

The slide features five circles of varying shades of purple. Two circles are solid purple, while three are hollow with a thin purple outline. They are arranged in a decorative pattern around the central text.

7. 7 偏序关系

偏序关系

定义 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集，对于任意的 $x, y \in A$, y 盖住 $x \Leftrightarrow x < y$ 且 不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$ 。

例 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的整除关系 \leq 是偏序关系，

$1 < 2$, 2盖住1

$2 < 4$, 4盖住2

$1 < 4$, 4不盖住1, 因为有 $1 < 2 < 4$ 成立

如果 x 与 y 不可比，则一定不会有盖住关系，盖住首先是可比的。(逆否命题)

哈斯图

哈斯图：偏序关系的简化关系图，

- 1) 用 “ \circ ” 表示 A 中的结点（具有自反性）；
- 2) $\forall x, y \in A$ ，若 $x < y$ ，则把 x 画在 y 的下面；
- 3) $\forall x, y \in A$ ，若 y 盖住 x ，则用一条线段连接 x 和 y （方向缺省向上）。

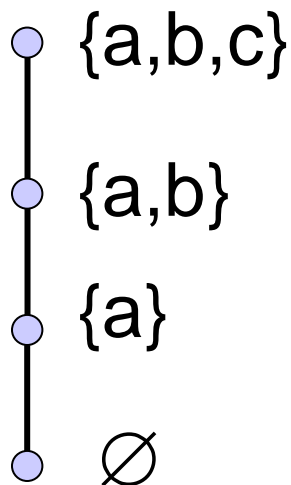
说明：边表示盖住关系，而不是偏序关系。



哈斯图

例. 若设 $P = \{\Phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$

$\langle P, \subseteq \rangle$ 是一偏序集， 且是全序集。

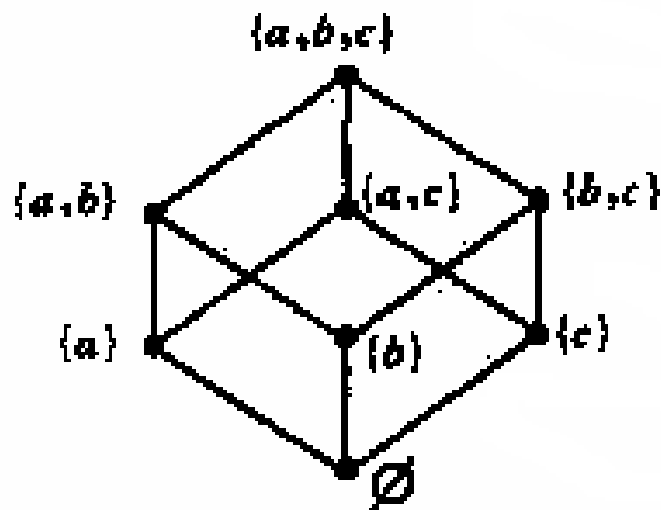


全序关系(线序关系): 如 $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ 。

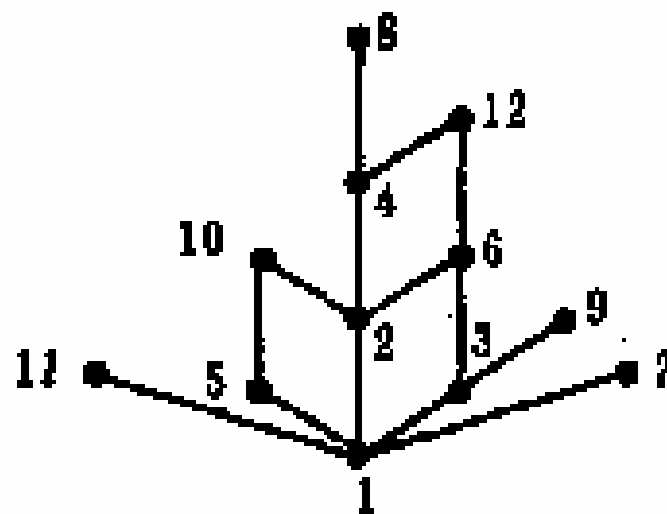


例 画出 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$
 和 $\langle \{1,2,\dots,12\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 的哈斯图。

解：哈斯图如下，



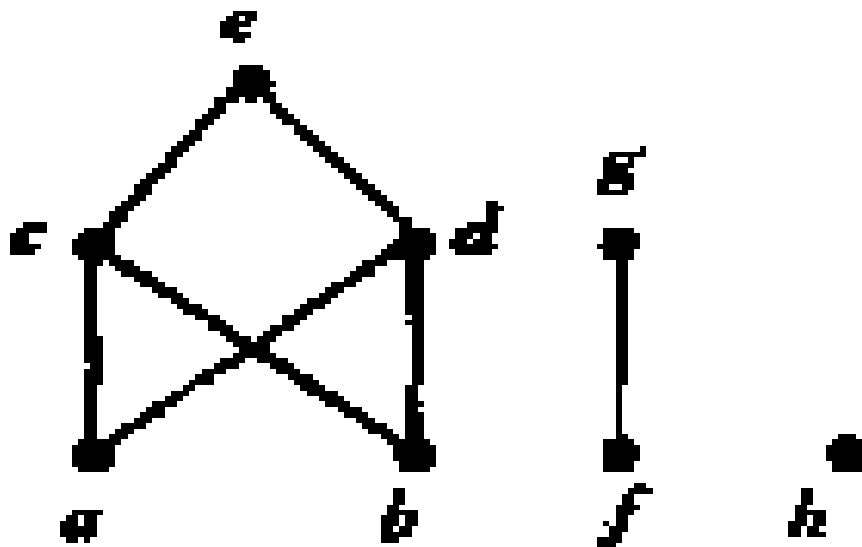
$\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$



$\langle \{1,2,\dots,12\}, R_{\text{整除}} \rangle$

说明：边表示盖住关系，路径表示 \leq 关系。
 方向缺省向上。

例 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如图所示，求出集合 A 和偏序关系 \leq 。



解 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$$\leq = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \\ \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \\ \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle, \langle f, g \rangle \} \cup I_A$$

最大元,最小元,极大元,极小元

定义 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$,

1) y 是 B 的最小元: $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$

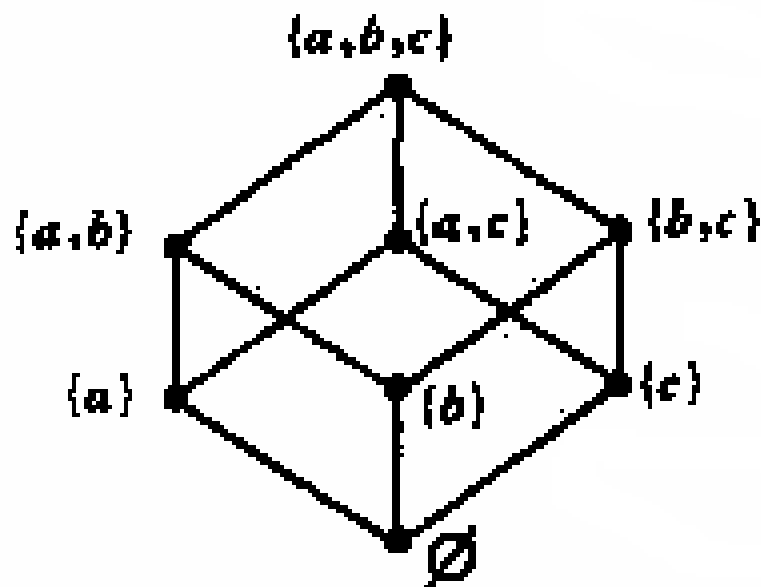
2) y 是 B 的最大元: $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$

3) y 是 B 的极小元: $\neg \exists x(x \in B \wedge x < y)$

4) y 是 B 的极大元: $\neg \exists x(x \in B \wedge y < x)$

最大元,最小元,极大元,极小元

例： $A=P(\{a,b,c\})$



$(P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq})$

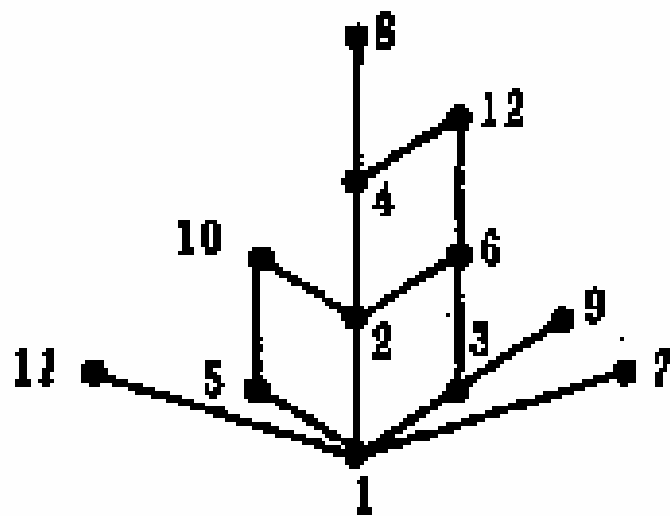
$$B=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

$$B=\{\emptyset,\{a\},\{b\}\}$$

$$B=\{\{a\},\{b\}\}$$

最大元,最小元,极大元,极小元

例, 求A的最大元,最小元,极大元,极小元。



$\langle \{1, 2, \dots, 12\}, R_{\text{整除}} \rangle$

最大元：无

最小元：1

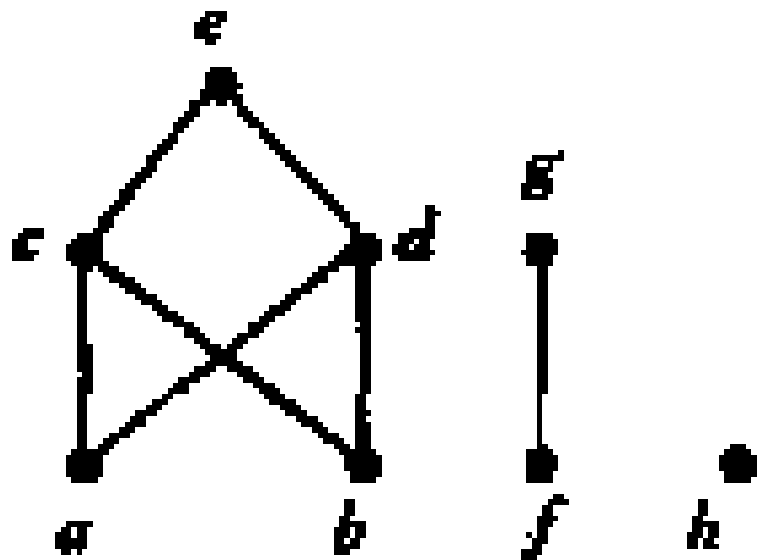
极大元：7, 8, 9, 10, 11, 12

极小元：1

$B = \{2, 3, 6\}$? $B = \{7, 8\}$?

最大元,最小元,极大元,极小元

例, 求A的最大元,最小元,极大元,极小元。



最大元：无

最小元：无

极大元：e,g,h

极小元：a,b,f,h

$B=\{a,b,c,d,e\}$?

上界,下界,上确界,下确界

定义 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $\underline{y} \in A$,

1) y 是 B 的上界: $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$

2) y 是 B 的下界: $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$

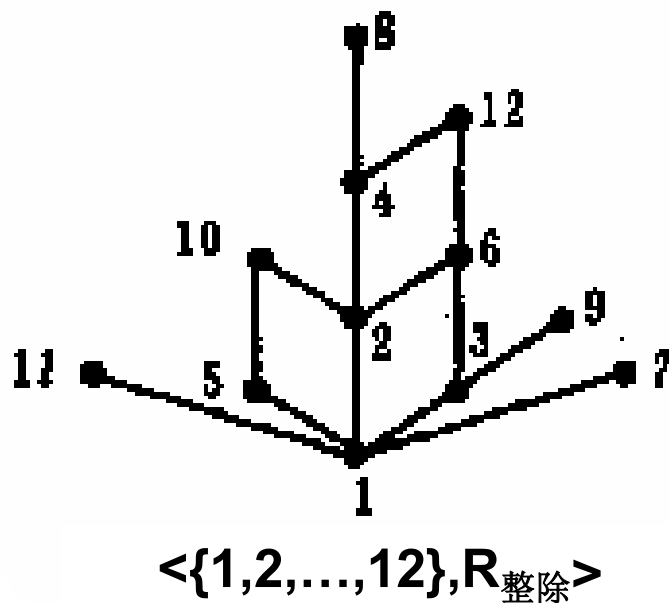
3) B 的最小上界或上确界: 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 称 C 的最小元为 B 的上确界。

4) B 的最大下界或下确界: 令 $D = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 称 D 的最大元为 B 的下确界。



上界,下界,上确界,下确界

例, 令 $B=\{2,3,6\}$, 求 B 的上界、最小上界、下界、最大下界。



上界: 6, 12

最小上界: 6

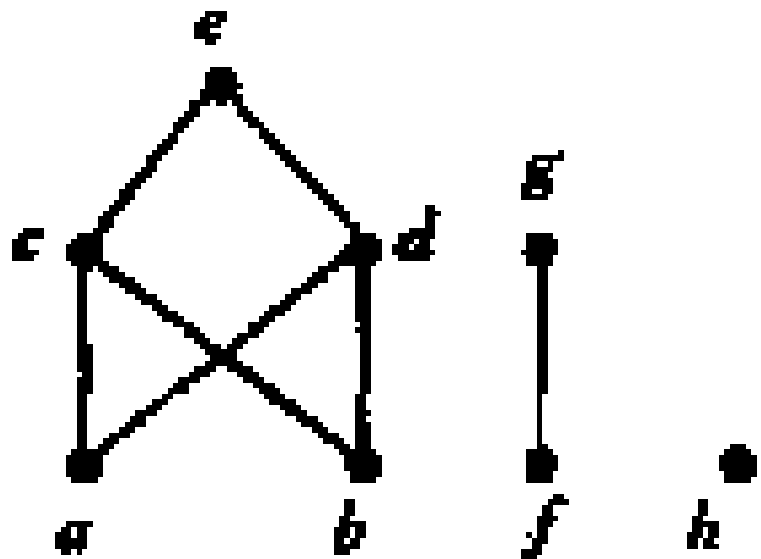
下界: 1

最大下界: 1



上界,下界,上确界,下确界

例, 令 $B=\{c,d,e\}$, 求 B 的上界、最小上界、下界、最大下界。



上界: e

最小上界: e

下界: a, b

最大下界: 无

如果最小上界或最大下界存在,一定是惟一的。



第八章 函数

8. 1 函数的定义和性质

回忆

- 集合

- 二元关系

- 特殊的二元关系

- **函数**：一种特殊的二元关系。它对关系的概念作了**限制**：从A到B的关系满足**对于A中每一元素a，在B中必须有一个元素且只能有一个元素与之对应(形成有序对)**。

函数的定义

定义 设 F 为二元关系，若对任意的 $x \in \text{dom}F$ 都存在惟一的 $y \in \text{ran}F$ 使得 xFy 成立，则称 F 为函数。

例，如下关系是否为函数？

$F_1 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle \}$ 是函数

$F_2 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle \}$

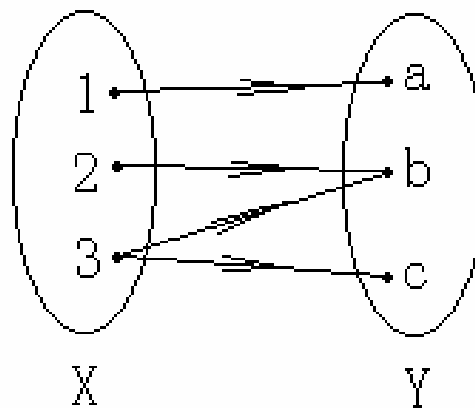
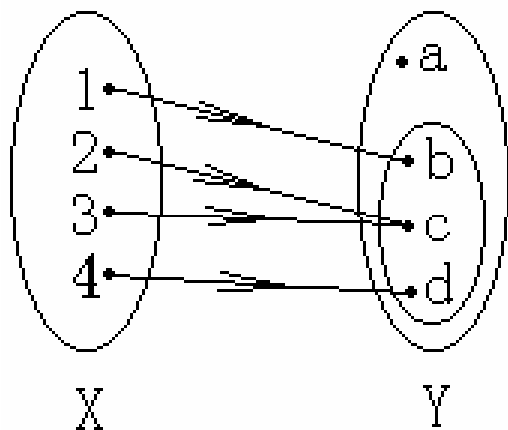
不是函数，因为对于 x_1 ，存在 y_1 和 y_2 ，使得 $x_1 F y_1$ 、 $x_1 F y_2$ 同时成立。

函数的定义

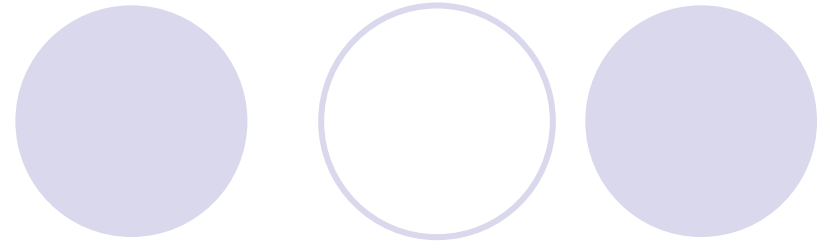
例，如下关系是否为函数？

$$(1) F = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in R \wedge y = x^2 \}$$

$$(2) G = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in R \wedge x = y^2 \}$$



作业 (习题七)



● 31, 33

● 36

● 41

● 42

● 46

● 48