

5.3 一阶逻辑推理理论



关于量词的推理规则

1. 全称量词消去规则(\forall -)

$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$ 或 $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$ $\checkmark \hookrightarrow$

2. 全称量词引入规则(\forall +)

$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$ $\checkmark \nrightarrow$

3. 存在量词引入规则(\exists +)

$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$ $\checkmark \hookrightarrow$

4. 存在量词消去规则(\exists -)

$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$ $\checkmark \nrightarrow$



一阶逻辑自然推理系统 \mathcal{F}

定义：自然推理系统 \mathcal{F}

1. 字母表：同一阶语言的字母表；
2. 合式公式：同一阶语言的合式公式；
3. 推理规则：
 - 1) 前提引入规则(P规则)：在证明的任何步骤上，都可引入前提。
 - 2) 结论引入规则(T规则)：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可以作为后续证明的前提，在后续证明中引用。



自然推理系统 \mathcal{F}

- 3) 置换规则：在证明的任何步骤上，谓词公式的**子公式**都可以用与它**等值**的其它公式置换。
- 4) 假言推理规则： $A \rightarrow B, A \Rightarrow B$
- 5) 附加规则： $A \Rightarrow A \vee B$
- 6) 化简规则： $A \wedge B \Rightarrow A$
- 7) 拒取式规则： $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$
- 8) 假言三段论： $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$



自然推理系统 \mathcal{F}

- 9) 析取三段论规则： $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$
- 10) 构造性二难规则： $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$
- 11) 合取引入规则： $A, B \Rightarrow A \wedge B$
- 12) \forall -规则；
- 13) \forall +规则；
- 14) \exists +规则；
- 15) \exists -规则。

其中1)~11)同命题逻辑的推理规则

A, B, C, D 为任意谓词公式。

例，证明苏格拉底三段论 “**凡人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的**”

证明：

令 $P(x)$: x 是人； $D(x)$: x 是要死的；

a : 苏格拉底

前提： $\forall x(P(x) \rightarrow D(x))$, $P(a)$

结论： $D(a)$

① $\forall x(P(x) \rightarrow D(x))$

前提引入

② $P(a) \rightarrow D(a)$

① \forall -

③ $P(a)$

前提引入

④ $D(a)$

②③ 假言推理

例：构造下面推理的证明

前提： $\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)), \exists x(F(x) \wedge R(x))$

结论： $\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$

证明：

① $\exists x(F(x) \wedge R(x))$

② $F(c) \wedge R(c)$

③ $\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x))$

④ $F(c) \rightarrow G(c) \wedge H(c)$

⑤ $F(c)$

⑥ $G(c) \wedge H(c)$

⑦ $G(c)$

⑧ $F(c) \wedge R(c) \wedge G(c)$

⑨ $\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$

前提引入

① \exists -

前提引入

③ \forall -

② 化简规则

④ ⑤ 假言推理

⑥ 化简规则

② ⑦ 合取引入

⑨ \exists +





说明

- 推导中既用 \exists -，又用 \forall -，则必须先 \exists -，后 \forall -，才可使用相同常量名，反之不行。



例：构造下面推理的证明(p81,21)

前提： $\neg\exists x(W(x)\wedge C(x)), \forall x(B(x)\rightarrow W(x))$

结论： $\forall x(B(x)\rightarrow\neg C(x))$

$$\textcircled{1}\neg\exists x(W(x)\wedge C(x))$$

前提引入

$$\textcircled{2}\forall x(\neg W(x)\vee\neg C(x))$$

①置换

$$\textcircled{3}\forall x(W(x)\rightarrow\neg C(x))$$

②置换

$$\textcircled{4}W(y)\rightarrow\neg C(y)$$

③ \forall -

$$\textcircled{5}\forall x(B(x)\rightarrow W(x))$$

前提引入

$$\textcircled{6}B(y)\rightarrow W(y)$$

⑤ \forall -

$$\textcircled{7}B(y)\rightarrow\neg C(y)$$

⑥④假言三段论

$$\textcircled{8}\forall x(B(x)\rightarrow\neg C(x))$$

⑦ \forall +



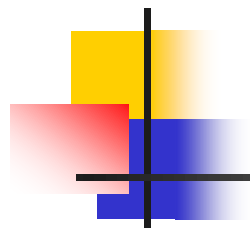


说明

■ 推导中连续使用 \forall -规则时，可用
相同变量名。

如前④⑥





总结——关于量词的推理规则

1. 关于量词的推理规则看课件，课上讲的就足够了。



作业

习题五(p80):

15,

24,

25,

习题六(p96)

5,

6,

8(4),