命题符号化

例，将下列命题符号化。

1. 兔子都比乌龟跑得快。
2. 有的兔子比所有的乌龟跑得快。
3. 并不是所有兔子都比乌龟跑得快。
4. 不存在跑得同样快的两只兔子。

解：令，

$\neg\forall x\forall y((R(x)\wedge T(x))\to F(x,y))$

F(x,y)：x比y跑得快。

E(x,y)：x与y跑得同样快。

R(x)：x是兔子。T(x)：x是乌龟。

命题符号化

则上述命题分别符号化为：(不唯一)

1. $\forall x \forall y((R(x) \wedge T(y)) \rightarrow F(x,y))$

2. $\exists x(R(x) \wedge \forall y(T(y) \rightarrow F(x,y)))$

3. $\neg \forall x \forall y((R(x) \wedge T(y)) \rightarrow F(x,y))$

4. $\neg \exists x \exists y(R(x) \wedge R(y) \wedge E(x,y)))$

4．2 一阶逻辑公式及解释

一阶语言$\mathscr{F}$

命题逻辑自然推理系统(p47)：

语言＋推理规则

在系统中进行等值演算和推理。

一阶语言：用于一阶逻辑的形式语言。

一阶语言$\mathscr{F}$

定义 字母表：

1)个体常量： $a,b,c,\ldots,a_i, b_i, c_i,\ldots,i\geq 1$;

2)个体变量： $x, y, z,\ldots,x_i, y_i, z_i,\ldots, i\geq 1$;

3)函数符号： $f, g, h,\ldots,f_i, g_i, h_i,\ldots, i\geq 1$;

4)谓词符号： $F, G, H,\ldots,F_i, G_i, H_i,\ldots, i\geq 1$;

5)量词符号： $\forall,\exists$;

6)联结词符号： $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$;

7)括号与逗号： “(”, “)”, “, ”

例，符号化已知命题：

"对于任意实数x，$x^2-1=(x+1)(x-1)$"

令谓词$R(x)$：x是实数

不用函数：

令谓词$F(x)$：$x^2-1 = (x+1)(x-1)$；

命题符号化：$\forall x(R(x)\rightarrow F(x))$

利用函数：

令函数：$f(x)=x^2-1$, $g(x)=(x+1)(x-1)$

谓词$E(x, y)$：$x = y$

命题符号化：$\forall x(R(x)\rightarrow E(f(x),g(x)))$

一阶语言$\mathscr{F}$

定义 项的递归定义：

1. 个体常量和个体变量是项；
2. 若$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$是任意n元函数，$t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意项，则$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$是项；
3. 只有有限次地使用1,2生成的符号串才是项。

问：$f(x,g(u,v),y,z)$是项吗？

原子公式

定义：设$R(x_1,x_2,...,x_n)$是任意n元谓词，$t_1, t_2, ..., t_n$是任意n个项，则称$R(t_1,t_2,...,t_n)$是原子公式。

如，$F(x)$，$H(x,f(y,z))$，$G(x,a)$等都是原子公式。

合式公式

定义：合式公式（谓词公式/公式）

1. 原子公式是合式公式；
2. 若A是合式公式,则$(\neg A)$也是合式公式;
3. 若A,B是合式公式， 则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式；
4. 若A是合式公式，x是个体变量则$(\forall xA)$, $(\exists xA)$也是合式公式；
5. 只有有限次地应用1~4构成的符号串才是合式公式。

合式公式

说明：定义中的A,B代表任意公式。

例：

1. $\neg P$
2. $\neg P(x,y) \vee Q(y)$
3. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$
4. $\forall x(x+1=0 \rightarrow \exists y(x+y+1<0))$

等等都是公式。

辖域、约束出现和自由出现

定义：公式$\forall x A$，$\exists x A$中的x称为量词的指导变量；

A为相应量词的辖域；

在辖域中，x的所有出现都称为约束出现；

A中不是约束出现的其它变量均称为自由出现。

辖域、约束出现和自由出现

例，指出下列各公式中的指导变量，量词辖域及变量的自由出现和约束出现。

1) $\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y,z)) \land S(x,z)$

2) $\forall x(x+y+1=0 \rightarrow \exists y(x+y+1<0))$

变量的换名和代替

公式中，有的变量既有自由出现，又有约束出现。

避免混淆：

1) 约束出现换名

$$\Delta x A(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \Delta y A(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

2) 自由出现代替

$$A(x, y, z) \Leftrightarrow A(u, y, z)$$

最好替换成公式中没有出现的变量。

变量的换名和代替

例：将公式$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x,y))\wedge R(x,y)$中的约束出现换名，判断哪一个换名是正确的。

1) $\forall y(P(y)\rightarrow Q(y,y))\wedge R(x,y)$

2) $\forall z(P(z)\rightarrow Q(x,y))\wedge R(x,y)$

3) $\forall z(P(z)\rightarrow Q(z,y))\wedge R(x,y)$

3) 正确

闭式

定义：设A是任意公式，若A中不含自由出现的个体变量，则称A为封闭的合式公式，简称闭式。

例，$\forall x\forall y((R(x)\wedge T(y))\rightarrow F(x,y))$

$\neg\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y)\wedge E(x,y)))$等是闭式。

$\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists yQ(x,y,z))\wedge S(x,z)$

作业

习题四(P65)

- 5，6

- 习题四：

9

11(2),(5),(6)