

第六节、函数图形的描绘

➤ 一、曲线的渐近线

➤ 二、函数图形的描绘

➤ 三、小结和思考题

➤ 四、作业

一、曲线的渐近线

定义. 若曲线C上的点M沿着曲线无限地远离原点时, 点M与某一直线L的距离趋于0, 则称直线L为曲线C的渐近线.

或“纵坐标差”

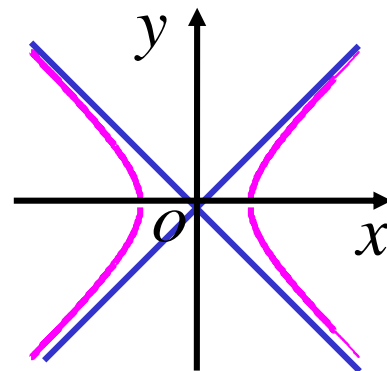
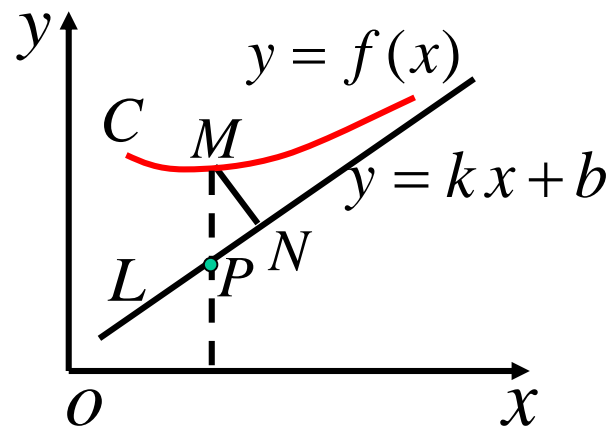
例如, 双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

有渐近线

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

但抛物线 $y = x^2$ 无渐近线.



1. 水平与铅直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 则曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = b$.
(或 $x \rightarrow -\infty$)

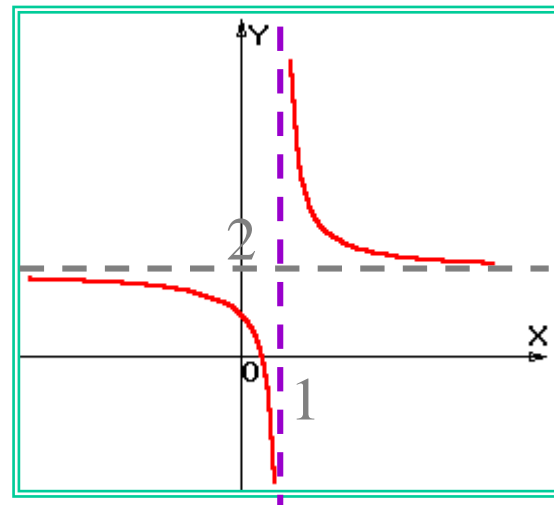
若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = x_0$.
(或 $x \rightarrow x_0^-$)

例1. 求曲线 $y = \frac{1}{x-1} + 2$ 的渐近线.

解: $\because \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x-1} + 2) = 2$

$\therefore y = 2$ 为水平渐近线;

$\because \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} + 2) = \infty, \therefore x = 1$ 为垂直渐近线.



2. 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 有
(或 $x \rightarrow -\infty$) **斜渐近线** $y = kx + b$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} \right]$$

\therefore

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

(或 $x \rightarrow -\infty$)

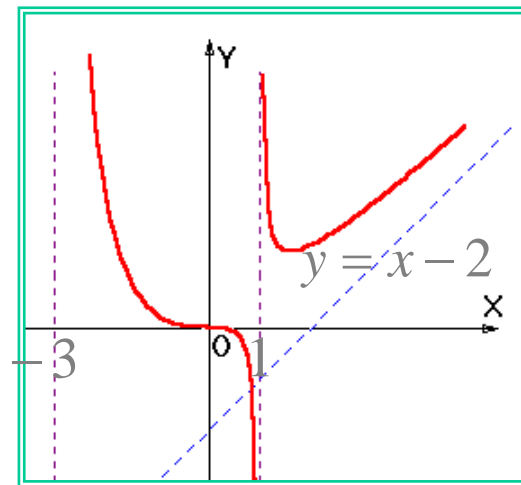
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$$

(或 $x \rightarrow -\infty$)

例2. 求曲线 $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线.

解: $\because y = \frac{x^3}{(x+3)(x-1)}, \lim_{x \rightarrow -3} y = \infty,$
(或 $x \rightarrow 1$)

所以有铅直渐近线 $x = -3$ 及 $x = 1$



又因 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 3} = -2$$

$\therefore y = x - 2$ 为曲线的斜渐近线.

二、函数图形的描绘

步骤:

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 并考察其对称性及周期性;
2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为0和不存在的点;
3. 列表判别增减及凹凸区间, 求出极值和拐点;
4. 求渐近线;
5. 确定某些特殊点, 描绘函数图形.

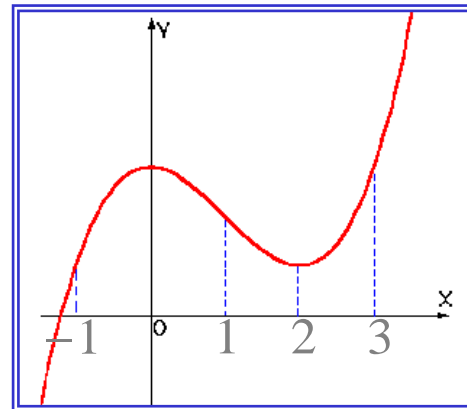
例3. 描绘 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 无对称性及周期性.

2) $y' = x^2 - 2x$, $y'' = 2x - 2$,

令 $y' = 0$, 得 $x = 0, 2$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 1$



3)	x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
	y'	+	0	-		-	0	+
	y''	-		-	0	+		+
	y	\nearrow	2	\searrow	$\frac{4}{3}$	\searrow	$\frac{2}{3}$	\nearrow
			(极大)		(拐点)		(极小)	

4)	x	-1	3
	y	$\frac{2}{3}$	2

例4. 描绘方程 $(x-3)^2 + 4y - 4xy = 0$ 的图形.

解: 1) $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为 $(-\infty, 1), (1, +\infty)$

2) 求关键点

$$\because 2(x-3) + 4y' - 4y - 4xy' = 0$$


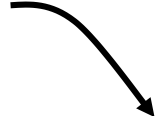


$$\therefore y' = \frac{x-3-2y}{2(x-1)} = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$\because 2 + 4y'' - 8y' - 4xy'' = 0$$

$$\therefore y'' = \frac{1-4y'}{2(x-1)} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -1, 3$;

3) 判别曲线形态

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-		-		+		+
y		-2				0	
		(极大)				(极小)	

4) 求渐近线

$\because \lim_{x \rightarrow 1} y = \infty, \therefore x = 1$ 为铅直渐近线

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}, \quad y' = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

又因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{4}$, 即 $k = \frac{1}{4}$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{1}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{1}{4}x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+9}{4(x-1)} = -\frac{5}{4}$$

$\therefore y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ 为斜渐近线

5) 求特殊点


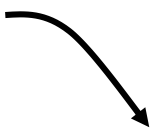


x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y' = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

6) 绘图

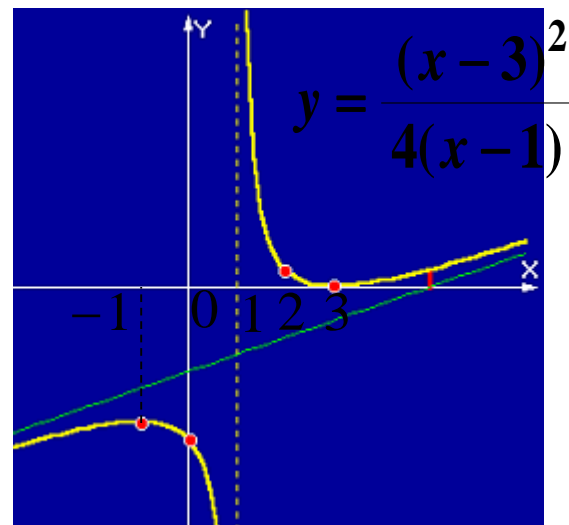
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y		-2 (极大)		无定义		0 (极小)	

铅直渐近线 $x = 1$

斜渐近线 $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



例5. 描绘函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.



解: 1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图形对称于y轴.

2) 求关键点

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$$



令 $y' = 0$ 得 $x = 0$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	0	-		-
y''		-	0	+
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

(极大)

(拐点)

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	0	—		—
y''		—	0	+
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

(极大)

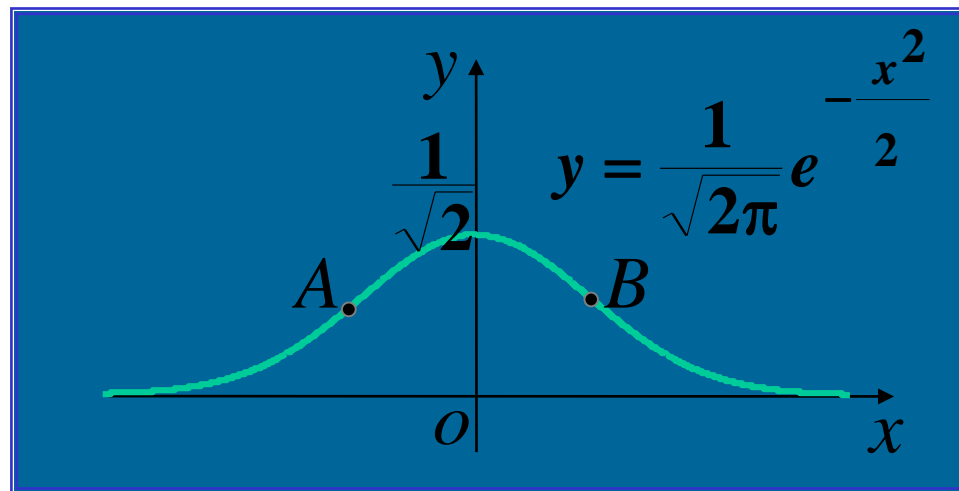
(拐点)

4) 求渐近线

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$$

$\therefore y = 0$ 为水平渐近线

5) 作图



三、内容小结

1. 曲线渐近线的求法

{ 水平渐近线;
垂直渐近线;
斜渐近线

2. 函数图形的描绘 —— 按作图步骤进行

思考与练习

1. 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ ()

- (A) 没有渐近线;
- (B) 仅有水平渐近线;
- (C) 仅有铅直渐近线;
- (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

2. 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的凹区间是 _____ ,

凸区间是 _____ ,

拐点为 _____ , 渐近线 _____ .

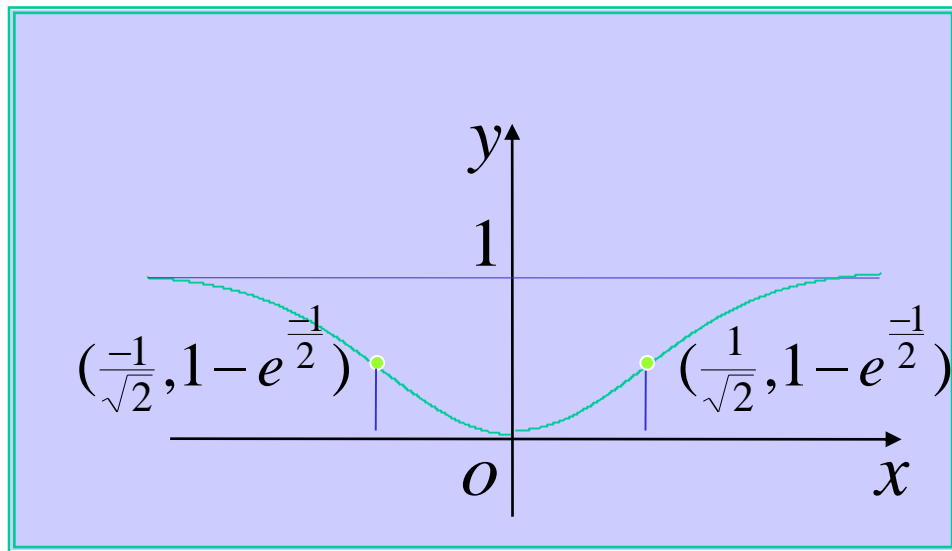
参考答案

1. **D** 提示: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \infty$

2. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, 及 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty), (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - e^{-\frac{1}{2}})$,

$y = 1$ 提示:

$$y'' = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$



四、作业

习题3-6: 2, 4, 6