7．2 二元关系Relation

关系：是有序对的集合。

$R \subseteq A \times B$, 从A到B的二元关系；

$R \subseteq A \times A$, A上的二元关系

3种特殊的关系

设A为任意集合，A上有3种特殊的关系：

1. 空关系

$\varnothing \subseteq A \times A$，A上的空关系。

2. 全域关系E_A

$$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A\}=A\times A$$

3. 恒等关系I_A

$$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$$

常用的关系，如包含关系

例 设A={a,b},

$$R=\{<x,y>|x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$$

则有

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},A\}$$

$$\begin{aligned}R=\{ & <\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,A>,\\ & <\{a\},\{a\}>,<\{a\},A>,\\ & <\{b\},\{b\}>,<\{b\},A>,\\ & <A,A>\\ \}\end{aligned}$$

7．3 关系的运算

关系的并、交、补运算

例，设$R_1=\{<1,2>, <2,4>, <3,3>\}$，

$R_2=\{<1,3>, <2,4>, <4,2>\}$，则

$R_1 \cup R_2 = \{<1,2>, <1,3>, <2,4>, <3,3>, <4,2>\}$

$R_1 \cap R_2 = \{<2,4>\}$

$R_1 - R_2 = \{<1,2>, <3,3>\}$

定义域与值域

定义 设R为二元关系，

1. **定义域** dom$R$：R中所有有序对的第一个元素构成的集合。形式化表示为：

$$\mathrm{dom}R=\{x|\exists y(<x,y>\in R)\}$$

2. **值域**ran$R$：R中所有有序对的第二个元素构成的集合。

$$\mathrm{ran}R=\{y|\exists x(<x,y>\in R)\}$$

3. **域**fld$R$：定义域和值域的并集。

$$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R。$$

定义域与值域

例: 已知$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$

$\mathrm{dom}R=\{1,2,4\}$

$\mathrm{ran}R=\{1,2,3,4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1,2,3,4\}$

例:实数集R上的关系

$$S=\{<x,y>|x,y\in R\wedge x^2+y^2=1\}$$

$$\mathrm{dom}S=\mathrm{ran}S=\mathrm{fld}S=[-1,1]$$

例 下列关系都是整数集Z上的关系，分别求出它们的定义域和值域。

(1) $R_1=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge x\le y\}$

(2) $R_2=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge x^2+y^2=1\}$

(3) $R_3=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge y=2x\}$

(4) $R_4=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge |x|=|y|=3\}$

解：(1) $\mathrm{dom}R_1=\mathrm{ran}R_1=Z$

(2) $R_2=\{<-1,0>,<0,-1>,<0,1>,<1,0>\}$

$\mathrm{dom}R_2=\mathrm{ran}R_2=\{-1,0,1\}$

(3) $\mathrm{dom}R_3=Z$, $\mathrm{ran}R_3=\{2z|z\in Z\}$,即偶数集。

(4) $\mathrm{dom}R_4=\mathrm{ran}R_4=\{-3,3\}$

逆关系

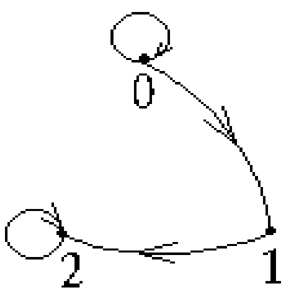
定义 设R为二元关系，R的**逆关系**，简称R的**逆**，记作R^{-1}，

$$R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$$

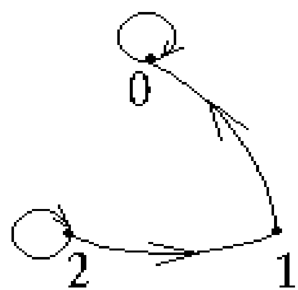
例， $A=\{0,1,2\}$， $R=\{<0,0>, <0,1>, <1,2>, <2,2>\}$

$$R^{-1}= \{<0,0>, <1,0>, <2,1>, <2,2>\}$$

关系矩阵和关系图：



R



R^{-1}

复合关系

定义 设F,G为任意的关系，G对F的**右复合**记作$F\circ G$，其中

$$F\circ G=\{<x,y>|\exists z(xFz\wedge zGy)\}$$

例,设R={<1,2>, <2,2>, <3,4>},

S={<1,3>, <2,5>, <3,1>, <4,2>}

则，$R\circ S$= {<1,5>, <2,5>, <3,2>}

$S\circ R$= {<1,4>, <3,2>, <4,2>}

复合关系

讨论：

1. 只有存在$<x,y>\in R$且$<y,z>\in S$，才有$<x,z>\in R^\circ S$；
2. $R\subseteq X\times Y$, $S\subseteq Y\times Z \Rightarrow R^\circ S\subseteq X\times Z$；
3. $R\circ S\neq S\circ R$，不满足交换律。

复合关系的矩阵表示

设集合X=$\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$, Y=$\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$, Z=$\{z_1,z_2,\ldots,z_p\}$, R$\subseteq$X×Y, S$\subseteq$Y×Z, R∘S$\subseteq$X×Z

则关系矩阵：

$$M_R=[a_{ik}]_{m\times n} \qquad M_S=[b_{kj}]_{n\times p}$$

$$M_{R\circ S}=M_R\circ M_S=[c_{ij}]_{m\times p}$$

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$$

复合关系

例： 设X={1,2,3,4,5}， R,S均是X上的二元关系， R={<1,2>, <2,2>, <3,4>}

S={<1,3>, <2,5>, <3,1>, <4,2>}

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = M_R \circ M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{15} = (a_{11} \wedge b_{15}) \vee \color{red}{(a_{12} \wedge b_{25})} \vee (a_{13} \wedge b_{35}) \vee (a_{14} \wedge b_{45}) \vee (a_{15} \wedge b_{55}) = 1$$

限制与像

定义 设R为二元关系，A为集合，

(1) R在A上的**限制**记作$R\upharpoonright A$，

$$R\upharpoonright A=\{<x,y>|xRy\wedge x\in A\}$$

(2) A在R下的**像**记作$R[A]$，

$$R[A]=\mathrm{ran}\,(R\upharpoonright A)$$

限制与像

例，设$R=\{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,4>, <3,2>\}$

$R\restriction\{2\}=\{<2,2>, <2,4>\}$

$R\restriction\varnothing=\varnothing$

$R\restriction\{1,3\}=\{<1,2>, <1,3>, <3,2>\}$

$R[\{2\}]=\{2,4\}$

$R[\varnothing]=\varnothing$

$R[\{3\}]=\mathrm{ran}(R\restriction\{3\})=\mathrm{ran}(\{<3,2>\})=\{2\}$

总结——关系的运算

1. 集合运算：$\cap, \cup, -, \oplus$等。
2. 关系的运算：7种

   $\mathrm{dom}R$, $\mathrm{ran}R$, $\mathrm{fld}R$, R^{-1}

   $R\circ S$, $R\upharpoonright A$, $R[A]$
3. 其中逆运算优先级最高。
4. 关系运算优先于集合运算。

   如，$\mathrm{ran}R^{-1}$，$R\circ S\cup R\circ T$等。

关系运算的性质

定理 设F是任意的关系，则有

1. $(F^{-1})^{-1} = F$
2. $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$

证明：

关系运算的性质

定理 设F、G、H是任意的关系，则有

1. $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$
2. $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明：

1. $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

证明：对于任意的$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$$
$$\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in F\circ G\wedge<u,y>\in H)$$
$$\Leftrightarrow \exists u(\exists v(<x,v>\in F\wedge<v,u>\in G)\wedge<u,y>\in H)$$
$$\Leftrightarrow \exists u\exists v(<x,v>\in F\wedge<v,u>\in G\wedge<u,y>\in H)$$
$$\Leftrightarrow \exists v\exists u(<x,v>\in F\wedge(<v,u>\in G\wedge<u,y>\in H))$$
$$\Leftrightarrow \exists v(<x,v>\in F\wedge\exists u(<v,u>\in G\wedge<u,y>\in H))$$
$$\Leftrightarrow \exists v(<x,v>\in F\wedge<v,y>\in G\circ H)$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以，$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

关系运算的性质

定理 设R是A上的关系，则有

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证明略。

关系运算的性质

定理 设F,G,H为任意的关系，则有

1. $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$
2. $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$
3. $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$
4. $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

证明：

关系运算的性质

定理 设F为关系，A,B为集合，则有

1. $F\restriction(A\cup B)=F\restriction A\cup F\restriction B$
2. $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$
3. $F\restriction(A\cap B)=F\restriction A\cap F\restriction B$
4. $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

证明：

关系的幂运算

定义 设R为A上的关系，n为**自然数**，则R的n次幂定义为：

$$R^0 = \{<x,x>|x\in A\} = I_A$$

$$R^{n+1} = R^n\circ R,\ n\geq 0$$

关系的幂运算

例，设A={a,b,c,d}，R={<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>}，求R的各次幂。

解：

1. 根据定义求；
2. 用关系矩阵求；
3. 用关系图求。

用关系矩阵求R^n

$$M_{R^n} = (M_R)^n$$

- R的关系矩阵M；
- M^2, M^3, $M^4=M^2$, $M^5=M^3$；

所以，

$R^0=I_A$;

$R^1=R$;

$R^2=R^4=R^6=\ldots$

$R^3=R^5=R^7=\ldots$

用关系图求R^n

R的关系图: G;　　　　R^n的关系图: G^n

1) G^n的顶点与G相同。

2) 对任何一个结点$x \in G$,

考虑从x出发的长为n的路径，如果路径的终点是y，则在G^n中有一条从x到y的有向边。

作业

习题七

1,3,4

10,13,14,20