

# 析取范式与合取范式

**说明：** 真值表与主范式是两种等价形式。

**定理2.3** 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是惟一的。

# 析取范式与合取范式

**结论：** 同一公式的主析取范式中 $m$ 的**下标**和主合取范式中 $M$ 的**下标**是互补的。  
根据这一结论，可由公式的主析取范式求主合取范式，反之亦可。

真值表：成真赋值与成假赋值互补

**例．** 已知 $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4$  ( $A$ 中含命题变量 $p$ 、 $q$ 、 $r$ )，求 $A$ 的主合取范式。

# 析取范式与合取范式

重言式与矛盾式的主析取范式和主合取范式：

## 1. 重言式：

主析取范式：

主合取范式： 含全部 $2^n$ 个极小项；

## 2. 矛盾式：

不含极大项。

主析取范式：

主合取范式： 不含极小项；

含全部 $2^n$ 个极大项。

# 主析取范式(主合取范式)用途

1. 求公式的成真赋值与成假赋值
2. 判断公式的类型
3. 判断命题公式等值
4. 解决实际问题

**例.** 已知 $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4$  (A中含命题变量p,q,r)。

# 解决实际问题

**例.** 某科研所要三名科研骨干A,B,C中挑选1~2名出国进修，由于工作需要，选派时要满足以下条件：

a) 若A去，则C同去；

$$p \rightarrow r$$

b) 若B去，则C不能去；

$$q \rightarrow \neg r$$

c) 若C不去，则A或B可以去。

$$\neg r \rightarrow (p \vee q)$$

问所里应如何选派他们？

**解：** 设

p: A去进修。

q: B去进修。

r: C去进修。

# 解决实际问题

由已知条件得公式

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$$

经演算可得，

$$\text{原式} \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5$$

由于， $m_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge r$ ， $m_2 = \neg p \wedge q \wedge \neg r$ ， $m_5 = p \wedge \neg q \wedge r$ ，  
可知，选派方案有三种：

A、B都不去， C去

A、C都不去， B去

A、C同去， B不去



## 2. 3 联结词的完备集

# 其它联结词

## 定义2.7

与非联结词 “ $\uparrow$ ” :  $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

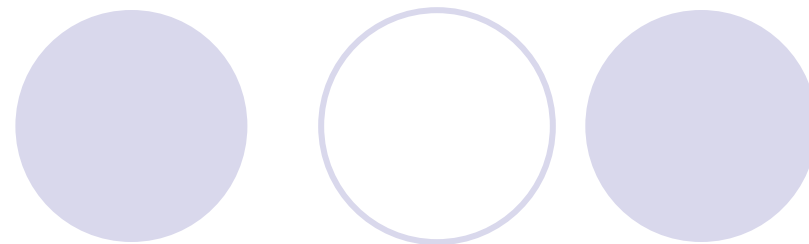
或非联结词 “ $\downarrow$ ” :  $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

真值表:

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0



# 其它联结词



$$(p \uparrow p) \Leftrightarrow \neg p$$

$$(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \Leftrightarrow p \wedge q$$

$$(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \Leftrightarrow p \vee q$$

$$p \uparrow 1 \Leftrightarrow \neg p, \quad p \uparrow 0 \Leftrightarrow 1$$

$$p \downarrow p \Leftrightarrow \neg p$$

$$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$$

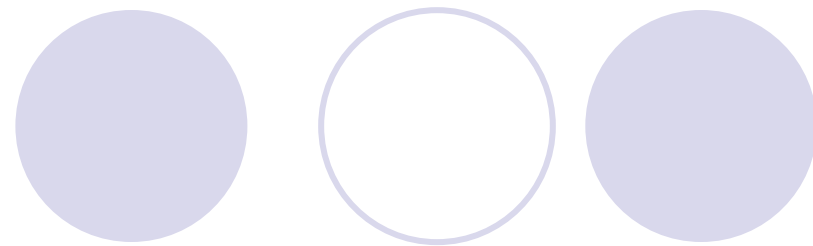
$$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \Leftrightarrow p \wedge q$$

$$p \downarrow 0 \Leftrightarrow \neg p; \quad p \downarrow 1 \Leftrightarrow 0$$

问题:  $p \rightarrow q$   
怎么表示?



# 联结词的完备集



## 定义2.8

设 $S$ 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由**仅含** $S$ 中的联结词构成的公式表示，则称 $S$ 是**联结词完备集**。

如果去掉其中的任何一个联结词后，就不是完备集，则称 $S$ 是**最小联结词完备集**。



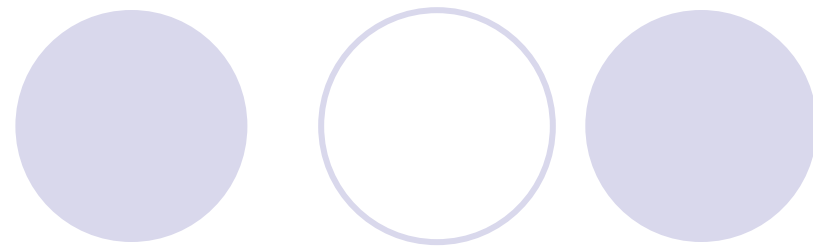
# 联结词的完备集

**定理2.4** 以下联结词集是完备集：

1.  $S=\{\neg, \wedge, \vee\}$
2.  $S=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
3.  $S=\{\neg, \wedge\}$
4.  $S=\{\neg, \vee\}$
5.  $S=\{\neg, \rightarrow\}$
6.  $S=\{\uparrow\}$
7.  $S=\{\downarrow\}$

其中，3~7是**最小完备集**。

# 联结词的完备集



1. 任何 $n(n \geq 1)$ 元命题公式对应惟一的一个主析取范式(主合取范式), 主析取范式(主合取范式)中仅含联结词 $\neg, \vee, \wedge$ , 所以 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备集。
2. 显然
3.  $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$   
其它证明略。





作业

8(2)

9(2)

10(2)

11(2)