A \times A,\ R^m \in P(A \times A)$$

定理 设R为A上的关系，m,n是自然数，则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
2. $(R^m)^n = R^{mn}$

关系幂运算的性质

定理 设R为A上的关系，若存在自然数s,t(s<t)使得$R^s=R^t$，则

1. 对任意$i\in N$，有$R^{s+i}=R^{t+i}$；
2. 对任意$k,i\in N$，有$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中$p=t-s$；
3. 令$S=\{R^0, R^1,\ldots,R^{t-1}\}$，则对于任意的$q\in N$有$R^q\in S$。

7.4 关系的性质

关系的性质

设R是A上的关系，R的性质主要有以下5种：

1) 自反性
2) 反自反性
3) 对称性
4) 反对称性
5) 传递性

自反性与反自反性

定义 设R为A上的关系，

1. 若$\forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle\in R)$，则称R在A上是**自反的**。
2. 若$\forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle\notin R)$，则称R在A上是**反自反的**。

例，A上的关系，

$\mathbf{E}_A$，$\mathbf{I}_A$，$\mathbf{L}_A$，$\mathbf{D}_A$，$\mathbf{R}_{\subseteq}$

“$<$”，“$\subset$”，$\varnothing$

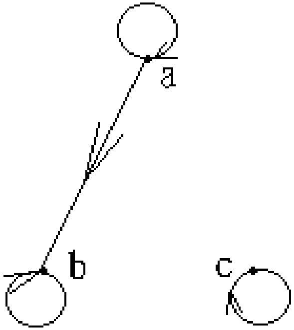
自反性与反自反性

例： 设$A=\{a,b,c\}$,

$R=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$是自反的

R的关系矩阵与关系图：

$$M_R = \begin{bmatrix} 110 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix}$$



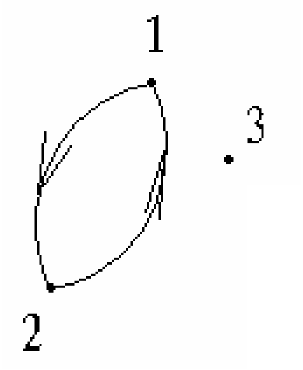
自反性与反自反性

例： 设A={1,2,3},

R={<1,2>, <2,1>}是反自反的

R的关系矩阵与关系图：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



自反性与反自反性

例：设A={a,b,c}，R_1,R_2,R_3是A上的关系，其中，

$R_1=\{<a,a>, <b,b>\}$

$R_2=\{<a,a>, <b,b>, <c,c>, <b,c>\}$

$R_3=\{<a,b>\}$

是否具有自反性或反自反性？

对称性与反对称性

定义 设R为A上的关系，

1. 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \to \langle y,x \rangle \in R)$，则称R在A上是**对称的**。
2. 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,x \rangle \in R \to x=y)$，则称R在A上是**反对称的**。

例，A上的关系，

E_A，I_A，$\varnothing$；

I_A，$\varnothing$，L_A，D_A，$R_{\subseteq}$，“$<$”，“$\subset$”。

对称性与反对称性

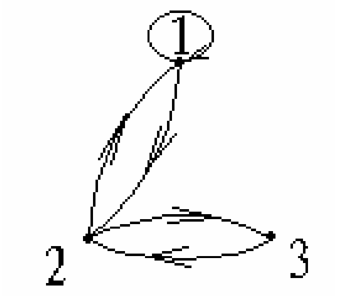
例： 设A={1,2,3},

R={<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,2>}

则R是对称的关系。

R的关系矩阵与关系图：

$$M_R = \begin{bmatrix} 110 \\ 101 \\ 010 \end{bmatrix}$$



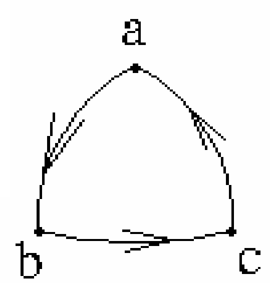
对称性与反对称性

例： 设$A=\{a,b,c\}$,$R=\{<a,b>, <b,c>, <c,a>\}$

则R是反对称的关系。

R的关系矩阵与关系图：

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$



对称性与反对称性

例： 设$A=\{a,b,c\}$， R_1,R_2,R_3,R_4是A上的关系，其中，

$R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$ 对称. 反对称.

$R_2=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$ 对称.

$R_3=\{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle\}$ 反对称.

$R_4=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,c\rangle\}$ X

是否具有对称性或反对称性？

传递性

定义 设R为A上的关系，若

$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \rightarrow <x,z> \in R)$，则称R为A上的**传递关系**。

例，A上的关系，

E_A，I_A，$\varnothing$，L_A，D_A，$R_{\subseteq}$，“$<$”，“$\subset$”。

传递性

例：设$A=\{a,b,c\}$，R_1,R_2,R_3是A上的关系，其中

$$R_1=\{<a,a>, <b,b>\}$$
$$R_2=\{<a,b>, <b,c>\}$$
$$R_3=\{<a,c>\}$$

是否具有传递性？

关系的性质

定理 设R是A上的关系，则

1) R 在A上自反当且仅当$I_A \subseteq R$；

2) R 在A上反自反当且仅当$R \cap I_A = \varnothing$；

3) R 在A上对称当且仅当$R = R^{-1}$；

4) R 在A上反对称当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$；

5) R 在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq R$

可用于判断关系的性质。

关系的性质

1. 自反性与反自反性：设A为非空集合，A上的关系可以是

①自反的

②反自反的

③既不是自反的也不是反自反的

例如:A={1,2,3},令

R_1={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>} 1

R_2={<2,3>,<3,2>} 2

R_3={<1,1>,<2,2>} 3

2. 对称性与反对称性：设A为非空集合， A上的关系可以是

①对称的

②反对称的

③既是对称的又是反对称的

④既不是对称的也不是反对称的

例如:A={1,2,3},令

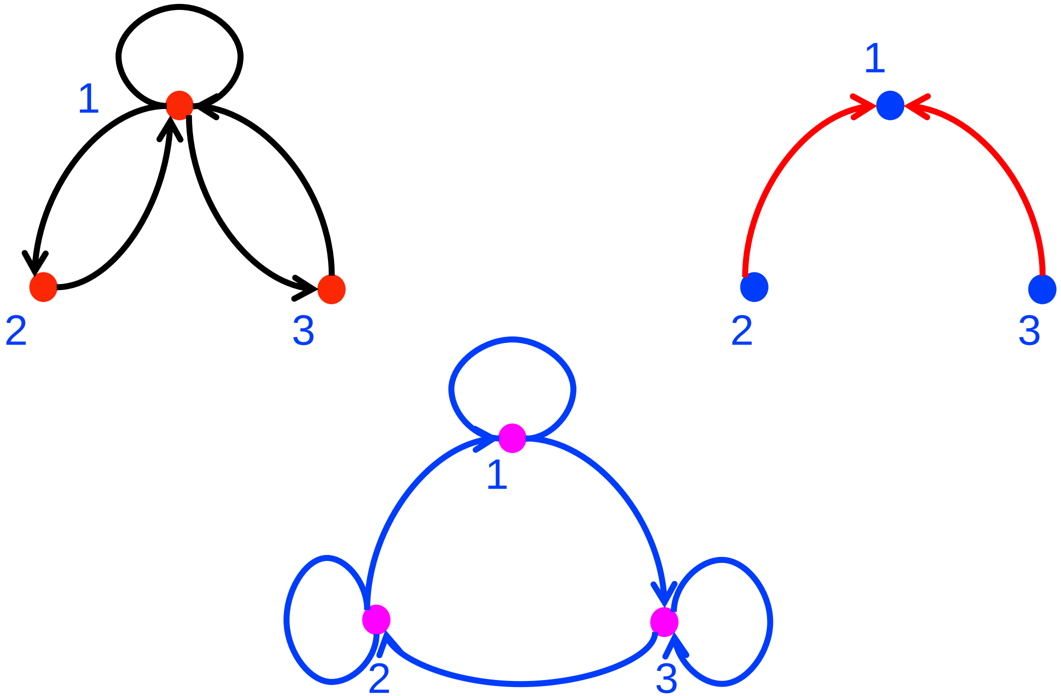
R={<1,2>,<2,1>,<3,3>} ①

R={<1,2>,<1,3>} ②

R={<1,1>} ③

R= {<1,2>,<2,1>,<1,3>} ④

例 试判断下图中关系的性质



关系的性质与运算

设R_1,R_2是A上的关系，如果经过某种运算后仍保持原来的性质，则在相对应的格内划√，否则划×。

运算＼原有性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

关系的性质与运算

例：设R_1,R_2为A上的对称关系，证明$R_1 \cap R_2$也是A上的对称关系。

证明：

对于任意的$<x,y>$

$$<x,y> \in R_1 \cap R_2$$
$$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \wedge <x,y> \in R_2$$
$$\Leftrightarrow <y,x> \in R_1 \wedge <y,x> \in R_2$$
$$\Leftrightarrow <y,x> \in R_1 \cap R_2$$

所以，$R_1 \cap R_2$在A上是对称的。

关系的性质与运算

例：R_1,R_2 是A上的反对称关系，证明$R_1 \cup R_2$不一定具有反对称性。

证明：

令$A=\{a, b\}$，

$R_1=\{<a, b>\}$，$R_2=\{<b, a>\}$

$R_1 \cup R_2 =\{<a, b>, <b, a>\}$

不是A上的反对称关系。

作业

习题七

1,3,4

10,13,14,20

21,22