

命题符号化

例，将下列命题符号化。

1. 兔子都比乌龟跑得快。
2. 有的兔子比所有的乌龟跑得快。
3. 并不是所有兔子都比乌龟跑得快。
4. 不存在跑得同样快的两只兔子。

解：令，

$F(x,y)$: x 比 y 跑得快。

$E(x,y)$: x 与 y 跑得同样快。

$R(x)$: x 是兔子。 $T(x)$: x 是乌龟。

$\neg \forall x \forall y (R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x,y))$



命题符号化



则上述命题分别符号化为：(不唯一)

1. $\forall x \forall y ((R(x) \wedge T(y)) \rightarrow F(x, y))$

2. $\exists x (R(x) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow F(x, y)))$

3. $\neg \forall x \forall y ((R(x) \wedge T(y)) \rightarrow F(x, y))$

4. $\neg \exists x \exists y (R(x) \wedge R(y) \wedge E(x, y))$



4. 2 一阶逻辑公式及解释



一阶语言 \mathcal{F}

命题逻辑自然推理系统(p47):

语言 + 推理规则

在系统中进行等值演算和推理。

一阶语言：用于一阶逻辑的形式语言。



一阶语言 \mathcal{F}

定义 字母表:

- 1) 个体常量: $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1;$
- 2) 个体变量: $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1;$
- 3) 函数符号: $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1;$
- 4) 谓词符号: $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1;$
- 5) 量词符号: $\forall, \exists;$
- 6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow;$
- 7) 括号与逗号: “(”, “)”, “,”

例，符号化已知命题：

“对于任意实数 x ， $x^2-1=(x+1)(x-1)$ ”

令谓词 $R(x)$ ： x 是实数

不用函数：

令谓词 $F(x)$ ： $x^2-1=(x+1)(x-1)$ ；

命题符号化： $\forall x(R(x) \rightarrow F(x))$

利用函数：

令函数： $f(x)=x^2-1$ ， $g(x)=(x+1)(x-1)$

谓词 $E(x, y)$ ： $x = y$

命题符号化： $\forall x(R(x) \rightarrow E(f(x), g(x)))$



一阶语言 \mathcal{F}

定义 项的递归定义：

1. 个体常量和个体变量是**项**；
2. 若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意 n 元函数,
 t_1, t_2, \dots, t_n 是任意项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$
是**项**；
3. 只有**有限次**地使用1,2生成的符号
串才是**项**。

问： $f(x, g(u, v), y, z)$ 是项吗？



原子公式

定义： 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意 n 元谓词， t_1, t_2, \dots, t_n 是任意 n 个项，则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是**原子公式**。

如， $F(x)$ ， $H(x, f(y, z))$ ， $G(x, a)$ 等都是原子公式。



合式公式

定义：合式公式（谓词公式/公式）

1. 原子公式是合式公式；
2. 若A是合式公式,则 $(\neg A)$ 也是合式公式；
3. 若A,B是合式公式，则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式；
4. 若A是合式公式， x 是个体变量则 $(\forall xA)$, $(\exists xA)$ 也是合式公式；
5. 只有**有限次**地应用1~4构成的**符号串**才是合式公式。





合式公式

说明： 定义中的A,B代表任意公式。

例：

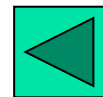
1. $\neg P$

2. $\neg P(x,y) \vee Q(y)$

3. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$

4. $\forall x(x+1=0 \rightarrow \exists y(x+y+1<0))$

等等都是公式。





辖域、约束出现和自由出现

定义：公式 $\forall xA$, $\exists xA$ 中的 x 称为量词的**指导变量**；

A 为相应量词的**辖域**；

在辖域中， x 的所有出现都称为**约束出现**；

A 中不是约束出现的其它变量均称为**自由出现**。



辖域、约束出现和自由出现

例，指出下列各公式中的指导变量，
量词辖域及变量的自由出现和约
束出现。

1) $\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists yQ(x,y,z)) \wedge S(x,z)$

2) $\forall x(x+y+1=0 \rightarrow \exists y(x+y+1<0))$





变量的换名和代替

公式中，有的变量既有自由出现，又有约束出现。

避免混淆：

1) 约束出现**换名**

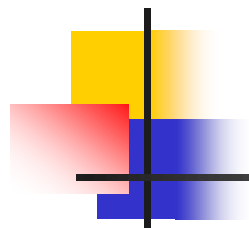
$$\Delta x A(x, x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \Delta y A(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$y \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

2) 自由出现**代替**

$$A(x, y, z) \Leftrightarrow A(u, y, z)$$

最好替换成公式中没有出现的变量。





变量的换名和代替

例：将公式 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \wedge R(x,y)$ 中的约束出现换名，判断哪一个换名是正确的。

- 1) $\forall y(P(y) \rightarrow Q(y,y)) \wedge R(x,y)$
- 2) $\forall z(P(z) \rightarrow Q(x,y)) \wedge R(x,y)$
- 3) $\forall z(P(z) \rightarrow Q(z,y)) \wedge R(x,y)$

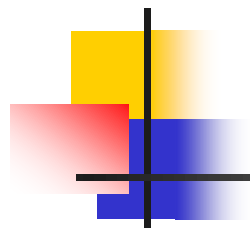
3) 正确



闭式

定义： 设A是任意公式，若A中**不含自由出现的个体变量**，则称A为封闭的合式公式，简称**闭式**。

例， $\forall x \forall y ((R(x) \wedge T(y)) \rightarrow F(x, y))$
 $\neg \exists x \exists y (R(x) \wedge R(y) \wedge E(x, y))$ 等是闭式。
 $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)) \wedge S(x, z)$



作业

习题四(P65)

➤ 5, 6

■ 习题四：

9

11(2),(5),(6)