第三部分 代数结构

第九章 代数系统

二元运算的性质

定义 设$\circ$为S上的二元运算，如果对**任意的**$x,y\in S$都有

$$x\circ y=y\circ x$$

则称运算$\circ$在S上是**可交换**的，或者说运算$\circ$在S上适合**交换律**。

例，实数集R上：$+$, $\times$, $-$

幂集P(S)上：$\cup$, $\cap$, $\oplus$, $-$

$n(n\geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(R)$上：$+$, $\times$

二元运算的性质

定义 设$\circ$为S上的二元运算，如果对**任意的**$x,y,z \in S$都有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

则称运算$\circ$在S上是**可结合**的，或者说$\circ$在S上适合**结合律**。

例， N,Z,Q,R上： $+, \times$

幂集P(S)上：$\cup, \cap, \oplus$

$n(n \geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(R)$上：$+, \times$

函数集S^S上：复合运算$\circ$

二元运算的性质

例 实数集R上的二元运算$*$定义为：

$$x*y=x+y-xy,\quad x,y\in R$$

对任意的$x,y,z\in R$，

1. $x*y = x+y-xy = y+x-yx = y*x$

   所以运算$*$在R上满足**交换律**。

2. $(x*y)*z = x+y+z-xy-yz-zx+xyz = x*(y*z)$

   所以运算$*$在R上满足**结合律**。

二元运算的性质

定义 设$\circ$为S上的二元运算，如果某$x \in S$，满足$x \circ x = x$，则称x是运算$\circ$的**幂等元**。

定义 设$\circ$为S上的二元运算，如果对**任意的**$x \in S$都有

$$x \circ x = x$$

则称该运算$\circ$在S上适合**幂等律**。

二元运算的性质

例，

1. **幂等律**
   - 命题公式集上：$\vee$, $\wedge$
   - 幂集P(S)上：$\cup$, $\cap$, -, $\oplus$
2. **幂等元**
   - 实数集R上：0(+, -, ×), 1(×, ÷)
   - 幂集P(S)上：$\varnothing$($\oplus$, -)
   - 函数集S^S上：I_S(复合运算$\circ$)

二元运算的性质

两个二元运算之间的关系：

定义 设•和∗是S上的两个二元运算，如果对任意的x,y,z∈S有

$$x*(y\bullet z) = (x*y)\bullet(x*z) \qquad (\text{左分配律})$$

$$(y\bullet z)*x = (y*x)\bullet(z*x) \qquad (\text{右分配律})$$

则称运算∗对•是可分配的，也称∗对•适合分配律。

二元运算的性质

例，两个二元运算之间的关系。

1. 实数集R上：$\times$对+(-)，+(-)对$\times$
2. 幂集P(S)上：$\cup$和$\cap$互相可分配
3. 命题公式集上：$\vee$和$\wedge$互相可分配
4. n阶实矩阵的集合$M_n(R)$上：矩阵乘法对矩阵加法是可分配的

二元运算的性质

定义 设•和∗是S上的两个**可交换**的二元运算，如果对**任意的**x,y∈S都有

$$x*(x\bullet y)=x$$

$$x\bullet(x*y)=x$$

则称•和∗满足**吸收律**。

二元运算的性质

例，两个二元运算之间的关系。

1. 幂集P(S)上：$\cup$和$\cap$满足吸收律
2. 命题公式集上：$\vee$和$\wedge$满足吸收律

单位元（幺元）

定义 设$\circ$为S上的二元运算，如果存在元素e_l(或e_r)$\in$S，使得对任何x$\in$S，都有

$$e_l \circ x = x \text{(或} x \circ e_r = x\text{)}$$

则称e_l(或e_r)是S中关于$\circ$运算的一个左单位元(或右单位元)。

若e$\in$S关于$\circ$运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S上关于$\circ$运算的单位元。

单位元

1. 幂集P(S)上，$\cup$的单位元：
   $\cap$的单位元：
2. N上， 加法的单位元：
   乘法的单位元：
3. $M_n(R)$上，矩阵加法的单位元：
   矩阵乘法的单位元：
4. 命题公式集F上，$\vee$的单位元：
   $\wedge$的单位元：
5. 函数集S^S上，复合运算$\circ$的单位元：

单位元

例 设A={a,b,c,d}，$*$和$\bullet$是A上的两个二元运算：

$*$	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	a	b	c	c
d	a	b	c	d

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	d	c
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	d	b	c

求，左单位元？右单位元？单位元？

单位元

定理 设$\circ$为S上的二元运算，e_l,e_r分别为$\circ$运算的左单位元和右单位元，则有

1. $e_l=e_r=e$
2. 且e为S上关于$\circ$运算的惟一的单位元。

单位元

证明：

1. 因为e_l,e_r分别是∘运算的左,右单位元，则有

$$e_l = e_l \circ e_r = e_r$$

∴有e_l=e_r=e是单位元。

2. 假设S中还存在单位元e′，则有

$$e' = e' \circ e = e$$

∴e是S中关于运算∘的惟一的单位元。

零元

定义 设$\circ$为S上的二元运算，若存在元素θ_l(或θ_r)$\in$S，使得对任意的x$\in$S, 有

$$\theta_l \circ x = \theta_l (\text{或} x \circ \theta_r = \theta_r)$$

则称θ_l(或θ_r)是S上关于$\circ$运算的左零元(或右零元)。

若$\theta \in$S关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为S上关于$\circ$运算的零元。

零元

1. 自然数集N上，乘法的零元：
   加法的零元：
2. $M_n(R)$上，矩阵乘法的零元：
   矩阵加法零元：
3. 幂集P(S)上，$\cup$的零元：
   $\cap$的零元：
4. 命题公式集上，$\vee$的零元：
   $\wedge$的零元：

零元

例 设$A=\{3,4,6,9,17,22\}$，定义A上的二元运算•为：

$$\forall a,b \in A,\ a \bullet b = \min(a,b)$$

1) $\forall a \in A,\ 3 \bullet a = a \bullet 3 = 3$

3是 零元

2) $\forall a \in A,\ 22 \bullet a = a \bullet 22 = a$

22是 单位元

零元

定理 设$\circ$为S上的二元运算，θ_l ,θ_r分别为运算$\circ$的左零元和右零元，则有

1. $\theta_l = \theta_r = \theta$
2. 且θ为S上关于$\circ$运算的惟一的零元。

元素的逆元

定义 设$\circ$为S上的二元运算，$e \in S$为$\circ$运算的单位元，对于某$x \in S$，

1) 如果存在$y_l \in S$(或$y_r \in S$)，使得

$$y_l \circ x = e (\text{或} x \circ y_r = e)$$

则称y_l(或y_r)是x的**左逆元**(**或右逆元**)；

2) 若$y \in S$既是x的左逆元，又是x的右逆元，则称y是x的**逆元**。

3) 如果x有逆元存在，则称x是**可逆的**。

元素的逆元

例，

1. 自然数集中元素关于加法运算的逆元?
2. 整数集关于加法运算的逆元?
3. $M_n(R)$上矩阵乘法的逆元?
4. 在幂集P(S)上∪运算的逆元?

元素的逆元

定理 设∘为S上**可结合的**二元运算，e为该运算的单位元，对于$x \in S$，如果存在左逆元y_l和右逆元y_r，则有

1. $y_l = y_r = y$
2. 且y是x的惟一的逆元。

逆元

证明：

1. $y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$
   所以，$y_l = y_r = y$是x的逆元。

2. 假设$y' \in S$也是x的逆元，则有

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

说明：由这个定理可知，对于可结合的二元运算来说，元素x的逆元如果存在则是惟一的。通常把这个惟一的逆元记作x^{-1}。

消去律

定义 设$\circ$为S上的二元运算，如果对任意的$x,y,z\in S$满足以下条件：

1. 若$x\circ y=x\circ z$且$x\neq\theta$，则$y=z$；(左消去律)
2. 若$y\circ x=z\circ x$且$x\neq\theta$，则$y=z$，(右消去律)

就称运算$\circ$满足消去律。

消去律

例，以下运算是否满足消去律？

1. 实数集R上：+, -, ×
2. 幂集P(S)上：∪, ∩, -, ⊕
3. n阶实矩阵的集合M_n(R)上：+, ×

实例

1. 设A上的二元运算∘由下表所确定，求A中关于∘运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

解，

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	d
c	c	a	a	d
d	d	d	d	d

单位元：a

零元：d

逆元：$a^{-1}=a, b^{-1}=b, c^{-1}=c$

可逆元素

幂等元：a,d

说明

设*为S上的一个二元运算，那么该运算的有些性质可以从运算表中直接看出。即：

1) 运算*具有**封闭性**，当且仅当运算表中每个元素都属于S。

2) 运算*具有**可交换性**，当且仅当运算表关于主对角线是对称的。

3) 运算*具有**幂等性**，当且仅当运算表的主对角线上每一个元素与它所在行(列)的表头元素相同。

说明

4) S关于*有**零元**，当且仅当该元素所对应的行和列中的元素都与该元素相同。

5) S中关于*有**单位元**，当且仅当该元素所对应的行和列依次与运算表的表头元素相一致。

6) 设S中有单位元，a和b**互逆**，当且仅当位于a所在行，b所在列的元素以及b所在行，a所在列的元素都是单位元。

实例

2. 设A={a,b,c}，A上的二元运算*,∘,•如下表所示

1) 这些运算是否满足**交换律**,**结合律**,**幂等律**和**消去律**。

2) 求关于这些运算的**单位元**、**零元**和所有可逆元素的**逆元**。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

•	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

1) *运算：

交换律 结合律 幂等律 消去律

单位元：a

零元：无

逆元：$a^{-1}=a, b^{-1}=c, c^{-1}=b$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

2) ∘运算：

交换律 结合律 幂等律 消去律

单位元： a

零元： b

逆元： $a^{-1}=a$

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

3) •运算：

交换律 结合律 幂等律 消去律

单位元： 无

零元： 无

逆元： 无可逆元素

•	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

实例

3. 对于下面给定的集合和集合上的二元运算，指出运算的**性质**，并求出它的**单位元**、**零元**和所有可逆元素的**逆元**。

1) Z^+，$\forall x,y\in Z^+, x*y=\mathrm{lcm}(x,y)$,即求最小公倍数；

解： 性质：交换律, 结合律, 幂等律 ,消去律

单位元： 1

零元：无

逆元：$1^{-1}=1$

2) Q，$\forall x,y \in Q$，$x*y=x+y-xy$

①交换律：$\forall x,y \in Q$，$x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$

所以运算*在Q上满足交换律。

② 满足结合律：

$\forall x,y,z \in Q, (x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z-xy-yz-zx+xyz$

③ 幂等律：不满足幂等律。幂等元？

④ 单位元：0

零元：1

逆元：$x^{-1}=\dfrac{x}{x-1}(x \neq 1)$

⑤ 消去律：　满足消去律。

作业（习题十p178）

- 2，4，
- 7，8，9