常用函数

(1) 设$f:A\rightarrow B$，如果存在$c\in B$，使得对所有的$x\in A$都有$f(x)=c$，则称$f:A\rightarrow B$是常函数。

值域：$ranf=f(A)=\{c\}\subseteq B$

(2) A上的恒等关系I_A称为A上的恒等函数，对于所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$。

常用函数

(3) 设$<A,\le>$, $<B,\le>$为偏序集，$f: A\to B$，若$\forall x_1,x_2\in A$，如果$x_1<x_2$就有$f(x_1)\le f(x_2)$，则称f为**单调递增**的；若$\forall x_1,x_2\in A$，如果$x_1<x_2$就有$f(x_1)<f(x_2)$，则称f为**严格单调递增**的。

类似地也可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的函数，它们统称为**单调函数**。

如， $f=\{<x,c>|x\in R\}$, $c\in R$

$g=\{<x,x>|x\in R\}$

常用函数

(4) 设A为集合，对于任意的$A' \subseteq A$，A'的**特征函数**$\chi_{A'}: A \to \{0,1\}$，定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1 & a \in A' \\ 0 & a \in A - A' \end{cases}$$

子集与特征函数一一对应。

例，$A=\{a,b,c\}$，则

$\chi_{\varnothing} = \{<a,0>, <b,0>, <c,0>\}$

$\chi_{\{b\}} = \{<a,0>, <b,1>, <c,0>\}$

$\chi_{\{b,c\}} = \{<a,0>, <b,1>, <c,1>\}$

常用函数

(5) 设R是A上的等价关系，令

$g: A \to A/R$ 且

$g(a)=[a],\ a\in A$

称g是从A到商集A/R的**自然映射**。

例, $A=\{1,2,3\}$, $R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$,

则有， $[1]=[2]=\{1,2\}$, $[3]=\{3\}$, $A/R=\{\{1,2\},\{3\}\}$

$g: \{1,2,3\} \to \{\{1,2\}, \{3\}\}$

$g(1)=g(2)=\{1,2\}$，$g(3)=\{3\}$。

I_A确定的是**双射**， $g(a)=\{a\},\ a\in A$。

8．2 函数的复合与反函数

函数的复合

说明：函数是关系，函数的复合就是关系的复合。

定理 设F、G为函数，则$F\circ G$也是函数，且满足以下条件：

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$，有$F\circ G(x)=G(F(x))$

证明：

(0) $F\circ G$是函数。

证明： (0) $F\circ G$是函数。

若对某个$x\in dom(F\circ G)$，同时存在

$\langle x,y_1\rangle\in F\circ G\wedge\langle x,y_2\rangle\in F\circ G$

$\Leftrightarrow\exists u(\langle x,u\rangle\in F\wedge\langle u,y_1\rangle\in G)\wedge\exists v(\langle x,v\rangle\in F\wedge\langle v,y_2\rangle\in G)$

$\Leftrightarrow\exists u\exists v(\langle x,u\rangle\in F\wedge\langle u,y_1\rangle\in G\wedge\langle x,v\rangle\in F\wedge\langle v,y_2\rangle\in G)$

$\Rightarrow\exists u\exists v(u=v\wedge\langle u,y_1\rangle\in G\wedge\langle v,y_2\rangle\in G)$

$\Rightarrow y_1=y_2$

$\forall x\in dom(F\circ G)$,存在惟一的$\langle x,y\rangle\in F\circ G$。

$\therefore$ $F\circ G$是函数。

函数的复合

例，$F: R^+ \to R$, $F(x)=\ln x$

$G: R \to R$, $G(x)=x+1$，则有，

$ranF=domG=R$

$F \circ G(x)=G(F(x))=\ln x+1$

$dom(F \circ G)= R^+$

$G \circ F(x)=F(G(x))=\ln(x+1)$

$dom(G \circ F)= (-1,+\infty)$

函数的复合

推论：设F,G,H为函数，则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数，且

$$(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$$

证明：

函数的复合仍然是函数。

函数是一种二元关系，关系的复合是可结合的。

函数的复合

推论：设f: $A\to B$，g: $B\to C$，则$f\circ g$: $A\to C$，且对任意的$x\in A$有$f\circ g(x)=g(f(x))$。

证明：

$f\circ g$是函数；只需证明定义域是A。

$$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x|x\in \mathrm{dom}f\wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$$

$$=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B\}$$

$$=A$$

所以，推论成立。

函数的复合

定理 设f: A→B，g: B→C,

(1) 如果f,g都是满射的，则f∘g: A→C也是满射。

(2) 如果f,g都是单射的，则f∘g: A→C也是单射。

(3) 如果f,g都是双射的，则f∘g: A→C也是双射。

函数的复合保持函数性质。

函数的复合

定理 设$f: A \rightarrow B$，则有

$$f = f \circ I_B = I_A \circ f$$

证明集合相等。

若$f \in A^A$，则有

$$f = f \circ I_A = I_A \circ f$$

例 设$f,g,h \in R^R$，且有

$f(x)=x+3$，$g(x)=2x+1$，$h(x)=x/2$

求$g \circ g$, $h \circ f$, $g \circ h$, $f \circ h \circ g$

解 所求的复合函数都是R到R的函数。

$g \circ g(x)=g(g(x))=2(2x+1)+1=4x+3$

$h \circ f(x)= f(h(x))=x/2+3$

$g \circ h(x)=h(g(x))=(2x+1)/2=x+1/2$

$f \circ h \circ g(x)=g(h(f(x)))=((x+3)/2)\times 2+1=x+4$

作业（习题八p160）

- 1
- 2
- 6（5~9）
- 19
- 22
- 25