

# 第7章 二元关系

## 7.1 有序对与笛卡儿积

# 有序对

**定义** 由两个元素 $x$ 和 $y$ 按一定的顺序排列成的二元组叫做一个有序对(也称序偶), 记作 $\langle x, y \rangle$ , 其中 $x$ 是它的第一元素,  $y$ 是它的第二元素。

**例**, 平面直角坐标系中点的坐标就是有序对, 如 $\langle 1, 3 \rangle$ ,  $\langle 3, 1 \rangle$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ 等代表坐标系中不同的点。

# 有序对的性质

1. 当 $x \neq y$ 时,  $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ , 即与顺序有关。
2. 两个有序对相等, 即 $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$ 。

**定义** 一个**有序n元组**( $n \geq 3$ )是一个**有序对**，其中**第一元素**是一个**有序n-1元组**，一个有序n元组记作 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ，即

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

**例如：**

1. 空间直角坐标系中点的坐标都是有序3元组；

如 $\langle 1, -1, 3 \rangle$ ,  $\langle 2, 4.5, 0 \rangle$ 等。

2. **n维空间中点的坐标**或**n维向量**都是有序n元组。

3.  $\langle x, y, z \rangle = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle \neq \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$

**定义** 设A,B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的笛卡儿积，记作 $A \times B$ 。符号化表示为

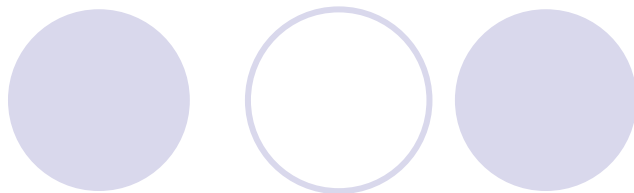
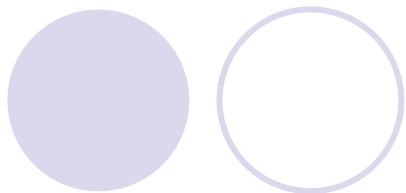
$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

**例**，设 $A = \{a, b\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则

$$A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$$

$$B \times A = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle \}$$





如果 $|A|=m$ ,  $|B|=n$ ,

则 $|A \times B| = mn$   $|B \times A| = mn$

若 $\langle x, y \rangle \in A \times B$ , 则有

$$x \in A \wedge y \in B$$

若 $\langle x, y \rangle \notin A \times B$ , 则有

$$x \notin A \vee y \notin B$$



# 笛卡儿积运算的性质

设A、B、C、D为任意集合，

1.  $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$

2. 当  $A \neq B \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$  时，有  $A \times B \neq B \times A$ ，  
即不满足交换律。

3. 当A,B,C都不是空集时，有

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

即笛卡儿积运算不满足结合律。

4.笛卡儿积运算对 $\cup$ 和 $\cap$ 运算满足分配律：

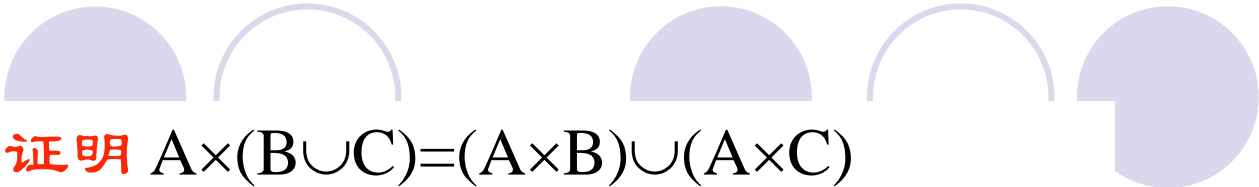
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$





**证明**  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

**证明** 对于任意的  $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$


$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

**所以**

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$



例：设 $A=\{1\}$ ,  $B=\{1,2\}$ ,  $C=\{2,3\}$

$$A \times (B \cup C) = \{1\} \times \{1,2,3\}$$

$$= \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{1\} \times \{1,2\} \cup \{1\} \times \{2,3\}$$

$$= \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$A \times (B \cap C) = \{1\} \times \{2\} = \{ \langle 1,2 \rangle \}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C)$$

$$= \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle \} \cap \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$= \{ \langle 1,2 \rangle \}$$



作业

习题七

1,3,4