第五节、极限存在准则 无穷小的比较

- 一、夹逼准则
- 二、单调有界定理
- 三、两个重要极限
- 四、无穷小的比较
- 五、作业

一、 夹逼准则

准则I 若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$ (1)

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a,$

则数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a.$

证 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_1 > 0, \ N_2 > 0,$ 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$ (2)

当 $n > N_2$ 时恒有 $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$ (3)

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, (1)、(2)、(3)同时成立.

当 $n > N$ 时, 恒有 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a.$

上述数列极限存在的准则可以推广到函数的极限.

准则I′ 若当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ (或 $|x| > M$)时,有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在, 且等于$A$.

准则 I和准则 I'称为夹逼准则.

注意: 利用夹逼准则求极限关键是构造出y_n与z_n,

并且y_n与z_n的极限是容易求的.

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots\right.$

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

准则I 若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n\le x_n\le z_n \quad (n=1,2,3\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

二、单调有界定理

如果数列 x_n 满足条件

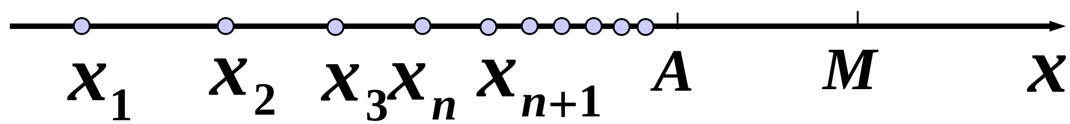
$x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$ 单调增加

$x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$ 单调减少

单调数列

准则II 单调有界数列必有极限.

几何解释:



例2 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1}>x_n$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的;

又 $\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的; $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. $\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$,

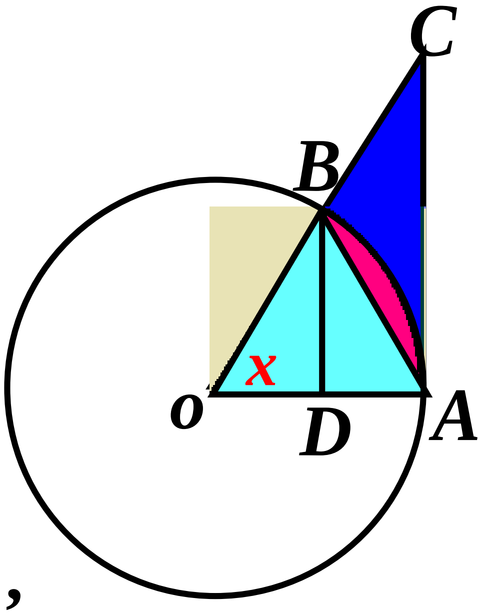
$x_{n+1}^2=3+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$, $A^2=3+A$,

解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去) $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

准则II′ 设函数 $f(x)$在点x_0的某左(右)邻域内单调且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左(右) 极限必存在。

三、两个重要极限

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



设单位圆 O，圆心角$\angle AOB = x$，$(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD，

$\triangle AOB$ 的面积< 圆扇形AOB的面积 <$\triangle AOC$的面积

由于$BD = \sin x$， 弧长$AB = x$， $AC = \tan x$，

$\therefore \sin x < x < \tan x$， 即 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$，

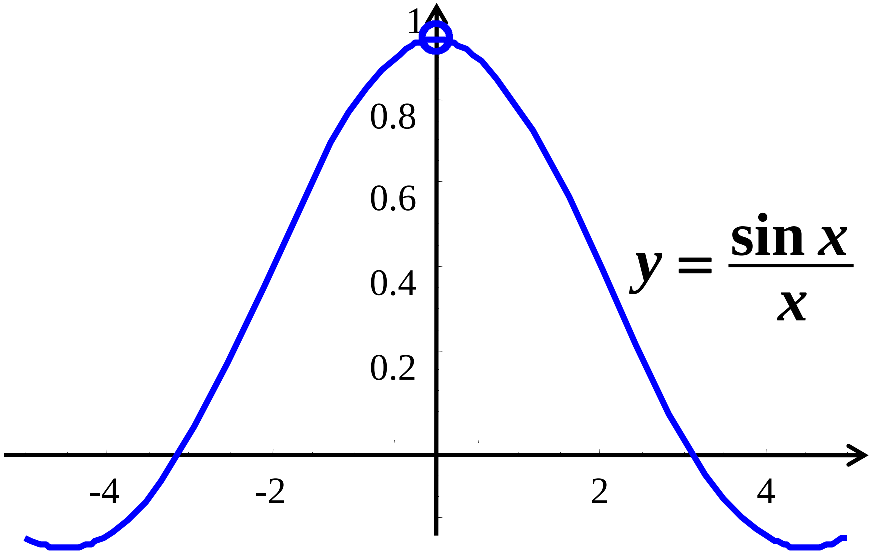
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \qquad |\sin x| < |x|, x \neq 0$$

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\because \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2} = 0, \qquad \therefore \lim_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0, \qquad 即 \lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

$$又 \because \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1,$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

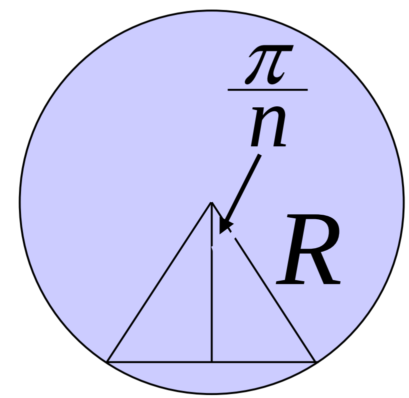
解 原式 $\overset{t=\arcsin x}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1.$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to0}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot1^2=\dfrac{1}{2}$.

例6. 已知圆内接正 n 边形面积为

$$A_n=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$



证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.

证

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2$$

说明: 计算中注意利用

$$\boxed{\lim_{\phi(x)\to0}\frac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1.}$$

2 $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.}$$

定义 $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e.$$

设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

类似地, $x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

$\because x_{n+1}>x_n$, $\therefore\{x_n\}$是单调递增的;

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

$\therefore\{x_n\}$是有界的; $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$(e=2.71828\cdots)$

当 $x \geq 1$时, 记 $[x] = n$, 有 $n \leq x < n+1$,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < (1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

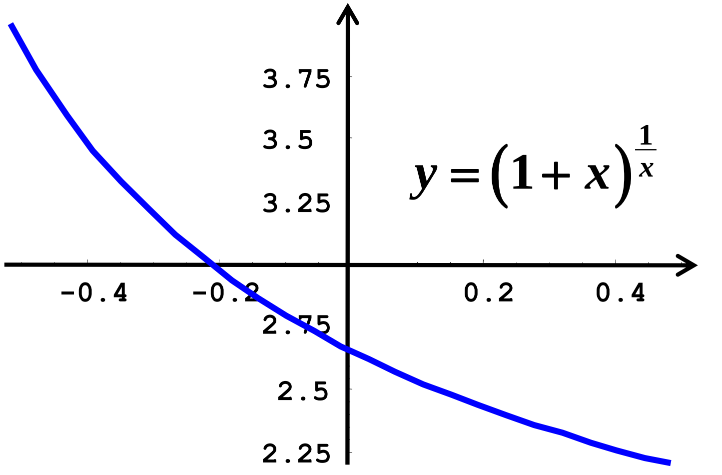
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xlongequal{令\ t=-x,} \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xlongequal{令\ t=\frac{1}{x},} \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$



$$\boxed{\therefore \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\,.}$$

特点：　1^{∞}不定式

1^{∞}不定式

例7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x} \xlongequal{t=-x} \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}}=\frac{1}{e^{2}}$$

说明 若利用 $\lim\limits_{\phi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\phi(x)}\right)^{\phi(x)}=e$, 则

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-2}=e^{-2}.$$

1^{∞}不定式

例8. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{2}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left((1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right)^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=e.$$

一般地，对于幂指函数 $\left(u(x)\right)^{v(x)}\ (u(x)>0,u(x)\neq 1)$,

若 $\lim u(x)=a>0$, $\lim v(x)=b$, 则

$$\lim\left(u(x)\right)^{v(x)}=a^{b}$$

无穷小的比较

引例 . $x \to 0$ 时, $3x, x^2, \sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小趋于 0 的速度是多样的 .

定义 设α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$.

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, 则称 β 是关于α 的 k 阶无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称$\beta$ 是α的等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

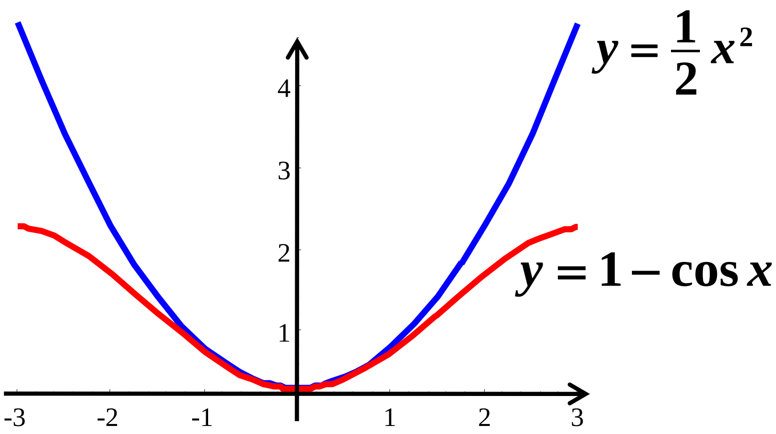
或 $\beta \sim \alpha$

例如　当 $x \to 0$ 时

$$x^3 = o(6x^2);\quad \sin x \sim x;\quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

又如　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$



故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$

是关于 x 的 **2** 阶无穷小，　且

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$$

例　证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

证　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$$a^n-b^n=(a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x\left((\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+1\right)}=1$$

$\therefore\quad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x \quad (x \to 0)$

例　　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \xlongequal{\text{令 } e^x-1=u} \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

即，当 $x\to 0$ 时，$x \sim \ln(1+x)$，　$x \sim e^x-1$.

定理. $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

证 $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$

$\Longleftrightarrow \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$, 即 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

$\Longleftrightarrow \beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

例如 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$.

等价无穷小替换

定理 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

证

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

例如

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}.$$

说明: 设对同一变化过程， α,β 为无穷小， 由等价无穷小的性质，可得简化某些极限运算的下述规则.

(1) 和差取大规则: 若 $\beta = o(\alpha)$， 则 $\alpha \pm \beta \sim \alpha$.

例如 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^3+3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

(2) 和差代替规则: 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 α 与 β 不等价，

则 $\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$， 且 $\lim\frac{\alpha-\beta}{\gamma} = \lim\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma}$.

例如 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x - \sin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-x}{\frac{1}{2}x} = 2$$

(3) 因式代替规则: 若 $\alpha \sim \beta$, 且 $\varphi(x)$ 极限存在或有界, 则 $\lim \alpha\varphi(x) = \lim \beta\varphi(x)$

例如 $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0.$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

原式 $\cancel{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - x}{x^3}$.

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \dfrac{1}{3}x^2$

$$\cos x-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解　$\because \tan 5x = 5x + o(x),\ \ \sin 3x = 3x + o(x),$

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}{3x+o(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5+\dfrac{o(x)}{x}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{o(x^2)}{x}}{3+\dfrac{o(x)}{x}}=\frac{5}{3}.$$

思考题

1. 若 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 问

$\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答: 不存在. 否则由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$

利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在, 与已知条件矛盾.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right]=?$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解法 1

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

解法 2　令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $t\to0^+$

$$原式 = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}-\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} = \frac{1}{2}.$$

4. 试确定常数 a 使 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0$.

解 ： 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0.$$

故 $-1-a=0$

因此 $a=-1$

练习题 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，求 $f(x)$.

解：利用前一极限式可令

$$f(x)=2x^3+2x^2+ax+b$$

再利用后一极限式，得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a+\frac{b}{x}\right)$$

可见 $a=3,\ b=0$

故 $f(x)=2x^3+2x^2+3x.$

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3}{x-3}=$ ______________.

2、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ ______________.

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})=$ ______________.

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$ ______________.

5、 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$ ______________.

6、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=$ ______________.

7、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4-2x^2+x}{3x^2+2x}=$ ____________.

8、 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$ ____________.

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n})$

2、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

3、 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

4、 $$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

5、 $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

6、 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x-1}{4^x+1}$$

7、 $$\lim_{x \to 1} \frac{x^m-x^n}{x^m+x^n-2}$$

练习题答案

一、1、-5；　2、3；　3、2；　4、$\frac{1}{5}$；

5、0；　6、0；　7、$\frac{1}{2}$；　8、$\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

二、1、2；　2、$2x$；　3、-1；　4、-2；

5、$\frac{1}{2}$；　6、0；　7、$\frac{m-n}{m+n}$.

四、小结

1.两个准则

夹逼准则；单调有界准则 .

2.两个重要极限

设 α 为某过程中的无穷小，

$$1^0 \quad \lim_{\text{某过程}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; \qquad 2^0 \quad \lim_{\text{某过程}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

思考题

求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3^x + 9^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

思考题解答

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(9^x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= 9\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x\cdot x}} = 9\cdot e^0 = 9$$

填空题 （ 1～4 ）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$；

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 1 \quad}$；

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$；

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = \underline{\quad e^{-1} \quad}$；

五、作业

A:

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=$ ____________.

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=$ ____________.

3、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arccot} x}{x}=$ ____________.

4、 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot 3x=$ ____________.

5、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{2x}=$ ____________.

6、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ ____________.

7、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x} =$ __________.

8、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x} =$ __________.

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

2、 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^{n}$

5、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

三、利用极限存在准则证明数列

$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots\ldots$的极限存在，并求出该极限 .

练习题答案

一、1、ω；　2、$\frac{2}{3}$；　3、1；　4、$\frac{1}{3}$；

5、0；　6、e；　7、e^2；　8、$\frac{1}{e}$；

二、1、2；　2、$\frac{1}{e}$；　3、e^{2a}；　4、e^{-1}；

5、3.

三、$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 2.$