第十章 半群与群

10．1 半群与独异点

主要内容

- 几种典型的代数系统：半群、独异点和群等。
  这些代数系统中的特异元素；
  这些代数系统具有的性质。
- 先讨论具有一个二元运算的代数系统。

半群和独异点

定义：

1) 设V=<S,∘>是代数系统，∘为二元运算，如果∘是可结合的，则称V为半群。

2) 设V=<S,∘>是半群，若e∈S是关于∘运算的单位元，则称V为(含)幺半群，也叫做独异点。为了强调单位元的存在，有时将独异点记为<S,∘,e>。

半群和独异点

例,

1. $<Z^+,+>$是<u>半群</u>。<N,+>,<Z,+>,<Q,+>,<R,+>是<u>独异点</u>，其中单位元是<u>0</u>。

   <N,×>, <Z,×>, <Q,×>, <R,×>?

2. $<M_n(R),+>$，$<M_n(R),\times>$是<u>半群和独异点</u>。矩阵乘法的单位元是<u>**n阶单位矩阵E**</u>。
3. <Σ*,∘>是<u>半群和独异点</u>，其中Σ是有穷字母表，∘表示连接运算，单位元是<u>空串λ</u>。
4. <P(S),⊕>是<u>半群和独异点</u>，其中⊕表示集合的对称差运算，单位元是<u>∅</u>。

半群和独异点

5. $<Z_n,\oplus>$是<u>独异点</u>，其中$Z_n=\{0,1,...,n-1\}$，$\oplus$表示模n加法。单位元是<u>0</u>。
6. $<A^A,\circ>$是<u>独异点</u>，$\circ$为函数的复合运算。单位元是<u>I_A</u>。

   $<P(A\times A),\circ>$?
7. $<Z,->$，$<R-\{0\},/>$?
8. $<P(S),\cup,\varnothing>$，$<P(S),\cap,S>$？
9. $<Z,max>$，$<Z,min>$？

半群中运算的幂

因为半群$V=<S,\circ>$中的运算$\circ$是可结合的，可以定义元素的幂。$\forall x \in S$，规定

$$x^1 = x$$

$$x^{n+1} = x^n \circ x,\ n \in Z^+$$

易证x的幂遵从以下规则：

$$x^n \circ x^m = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm},\ m,n \in Z^+$$

普通加法与乘法、关系复合、矩阵乘法的幂等都遵从该运算规则。

独异点中运算的幂

在独异点V=<S,°,e>中，$\forall x \in S$，规定

$$x^0 = e$$

$$x^{n+1} = x^n \circ x,\ n \in N$$

幂运算的运算规则不变，只要$m,n \in N$。

普通加法与乘法、关系复合、矩阵乘法的幂等都遵从该运算规则。

例 例如在半群$\langle Z,+\rangle$中，$\forall x\in Z$，x的n次幂是$\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\text{个}x}=nx$. 而在半群$\langle P(B),\oplus\rangle$中，$\forall x\in P(B)$，$x$的$n$次幂是

$$\underbrace{x\oplus x\oplus\cdots\oplus x}_{n\text{个}x}=\begin{cases}\varnothing, & n\text{为偶数};\\ x, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

子半群

定义：半群的子代数叫做**子半群**。

说明：设V=<S,∘>是半群，<T,∘>是V的子半群需满足，

1) T是S的非空子集

2) T对运算∘是封闭的

例，对于半群 <S,∘>，任取a∈S，令集合

$$T=\left\{ a,a^2,a^3,\cdots \right\}=\{a^k \mid k\in Z^+\}$$

<T,∘>是<S,∘>的子半群。

子独异点

定义：独异点的子代数叫做子独异点。

说明：设V=<S,∘,e>是独异点，<T,∘,e>是V的子独异点需满足：

1) T是S的非空子集
2) T对运算∘封闭
3) $e \in T$

半群和独异点

例，<M_2(R),•>是半群，•为矩阵乘法。

令A={$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $a \in R$}，则$<A,\bullet>$是子半群，

令V=<A,•,$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$>，则$V$是独异点，

V是<M_2(R),•,$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$>的子独异点？

半群和独异点

定理 设 S 为半群，V 为独异点，则 S 的任何子半群的非空交集仍是 S 的子半群，V 的任何子独异点的交集仍是 V 的子独异点.

试证上述定理并思考：

若干个子半群的并是子半群吗？

积代数

定义 设$V_1=<S_1,\circ>$，$V_2=<S_2,*>$为半群(或独异点)，令$S=S_1\times S_2$，并定义S上的•运算如下：

$\forall <a,b>,<c,d>\in S, <a,b>\bullet<c,d>=<a\circ c,b*d>$

称$<S,\bullet>$为V_1和V_2的直积(积代数)，记作$V_1\times V_2$。且$V_1\times V_2$也是半群(或独异点)。

说明 若V_1,V_2是独异点，单位元分别为e_1,e_2，则$V_1\times V_2$的单位元是$\underline{<e_1,e_2>}$。

1) 封闭的：$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in S$,

$\langle a,b\rangle\bullet\langle c,d\rangle=\langle a\circ c,b*d\rangle\in S$

2) 可结合的： $\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\in S$,

$(\langle a,b\rangle\bullet\langle c,d\rangle)\bullet\langle e,f\rangle$

$= \langle a\circ c,b*d\rangle\bullet\langle e,f\rangle$

$= \langle (a\circ c)\circ e,(b*d)*f\rangle$

$= \langle a\circ(c\circ e),b*(d*f)\rangle$

$= \langle a,b\rangle\bullet\langle c\circ e,d*f\rangle$

$= \langle a,b\rangle\bullet(\langle c,d\rangle\bullet\langle e,f\rangle)$

3) $\langle e_1,e_2\rangle$是$\bullet$的单位元： $\forall\langle a,b\rangle\in S$,

$\langle a,b\rangle\bullet\langle e_1,e_2\rangle=\langle a\circ e_1,b*e_2\rangle=\langle a,b\rangle$

$\langle e_1,e_2\rangle\bullet\langle a,b\rangle= \langle a,b\rangle$