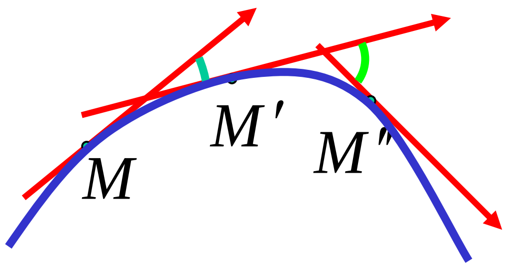
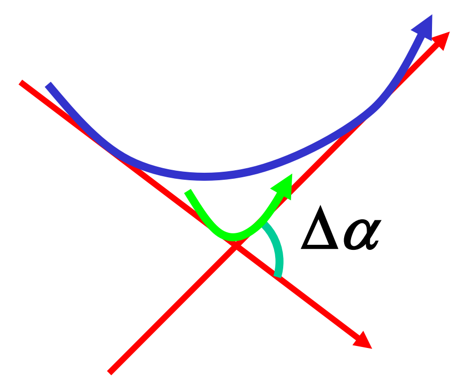
第七节 平面曲线的曲率

- 一、曲率及其计算公式
- 二、弧微分
- 三、曲率圆与曲率半径
- 四、内容小结
- 五、作业

$$\text{曲线的弯曲程度}\begin{cases}\text{与切线的转角有关}\\ \text{与曲线的弧长有关}\end{cases}$$



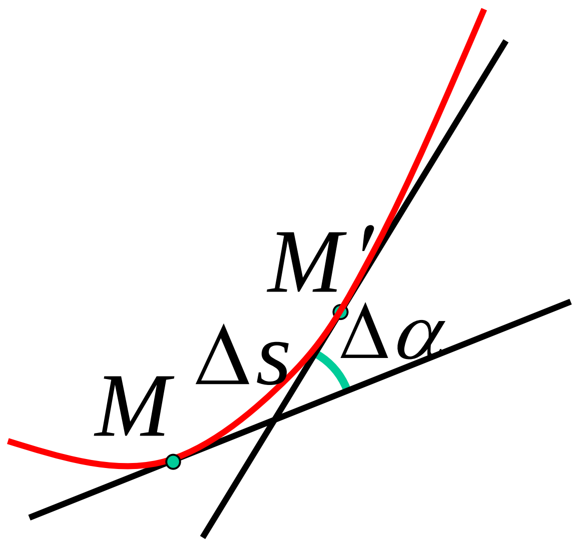


一、曲率及其计算公式

在光滑弧上自点M开始取弧段, 其长为 Δs , 对应切线转角为 $\Delta\alpha$, 定义

弧段 Δs 上的平均曲率

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$



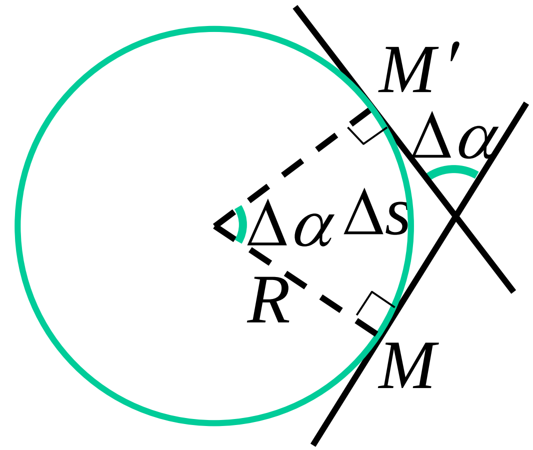
点 M 处的曲率

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

注意: 直线上任意点处的曲率为0!

例1. 求半径为R的圆上任意点处的曲率.

解: 如图所示,



$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore \quad K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}$$

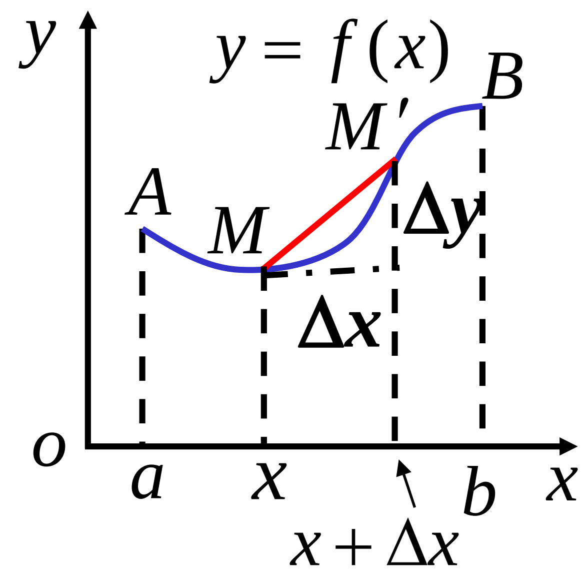
可见: R愈小,则K愈大, 圆弧弯曲得愈厉害;

R愈大,则K愈小, 圆弧弯曲得愈小.

二、弧微分

设 $y=f(x)$在(a,b)内有连续导数， 其图形为 $\overset{\frown}{AB}$,

弧长 $s=\overset{\frown}{AM}=s(x)$



$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{|MM'|}{\Delta x}$$

$$=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$=\pm\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}=\pm 1$$

$$\therefore\ s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+(y')^2}$$

$$s'(x)=\sqrt{1+(y')^2}$$

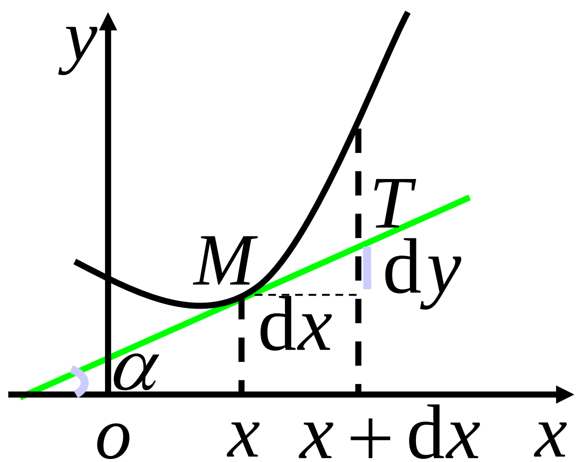
$$\therefore\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

则弧长微分公式为 $\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$

几何意义: $\mathrm{d}s=|MT|$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha\,;\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\alpha$$



曲率K的计算公式

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

设曲线弧 $y=f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan\alpha=y' \quad (\text{设} -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

得 $$\alpha=\arctan y'$$

$$\mathrm{d}\alpha=(\arctan y')'\,\mathrm{d}x=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

又 $$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

故曲率计算公式为 $$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

当 $|y'|\ll 1$ 时, 有曲率近似计算公式 $K\approx|y''|$

说明:

（1）若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}}$$

（2）若曲线方程为 $x = \varphi(y)$，则

$$K = \frac{|x''|}{(1 + x'^2)^{3/2}}$$

例3. 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 在何处曲率最大?

解: $\dot{x} = -a\sin t;$ $\ddot{x} = -a\cos t$

$\dot{y} = b\cos t;$ $\ddot{y} = -b\sin t$

$\dot{x}$ 表示对参数 t 的导数

故曲率为

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

K 最大 $\Longleftrightarrow$ $f(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$ 最小

求驻点:

$$f'(t) = 2a^2\sin t\cos t - 2b^2\cos t\sin t \;= (a^2 - b^2)\sin 2t$$

$$f'(t)=(a^2-b^2)\sin 2t$$

令 $f'(t)=0$, 得 $t=0,\frac{\pi}{2},\ \pi,\frac{3\pi}{2},\ 2\pi$

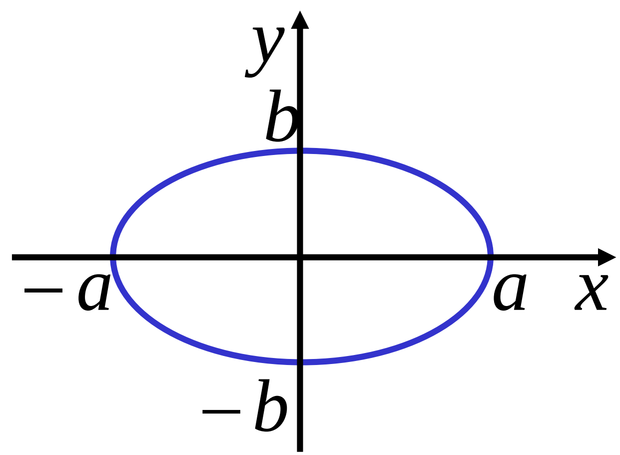
计算驻点处的函数值:

t	$\boxed{0}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boxed{\pi}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\boxed{2\pi}$
$f(t)$	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$

设 $0<b<a$, 则 $t=0,\pi,2\pi$ 时

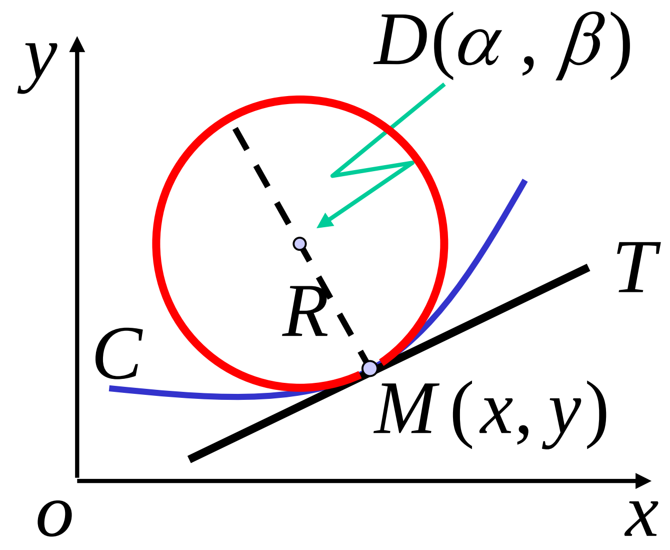
$f(t)$ 取最小值, 从而K取最大值.

这说明椭圆在点 $(\pm a,0)$ 处曲率最大.



三、曲率圆与曲率半径

设M为曲线C上任一点, 在点M处作曲线的切线和法线, 在曲线的凹向一侧法线上取点D使



$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$

把以D为中心,R为半径的圆叫做曲线在点M处的**曲率圆(密切圆)**, R叫做**曲率半径**, D叫做**曲率中心**.

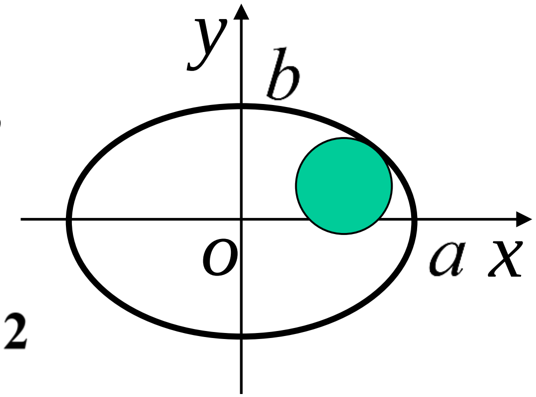
在点M处曲率圆与曲线有下列密切关系:

(1) 有公切线; (2) 凹向一致; (3) 曲率相同.

例4.设一工件内表面的截痕为一椭圆,现要用砂轮磨削其内表面,问选择多大的砂轮比较合适?

解: 设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le x \le 2\pi, b \le a)$

由例3可知,椭圆在 $(\pm a, 0)$处曲率最大,即曲率半径最小,且为



$$R = \left.\frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}\right|_{t=0} = \frac{b^2}{a}$$

显然, 砂轮半径不超过 $\dfrac{b^2}{a}$ 时,才不会产生过量磨损,或有的地方磨不到的问题.

四、内容小结

1. 弧长微分$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$

2. 曲率公式 $K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆

曲率半径 $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

五、作业

习题3-7

1，3，5，7