习题 5----1 答案

1、 单项选择题

（1） B

解析：由例 1.1 知几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ 收敛的条件是-1<q<1。

（2） B

解析：由级数收敛的必要条件知该级数发散。

（3） B

解析：取 k=0 时，该级数收敛，取 k=1 时，该级数发散。

（4） D

解析：取 $\mu_n = \frac{1}{n}$ 时，级数发散但 $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$。取 μ_n=n 时，$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty$。

（5） C

解析：由级数收敛的必要条件知道 $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} = \infty$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n}$ 发散。

(6) C

解析：2=$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \mu_n = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 ....$ ①

5=$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n-1} = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + ...$ ②

②——①=3=$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n} = \mu_2 + \mu_4 + \mu_6 + ...$ ③

③+②=8

2、 填空题

（1）1，$\frac{4}{3}$，$\frac{31}{21}$

（2）1，$\frac{3}{2}$，$\frac{31}{18}$

（3）$\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}$

3、解析：$s_n = \mu_1 + \mu_2 ....\mu_{n-1} + \mu_n$　　$s_{n-1} = \mu_1 + \mu_2 ....\mu_{n-2} + \mu_{n-1}$

所以 $\mu_n = s_n — s_{n-1}$（n>1）因为 $s_n = \frac{3^n - 1}{3^n}$ 所以解得 $\mu_n = \frac{2}{3^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1$$

4、解析：

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!},$$

$$s_n=\sum_{n=1}^{n}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}.......\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}s_n=1$

（2）解析：$\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}$，$s_n=\sum_{n=2}^{n}\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n}{n+1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n}{n+1})=\ln\frac{1}{2}$$

（3） 解析：

$$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x=\frac{1}{n+1}$$

原式$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

（4） 解析：在判断一个级数时必须先判断它的通项是否在 n 趋于无穷大时趋于 0，

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}\neq 0$ 由收敛级数的必要条件知该级数发散。

（5） 解析：$\lim_{n\to\infty}n^2\ln(1+\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}=1$ ，由收敛级数的必要条件知该级数发散。

（6） $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{15}-\frac{1}{2^3}........+\frac{1}{5n}-\frac{1}{2^n}+.....=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5n}-\frac{1}{2^n})$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$发散，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，故原级数发散。

5、 解析：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$的前 2n 项和为：

$$S_{2n}=\sum_{n=1}^{n}(\mu_{2n-1}+\mu_{2n})=\mu_1+\mu_2+\mu_3+........+\mu_{2n-1}+\mu_{2n}$$

$S_{2n+1}=\sum_{n=1}^{n}(\mu_{2n-1}+\mu_{2n})+\mu_{2n+1}$ 所以 $S_{2n+1}=S_{2n}+\mu_{2n+1}$ ①

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_{2n-1}+\mu_{2n})$ 收敛于 s，所以 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=s$ ②。又因为 $\lim_{n\to\infty}\mu_n=0$

对 ①两边求极限得 $\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=s$ ③

综合 ②③得 $\lim_{n\to\infty}S_n=s$ 。证毕。

6、解析：因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(\mu_n-\mu_{n+1})$ 收敛，所以该级数前 n 项和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(\mu_k-\mu_{k+1})=$

$$(\mu_1-\mu_2)+2(\mu_2-\mu_3)+.......n(\mu_n-\mu_{n+1})=\mu_1+\mu_2+\mu_3+......+\mu_n-n\mu_{n+1}=$$

$\sum_{k=1}^{n}\mu_k-n\mu_{n+1}$ 极限存在。将上式变形为 $S_n+n\mu_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k$ 。因为 $\lim_{n\to\infty}n\mu_{n+1}$ 存在

$\lim_{n\to\infty}(S_n+n\mu_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu_k$ 存在。所以级数收敛。

习题 5-2

高数一组

（A）

1、 用比较审敛法判断下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$

解：$\frac{1}{4n+1}>\frac{1}{4n+1+3}=\frac{1}{4(n+1)}$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4（n+1）}$发散。由比较审敛法得原式发散。

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)（3n+2）}$

解：$\frac{1}{(n+1)（3n+2）}<\frac{1}{（n+1）3n}<\frac{1}{（n+1）n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n（n+1）}$收敛，由比较审敛法得原式收敛。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)（n+2）}$

解：$\frac{n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+2)}-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1}$

$>\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$发散。由比较审敛法得原式发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

解：正弦函数在（0，$\frac{\pi}{2}$）单调递增，$\sin\frac{\pi}{2^n}$单调递减，且小于等于 1，$\sin x< x$。

得：$\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$。由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，得原式收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n\sqrt[n]{n}}$

解：$n\geq 1$ 时，$2^n>n$, 得 $1\leq\sqrt[n]{n}\leq 2$，得$\frac{\pi}{n\sqrt[n]{n}}\geq\frac{\pi}{2n}$。当 n=1 时，$\sin\frac{\pi}{n\sqrt[n]{n}}$=0.当 $n\geq 2$ 时，又正弦函数在（0，$\frac{\pi}{2}$）单调递增，

$\sin\frac{\pi}{n\sqrt[n]{n}} \geq \sin\frac{\pi}{2n}$。由$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$发散，得$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$发散，得原式发散。

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{2^n\sqrt{n}}$

解：$\frac{\sqrt{n}+1}{2^n\sqrt{n}}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n\sqrt{n}}<\frac{2}{2^n}$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}$收敛，得原式收敛。

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)$

解：$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(\sqrt{n}+1)}$

$\leq\left(\frac{1}{n^2}\right)^{(\sqrt{n}+1)}\leq\frac{1}{n^2}$

有 p 级数易得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原式收敛。

$(\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))$

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ （$a>0$）

解：当 a=1 时，原式$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$,显然发散。

当 $a\neq 1$ 时，$\frac{a^n}{1+a^{2n}}<\frac{a^n}{a^{2n}}=\frac{1}{a^n}$.

当 $a>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，得原式收敛。

当 $a<1$ 时，$\frac{a^n}{1+a^{2n}}<a^n$. 由$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$收敛，得原式收敛。

2、 用比值审敛法判别下列级数的敛散性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3n^3}=\frac{1}{3}<1$

由比值审敛法知原级数收敛。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5}=\infty>1$。

由比值审敛法知原级数发散。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{2^n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1.$

由比值审敛法知原级数收敛。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,2}{n(\frac{1}{n}+1)^{n+1}}=\frac{2}{e}<1.$

由比值审敛法知原级数收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{\frac{n!}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n}{n+1}=\infty>1,$

由比值审敛法知原级数发散。

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}}{\frac{n!}{(2n-1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n}{[(2n+1)!][(2n+1)!-1]***[(2n-1)!]}=0<1,$

由比值审敛法知原级数收敛。

3、 用根值审敛法判别下列级数的敛散性。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}（\sqrt[n]{3}-1）^{n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=0<1,$

由根值审敛法知原级数收敛。

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}（\frac{n}{2n-1}）^{2n+1}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{（\frac{n}{2n-1}）^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}（\frac{n}{2n-1}）^{\frac{2n+1}{n}}=0<1,$

由根值审敛法知原级数收敛。

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{[\ln(1+n)]^n}(a>0)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{[\ln(1+n)]^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}}{[\ln(1+n)]}=0<1,$

由根值审敛法知原级数收敛。

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{\pi}{2}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{\pi}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{\pi}{2n}}=1$，又

$n\geq 1$时，$1<2n\sin\frac{1}{n}$，$(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{\pi}{2}}>(2n\sin\frac{1}{n})>\sin\frac{1}{n}$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$发散得原级数发散。

（5） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=e^{-1}<1$，

由根值审敛法知原级数收敛。

4、 用适当的方法判别下列级数的敛散性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{an+b}(a>0,b>0)$

解：$\frac{1}{an+b}>\frac{1}{an}$，由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{an}$发散。由比较审敛法得原式发散。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{4}{5})^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{4}{5})^{n+1}}{n(\frac{4}{5})^n}=\frac{4}{5}<1$

由比值审敛法知原级数收敛。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}(\frac{n+1}{n})^3=0<1$

由比值审敛法知原级数收敛。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n(\sqrt[n]{e}-1)}{2}]^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{[\frac{n(\sqrt[n]{e}-1)}{2}]^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{e}-1)}{2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(e^t-1)}{2t}=\frac{1}{2}<1$，(令 $t=\frac{1}{n}$)

由根值审敛法知原级数收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}(a>0,b>0)$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+b^n}$

当 $b\leq 1$,

$b^n\leq 1$，$\frac{1}{1+b^n}\geq\frac{1}{2}$，易得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b^n}$发散，得原式发散。

当 $b>1$ 时，$\frac{1}{1+b^n}<\frac{1}{b^n}$，易得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b^n}$收敛。

a) $\frac{a^n}{1+b^n}<\frac{a^n}{b^n}$，易得 $a<b$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+b^n}$收敛，得原式收敛。

b) $a\geq b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+b^n}\geq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{1+b^n}=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+b^n}$发散。

综上得 $b>1,a<b$时原式收敛，其余情况皆发散。

5、 判别下列级数是否收敛，如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

解：$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,由莱布尼茨审敛法得原式收敛。有 p 级数易得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以原式条件收敛。

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$

解：$\frac{n}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{2n-1}{3^{n+1}}>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$=0,由莱布尼茨审敛法得原式收敛。

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}$ ==$\frac{1}{3}<1$

由比值审敛法知原级数绝对收敛。

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}$（-1）$^{n+1}$ $\sin\frac{1}{n}$

解：$\sin\frac{1}{n}>\sin\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}$=0,由莱布尼茨审敛法得原式收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$发散易得原式条件收敛。

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$（$1-\cos\frac{1}{n}$）

解：$1-\cos\frac{1}{n}>1-\cos\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}$（$1-\cos\frac{1}{n}$）=0,由莱布尼茨审敛法得原式收敛。

$$1-\cos\frac{1}{n}=\sin^2\frac{1}{2n}$$

$\sin^2\frac{1}{2n}<(\frac{1}{2n})^2$,由 p 级数易得$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n})^2$收敛。则原式绝对收敛。

（5） $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$-$\frac{1}{n^2+1}]$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛。

$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$=0，由莱布尼茨审敛法得$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$收敛。

则原式收敛。

$\frac{1}{n}$ –-$\frac{1}{n^2+1}>\frac{1}{n}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，得原级数条件收敛。

（6） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n!}$

解：n≥ 1, 则 $n+1\geq 2$, 得 $\frac{2^n}{n!}>\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$=0，由莱布尼茨审敛法得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n!}$收敛。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1,$$

由比值审敛法知原级数绝对收敛。

（B）

6、设数列$\{na_n\}$有界，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$收敛。

证明：数列$\{na_n\}$有界，不妨设$|na_n|\le M$，（$M\ge 0$，为某一常数）。

则（na_n）$^2\le M^2$。

得：$a_n{}^2\le\frac{M^2}{n^2}$,有 p 级数易得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^2}{n^2}$收敛。由比较审敛法得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$收敛。

7、若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛，且$a_n\le b_n\le c_n$(n=1,2,3⋯)，证明$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，

而$c_n-a_n\ge b_n-a_n\ge 0$,

且$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛，正项级数收敛其前 n 项部分和有界，得$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$，其前 n 项部分和也有界，得$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，

又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，得证。

8、如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$也收敛。

证明：$2\frac{1}{n}\sqrt{a_n}\le a_n+\frac{1}{n^2}$,又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.得证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$也收敛。

9、设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^+$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^-$分别是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的正部与负部。证明：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛的充分必要条件是其正部与负部同时收敛。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛的充分必要条件是其正部与负部同时发散。

证明：

（1）

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，且$-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$也收敛。又$-|a_n| \le a_n^+ \le |a_n|$，$-|a_n| \le a_n^- \le |a_n|$，由第七题易得正部与负部同时收敛。

c) 正部与负部同时收敛。则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$也收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 。即得证。

（2）

a）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

反证法：如果其正部与负部不同时发散。有下列情况：

1) 同时收敛，易知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，这与给定条件矛盾。得其正部与负部不同时收敛。

2) 一个收敛一个发散。得正部与负部之和发散。即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，这与给定条件$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛矛盾。

综上得证$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛的必要条件是其正部与负部同时发散。

充分性：题目有误。

习题 5—3

1 求下列幂级数的收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+n}$

原式在 $x=0$ 处收敛

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+n}{(n+1)^2+n+1}\right|=1$

在 $x=\pm1$ 处 $\left|\frac{1}{n^2+n}\right|<\frac{1}{n^2}$，所以收敛

因此，收敛域为 $[-1,1]$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$

在 $x=0$ 处收敛，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right|=0$，因此收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x+1)^{2n}$

令 $t=(x+1)^2$，原式变为 $\sum_{n=1}^{\infty}2^nt^n$，该式在 $(0,\frac{1}{2})$ 收敛，所以原式在 $(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ 收敛。

（4）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^2\ (a\neq0)$

原式在 $x=0$ 处收敛

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u(n+1)}{u(n)}\right|=(n+1)a^{-(2n+1)}\quad=\begin{cases}\infty,|a|\le1\\0,|a|>1\end{cases}$

所以收敛域为$\begin{cases}\{0\},|a|\le 1\\(-\infty,+\infty)\end{cases}$

（5）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^p}(p>0)$

令$t=x+1$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u(n+1)}{u(n)}\right|=\frac{n^p}{(n+1)^p}=1$，当$1\ge p>0$时，在$t=1$处发散，$p<1$

时，在$t=1$收敛，$t=-1$时函数都收敛，因此原函数的收敛域为：

$\begin{cases}[-2,0),0<p\le 1\\[-2,0],p>1\end{cases}$

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{3+(-1)^n}{n}]x^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u(n)}=0$，所以收敛域为$(-\infty,+\infty)$

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{2^n\bullet n}$

设$t=x^3$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u(n+1)}{u(n)}\right|=\frac{1}{2}$，在$t=2$收敛，$t=-2$发散，因此原式收敛域为

$(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}]$

2、求下列级数的和函数

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}x^2e^{-nx}$ （$x\ge 0$）

$x=0$时，$s(x)=0$

$x\ne 0$时，$s(x)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=\frac{x^2}{1-e^{-x}}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$

$s(x)=x^2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x^2(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int x^{2n-2}=\int\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\int\frac{1}{1+x^2}=\arctan x$， $x\in[-1,1]$

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\bullet 2^n}$

$x=0$时， $s(x)=\frac{1}{2}$

$x\neq 0$时， $s(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int 2x^{n-1}=\frac{1}{x}\int 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{x}\int\frac{2}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{2})$

$x\in[-2,0)\cup(0,2)$

（5） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n\bullet(n+1)}$

$x=1$时， $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet(n+1)}=1$

$x\neq 1$时， $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\int x^{n-1}=\int\int\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=(1-x)\ln(1-x)+x$， $x\in[-1,1)$

（6） $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$

$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$， $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

3，求下列级数的收敛域

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$

$x=\pm 1$时，级数发散

$x\neq\pm 1$时， $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right|$

$|x|<1$时， $\rho=|x|<1$

$|x|>1$时， $\rho=0<1$

因此，级数收敛域为$|x|\neq 1$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\frac{x^2+n^3}{x^2+(n+1)^3}\right|=1$$

因此，收敛域为$(-\infty,+\infty)$

5.求下列数项级数的和

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}(\frac{1}{3})^n$

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^n$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{2}}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

设 $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{2}}x^n$， $v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

设 $x=t^2$

$$u(t^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}t\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}=2t\sum_{n=1}^{\infty}\int(-t^2)^{n-1}=2t\int\frac{1}{1+t^2}=2t\arctan t$$

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\int(-x)^{n-1}=\ln(1+x)$$

$$s(x)=2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\ln(1+x)$$

$$s(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\ln\frac{4}{3}$$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{n}$

令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{n}x^{n}$

$$s(x)=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{x}{2})^{n-1}=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n+1}\right)''=2x\frac{(8-4x)(4-2x^{2})+4(4-2x)(8-2x^{2})}{(4-2x)^{4}}$$

$s(1)=8$

（3）$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}\ldots$

令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(x)^{n}$， $x=t^{2}$

$$s(t^{2})=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n}=t^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}=t^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(t^{2n-1})'=t^{2}(\frac{t}{1-t^{2}})t^{2n-1}=t^{2}\frac{1+t^{2}}{(1-t)^{2}}$$

$s(\frac{1}{2})=3$

（4）$\frac{1}{1\bullet 3}+\frac{1}{2\bullet 3^{2}}+\frac{1}{3\bullet 3^{3}}+\frac{1}{4\bullet 3^{4}}\ldots$

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int x^{n-1}=\int\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)$$

$s(\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}$

5—4

1.将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间

（1）$shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

$$e^{-x}=1+x+\frac{(-x)^{2}}{2!}+\frac{(-x)^{3}}{3!}+\ldots$$

$$shx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(2n-1)!}\ x\in(-\infty,+\infty)$$

（2） $\ln(2+x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\qquad x\in[-2,2]$$

（3） $\sin^2 x$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

（4） $\frac{1}{9+x^2}$

$$\frac{1}{9+x^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{3})^{2n}\qquad x\in(-3,3)$$

（5） $\frac{1}{(1+x^2)}$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-(\frac{1}{1+x})'=-(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\qquad x\in(-1,1)$$

（6） $\frac{1}{x^2-5x+6}$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n\qquad x\in(-2,2)$$

（7） $(1+x)\ln(1+x)$

$$((1+x)\ln(1+x))'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\qquad x\in(-1,1]$$

（8） $\ln(1+x-2x^2)$

$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1+2x)(1-x)=\ln(1+2x)+\ln(1-x)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$

$x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

2.将下列函数在指定点x_0处展开成$(x-x_0)$的幂级数，并求展开式成立的区间。

（1）$\sqrt{x}$ $x_0=1$

$$\sqrt{x}=(1+(x-1))^{1/2}=1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times\ldots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(x-1)^n=$$

$$1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(x-1)^n$$

$x\in[0,2]$

（2）$\ln x$， $x_0=3$

$$\ln x=\ln 3(1+\frac{x-3}{3})=\ln 3+\ln(1+\frac{x-3}{3})=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{x-3}{3})^n$$

$x\in(0,6]$

（3）$\cos x$， $x_0=-\frac{\pi}{3}$

$$\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

（4）$\frac{1}{x}$， $x_0=3$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-3}{3})^n \qquad x\in(0,6)$$

（5）$\sin 2x$， $x_0=\frac{\pi}{2}$

$$\sin 2x=-\sin 2(x-\frac{\pi}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}(x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

（6）$\frac{1}{x^2+3x+2}$， $x_0=-4$

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n$$

$x\in(-6,2)$

习题 5-5

A 组

1. 解：由题意可知：

$\mathrm{f}(\chi)$在$\chi=\kappa\pi(\kappa=0,\pm1,\pm2\ldots)$处有间断点，满足收敛定理，

$$\therefore f(\pi)=\frac{1}{2}(f(\pi^{+})-f(\pi^{-}))$$
$$=\frac{1}{2}(-1+1+\pi^{2})$$
$$=\frac{1}{2}\pi^{2}$$

同理可知：

$$f(5\pi)=\frac{1}{2}\pi^{2}$$

2.（1） $f(x)=1-x^{2}(-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2})$

解：$a_{0}=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^{2})dx$

$$=2\times2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x^{2})dx$$
$$=4\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{24})$$
$$=\frac{11}{6}$$

$$a_{1}=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^{2})\cos2n\pi dx$$
$$=2\times2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x^{2})\cos2n\pi dx$$
$$=4(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos2n\pi dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^{2}\cos2n\pi dx$$
$$=4(0-\frac{1}{4n^{2}\pi^{2}}\cos n\pi)$$
$$=-\frac{1}{n^{2}\pi^{2}}\cos n\pi$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}\pi^{2}}$$

$$b_{n}=0$$

$$\therefore f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}\pi^{2}}\cos2n\pi x$$

(2)解：由题意可知：$f(x)$满足收敛定理。且在$x=2k+\frac{1}{2}$和$x=2k(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$处存在间断点

$\therefore f(2k+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(1+(-1))=0$

$f(2k)=\frac{1}{2}(1+1)=1$

在非间断点处

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi xdx$$

$$=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi xdx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\cos n\pi xdx$$

$$=\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi xdx$$

$$=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi xdx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\sin n\pi xdx$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-2\cos\frac{n\pi}{2})$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}]\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}(1-2\cos\frac{n\pi}{2})\sin n\pi x\right.$$

$(x\neq 2k,2k+1,k=0,\pm1\ldots)$

（3） $f(x)$ 为偶函数，$\therefore b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}[2\pi^3 + 2\pi]$$
$$= 2\pi^2 + 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nxdx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(3x^2+1)\cos nxdx$$
$$= \frac{12(-1)^n}{n^2}$$

$$\therefore f(x) = \pi^2 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

（4）解：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} e^x dx + \int_{0}^{\pi} dx)$$
$$= \frac{1}{\pi}(1 - \frac{1}{e^{\pi}} + \pi)$$
$$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi e^{\pi}} + 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} e^x \cos nxdx + \int_{0}^{\pi}\cos nxdx)$$
$$= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{1+n^2}(1 + \frac{1}{e^{\pi}}\cos n\pi)]$$
$$= \frac{1+(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}((\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx)$$
$$=\frac{1}{\pi}(\frac{-n+(-1)ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n})$$

$$\therefore f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}(1+\frac{1}{e^{\pi}}\cos n\pi)\cos n\pi x+(\frac{-n+(-1)ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n})\sin n\pi x$$

3、（1）解：

$$2l=2-0=2$$
$$\therefore l=1$$

将 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 外补充定义，将 $f(x)$ 延拓为周期为 2 的周期函数

$$\therefore a_0=\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 xdx$$
$$=\frac{1}{2}$$
$$a_n=\int_0^2 f(x)\cos n\pi xdx$$
$$=\int_0^1 x\cos n\pi xdx$$
$$=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$$
$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin n\pi xdx$$
$$=\int_0^1 x\sin n\pi xdx$$
$$=\frac{(-1)^{1+n}}{n\pi}$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ \pi}\{\frac{(-1)^n-1}{n\ \pi}\cos n\pi x+(-1)^{n+1}\sin n\pi x\}$$

4、（1）解：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$$
$$= \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 xdx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos^2 xdx$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos nxdx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos nxdx$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{-1}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0(n=2k+1) \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}n-1}}{n^2-1}(n=2k) \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2kx$$

（2）解：

$$a_0 \ =\frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)dx+\int_{0}^{3}dx]$$

$$=\frac{1}{3}(-6+3)$$

$$=-1$$

$$a_n=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx]$$

$$=\frac{1}{3}[\frac{18}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

$$b_n=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{18}{n\pi}\cos n\pi$$

$$=\frac{6\times(-1)^n}{n\pi}$$

$$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}\}$$

5、（1）解：将 $f(x)$ 偶延拓，则

$b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)dx$

$= \frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2})$

$= 0$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)\cos nxdx$

$= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx - \int_0^{\pi}x\cos nxdx]$

$= \frac{2}{\pi}[0 - \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)]$

$= -\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}(n = 2k) \\ 0(n = 2k) \end{cases}$

$(k = \pm 1, \pm 2 \ldots)$

$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

（2）

解：

将 $f(x)$ 奇延拓，则 $a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nxdx$

$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx$

$= \frac{4}{\pi}[-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx]$

$= \frac{4}{\pi}[\frac{(-1)^{n-1}\pi^2}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3}]$

$= \frac{4}{\pi}[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n})]$

$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n})]\sin nx$

（3）

解：1、正弦级数

$$bn=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2}{l}(\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx)$$

$$=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}dx$$

$$=\frac{4l(-1)^{k-1}}{\pi^2(2k-1)}$$

$$\therefore \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}$$

2、余弦级数

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$=\frac{2}{l}(\int_0^{\frac{l}{2}} xdx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)dx)$$

$$=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2}{l}(\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx)$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}l}{\pi^2(2k-1)^2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{l}{4}+\frac{l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}$$

（4）

解：

1、 正弦级数

$$bn=\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi+\frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{16}{n^2\pi^2}$$
$$=\frac{8}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{16}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$
$$\therefore f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

2、余弦级数

$$a_0=\int_0^2 x^2dx$$
$$=\frac{8}{3}$$
$$a_n=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$=\frac{16(-1)^n}{n^3\pi^4}$$
$$\therefore f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

B 组

6、证明：

设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

则：

$$f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}=\frac{a_0}{2}\cos\frac{k\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l})$$

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}\cos\frac{k\pi x}{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l})dx$$

由三角函数的正交性可知：

$$\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}\cos\frac{k\pi x}{l}dx$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=0$$

$$\int_{-l}^{l}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l})dx=\begin{cases}0(k\neq n)\\ a_n l(k=n)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = a_n l$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$$

同理可得：

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

7、（1）

证明：

$f(x)$ 的周期为 2π，

$$\therefore f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$f(x-\pi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n(x-\pi)+b_n\sin n(x-\pi)]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx\times(-1)^n+b_n\sin nx\times(-1)^n]$$

$$-f(x)=-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\times(-1)+b_n\sin nx\times(-1))$$

$$f(x-\pi)=-f(x)$$

$$\therefore \frac{a_0}{2}=-\frac{a_0}{2}$$

$$a_0=0$$

$$(-1)^n=-1$$

$$\therefore n=2k+1$$

（$k=0,\pm1,\dots$）

即 $f(x)$ 的偶数项全为 0

$$a_{2k}=b_{2k}=0$$

（2）由（1）可知：

若 $f(x-\pi)=f(x)$

$$(-1)^n=1$$

则 $n=2k$（$k=0,\pm1,\dots$）

即 $f(x)$ 得奇数项全为 0

$a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$（$k = 0, \pm 1, \ldots$）

8、

证明：

令 $f(x) = x(\pi - x)$，对其进行奇延拓，得：

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi} x\pi \sin nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx]$$
$$= \frac{2}{\pi}[-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi + \frac{\pi^2}{n}\cos n\pi - \frac{2}{n^3}\cos n\pi + \frac{2}{n^3}]$$
$$= \frac{2}{\pi}[\frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3}\cos n\pi]$$
$$= \frac{4}{n^3\pi}[1 - (-1)^n]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi}(n = 2k-1) \\ 0(n = 2k) \end{cases}$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$
$$\therefore f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

9、

证明：

对 $f(x)$ 进行偶延拓得：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$f(x+\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(x+\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx+\frac{\pi}{2}n)$$

$$f(x-\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(x-\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)$$

$$-f(x-\frac{\pi}{2})=-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)\times(-1)$$

$$\because\ f(x+\frac{\pi}{2})=-f(x-\frac{\pi}{2})$$

$$\therefore a_0=0$$

$$\therefore \cos(nx+\frac{\pi}{2}n)=-\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)$$

$$\cos(nx+\frac{\pi}{2}n)+\cos(nx-\frac{\pi}{2}n)=0$$

$$\therefore 2\cos nx\cos\frac{n\pi}{2}=0$$

$$\cos\frac{n\pi}{2}=0$$

$$\therefore n=2k+1(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$$

即 $f(x)$ 得所有偶数项为 0，

即 $a_{2k}=0$

10、

总习题五

1、1） D

解：常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛与级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是否收敛没有直接的关系：例如

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

因此，常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛与级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$可能收敛也可能发散。

2）B

解：由于 $a_n\left(b_n\right)\le\left|a_n\right|+\left|b_n\right|$，由比较敛审法知：

因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(b_n\right)$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right)$发散。

3）B

解：由于$u_n\le\left|u_n\right|$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$不一定收敛。例如：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

4）C

解：当 $p>1$时，$\left|u_n\right|=\frac{1}{n^p}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛（证明见例 2.2），所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$绝对收敛；

当$0<p\le 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$收敛（交错级数敛审法），所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$条件收敛。

5）C

解：由于$\left|u_n\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\cdots+\sqrt{2}-1)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=+\infty$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$，利用交错级数敛审法：

$u_n \geq u_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$条件收敛

6）D

A) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\frac{1}{3}\neq 0$；所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

B) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}=+\infty$，因为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

C) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1\neq 0$；所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

D) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

7）A

解：由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho$，（$\rho<1$）

令$v_n=(-1)^n\frac{n-1}{n}u_n$，则$|v_n|=\frac{n-1}{n}|u_n|$；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}|u_{n+1}|}{\frac{n-1}{n}|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2|u_{n+1}|}{(n^2-1)|u_n|}=\rho<1$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$绝对收敛

8）B

解：令 $u_n=a_n(x+3)^n$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ 发散有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}2\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\geq 1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq\frac{1}{2}$；

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sigma\leq 1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{1}{2}$；

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数则 $u_n\geq u_{n+1}\Rightarrow a_n\geq 2a_{n+1}$

综上所述，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$；

当 $x=-2$ 时，$u_n=a_n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

9）A

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2*3^n*x^n}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}=2e^{3x}$

2、1）解：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n}\ln 3=\ln 3>0$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有相同的敛散性

又因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ 发散。

2）解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n+2\right)}{2^{n+1}}\frac{2^n}{\ln\left(n+1\right)}=\frac{1}{2}<1$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n+1\right)}{2^n}$ 收敛

3）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\ln^5 n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^5 n}=+\infty$（由洛必达法则易知）

又因为调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^5 n}$发散。

4）解：由于$u_n=\dfrac{n\sin^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}\le\dfrac{n}{2^n}$，令$v_n=\dfrac{n}{2^n}$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}<1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

5）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}n^s}{a^n(n+1)^s}=a\quad\begin{cases}>1,\text{级数发散}\\=1\\<1,\text{级数收敛}\end{cases}$

当$a=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$为$p$级数，当$s>1$时，级数收敛；当 $s\le1$时，级数发散

3、1）

解：因为$|u_n|=\dfrac{\sin(n+2)}{\pi^n}\le\dfrac{1}{\pi^n}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\pi^n}$收敛

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛

2）解：因为$u_n=(-1)^n(\dfrac{n}{n+1})^n$，

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n+1})^n=e^{-1}\ne0$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

3）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\cos\dfrac{1}{n}-n\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|n^2\cos\dfrac{1}{n}-n^3\sin\dfrac{1}{n}\right|$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{n}}\lim_{x\to0}\left|\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right|=\frac{2}{3}>0$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\cos\dfrac{1}{n}-n\sin\dfrac{1}{n}\right|$有相同的敛散性；

又因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\cos\frac{1}{n}-n\sin\frac{1}{n}\right|$收敛，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-n\sin\frac{1}{n}\right)$绝对收敛

4）解：因为$|u_n|=\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!n^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}=e^{-1}<1$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

5）解：因为$u_n=(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$， $|u_n|=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$的部分和：

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n+\ln n-\ln(n-1)+\cdots+\ln 2-\ln 1]=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

又$|u_n|\geq|u_{n+1}|$，且$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$所以交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

6）解：因为$u_n=(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$， $|u_n|=\frac{1}{n-\ln n}$

由于$\frac{1}{n-\ln n}\geq\frac{1}{n}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

又$|u_n|\geq|u_{n+1}|$，且$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$所以交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

4、1）解：令$u=x+1$，则原级数可化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}u^n$，因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}+\left(-2\right)^{n+1}}{n+1}*\frac{n}{3^n+\left(-2\right)^n}\right|=3$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+\left(-2\right)^n}{n}u^n$ 的收敛半径$R=\frac{1}{3}$。

当$u=-\frac{1}{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+\left(-2\right)^n}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(-1\right)^n}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$，收敛

当$u=\frac{1}{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+\left(-2\right)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right]$，发散

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+\left(-2\right)^n}{n}\left(x+1\right)^n$ 的收敛域为$-\frac{1}{3}\le x+1<\frac{1}{3}$，即$\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$。

2）解：因为$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛半径为$R=\frac{1}{e}$。

当$x=\frac{1}{e}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n$，而$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{e}\right]^n=1\ne 0$，所以级数发散

当$x=-\frac{1}{e}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(-\frac{1}{e}\right)^n$，而$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(-\frac{1}{e}\right)\right]^n=\left(-1\right)^n\ne 0$，所以级数发散

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛域为$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$。

3）解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ 的收敛域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}x^n$ 的收敛域为$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$；

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}\right)x^n$ 的收敛域为$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$。

注：两个收敛域可以取交集的主要原因是，两个级数要么同为正项级数，要么同为负项级数，如果有一个发散，则加和也发散。

4）解：令$u=x^2$，则原级数可花纹$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}u^n$，因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}\right|=\frac{1}{2}$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}u^n$的 收敛半径为$R=2$。

当$u=2$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}2^n=\sum_{n=1}^{\infty}n$，发散

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$的收敛域为$0\le x^2<2$，即$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$。

5、1）

解：已知幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)}x^n$的收敛半径为$R=1$

当$x=-1$时，原级数为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)}(-1)^n$收敛；

当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)}$，发散；

所以级数的收敛域为$\left[-1,1\right)$。

设和函数为$s(x)$，即$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)}x^n$，其中$s(0)=0$。

当$x\ne0$时，根据和函数的性质可得，

$$s(x)=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)}x^{n-2}=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}\right)'=x^2\left(\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'$$

$$=x^2\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx\right)'=x^2\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx\right)dx\right)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\int_0^x\frac{1}{1-x}dx\right)dx\right)'=x^2\left(-\frac{1}{x^2}\int_0^x\ln(1-x)\,dx\right)$$

$$=\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln(1-x)-2$$

所以幂级数的和函数为

$$s(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln(1-x)-2,-1\le x<0or0<x<1\\0,x=0\end{cases}$$

2）解：令$u=x-1$，则原级数可化为$\sum_{n=1}^{\infty} nu^n$，其和函数

$$s(u)=\sum_{n=1}^{\infty} nu^n = u\sum_{n=1}^{\infty} nu^{n-1} = u\left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n\right)' = u\left(\frac{1}{1-u}\right)' = \frac{u}{(1-u)^2} \qquad u\in(-1,1)$$

所以$s(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2} \qquad x\in(0,2)$

3）解：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$的和函数为：

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)'$$，其中$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=e^{x^2}$

带入原式有：

$$s(x)=\left(xe^{x^2}\right)'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

4）解：令$u=x+1$，则原级数可化为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{(n+2)!}$，其和函数为：

$$s(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{n+2}}{(n+2)!}\frac{1}{u^2}=\frac{1}{u^2}\left(e^u-1-u\right)$$

将 $u=x+1$代入原式有：

$$s(x)=\frac{e^{x+1}-x-2}{(x+1)^2} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

6、1）解：$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-(-2)^n\right]x^n \qquad |x|<\frac{1}{2}$

2）解：$x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

其中$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad , \qquad |x|\le 1$

代入原式得：

$$x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\right]$$

$$=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+2} \quad , \qquad x\in[-1,1]$$

3）解：令 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(2-x\right)^{2}}$，则

$$f'\left(x\right)=\frac{2}{\left(2-x\right)^{3}}$$

$$f''\left(x\right)=\frac{3!}{\left(2-x\right)^{4}}$$

……

$$f^{(n)}\left(0\right)=\frac{\left(n+1\right)!}{\left(2-x\right)^{n+2}}$$

所以 $f^{(n)}\left(0\right)=\dfrac{\left(n+1\right)!}{2^{n+2}}$

$$\frac{1}{\left(2-x\right)^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1},\qquad x\in\left(-2,2\right)$$

7、1）解：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}dx=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)dx$

由于 $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1-x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\arctan x$

所以原级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\arctan x-x$

将 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 代入，解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{4n+1}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{4}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

2）解：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\left(n-1\right)!}\right]'$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}x\right]'=\left(xe^x\right)'$$

$$=\left(1+x\right)e^x$$

将 $x=1$ 代入，得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2e$$

3）解：级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}*x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$

将$x=1$代入，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1)$$

8、证明：因为数列$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$发散，所以$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$

因为正项数列$\{u_n\}$单调减少，所以数列$\{u_n\}$收敛，假设$\lim_{n\to\infty}u_n=u_0>0$

令$v_n=\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+u_n}=\frac{1}{1+u_0}<1$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$收敛。

9、1）证明：因为数列$\{a_n\}$是正项数列，同时

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geq\frac{1}{2}*2=1$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-a_n\right)=\frac{1-a_n{}^2}{2a_n}<0$$

所以数列$\{a_n\}$单调递减，并有下界，所以数列$\{a_n\}$收敛，即$\lim_{n\to\infty}a_n$存在

2）证明：假设$\lim_{n\to\infty}a_n=a_0$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$的部分和为：

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\left(a_n-a_{n+1}\right)+\left(a_{n-1}-a_n\right)+\cdots+\left(a_1-a_2\right)=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-a_0$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$收敛。

因为$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}<a_n-a_{n+1}$

所以，由比较敛审法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛。

10、1）

解：原式等价于$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\cos nx}{n^2}$

因为$\frac{x^2}{4}$为偶函数，所以可以将$\frac{x^2}{4}$展开成余弦函数的傅里叶级数有：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}\cos nxdx=\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n^2}$$

所以有$\frac{x^2}{4}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\cos nx}{n^2}$

2）解：原式等价于$\frac{x^2-2\pi x}{4}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos\frac{n}{2}x}{n^2}\quad x\in\left[0,2\pi\right]$

将函数$f\left(x\right)=\frac{x^2-2\pi x}{4}$作偶延拓。得到定义在$\left[-2\pi,2\pi\right]$上的偶函数。

计算傅里叶级数有：

$$b_n=0\qquad\left(n=0,1,2,3,\cdots\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x^2-2\pi x}{4}dx=-\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x^2-2\pi x}{4}\cos\frac{n}{2}xdx=\begin{cases}\frac{4}{n^2},n\text{为偶数}\\0,n\text{为奇数}\end{cases}$$

将函数按傅里叶级数展开有：

$$f(x)=\frac{x^2-2\pi x}{4}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n}{2}x=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos\frac{n}{2}x}{n^2}\text{，}\quad x\in[0,2\pi]\text{。}$$

11、解：将 $f(x)$ 作奇延拓，得到定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数。

计算傅里叶系数：

$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nxdx=\frac{2(1-\cos nh)}{n\pi}$$

得到正弦级数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx\qquad x\in(0,h)\cup(h,\pi)$$

将 $f(x)$ 作偶延拓，得到定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数。

计算傅里叶系数：

$$b_n=0\qquad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2h}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nxdx=\frac{2\sin nh}{n\pi}$$

得到余弦级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx$$