5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

常用等值式

1.命题逻辑中等值式的推广

2.消去量词等值式

3.量词否定等值式

4.量词辖域收缩与扩张等值式

5.量词分配等值式

6.多量词等值式

等值演算的三条规则

1. 置换规则
2. 换名规则
3. 代替规则

5.2 一阶逻辑前束范式

前束范式

定义：设A为一谓词公式，如果A具有如下形式：

$$\Delta_1 x_1 \Delta_2 x_2 \ldots \Delta_k x_k B$$

则称A是前束范式。其中$\Delta_i (1 \leq i \leq k)$为$\forall$或$\exists$，$B$为不含量词的谓词公式。

特征：所有量词都在公式最前面，辖域为整个公式。

前束范式

例：下列公式是否为前束范式？

1. $\forall x\exists y\forall z(\neg Q(x,y)\vee R(z))$
2. $\forall x\exists yQ(x,y)\rightarrow R(z)$
3. $\exists x(R(x)\wedge\forall y(T(y)\rightarrow F(x,y)))$
4. $\forall x\neg\exists y\forall z(\neg Q(x,y)\vee R(z))$

前束范式

前束范式存在定理：一阶逻辑中的任何公式，都存在与之等值的前束范式。

说明：前束范式不惟一。

如，$\forall x\exists y\forall z(\neg Q(x,y)\vee R(z))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\forall z(Q(x,y)\rightarrow R(z))$

前束范式

证明：利用等值式和三条规则，可求得范式。

1. 利用量词否定等值式深入“¬”；
2. 利用换名规则和代替规则，避免混淆；
3. 利用量词辖域的收缩扩张等值式，把量词移到全式的最前面，辖域为整个公式。

这样一定可得到等值的前束范式。

前束范式

例：求下列公式的前束范式

1) $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall x \neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \neg G(x))$

前束范式

2) $\forall xF(x) \vee \neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y\neg G(y)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \vee \neg G(y))$

前束范式

3)$\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\vee\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg F(x)\vee\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg F(x)\vee G(x))$

4) $\exists x F(x) \to \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \neg \exists x F(x) \vee \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg F(x) \vee \forall x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg F(x) \vee \forall y G(y)$

$\Leftrightarrow \forall x (\neg F(x) \vee \forall y G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg F(x) \vee G(y))$

5.3 一阶逻辑推理理论

推理理论

定义 设$A_1,A_2,\ldots,A_n,B$都是谓词公式，若$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\rightarrow B$是重言式，则称由前提$A_1,A_2,\ldots,A_n$推出B的推理是**有效的**或**正确的**，称B为**有效结论**。推理正确记作$A_1,A_2,\ldots,A_n\Rightarrow B$，该式常称作**重言蕴涵式**。

推理定律

重言蕴涵式是逻辑推理的重要工具，一些重要的重言蕴涵式，称作**推理定律**。

基本推理定律

1. 命题逻辑推理定律的代换实例

如， $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

$\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

2. 由基本等值式生成的推理定律

如， $\neg\forall xF(x)\Rightarrow\exists x\neg F(x)$

$\exists x\neg F(x)\Rightarrow\neg\forall xF(x)$

一个等值式对应两条推理定律。

基本推理定律

3. 关于量词分配的推理定律(p75)

1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x))$

4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x))$

这些都是可证明的。

关于量词的推理规则

1. 全称量词消去规则(∀-)
2. 全称量词引入规则(∀+)
3. 存在量词引入规则(∃+)
4. 存在量词消去规则(∃-)

说明：4条规则只能对前束范式使用。

$\forall$-：全称量词消去规则

1. $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$或
2. $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

两式成立的条件是：

(1)在1式中，y不能是在A(x)中约束出现的个体变量名；

(2)在2式中，c为任意的个体常量；

(3)用y或c取代x时，一定要取代x的一切约束出现。

∀+：全称量词引入规则

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

成立的条件：

1. y取任何值时A(y)均为真；
2. 取代y的x不能在A(y)中约束出现，否则也会产生错误。

∃+：存在量词引入规则

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

成立的条件：

1. c是特定的个体常量；
2. 取代c的x不能在A(c)中出现过。

∃-：存在量词消去规则

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

1. c 是使A(x)为真的**特定的个体常量**；
2. c不在A(x)中出现过；
3. A(x)中除x外还有其它个体变量时，不能用此规则。

∃-规则

实例：在自然数集中，设O(x):x是奇数，E(x):x是偶数，则$\exists xO(x)\wedge\exists xE(x)$是真命题。下面的推理是否正确？

1. $\exists xO(x)$　　前提引入
2. $O(c)$　　1,∃-规则
3. $\exists xE(x)$　　前提引入
4. $E(c)$　　3,∃-规则
5. $O(c)\wedge E(c)$　　2,4合取引入
6. $\exists x(O(x)\wedge E(x))$　　5,∃+规则

结论6：**错误**

原因：2,4中的c不应该相同，违背了条件1。

∃-规则

说明：推导中连续使用∃-规则时，**使用一次更改一个常量**。

一阶逻辑自然推理系统$\mathscr{F}$

定义：自然推理系统$\mathscr{F}$

1. 字母表：同一阶语言的字母表；
2. 合式公式：同一阶语言的合式公式；
3. 推理规则：
   1) 前提引入规则(P规则)：在证明的任何步骤上，都可引入前提。
   2) 结论引入规则(T规则)：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可以作为后续证明的前提，在后续证明中引用。

自然推理系统$\mathscr{F}$

3) 置换规则：在证明的任何步骤上，谓词公式的子公式都可以用与它等值的其它公式置换。

4) 假言推理规则：$A \to B, A \Rightarrow B$

5) 附加规则：$A \Rightarrow A \vee B$

6) 化简规则：$A \wedge B \Rightarrow A$

7) 拒取式规则：$A \to B, \neg B \Rightarrow \neg A$

8) 假言三段论：$A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C$

自然推理系统$\mathscr{F}$

9) 析取三段论规则：$A \vee B, \neg B \Rightarrow A$

10) 构造性二难规则：$A \to B, C \to D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$

11) 合取引入规则：$A, B \Rightarrow A \wedge B$

12) $\forall$-规则；

13) $\forall$+规则；

14) $\exists$+规则；

15) $\exists$-规则。

其中1)~11)同命题逻辑的推理规则

A,B,C,D为任意谓词公式。

作业（P80）

12 (2)~(5)