第五节、高阶导数

一、高阶导数的概念

二、高阶导数的运算法则

三、小结

四、作业

一、高阶导数的概念

引例　变速直线运动 $s = s(t)$

速度　$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，　即 $v = s'$，

加速度　$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$

即　$a = (s')'$

s对t的二阶导数

定义 若函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 可导，则称 $f'(x)$的导数为 $f(x)$的二阶导数，记作 y''或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y'' = (y')' \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，依次类推，

$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作

$$y''', \quad y^{(4)}, \quad \cdots, \quad y^{(n)}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}, \quad \cdots, \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

$d^n y$

$(dx)^n$

例1. 设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 求 $y^{(n)}$.

解: $$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

依次类推，可得

$$y^{(n)} = n!\, a_n .$$

思考: 设 $y = x^\mu$ (μ为任意常数), 问 $y^{(n)} = ?$

$$\boxed{(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.}$$

例2. 设 $y = e^{ax}$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2 e^{ax}$, $y''' = a^3 e^{ax}$, $\cdots$,

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

特别有: $\boxed{(e^x)^{(n)} = e^x}$

$$y' = -\frac{1}{1-x}$$

$$y'' = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

例3. 设 $y = \ln(a+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \dfrac{1}{a+x}$, $y'' = -\dfrac{1}{(a+x)^2}$, $y''' = (-1)^2 \dfrac{1\cdot 2}{(a+x)^3}$,

$\cdots$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(a+x)^n}$

规定 $0! = 1$

思考: $y = \ln(1-x)$, $y^{(n)} = -\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

例3. 设$y=\sin x$，求$y^{(n)}$.

解: $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

一般地，

$$\boxed{(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

类似可证:

$$\boxed{(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

例4．设 $y = e^{ax}\sin bx$ $(a,b$为常数$)$，求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \quad \left(\varphi = \arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,[ae^{ax}\sin(bx+\varphi) + be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi), \quad \left(\varphi = \arctan\frac{b}{a}\right)$$

例5. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ ___2___ .

分析:
$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geq 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0,\qquad \therefore\ f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\geq 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\text{又}\ f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x}=0,\qquad \therefore\ f''(x)=\begin{cases}24x, & x\geq 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x}=0,$$

但是 $f'''_-(0)=12$, $f'''_+(0)=24$, $\therefore\ f'''(0)$ 不存在 .

例6 设 $y=x^{2}f(\sin x)$ 求 y''，其中 f 二阶可导.

解 $y'=2x\cdot f(\sin x)+x^{2}\cdot f'(\sin x)\cdot\cos x$

$$y''=\underline{(2xf(\sin x))'}+(\underline{x^{2}f'(\sin x)\cos x})'$$

$$=2f(\sin x)+2x\cdot f'(\sin x)\cdot\cos x$$

$$+2xf'(\sin x)\cos x+x^{2}f''(\sin x)\cos^{2}x$$

$$+x^{2}f'(\sin x)(-\sin x)$$

$$=2f(\sin x)+(4x\cos x-x^{2}\sin x)f'(\sin x)$$

$$+x^{2}\cos^{2}xf''(\sin x)$$

二、高阶导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数，则

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

2. $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ （C为常数）

$$\because (uv)'=u'v+uv'$$

$$(uv)''=(u'v+uv')'=u''v+2u'v'+uv''$$

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$$

用数学归纳法可证

3.

即 $$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹(Leibniz) 公式

二项式定理

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$$

例7. $y = x^2 e^{3x}$, 求 $y^{(20)}$.

解: 设 $u = e^{3x}, v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 3^k e^{3x} \quad (k = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2,$$

$$v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 20)$$

代入莱布尼兹公式，得

$$y^{(20)} = \underline{3^{20} e^{3x}} \cdot x^2 + 20 \cdot \underline{3^{19} e^{3x}} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} \underline{3^{18} e^{3x}} \cdot 2$$

$$= 3^{18} e^{3x} (9x^2 + 120x + 380).$$

例8. 设$y=\arctan x$,求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y'=1$

$\Big\downarrow$ 用莱布尼兹公式求 n 阶导数

$$(1+x^2)\ y^{(n+1)} + n\cdot 2x\, y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\ \ y^{(n-1)} = 0$$

令 $x=0$, 得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0) \quad (n=1,2,\cdots)$

由 $y(0)=0$, 得 $y''(0)=0,\ y^{(4)}(0)=0,\ \cdots,\ y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$, 得 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\,y'(0)$

即 $y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0\,, & n=2m \\ (-1)^m(2m)!\,, & n=2m+1 \end{cases} \quad (m=0,1,2,\cdots)$

三、内容小结

高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

如 $$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = -\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{(x-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

(4) 利用莱布尼兹公式

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

思考与练习

1. 如何求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解: $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$.

解: $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n\ge 3$$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

解: 令 $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}$

$$A=(x-2)\cdot \text{原式}\Big|_{x=2}=1$$

$$B=(x-1)\cdot \text{原式}\Big|_{x=1}=-1$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(4) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解: $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

2.（填空题）(1) 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$，则

$f^{(n)}(2)=$ $n!\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

提示：$f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$

各项均含因子 $(x-2)$

$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$ $+\cdots\cdots$

(2) 已知 $f(x)$ 任意阶可导，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 $n\geq 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ $n![f(x)]^{n+1}$

提示：$f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3![f(x)]^4$

$\cdots\cdots$

3. 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

解 $$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

同样可求 $\dfrac{d^3x}{dy^3}$

例 求由方程 $xy+\ln y=1$ 确定的隐函数 $y=y(x)$的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $y+xy'+\dfrac{y'}{y}=0 \Rightarrow y'=\dfrac{-y^2}{1+xy}$

$$y''=\frac{-2yy'(1+xy)+y^2(y+xy')}{(1+xy)^2}$$

$$=\frac{y^3-(y^2x+2y)y'}{(1+xy)^2}=\frac{y^3-(y^2x+2y)\dfrac{-y^2}{1+xy}}{(1+xy)^2}$$

$$=\frac{2xy^4+3y^3}{(1+xy)^3}$$

若上述参数方程中 $\varphi(t),\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由它确定的函数 $y=f(x)$ 可求二阶导数 .

利用新的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\Bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\Bigg/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

注意：已知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\cancel{=}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$

例5. 设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t\,f''(t)}{f''(t)}=t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{f''(t)}$$

四、作业

习题2-5

3（单），4，5（单），6（单）；
7，9，10

练 习 题

一、 填空题:

1、 设 $y=\dfrac{\sin t}{e^{t}}$ 则 $y''=$____________.

2、 设 $y=\tan x$, 则 $y''=$____________.

3、 设 $y=(1+x^{2})\arctan x$， 则 $y''=$___________.

4、 设 $y=xe^{x^{2}}$, 则 $y''=$____________.

5、 设 $y=f(x^{2})$, $f''(x)$存在，则 $y''=$____________.

6、 设 $f(x)=(x+10)^{6}$, 则 $f'''(2)=$____________.

7、 设 $x^{n}+a_{1}x^{n-1}+a_{2}x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_{n}$ ($a_1,a_2,\dots,a_n$都是常数)，则 $y^{(n)}=$______________.

8、设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$,
则 $f^{(n+1)}(x)=$________________.

二、求下列函数的二阶导数：

1、$y = \dfrac{2x^3 + \sqrt{x} + 4}{x}$；

2、$y = \cos^2 x \ln x$；

3、$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

三、试从$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$，导出：

1、$\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$；

2、$\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

四、验证函数$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$ （λ，c_1 ，c_2是常数）

满足关系式$y'' - \lambda^2 y = 0$.

五、 下列函数的 n 阶导数：

1、 $y = e^x \cos x$；

2、 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$；

3、 $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$；

4、 $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

练习题答案

一、1、$-2e^{-t}\cos t$； 2、$2\sec^2 x\tan x$；

3、$2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$； 4、$2xe^{x^2}(3+2x^2)$；

5、$2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$； 6、207360；

7、$n!$； 8、$(n+1)!$.

二、1、$4+\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}+8x^{-3}$；

2、$-2\cos 2x\cdot\ln x-\dfrac{2\sin 2x}{x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}$；

3、$-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

五、1、$(\sqrt{2})^n e^x \cos(x + n\frac{\pi}{4})$；

2、$(-1)^n \dfrac{2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$；

3、$(-1)^n n![\dfrac{8}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}], (n \geq 2)$；

4、$\dfrac{1}{4}[2^n \sin(2x + \dfrac{n\pi}{2})$

$+4^n \sin(4x + \dfrac{n\pi}{2}) - 6^n \sin(6x + \dfrac{n\pi}{2})].$