第三节、函数的求导法则

- 一、四则运算求导法则
- 二、反函数的求导法则
- 三、复合函数求导法则
- 四、初等函数的求导问题
- 五、微分运算法则

思路:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ （构造性定义）

本节内容

求导法则

其它基本初等函数求导公式

$$\left\{\begin{aligned} &(C)'=0\\ &(\cos x)'=-\sin x\\ &(\ln x)'=\frac{1}{x}\end{aligned}\right.$$

初等函数求导问题

一、四则运算求导法则

定理1 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 具有导数 → $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 的和、差、积、商 (除分母为0的点外) 都在点 x 可导, 且

(1) $$\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x)$$

(2) $$\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

(3) $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}\quad (v(x)\neq 0)$$

下面分三部分加以证明, 同时给出相应的推论和例题.

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

证：设 $f(x) = u(x) \pm v(x)$, 则

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(u(x+h) \pm v(x+h)\big) - \big(u(x) \pm v(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(u(x+h) - u(x)\big)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{\big(v(x+h) - v(x)\big)}{h}$$

$= u'(x) \pm v'(x).$ 故结论成立.

此法则可推广到任意有限项的情形. 例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$

证　设 $f(x) = u(x)v(x)$，则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\underline{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\, v(x+h)} + \underline{u(x)\,\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}\right]$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$ 故结论成立.

推论　1) $(Cu)' = Cu'$ （ C为常数 ）

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

例1. $y=\sqrt{x}(x^3-4\cos x-\sin 1)$, 求 y' 及 $y'\big|_{x=1}$.

解: $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}(3x^2+4\sin x)$$

$$y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1.$$

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$

证： 设 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$， 则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x) - u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\right]$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

故结论成立.

推论: $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-Cv'}{v^2}$ （ C为常数 ）

例2 求证 $\boxed{(\tan x)' = \sec^2 x,\ (\csc x)' = -\csc x \cot x.}$

证
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc x \cot x.$$

类似可证: $\boxed{(\cot x)' = -\csc^2 x, \quad (\sec x)' = \sec x \tan x.}$

二、反函数的求导法则

定理2. 设 $y = f(x)$ 为 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数，$f^{-1}(y)$ 在 y 的某邻域内单调可导，且 $[f^{-1}(y)]' \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

证 在 x 处给增量 $\Delta x \neq 0$，由反函数的单调性知

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0, \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta x \to 0$ 时必有 $\Delta y \to 0$，因此

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

例3　求反三角函数 $y=\arcsin x$ 的导数。

解　设 $y=\arcsin x$，则 $x=\sin y$，$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

$\therefore \cos y>0$，则

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用
$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$$

类似可求得

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\arccot x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

小结

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

三、复合函数求导法则

定理3. $u=g(x)$ 在点 x 可导， $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导 $\longrightarrow$ 复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x 可导，且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)}$$

证 $\because$ $y=f(u)$ 在点 u 可导，故 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$,

$\therefore \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$, 当$\Delta u\to 0$时， $\alpha\to 0$,

故有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$

补充定义 $\alpha\big|_{\Delta u=0}=0$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x)$$

推广：此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如 $y = f(u)\,,\, u = \varphi(v)\,,\, v = \psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$= f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x).$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ u \\ \downarrow \\ v \\ \downarrow \\ x \end{array}}$$

关键：搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

$$y = f(u),\quad u = g(x) \qquad \frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x)$$

例4. 求下列导数: (1) $(x^{\mu})'$; (2) $(x^{x})'$; (3) $(\operatorname{sh} x)'$.

解: (1) $(x^{\mu})' = (e^{\mu \ln x})' = e^{\mu \ln x} \cdot (\mu \ln x)' = x^{\mu} \cdot \dfrac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}$

(2) $(x^{x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^{x}(\ln x + 1)$

(3) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$

说明: 类似可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \qquad (a^{x})' = a^{x} \ln a.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad a^{x} = e^{x \ln a}$$

例5. 设 $y=e^{\cos(e^x)}$， 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{\cos(e^x)}\left(\cos(e^x)\right)'$$

$$=e^{\cos(e^x)}\cdot(-\sin(e^x))\cdot e^x=-e^{x+\cos(e^x)}\cdot\sin(e^x)$$

思考：若 $f'(u)$ 存在， 如何求 $f(\ln\cos(e^x))$ 的导数?

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f'(\ln\cos(e^x))\cdot(\ln\cos(e^x))'=\cdots$$

这两个记号含义不同

$$f'(u)\Big|_{u=\ln\cos(e^x)}$$

练习：设 $y=f(f(f(x)))$，其中 $f(x)$ 可导，求 y'.

例6. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'.

解 $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

记 $\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则

$\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数

(反双曲正弦)

$$(\operatorname{arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

四、初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 有限次四则运算的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu' \quad （C为常数）$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. 复合函数求导法则

$$y = f(u),\, u = \varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

说明：最基本的公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

由定义证，其它公式用求导法则推出.

例7. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

解: $\because \quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例8. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$， 求 y'.

解 $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

例9 $y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y'.

解 $$y'=\left(e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x\right)\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+e^{\sin x^2}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$=2x\cos x^2\, e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}e^{\sin x^2}$$

关键: 搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

例10 设 $y=\frac{1}{2}\underline{\arctan\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，求 y'.

解

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$$