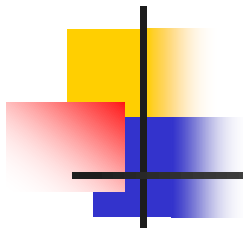


第二部分 集合论

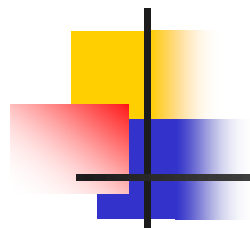


集合论是现代数学的理论基础。

由于集合论的语言适合于描述和研究
离散对象及其关系，所以是计算机
科学与工程的理论基础。

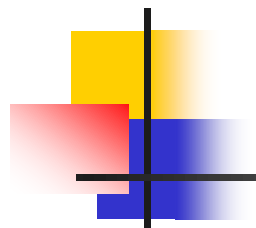
在程序设计、关系数据库、形式语言
和自动机理论等学科领域中都有
重要的应用。

第六章 集合代数



集合的基本概念

集合、元素、子集、真子集、
包含、集合相等、
空集、**幂集**、全集



集合(set)的概念

定义：由确定的相互区别的一些对象组成的整体称为**集合**。

例：教室内的桌椅、图书馆的藏书、全国的高等学校、自然数的全体、直线上的点、26个英文字母等。



元素

- 集合内的对象称为元素。
- 集合通常用大写英文字母表示。

例如, N : 自然数集合

Z : 整数集合

Q : 有理数集合

R : 实数集合

C : 复数集合



集合的表示

1. 列举法： $A=\{a,b,c,d\}$

$$N=\{0,1,2,\dots\}$$

并不是所有的集合都可用列举法表示。

2. 描述法： $B=\{x|P(x)\}$

$P(x)$ ：谓词，概括集合中元素的属性。

如 $B=\{x|x\in\mathbb{Z}\wedge 3<x\leq 6\}$

即 $B=\{4,5,6\}$

如， $B=\{x|P(x)\wedge G(x)\}$



隶属关系

- 元素 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ 。
- 元素 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$



基数

集合 S 的**基数(势)**: S 中的元素的个数。用 $|S|$ 表示。

有限集合: 集合的基数(元素)是有限的。

如, $A=\{a,b,c,d\}$, $|A|=4$

无限集合: 集合的基数(元素)是无限的。

例如, N, Z, Q, R 等均为无限集。



集合的例子

The set of all positive integers

正整数集 $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

The set of all rational numbers

有理数集 $Q = \{\frac{n}{m} \mid n, m \in Z \wedge m \neq 0\}$

The set of real numbers

实数集 $R = \{x \mid x \text{ 是实数}\}$

$A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$, 基数 $|A| = 4$



两个特殊集合

全集：如果一个集合包含了所要讨论的每一个元素，则称该集合为**全集**，用**E**表示。

符号化表示： $E = \{x | p(x) \vee \neg p(x)\}$, $p(x)$ 为任意公式。

如，全总个体域

平面上所有的点——平面几何

空间中所有的点——立体几何

全集是相对的。



两个特殊集合

空集：不含任何元素的集合称为**空集**，用 \emptyset 表示。

符号化表示： $\emptyset = \{x | p(x) \wedge \neg p(x)\} = \{\}$

注意： $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ ，前者是空集，是没有元素的集合；后者是以 \emptyset 作为元素的集合。**基数**？

空集是客观存在的，

例如， $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0\}$ 是空集。



集合间的关系

包含，子集

■符号化表示：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

■若集合B不包含集合A，可表示成：

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\subset B \wedge A \neq B$$

■包含关系性质：

1. 对任意集合A, $\emptyset \subseteq A, \emptyset \subseteq \emptyset$;
2. 对任意集合A, $A \subseteq A$;
3. 对任意集合A,B,C, 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ 。



集合相等

$$\begin{aligned} A=B &\Leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A) \\ &\Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B) \end{aligned}$$

1. 如果A和B不相等，则记作 $A\neq B$ 。
2. 给定二个集合A和B， $A=B$ 当且仅当A和B具有相同的元素。

例： $\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$

例： 设 $A=\{\{1,2\},4\}$, $B=\{1,2,4\}$, 则 $A\neq B$



真子集

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

判断： $\{0,1\}$ 、 $\{1,3\}$ 、 $\{0,1,2\}$ 是 $\{0,1,2\}$ 的
真子集吗？



确定下列命题是否为真

\emptyset 集合 $\{\emptyset\}$ 作为元素的集合

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$ ✓

2. $\emptyset \in \emptyset$ ✗

3. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

4. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ✗

元素 \in 集合

集合 \subseteq 集合



求 $A = \{a, b, c\}$ 的全部子集

解：将 A 的子集从小到大分类，

0元子集：即空集，只有1个： \emptyset

1元子集：即单元集，有3个： $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

2元子集：有3个： $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

3元子集：有1个： $\{a, b, c\}$

子集总数： 2^n



幂集

定义 给定集合A，由A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的**幂集**，记作 $P(A)$ (或 2^A)。

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

1. 若A是n元集，则 $P(A)$ 有 2^n 个元素。
2. 对任意集合A，一定有

$$A \in P(A), \emptyset \in P(A), \text{ 平凡子集}$$

上例中， $P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$



作业(习题六)

5,

6,

8(4),