# 第四部分

图论

# 前言

- 图论是近年来发展迅速而又应用广泛的一门新兴学科。
- 图论在解决网络理论，信息论，控制论，人工智能以及计算机科学等各个领域的问题时，显示出越来越大的效果。
  - Internet：结点之间信息传递的最短路径问题。
  - AI：状态空间图。
  - 数据结构：图的存储、搜索等问题。
  - 集合论：关系图，哈斯图等。
  - 交通图，地图，信息论的编码理论等。

# 第十四章 图的基本概念

14．1 图

# 图

无序积：设A,B为任意两个集合，称

$$\{\{a,b\} \mid a\in A\wedge b\in B\}$$

为A与B的无序积，记作A&B。将无序对{a,b}记作(a,b)，允许a=b。

$\forall a\in A, \forall b\in B$，$(a,b)=(b,a)$。

A&B = B&A。

# 无向图(集合定义)

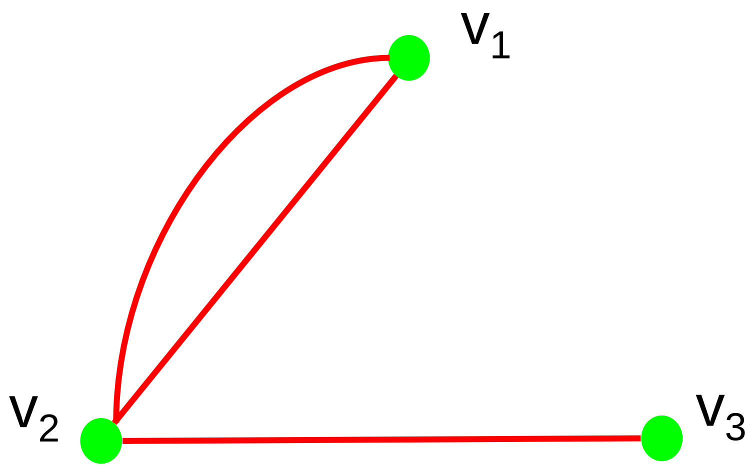
定义：一个无向图是一个有序的二元组<V,E>，记作G，其中

1. V≠∅，称为G的顶点集，V中元素称为顶点或结点；
2. E称为G的边集，它是无序积**V&V**的一个多重子集，E中元素称为无向边，简称为边。

多重集合：元素可以重复出现的集合。

# 无向图(集合定义)

例：给定无向图G=<V,E>，其中V={$v_1$,$v_2$,$v_3$}，E={($v_1$,$v_2$),($v_1$,$v_2$),($v_2$,$v_3$)}，其图形如下。



# 无向图(图形表示)

- 一个无向图可以用图形来表示：
  - 顶点：小圆圈或实心点
  - 边：　顶点间的连线（无向）

# 图论中的图与几何图形的区别

1. 顶点：表示事物、对象
2. 边：关系

如，关系图，只关心点之间的关系，而不考虑点的位置、边的形状、图的形状等。

# 有向图(集合定义)

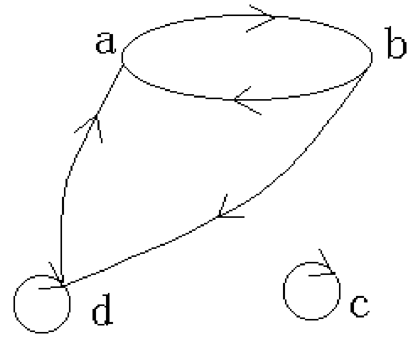
定义：一个有向图是一个有序的二元组<V,E>，记作D，其中

1. V≠∅，称为顶点集，V中元素称为顶点或结点；
2. E为边集，是笛卡儿积V×V的多重子集，其元素称为有向边，也简称边。

# 有向图(图形表示)

- 一个有向图可以用图形来表示：
  - 顶点：小圆圈或实心点
  - 边：　有向弧

例：给定有向图D=<V,E>，其中V={a,b,c,d}，E={<a,b>,<b,a>,<b,d>,<c,c>,<d,a>,<d,d>}，其图形如下。



# 常用概念与表示

1 有时用G泛指图，包括无向图和有向图。

V(G)：顶点集；　　|V(G)|：顶点数；

E(G)：边集；　　|E(G)|：边数。

2 若|V(G)|=n，则称G为**n阶图**。

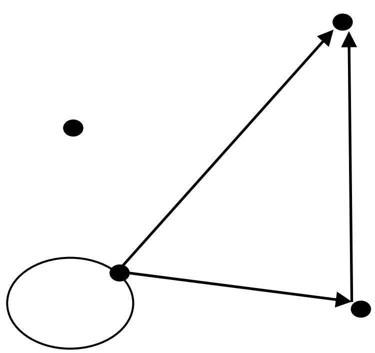
3 若V,E都是有穷集合，则称G是**有限图**。

# 常用概念与表示

4 若E(G)=∅，则称G为**零图**。

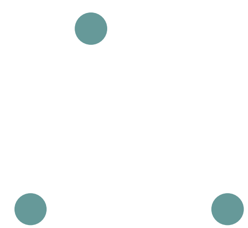
此时，又若G为m阶图，则称G为**m阶零图**，记作$N_m$。

其中称$N_1$为**平凡图**。



4阶图

|E(G)|=4



3阶零图$N_3$

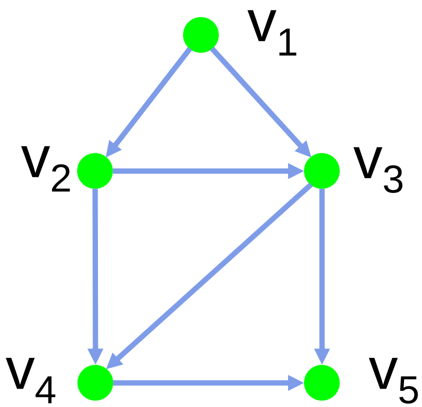
平凡图$N_1$

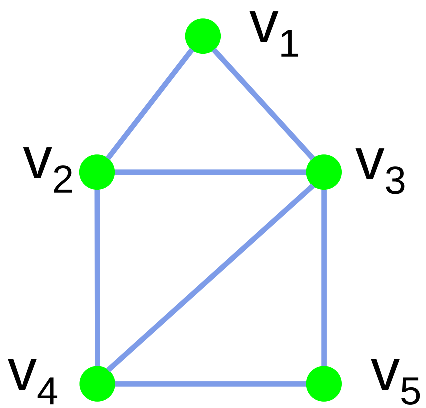
# 常用概念与表示

5 顶点集V(G)为空集的图为**空图**，记作∅。

6 顶点或边用字母标定的图，称为**标定图**，如 $e_k=<v_i,v_j>$，否则称为**非标定图**。

7 将有向图各**有向边**均改成**无向边**后得到的**无向图**，称为原有向图的**基图**。



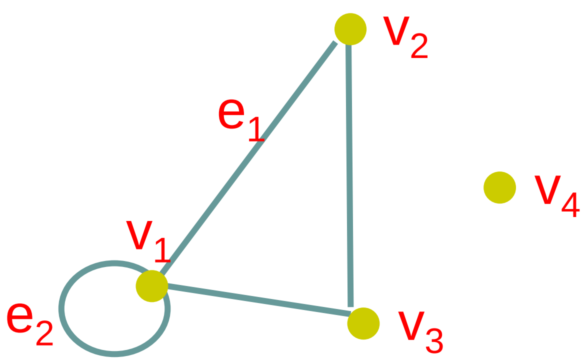
# 常用概念与表示

8 设$e_k=(v_i,v_j)\in E$为无向图$G=<V,E>$中的一条边，称$v_i,v_j$为$e_k$的**端点**，$e_k$与$v_i$(或$e_k$与$v_j$)是**彼此关联**的。

无边关联的顶点称为**孤立点**。

若$v_i=v_j$，则称此边为**环**。

$e_k$与$v_i$(或$v_j$)的**关联次数**：$\begin{cases} 1 & v_i,v_j\text{为}e_k\text{的端点}\wedge v_i\neq v_j \\ 2 & v_i,v_j\text{为}e_k\text{的端点}\wedge v_i=v_j \\ 0 & v_i,v_j\text{不是}e_k\text{的端点} \end{cases}$



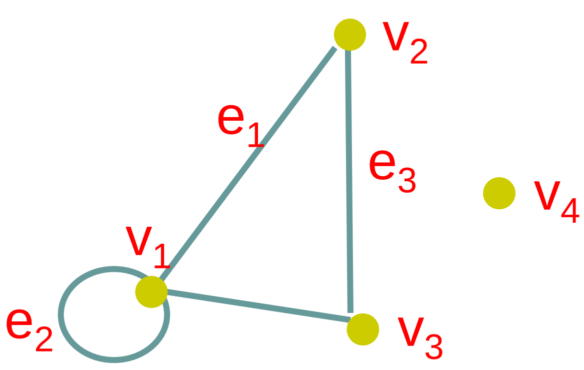

有向图中**端点**、**环**、**孤立点**的定义相同。

# 相邻

9 设无向图$G=<V,E>$，$v_i,v_j\in V$，$e_k,e_l\in E$，

①若$\exists e_t\in E$，使得$e_t=(v_i,v_j)$，则称$v_i$, $v_j$是彼此**相邻**的。

②若$e_k$与$e_l$至少有一个**公共端点**，则称$e_k,e_l$是彼此**相邻**的。

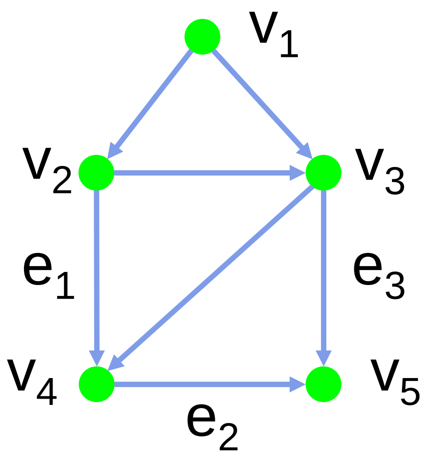


# 相邻

10 设**有向图**$D=<V,E>$，$v_i,v_j \in V$，$e_k,e_l \in E$，

①若$\exists e_t \in E$，使得$e_t=<v_i,v_j>$，则称$v_i$是$e_t$的**始点**，$v_j$是$e_t$的**终点**，$v_i$**邻接到**$v_j$，$v_j$**邻接于**$v_i$。

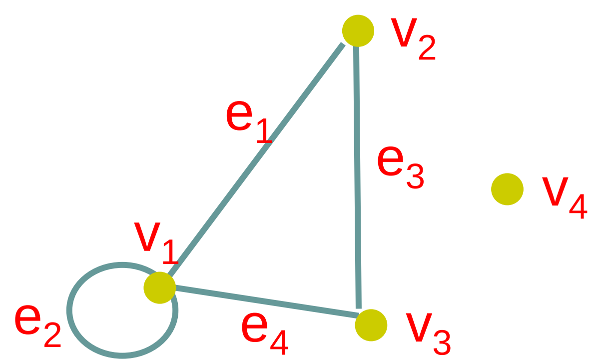
②若$e_k$的终点是$e_l$的起点，则称$e_k$与$e_l$**相邻**。



# 邻域

设无向图G=<V,E>，$\forall v \in V$，

1. v的**邻域**：
   $N_G(v)=\{u|u\in V\wedge(u,v)\in E\wedge u\neq v\}$
2. v的**闭邻域**：$\bar{N}_G(v) = N_G(v)\cup\{v\}$
3. v的**关联集**：$I_G(v)=\{e|e\in E \wedge e$与v相关联$\}$



# 邻域

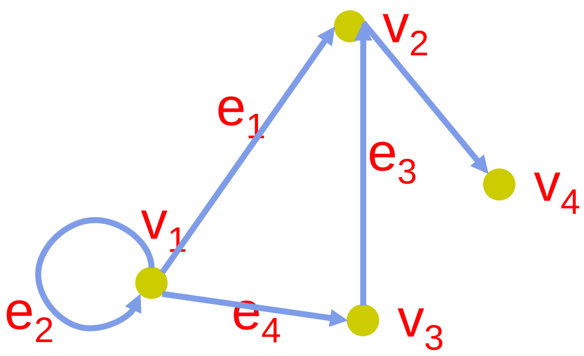
设有向图D=<V,E>，$\forall v \in V$，称

v的后记元集：$\Gamma_D^+(v)=\{u|u \in V \wedge <v,u> \in E \wedge u \neq v\}$

v的先驱元集：$\Gamma_D^-(v)=\{u|u \in V \wedge <u,v> \in E \wedge u \neq v\}$

v的邻域：$N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域：$\overline{N}_D(v) = N_D(v) \cup \{v\}$



# 作业(习题14)

4