7.5 关系的闭包

关系的闭包

定义 设R是非空集合A上的任意关系, R’是A上的关系,R’是R的自反闭包,应满足以下条件:

(1) R’是自反的;

(2) $R \subseteq R'$;

(3) A上的任何包含R的自反关系R”, 都有$R' \subseteq R''$。

令$A=\{1,2,3\}$, $R=\{<1,2>\}$，求R的自反闭包。

添加有序对，变成自反关系。

$R_1 = \{<1,2>,<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$

$R_2 = \{<1,2>,<1,1>, <2,2>, <3,3>,<2,3>\}$

$R_3 = \{<1,2>,<1,1>, <2,2>, <3,3>,<3,2>,<1,3>\}$

……

关系的闭包

定义 设R是非空集合A上的任意关系，A上的关系R’是R的对称闭包，R’满足以下条件:

(1) R’是对称的；

(2) $R \subseteq R'$；

(3) A上的任何包含R的对称关系R”，都有$R' \subseteq R''$。

令$A=\{1,2,3\}$, $R=\{<1,2>\}$，求R的对称闭包。

添加有序对，变成对称关系。

$R_1 = \{<1,2>,<2,1>\}$

$R_2 = \{<1,2>,<2,1>,<1,1>\}$

$R_3 = \{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>\}$

……

关系的闭包

定义 设R是非空集合A上的任意关系，A上的关系R’是R的传递闭包，R’满足以下条件:

(1) R’是传递的；

(2) $R \subseteq R'$；

(3) A上的任何包含R的传递关系R”，都有$R' \subseteq R''$。

关系的闭包

关系R的闭包一般记作：

- 自反reflexive闭包：r(R)
- 对称symmetric闭包：s(R)
- 传递transitive闭包：t(R)

构造闭包的方法

定理 设R为非空集合A上的关系，则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$;

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$;

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$;

(4) A是含有n个元素的集合，$\exists k\in Z^+$,

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^k$

例　设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$。

解：

$$r(R)=R\cup R^0=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

$$\cup\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

$$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,a\rangle.\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

$$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

$$\cup\{\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle\}$$

$$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$$

$R^2=R^4=R^6=\ldots$; $R^3=R^5=R^7=\ldots$

$t(R) = R\cup R^2\cup R^3 \cup R^4 \cup \ldots = R\cup R^2\cup R^3$

$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$\cup\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

$\cup\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

$=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,$
$\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$

利用关系矩阵求闭包

设关系R、r(R)、s(R)、t(R)的关系矩阵分别是M、M_r、M_s和M_t，前面定理中的公式转换成矩阵表示：

(1) $M_r = M + E$

(2) $M_s = M + M'$

(3) $M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots + M^k$，其中

E：与M同阶的单位矩阵。

M'：M的转置。

"+"：矩阵中对应元素的逻辑加(∨,按位或)。

在上例中3个结果矩阵是:

$$M_r=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$M_s=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

$$M_t=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

利用关系图求闭包

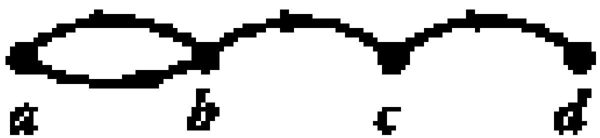
设关系R、r(R)、s(R)、t(R)的关系图分别是G、G_r、G_s和G_t，则

G_r：为G中无环的顶点添加环。

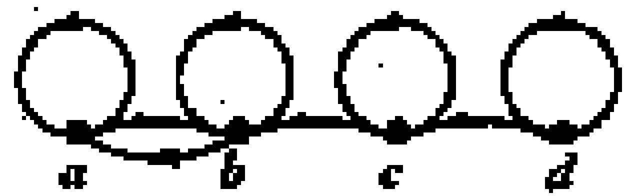
G_s：为单向边配对。

例 设A={a,b,c,d},

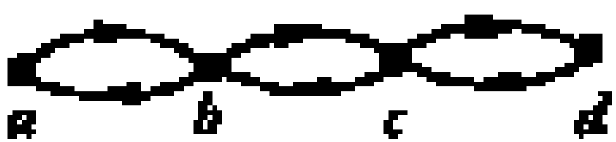
R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}, 则R和r(R), s(R), t(R)的关系图如下图所示:



R



r(R)



s(R)

t(R)

闭包的主要性质

定理　设R为非空集合A上的关系，则

1) R是自反的当且仅当r(R)=R；

2) R是对称的当且仅当s(R)=R；

3) R是传递的当且仅当t(R)=R。

根据定义证明。

作业（习题七）

- 26