命题逻辑的推理理论

3.1 推理的形式结构

推理的形式结构

若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$是重言式

记作$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$

前提： $A_1, A_2, \ldots, A_n$

结论： B， 称B为**有效结论**。

推理**正确**（**有效**）。

推理的形式结构

- 推理的形式结构：

  前提：$A_1,A_2,\ldots,A_n$

  结论：B

- 判断$A_1,A_2,\ldots,A_n \Rightarrow B$是否成立，即判断$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n) \rightarrow B$是否为重言式。

判断方法

1. 真值表法
2. 等值演算法
3. 主析取范式法
4. 分析法：若设前提为T时，结论也为T，则推理正确；或设结论为F时，前提也为F，则推理正确。

推理定律

重要的重言蕴涵式，称作**推理定律**，其中A、B、C表示任意的命题公式：

1. 附加律：$A \Rightarrow A \vee B$
2. 化简律：$A \wedge B \Rightarrow A$

3. 假言推理： $A\wedge(A\rightarrow B)\Rightarrow B$

4. 拒取式： $\neg B\wedge(A\rightarrow B)\Rightarrow\neg A$

5. 析取三段论： $\neg A\wedge(A\vee B)\Rightarrow B$

6. 假言三段论： $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow(A\rightarrow C)$

7. 等价三段论： $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$

8. 构造性二难：

$$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$$

$$(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B)\Rightarrow B$$

9. 破坏性二难：

$$(\neg B\vee\neg D)\wedge(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$$

等值式和重言蕴涵式的关系

定理3.1 设A、B是任意两个命题公式，

$A \Leftrightarrow B$的充分必要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$。

证明：

$A \Leftrightarrow B$;

$A \to B \Leftrightarrow 1$且$B \to A \Leftrightarrow 1$;

以前的等值式可当作两个重言蕴涵式使用(举例)。

3．2 自然推理系统P

自然推理系统P

- 推理中命题变量较多时，前4种方法演算量大，为此引入命题逻辑的推理理论。
- 推理：在形式系统(符号系统)中进行。
- 形式系统
  - 自然推理系统
  - 公理推理系统

自然推理系统

从任意给定的前提(公式集)出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，最后得出结论——有效结论。

自然推理系统*P*

定义3.2 自然推理系统*P*定义如下：

1. 字母表

(1) 命题变量符号： $p, q, r, \ldots, p_i, q_j, r_k, \ldots$

(2) 联结词符号： $\neg$， $\wedge$， $\vee$， $\rightarrow$， $\leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(、)、,

2. 合式公式

字母表中的符号按一定规则构成的合式公式的集合，定义同前。

3. **推理规则**

1) **前提引入规则(P规则)**：在证明的任何步骤上，都可引入前提。

2) **结论引入规则(T规则)**：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可以作为后续证明的前提，在后续证明中引用。

3) **置换规则**：在证明的任何步骤上，命题公式的子公式都可以用与它等值的其它命题公式置换。

4) **合取引入规则**：$A,B \Rightarrow A \wedge B$，若证明的公式序列中已出现A和B，则可将$A \wedge B$引入序列中作为后续证明的前提。

根据9条推理定律及合取引入规则、结论引入规则，可得下面推理规则，

5）假言推理规则(分离规则)：$A \to B, A \Rightarrow B$

6）附加规则：$A \Rightarrow A \vee B$

7）化简规则：$A \wedge B \Rightarrow A$

8）拒取式规则：$A \to B, \neg B \Rightarrow \neg A$

9）假言三段论：$A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$

10）析取三段论规则：$A \vee B, \neg B \Rightarrow A$

11）构造性二难规则：

$A \to B, C \to D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$

12）破坏性二难规则：

$A \to B, C \to D, \neg B \vee \neg D \Rightarrow \neg A \vee \neg C$

变化

以上A、B、C表示任意的命题公式：

- $\neg p \Rightarrow p \rightarrow q$
- $\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$

证明推理正确(结论有效)的方法

1. 直接证法
2. 附加前提证明法
3. 反证法（归谬法）

直接证法

由一组**前提**，

利用一些公认的**推理规则**，

根据已知的**等值式**或**重言蕴涵式**，

推演得到**有效结论**。

例.在自然推理系统P中构造下列推理的证明

(1) $p\vee q,\ p\to\neg r,\ s\to t,\ \neg s\to r,\ \neg t\Rightarrow q$

(2) $p\to q,\ r\to\neg q,\ r\vee s,\ s\to\neg q\Rightarrow\neg p$

附加前提证明法

CP规则：

欲证$A_1 ,A_2,\ldots,A_n \Rightarrow A\rightarrow B$成立，

通过证明$A_1 ,A_2,\ldots,A_n, A\Rightarrow B$成立，

证得原推理正确。

归谬法

欲证$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$成立，

将结论取反作为前提，通过证明$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$为矛盾式，证得原推理正确。

习题讲解

1. 证明$r\wedge(p\vee q)$是前提$p\vee q, q\to r, p\to s, \neg s$的结论。

2. 前提:$\neg p\vee r, \neg q\vee s, p\wedge q$
   结论:$t\to r\wedge s$

3. 符号化下面语句的推理过程，并指出推理是否正确。

“如果甲是冠军，则乙或丙将得亚军；如果乙得亚军，则甲不能得冠军；如果丁得亚军，丙不能得亚军；事实是甲得冠军。可知丁不能得亚军”。

要求：两种方法证明。

第四章 一阶逻辑基本概念

引言

- 命题逻辑中：
  - 原子命题是命题演算中最基本的单位，不再对原子命题进行分解。

- 缺点：

引言

例：苏格拉底论证是正确的，但不能用命题逻辑的推理规则验证结论的有效性。

p：所有的人总是要死的。

q：苏格拉底是人。

r：所以苏格拉底是要死的。

本章介绍的谓词逻辑，对原子命题进行了再分，引入了**个体词**、**谓词**、**量词**、**谓词公式**等概念。

4．1 一阶逻辑命题符号化

个体词和谓词

- 在谓词逻辑中，可将原子命题分解为**谓词**与**个体词**两部分。
  - 如“苏格拉底”、“张三”是个体词，“...是要死的”是谓词。
- **个体词**：命题中所描述的对象。
  - 如李明，自然数，计算机，思想等。
  - 可以是具体的，也可以是抽象的。

个体词和谓词

谓词：用于刻划个体的**性质**或个体之间**关系**。

例，(1)李明是学生。 $P(a)$

(2)张亮比陈华高。 $Q(b,c)$

(3)陈华坐在张亮与李明之间。 $R(c,b,a)$

个体词：a:李明，b: 张亮，c: 陈华

谓词：P: “…是学生”，

Q: “…比…高”，

R: “…坐在…与…之间”。

通常，用**大写字母**表示谓词，

小写字母表示个体词。如，

上述**命题**可分别表示为：

个体词和谓词

一般地，由n个个体词和一个谓词所组成的**命题**可表示为$P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

注意：$a_1,a_2,\ldots,a_n$的排列次序是重要的。

例， a:武汉; b:北京; c:广州

P：…位于…和…之间

P(a,b,c)：武汉位于北京和广州之间。

说明：P(a,b,c)是真，但P(b,a,c)是假，是两个不同的命题。

作业

14(1)~(5)

15

16

18