第7章　二元关系

7.1 有序对与笛卡儿积

有序对

定义 由两个元素x和y按一定的**顺序**排列成的**二元组**叫做一个**有序对**(也称**序偶**)，记作$<x,y>$，其中x是它的**第一元素**，y是它的**第二元素**。

例，平面直角坐标系中点的**坐标**就是**有序对**，如$<1,3>$, $<3,1>$, (2,0), (1,1)等代表坐标系中不同的点。

有序对的性质

1. 当$x \neq y$时,$<x,y> \neq <y,x>$， 即与顺序有关。

2. 两个有序对相等， 即$<x,y>=<u,v>$的充分必要条件是$x=u$且$y=v$。

定义 一个有序n元组(n≥3)是一个有序对，其中第一元素是一个有序n-1元组，一个有序n元组记作$<x_1,x_2,\ldots,x_n>$，即

$$<x_1,x_2,\ldots,x_n> = <<x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}>, x_n>$$

例如：

1. 空间直角坐标系中点的坐标都是有序3元组;

   如<1, -1, 3>, <2, 4.5, 0>等。

2. n维空间中点的坐标或n维向量都是有序n元组。

3. $<x,y,z> = <<x,y>,z> \neq <x,<y,z>>$

定义 设A,B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的笛卡儿积，记作A×B。符号化表示为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

例，设$A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，则

$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$

$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

如果$|A|=m$，$|B|=n$，

则$|A\times B|=$ mn　$|B\times A|=$ mn

若$\langle x,y\rangle \in A\times B$，则有

$$x\in A \wedge y\in B$$

若$\langle x,y\rangle \notin A\times B$，则有

$$x\notin A \vee y\notin B$$

笛卡儿积运算的性质

设A、B、C、D为任意集合，

1. $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$

2. 当$A \neq B \wedge A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$时，有$A \times B \neq B \times A$，即不满足交换律。

3. 当A,B,C都不是空集时，有

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

即笛卡儿积运算不满足结合律。

4. 笛卡儿积运算对∪和∩运算满足分配律：

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

证明 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明 对于任意的$<x,y>$,

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

例： 设 $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{2,3\}$

$$A\times(B\cup C)=\{1\}\times\{1,2,3\}$$

$$=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$$

$$(A\times B)\cup(A\times C)=\{1\}\times\{1,2\}\cup\{1\}\times\{2,3\}$$

$$=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$$

$$A\times(B\cap C)=\{1\}\times\{2\}=\{<1,2>\}$$

$$(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$=\{<1,1>,<1,2>\}\cap\{<1,2>,<1,3>\}$$

$$=\{<1,2>\}$$

作业

习题七

1,3,4