第二节
常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\rightleftarrows$ 部分和序列 S_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 有界 .

证: "$\Longrightarrow$" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则$\{S_n\}$收敛，故有界.

"$\Longleftarrow$" $\because u_n \geq 0$, $\therefore$部分和数列 $\{S_n\}$单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界，故$\{S_n\}$ 收敛 , 从而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛.

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且 $u_n \le v_n$，则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证：令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和，则有 $S_n \le \sigma_n$

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此有 $S_n \le \sigma$

由定理 **1** 可知, 弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

推论 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个**正项级数**,

且存在 $N \in Z^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k\, v_n$ (常数 $k > 0$),

则有

(1) 若**强**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则**弱**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若**弱**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则**强**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 由级数每一项同乘不为零的常数 k 不改变其敛散性

及在级数前加、减有限项不改变其敛散性,可证.

例1. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ (常数 $p>0$) 的敛散性.

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若 $p>1$, 因为当 $n-1\le x\le n$ 时, $\frac{1}{n^p}\le\frac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

$$\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故级数 σ_n 收敛， 由比较审敛法知 $\boldsymbol{p}$ 级数收敛 .

调和级数与 p **级数**是两个常用的比较级数.

若存在 $N \in Z^{+}$, 对一切 $n \geq N$,

(1) $u_n \geq \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(2) $u_n \leq \frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散 .

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散 .

定理3. (比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \quad (l \neq \infty)$$

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当 $0<l<\infty$ 时， 取 $\varepsilon<l$, 由**定理 2 可知** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ **同时收敛或同时发散；**

(2) 当 $l=0$ 时, 利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n\ (n>N)$, **由定理2 知**

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ **收敛，** 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=\infty$ 时， 存在 $N\in Z^{+}$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{u_n}{v_n}>1$, **即**

$$u_n>v_n$$

由定理2可知, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ **发散，** 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散.

特别取 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得如下结论:

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$$

解: $\because \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

定理4 . 比值审敛法 (D’alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho<1$ 时, 取 ε 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

知存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$

$$\therefore\ u_{n+1}<(\rho+\varepsilon)u_n<(\rho+\varepsilon)^2u_{n-1}<\cdots$$

$$<(\rho+\varepsilon)^{n-N}u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^k$ 收敛 , 由比较审敛法可知 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$时,必存在 $N \in Z_+$, $u_N \neq 0$, 当$n \geq N$ 时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$, 所以级数发散.

说明: 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

例如, p – 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{级数收敛}; \\ p \leq 1, \text{级数发散}. \end{cases}$

例5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} = x$

根据定理4可知:

当 $0<x<1$ 时, 级数收敛 ;

当 $x>1$ 时, 级数发散 ;

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散 .

定理5. **根值审敛法 (Cauchy判别法)**

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散.

证明提示: $\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, $\therefore$ 对任意给定的正数 ε

$(\varepsilon < |1-\rho|)$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon$$

即 $$(\rho - \varepsilon)^n < u_n < (\rho + \varepsilon)^n$$

$$\rho < 1 \Longrightarrow \rho + \varepsilon < 1$$

$$\rho > 1 \Longrightarrow \rho - \varepsilon > 1$$

分别用上述不等式的左,右部分, 可推出结论正确.

(由比较判别法, 不等式两边视为等比级数的一般项)

说明：$\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散．

例如，**$p-$**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$：

$$u_n = \frac{1}{n^p}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \to 1 \ (n \to \infty)$$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{级数收敛；} \\ p \le 1, \text{级数发散．} \end{cases}$

例6. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$收敛于$S$，并估计以部分和$S_n$近似代替和$S$时所产生的误差 .

解: $\because \quad \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$

由定理5可知该级数收敛 .令 $r_n=S-S_n$，则所求误差为

$$0<r_n=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots$$

$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^n}$$

正项级数　小结

特征：　$S_n \uparrow$

充要条件：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \updownarrow \Leftrightarrow \{s_n\}$　有界;

审敛法：比较法、比值法、根值法;

注：　(1).当级数的一般项中含有阶乘项、连乘积

（或商）项时，用比值法简单;

(2).当一般项中含n次幂因子时用根值法较简单;

(3).几何级数和p-级数是常用的比较对象;

练习： 判定下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$(2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1};$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n};(a>0)$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}};$$

二、交错级数及其审敛法

设 $u_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为交错级数 .

定理6 . (**Leibnitz** 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛 , 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1} .$$

证: $\because S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$

$$-u_{2n}\leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$**是单调递增有界数列，故** $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S\leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$

故级数收敛于S, 且 $S\leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n=S-S_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

$$\therefore \quad |r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\leq u_{n+1}$$

用**Leibnitz 判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+($

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

三、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例如: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 , 令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然 $v_n\geq 0$, 且 $v_n\leq|u_n|$, 根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

$$u_n=2v_n-|u_n|$$

$\Downarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛

例7. 证明下列级数绝对收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$.

证: (1) $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

(2) 令 $u_n = \dfrac{n^2}{e^n}$，

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n^2}{e^n} \right|$ 收敛，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

练习： 判定下列级数条件收敛还是绝对收敛?

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(-5)^{n-1}};$$

$$(2)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{\pi}{2\sqrt{n}};$$

内容小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

↓ 满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ → 不定 用它法判别：

- 比较审敛法
- 部分和极限
- 其它判别法

$\rho < 1$ → 收 敛

$\rho > 1$ → 发 散

3. 任意项级数审敛法

概念： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 收敛，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{绝对收敛} \\ 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 发散，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 则交错级数 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n 收敛$$

思考与练习

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 ?

提示: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意: 反之不成立. 例如,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}.$$

练习题

1. 判别级数的敛散性:

$p-$级数 $:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

不是 **p**–级数

解: (1) $\because\ \ln(n+1)<n,\quad \therefore\ \frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(2) $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

2. 设 $u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ （ *C* ）.

(*A*) 发散； **(*B*) ~~绝~~对收敛;**

(*C*) 条件收敛； **(*D*) 收敛性根据条件不能确定.**

分析: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$，$\therefore$ **(*B*) 错；**

又 $$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_4}}+\frac{1}{u_5}\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

练习： 判定下列级数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}});$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\ ;$$

例　讨论级数的收敛性：　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}\ (a > 0)$

解：　$\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(\sqrt[n]{n})^p} = a$

$$\therefore \begin{cases} a < 1 & \text{级数收敛} \\ a > 1 & \text{级数发散} \\ a = 1 \begin{cases} p \le 1 & \text{级数发散} \\ p > 1 & \text{级数收敛} \end{cases} \end{cases}$$