第八章 函数

8．1 函数的定义和性质

函数的定义

定义 设F为二元关系，若对任意的$x \in domF$都存在惟一的$y \in ranF$使得xFy成立，则称F为函数。

例，如下关系是否为函数？

$F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_1>,<x_3,y_2>\}$ 是函数

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>,<x_2,y_1>,<x_3,y_2>\}$

不是函数，因为对于x_1，存在y_1和y_2，使得x_1Fy_1、x_1Fy_2同时成立。

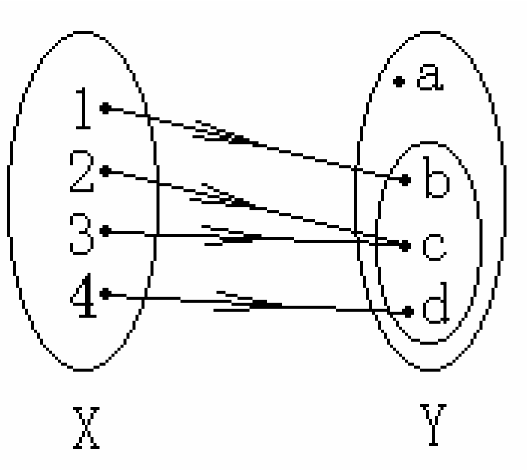
函数换一种定义形式？

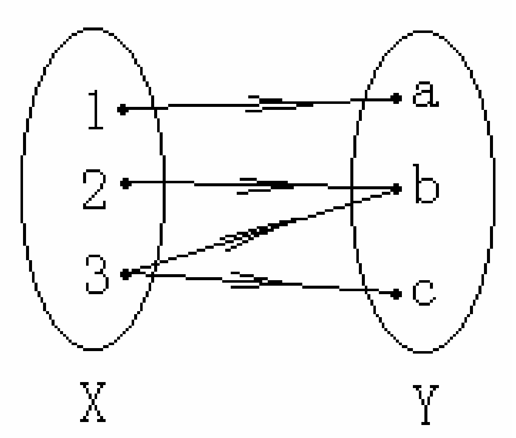
函数的定义

例，如下关系是否为函数？

$$(1)F=\{<x,y>|\ x,y\in R\wedge y=x^2\}$$

$$(2)G=\{<x,y>|\ x,y\in R\wedge x=y^2\}$$





函数的定义

说明：如果<x,y>∈F，则记作$y=F(x)$，称y是F在x的(函数)值。

定义 设F、G为函数，则

$$F=G \Leftrightarrow F\subseteq G \wedge G\subseteq F$$

由定义，两函数相等，满足如下两条件：

1. $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$
2. $\forall x\in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$,都有$F(x)=G(x)$

函数的定义

例，函数F(x)= $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 和G(x)=x-1是否相等？

不相等，

domF = R-{-1}

domG = R

函数的定义

定义 设A,B是集合，如果函数f满足以下条件

(1) $\mathrm{dom}f = A$

(2) $\mathrm{ran}f \subseteq B$

则称f为从A到B的函数，记作$f: A \to B$。

例， $f(x)=1$ $f: R \to R$

$g(x)=x+1$ $g: R \to R$

$h(x)=x^2-1$ $h: R \to R$

都是从R到R的函数。

函数的定义

定义 设A,B为集合，所有从A到B的**函数的集合**记作B^A，读作“B上A”，

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

函数的定义

例，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{0,1\}$，求B^A？

$f_0=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_1=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$f_2=\{\langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_3=\{\langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$

所以$B^A=\{f_0,f_1\ldots,f_7\}$。

$f_4=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_5=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$f_6=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_7=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$，

函数的定义

讨论：从此例中可得到三点结论，

(1) 设$|A|=m$，$|B|=n$，则函数$f: A\to B$均是m个有序对的集合

(2) A中每一个元素所对应的$f(x)$可能是B中n个，

所以$|B^A|= n^m$

函数的定义

定义 设函数$f:A \to B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，

1）令$f(A_1)=\{f(x)|x \in A_1\}$，称$f(A_1)$为$A_1$在f下的**像**；特别的，当$A_1=A$时，称$f(A)=ranf$为**函数的像**。

2）令$f^{-1}(B_1)=\{x|x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$，称$f^{-1}(B_1)$为$B_1$在f下的**完全原像**。

$$f^{-1}(B_1) \subseteq A \qquad f(A_1) \subseteq f(A) \subseteq B$$

函数的定义

讨论：

1. 区分概念：函数值$f(x)\in B$，像$f(A_1)\subseteq B$；
2. 完全原像$f^{-1}(B_1)\subseteq A(B_1\subseteq B)$；
3. 一般的$A_1\neq f^{-1}(f(A_1))$，而是$A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$。

函数的定义

例，$f:\{1,2,3\}\to\{0,1\}$,

满足$f(1)=0$，$f(2)=f(3)=1$

令$A_1=\{2\}$，有

$f(A_1)=\{1\}$

$f^{-1}(f(A_1))=f^{-1}(\{1\})=\{2,3\}\supset A_1$

函数的定义

例，设f: N→N，且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数\end{cases}$$

令A={2,3,4}，B={2}，则有

$f(A) = \{f(2),f(3),f(4)\} = \{1,4,2\}$

$f^{-1}(B)= f^{-1}(\{2\}) = \{x|x\in N\wedge f(x)=2\} = \{1,4\}$

函数的性质

定义 设函数$f: A \to B$,

(1) 若$\operatorname{ran} f = B$，则称f是满射的；

(2) 若$\forall x_1 \forall x_2 (x_1, x_2 \in A \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$,
则称f是单射的；

(3) 若f既是满射的，又是单射的，则称f是双射的(或一一映射)。

函数的性质

例，判断下列函数的性质。

1) f: {1,2}→{0}, f(1)=f(2)=0,

满射，但不是单射

2) f: N→N, f(x)=2x

单射，但不是满射，ranf⊂N

3) f: Z→Z, f(x)=x+1

双射

函数的性质

讨论：设A,B都是有限集，且$|A|=|B|$，$f: A\to B$ 是一个函数，则有

f是单射 $\Leftrightarrow$ f是满射 $\Leftrightarrow$ f是双射

例　分别确定以下各题中的f是否为从A到B的函数，并对其中的函数f: A→B指出它是否为满射、单射或双射的。

(1) A={1,2,3,4,5}，B={6,7,8,9,10},

f={<1,8>,<2,6>,<3,9>,<4,10>,<5,9>}

定义域中的每一个元素对应着一个且仅有一个有序对。

是函数，不是满射，不是单射

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$,

$f=\{\langle 1,8\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,10\rangle, \langle 4,9\rangle\}$

$\mathrm{dom}f=\{1,2,3,4\}\neq A$，不是从A到B的函数

(3) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$,

$f=\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 5,10\rangle\}$

不是函数

(4) $A=B=R$，$f(x)=x^3$

函数,双射

(5) $A=B=R\times R$， $f(<x,y>)=<x+y,x-y>$

令 $L=\{<x,y>|\ x,y\in R\wedge y=x+1\}\subseteq A$， 计算 $f(L)$。

从A到B的函数,双射

$f(L)=\{<2x+1,-1>|x\in R\}$

(6) $A=N\times N$， $B=N$， $f(<x,y>)=|x^2-y^2|$,

计算 $f(N\times\{0\})$， $f^{-1}(\{0\})$。

函数， 不是满射， 不是单射

$f(N\times\{0\})=\{x^2|x\in N\}$, $f^{-1}(\{0\})=\{<x,x>|x\in N\}$

例 对于给定集合A和B，构造双射函数。

$A=P(\{a,b,c\}),\ B=\{0,1\}^{\{a,b,c\}}$

作业（习题八p160）

- 1
- 2
- 6（5~9）