

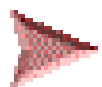
第七节、定积分的元素法



一、元素法



二、什么问题可以用定积分解决



三、如何应用定积分解决问题

计算曲边梯形面积的具体步骤:

(1) 分割

用任意一组分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

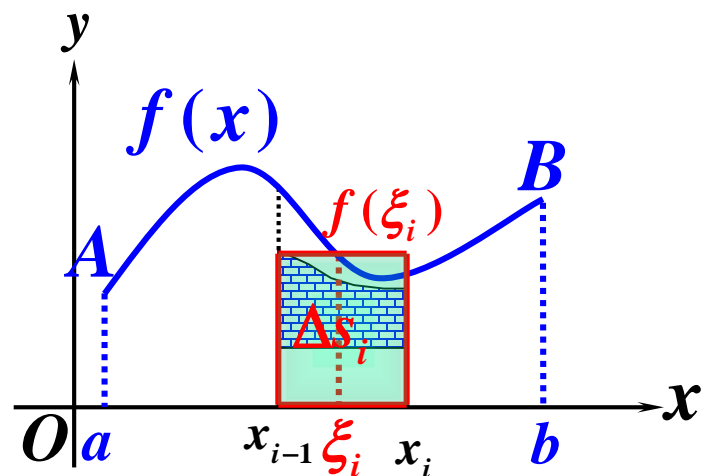
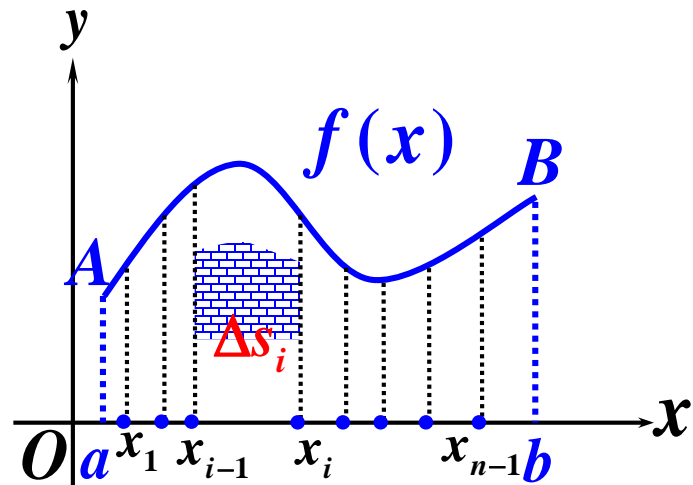
$$S = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i$$

(2) 近似求和

$$\Delta s_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i$$

作和 $s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

则 $s \approx s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$



(3)求极限

记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 则当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

所以曲边梯形 $AabB$ 的面积: $s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

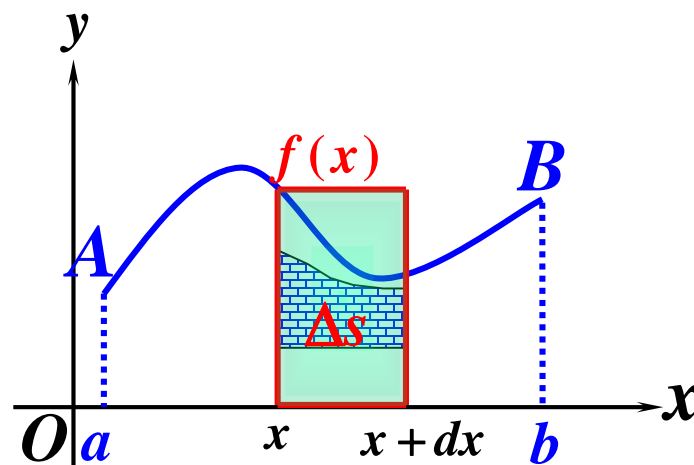
说明: 关键是第二步

$$\Delta s \approx f(x) dx$$

$f(x) dx$ 称为面积元素

记做: $ds = f(x) dx$

这种分析方法称为元素法 (或微元分析法)



二、什么问题可以用定积分解决

- 1) 所求量 U 是与区间 $[a, b]$ 上的某分布 $f(x)$ 有关的一个整体量；
- 2) U 对区间 $[a, b]$ 具有可加性，即可通过
“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

表示为
$$U = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分定义
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

三、如何应用定积分解决问题

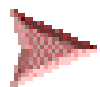
第一步 利用“化整为零，以常代变” 求出局部量的近似值 —— 微分表达式

$$dU = f(x)dx$$

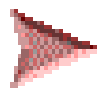
第二步 利用“积零为整，无限累加” 求出整体量的精确值 —— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)dx$$

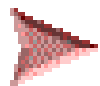
第七节、定积分在几何上的应用



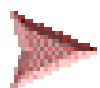
一、平面图形的面积



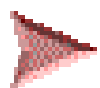
二、体积



三、平面曲线的弧长



四、小结、思考题



五、作业

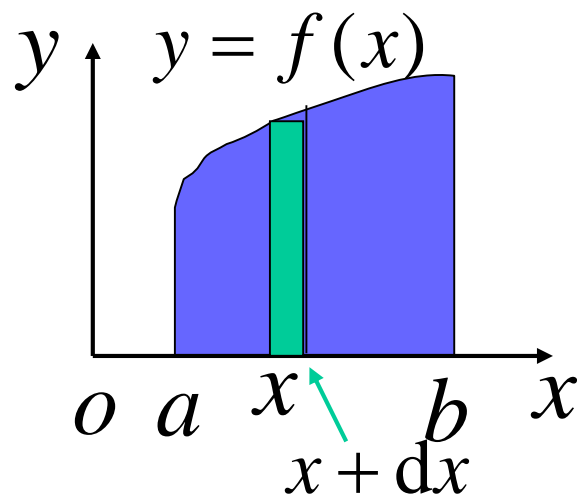
一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

设曲线 $y = f(x) (\geq 0)$ 与直线 $x = a, x = b$ ($a < b$) 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A , 则

$$dA = f(x)dx$$

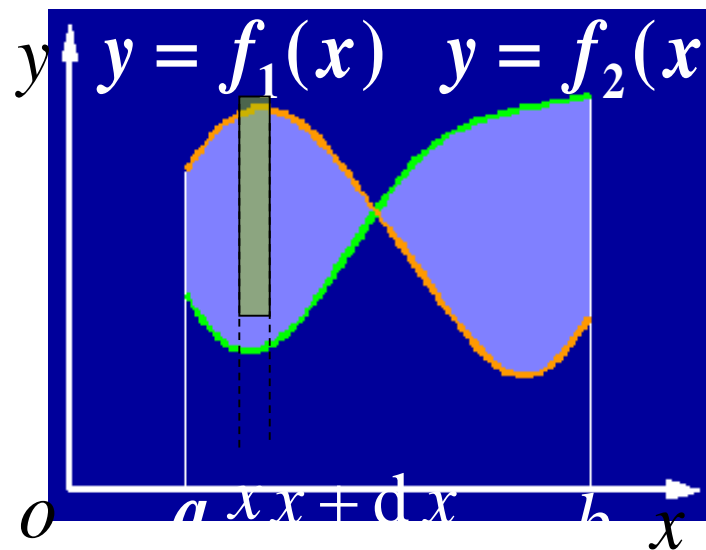
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



右图所示图形面积为

$$dA = |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

$$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x$, $y = x^2$ 在第一象限所围所围图形的面积.

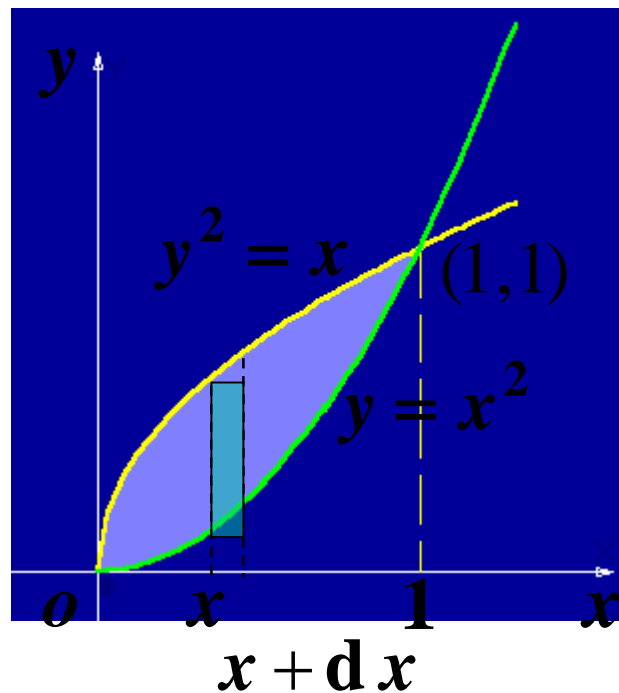
解: 由
$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

得交点 $(0, 0), (1, 1)$

$$dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$\therefore A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



例 2 计算由曲线 $y = x^3 - 6x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

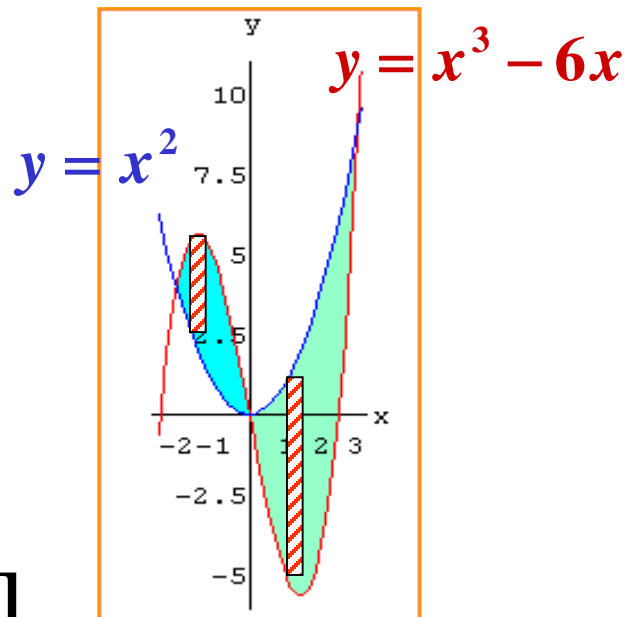
$$\begin{cases} y = x^3 - 6x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,0), (-2,4), (3,9).$$

选 x 为积分变量 $x \in [-2, 3]$

$$(1) \quad x \in [-2, 0], \quad dA_1 = (x^3 - 6x - x^2)dx$$

$$(2) \quad x \in [0, 3], \quad dA_2 = (x^2 - x^3 + 6x)dx$$



于是所求面积 $A = A_1 + A_2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 (x^3 - 6x - x^2) dx + \int_0^3 (x^2 - x^3 + 6x) dx \\ &= \frac{253}{12}. \end{aligned}$$

说明：注意各积分区间上被积函数的形式。

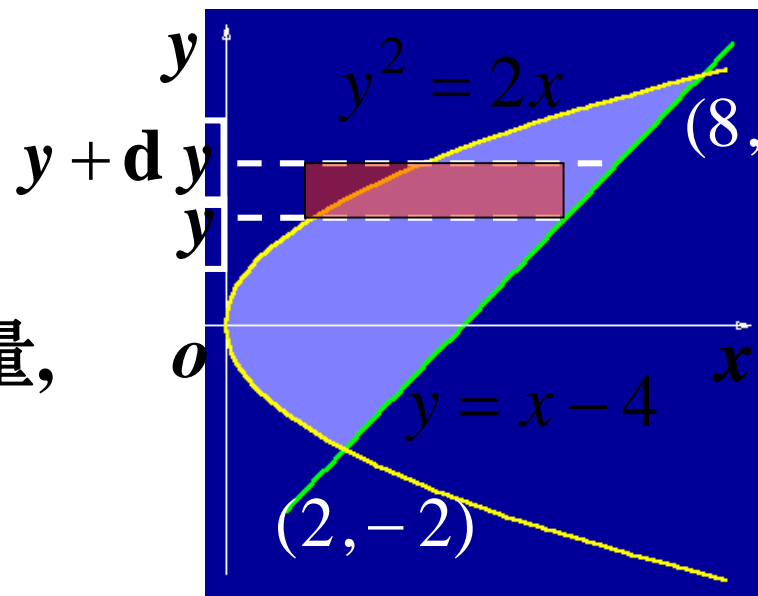
问题：积分变量只能选 x 吗？

例3. 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围图形的面积.

解: 由 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点
 $(2, -2), (8, 4)$

为简便计算, 选取 y 作积分变量,
则有

$$\begin{aligned} \therefore A &= \int_{-2}^4 (y + 4 - \frac{1}{2}y^2) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^4 = 18 \end{aligned}$$



例4. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形的面积.

解: 利用对称性, 有 $dA = y dx$

$$A = 4 \int_0^a y dx$$

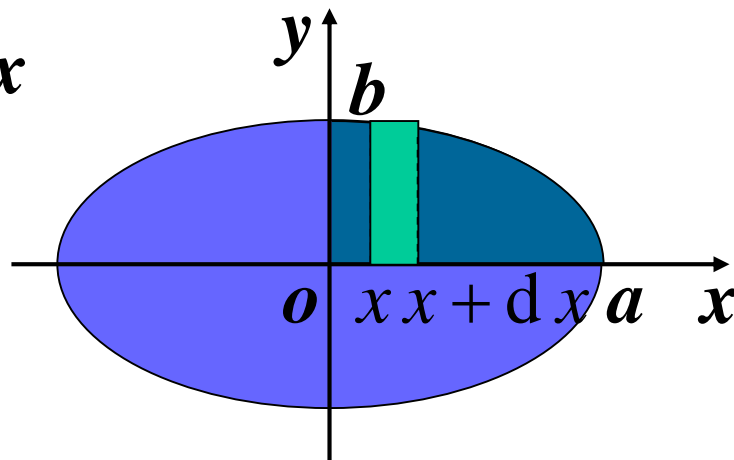
利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab \end{aligned}$$

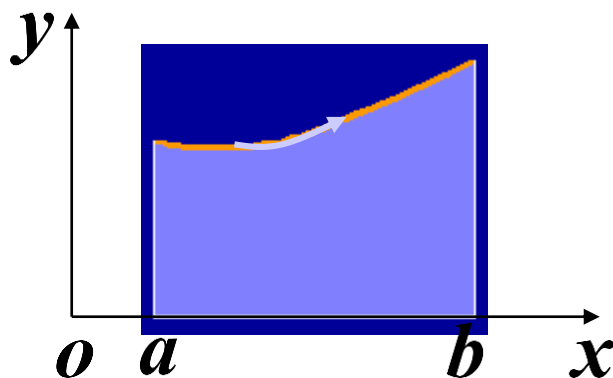
当 $a = b$ 时得圆面积公式



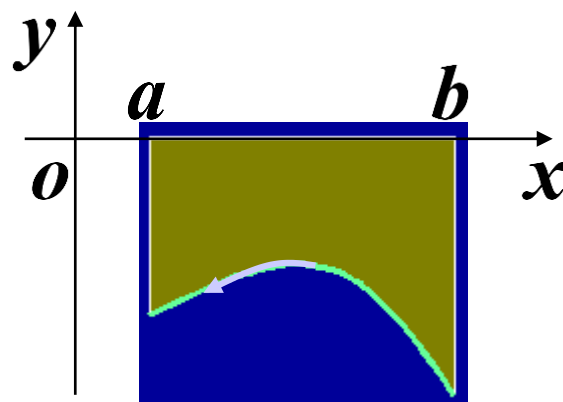
一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1, t_2



(t_1 对应 $x = a$)



(t_1 对应 $x = b$)

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$

例5. 求由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积 .

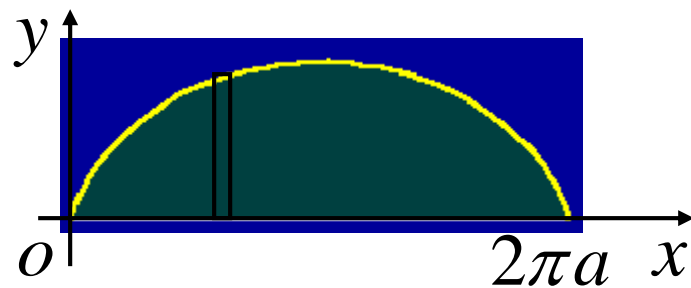
解: $A = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2} dt$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 u du \quad (\text{令 } u = \frac{t}{2})$$

$$= 3\pi a^2$$



2.极坐标情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\theta) \geq 0$, 求由曲线 $r = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积.

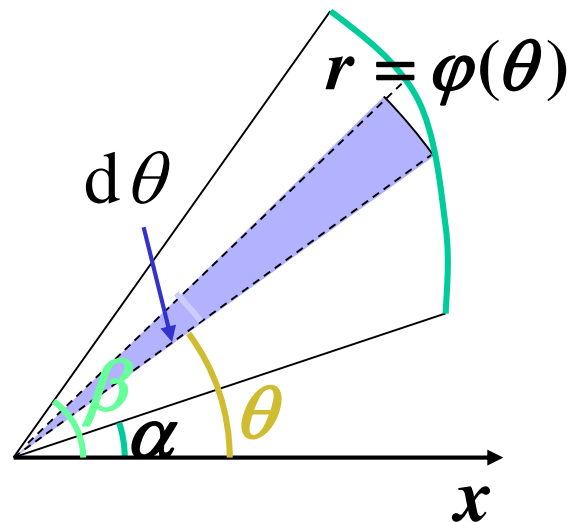
在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$dA = \frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

所求曲边扇形的面积为

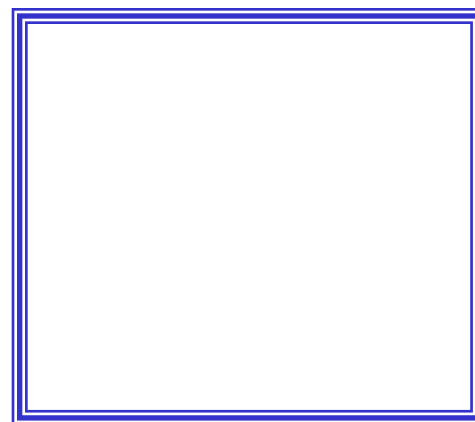
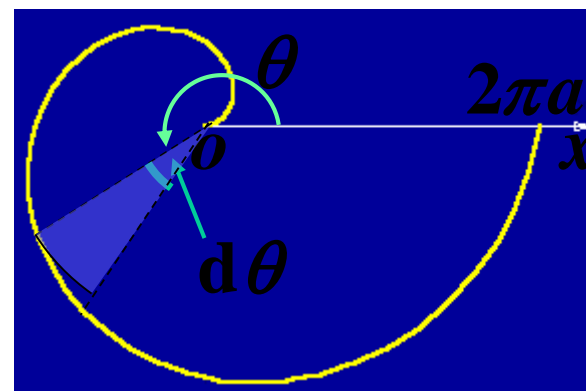
$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) d\theta$$



例6. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta$ ($a > 0$) 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积.

解:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{3} \theta^3 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \end{aligned}$$



点击图片任意处
播放开始或暂停

例7. 计算心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ ($a > 0$) 所围图形的面积.

解: $A = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta$

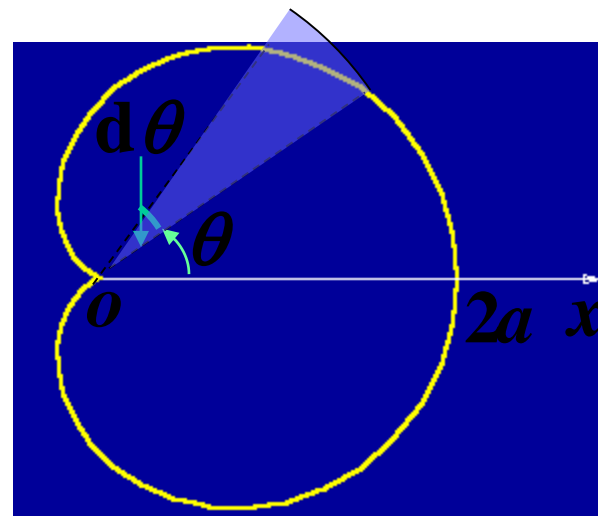
$$= a^2 \int_0^{\pi} 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta$$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

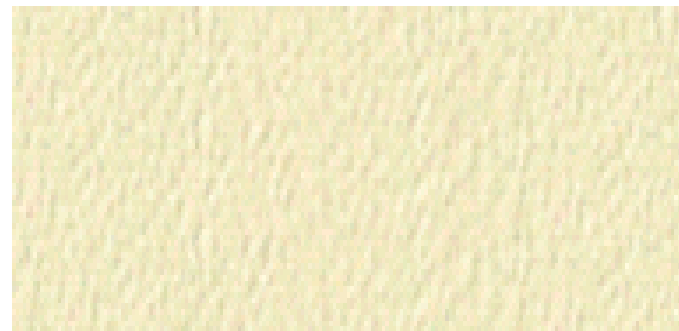
$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt$$

$$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi a^2$$

(利用对称性)



例8. 计算心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 与圆 $r = a$ 所围图形的面积 .



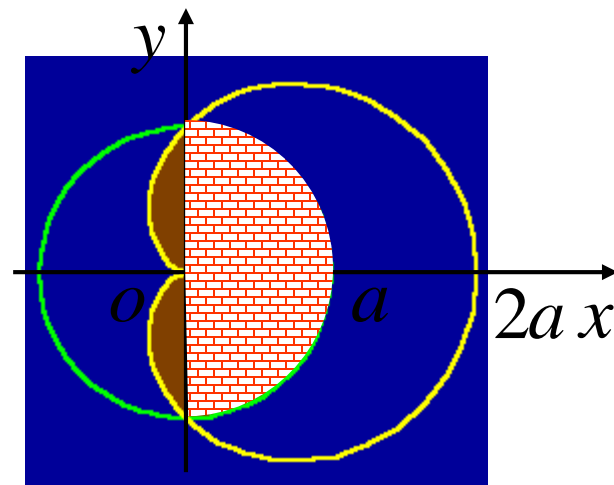
解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2} \pi a^2 + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 \underline{(1 + \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \pi a^2 + a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \pi a^2 + a^2 \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right)$$

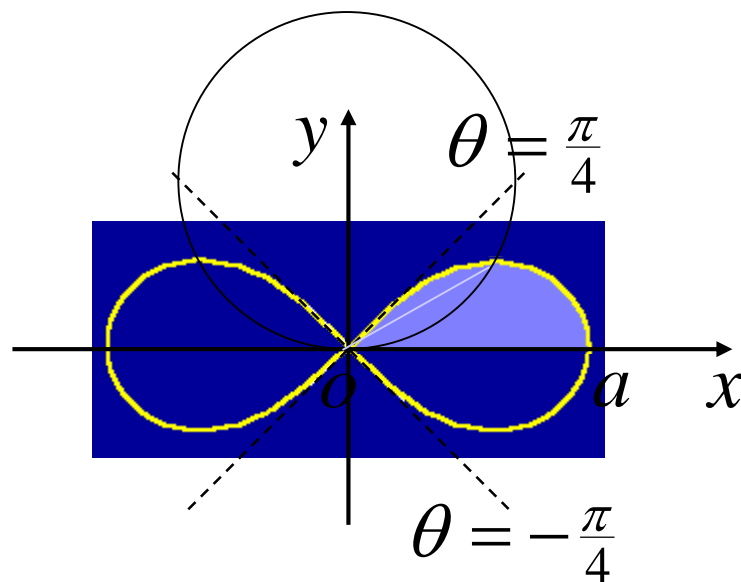
$$= \frac{5}{4} \pi a^2 - 2a^2$$



例9. 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性 , 则所求面积为

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d(2\theta) \\ &= a^2 [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \end{aligned}$$



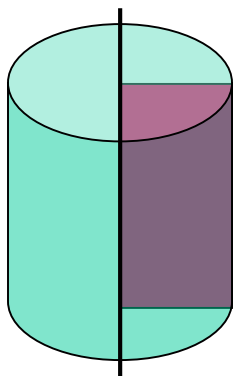
思考: 用定积分表示该双纽线与圆 $r = a\sqrt{2}\sin\theta$ 所围公共部分的面积 .

答案: $A = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2 \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \, d\theta \right]$

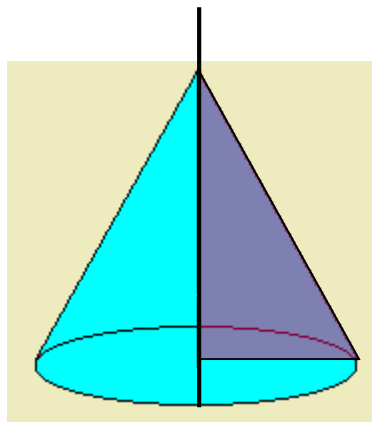
二、体积

1. 旋转体的体积

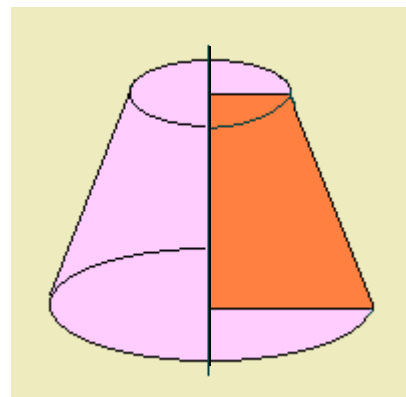
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体。这直线叫做**旋转轴**。



圆柱



圆锥



圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线
 $y = f(x)$ 、直线 $x = a$ 、 $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体，体积为多少？

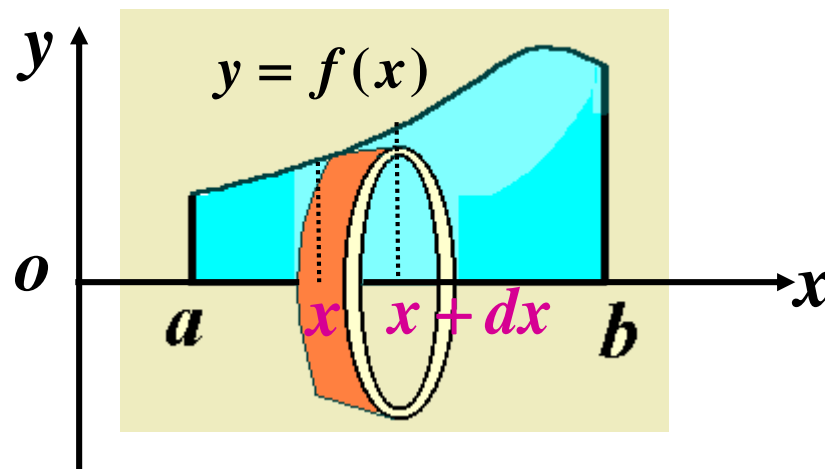
取积分变量为 x ，
 $x \in [a, b]$

在 $[a, b]$ 上任取小区间 $[x, x + dx]$ ，

取以 dx 为底的窄边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积为体积元素， $dV = \pi[f(x)]^2 dx$

旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$



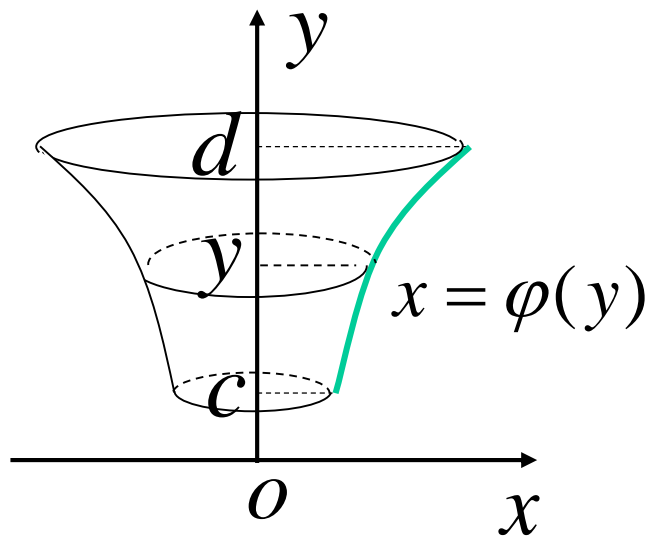
当考虑连续曲线段

$$x = \varphi(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时,

有

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$



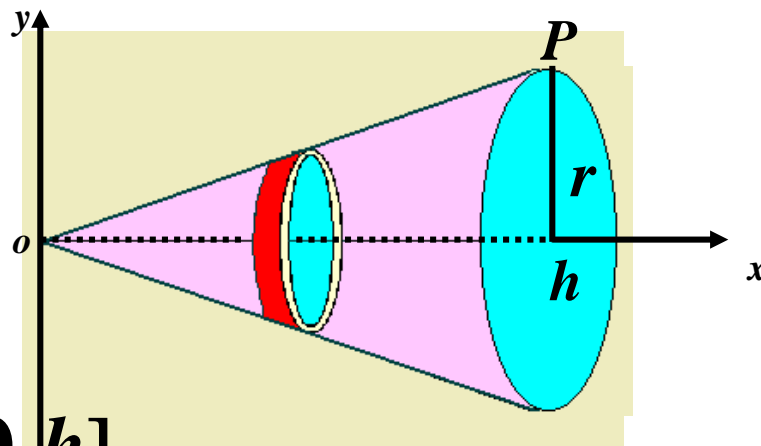
例 10 连接坐标原点 O 及点 $P(h, r)$ 的直线、直线 $x = h$ 及 x 轴围成一个直角三角形. 将它绕 x 轴旋转构成一个底半径为 r 、高为 h 的圆锥体, 计算圆锥体的体积.

解 直线 OP 方程为

$$y = \frac{r}{h}x$$

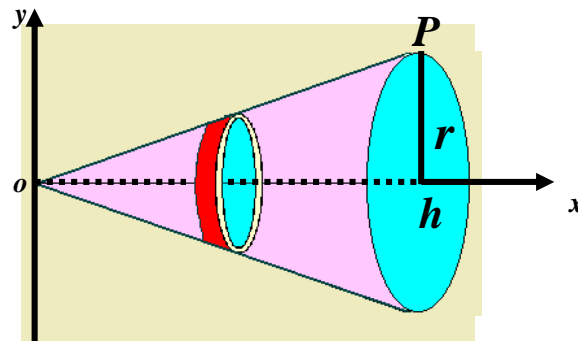
取积分变量为 $x, x \in [0, h]$

在 $[0, h]$ 上任取小区间 $[x, x + dx]$,



以 dx 为底的窄边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积为

$$dV = \pi \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx$$



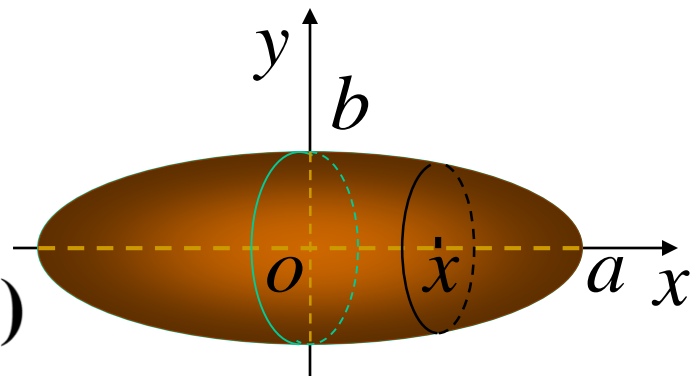
圆锥体的体积

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi h r^2}{3}.$$

例11. 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.

解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$



则 $V = 2 \int_0^a \pi y^2 dx$

(利用对称性)

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

方法2 利用椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

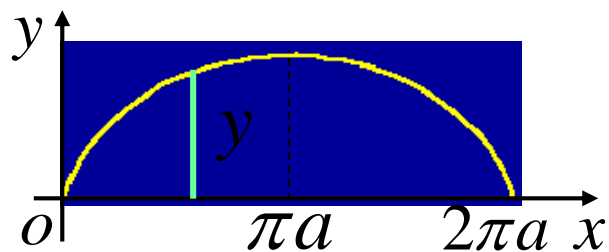
$$\begin{aligned} \text{则 } V &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^3 t dt \\ &= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{4}{3} \pi ab^2 \end{aligned}$$

特别当 $b = a$ 时, 就得半径为 a 的球体的体积 $\frac{4}{3} \pi a^3$.

例12. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$ 的一拱与 $y=0$

所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的立体体积.

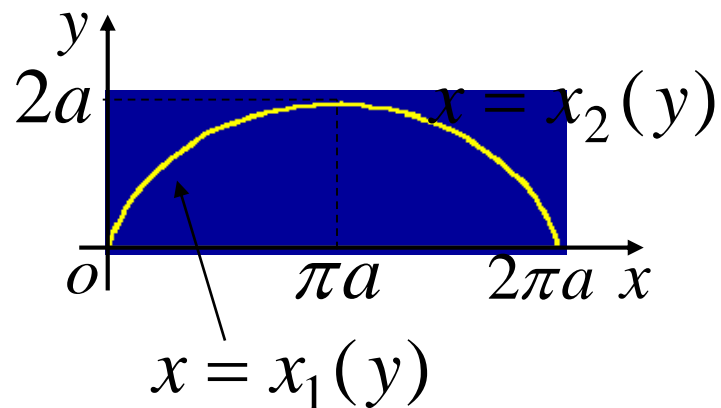
解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



利用对称性

$$\begin{aligned}
 V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt \\
 &= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt \quad (\text{令 } u = \frac{t}{2}) \\
 &= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u du = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= 5\pi^2 a^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$

注意上下限！

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt$$

$$= 6\pi^3 a^3 \quad \text{注}$$

2. 已知平行截面面积函数的立体体积

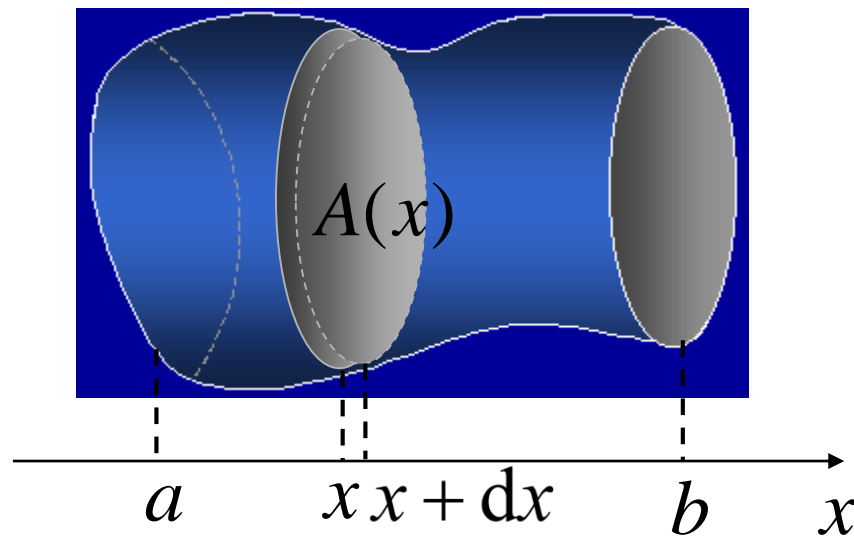
如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算。

设所给立体垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$ ， $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则对应于小区间 $[x, x + dx]$ 的体积元素为

$$dV = A(x) dx$$

因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx$$



例13. 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成 α 角, 计算该平面截圆柱体所得立体体积.

解: 如图所示取坐标系, 则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

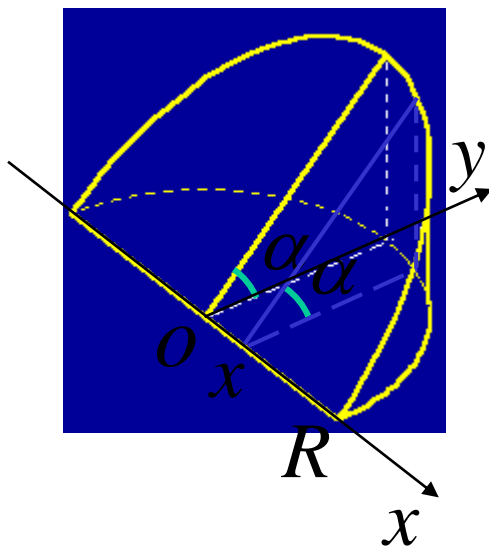
垂直于 x 轴的截面是直角三角形, 其面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \quad (-R \leq x \leq R)$$

利用对称性

$$V = 2 \int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \, dx$$

$$= \tan\alpha \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^R = \frac{2}{3} R^3 \tan\alpha$$



思考：可否选择 y 作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

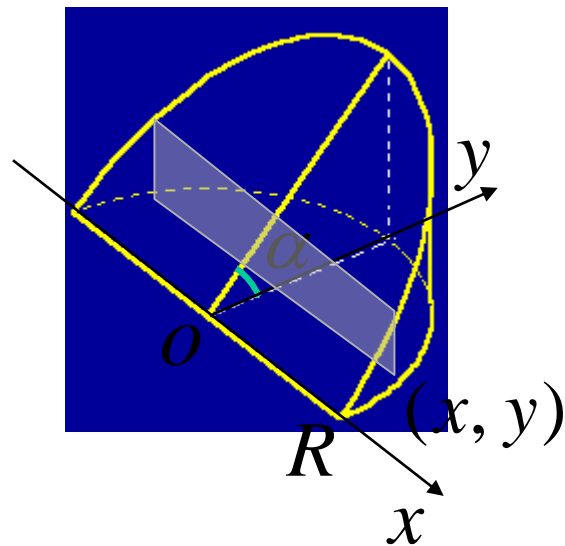
如何用定积分表示体积？

提示：

$$A(y) = 2x \cdot y \tan \alpha$$

$$= 2 \tan \alpha \cdot y \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$V = 2 \tan \alpha \cdot \int_0^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy$$



例14. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围立体(椭球体)的体积.

解: 垂直 x 轴的截面是椭圆

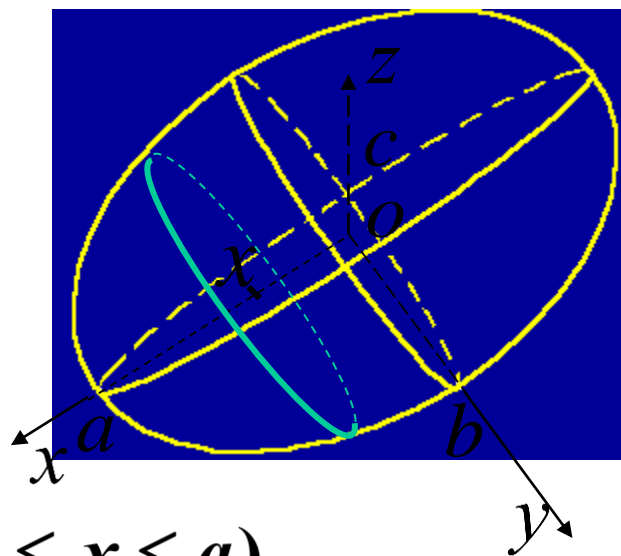
$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})} = 1$$

它的面积为 $A(x) = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$ ($-a \leq x \leq a$)

因此椭球体体积为

$$V = 2 \int_0^a \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = 2\pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi abc$$

特别当 $a = b = c$ 时就是球体体积.

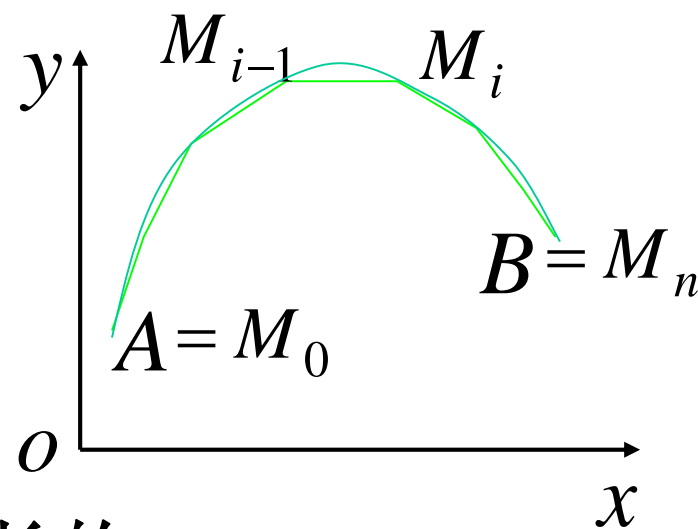


三、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 \widehat{AB} 上任意作内接折线, 当折线段的最大边长 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 折线的长度趋向于一个确定的极限, 则称此极限为曲线弧 \widehat{AB} 的弧长, 即

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$$

并称此曲线弧为可求长的.



定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的.

(证明略)

(1) 曲线弧由直角坐标方程给出:

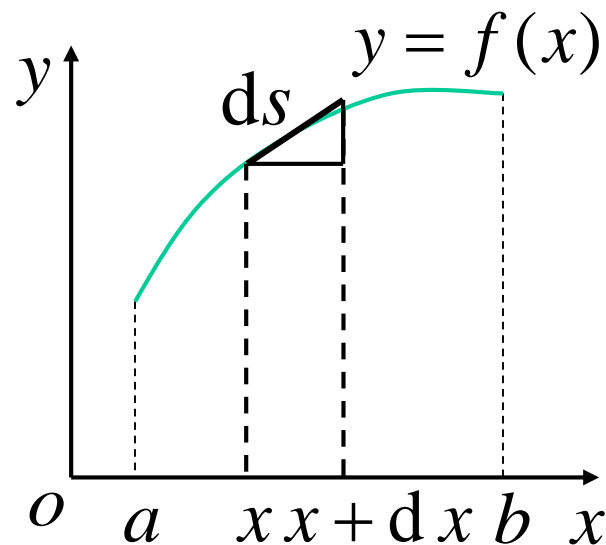
$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

弧长元素(弧微分):

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{1 + y'^2} dx \end{aligned}$$

因此所求弧长

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \end{aligned}$$



(2) 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

弧长元素(弧微分):

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \end{aligned}$$

因此所求弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, 则得

弧长元素(弧微分):

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta \\ &= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \quad (\text{自己验证}) \end{aligned}$$

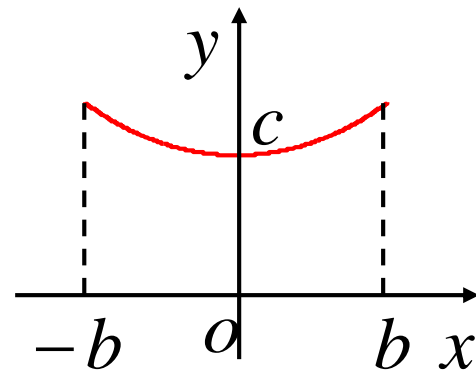
因此所求弧长:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

例15. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量, 下垂成悬链线. 悬链线方程为

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c} \quad (-b \leq x \leq b)$$

求这一段弧长.



解: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$

$$= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{c}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx$$

$$\begin{aligned} \therefore s &= 2 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx = 2c \left[\operatorname{sh} \frac{x}{c} \right]_0^b \\ &= 2c \operatorname{sh} \frac{b}{c} \end{aligned}$$

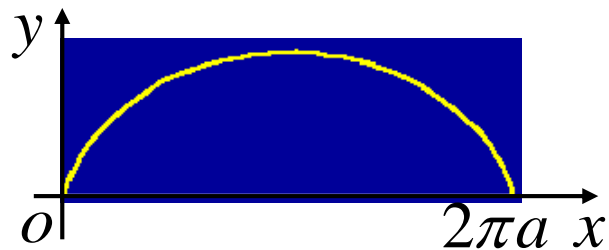
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

例16. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$ 一拱 $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长.



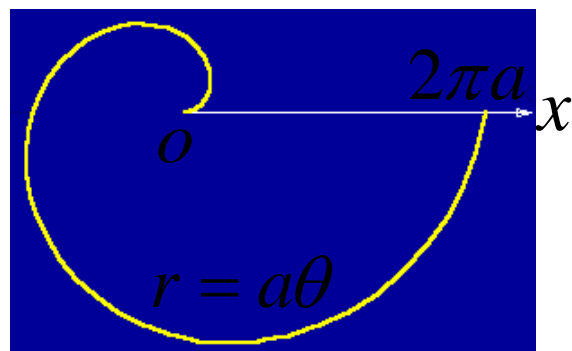
$$\begin{aligned} \text{解: } ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= a\sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= 2a \sin \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

$$\therefore s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a$$

例17. 求阿基米德螺线 $r = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

解:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \\ &= \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta \\ &= a\sqrt{1 + \theta^2} d\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore s &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \\ &= a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right| \right]_0^{2\pi} \\ &= a\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \end{aligned}$$

四、小结与思考题

小结:

1. 平面图形的面积

边界方程

$$\begin{cases} \text{直角坐标方程} \\ \text{参数方程 } A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt \\ \text{极坐标方程 } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) d\theta \end{cases}$$

上下限按顺时针方向确定

2. 平面曲线的弧长

弧微分: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小

曲线方程 { 直角坐标方程
参数方程

极坐标方程 $ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$

3. 体积

旋转体的体积:

$$y = y(x) \begin{cases} \text{绕 } x \text{ 轴} : A(x) = \pi y^2 \\ \text{绕 } y \text{ 轴} : A(x) = 2\pi x y \end{cases} \quad (\text{柱壳法})$$

已知平行截面面积函数的立体体积:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

思考与练习

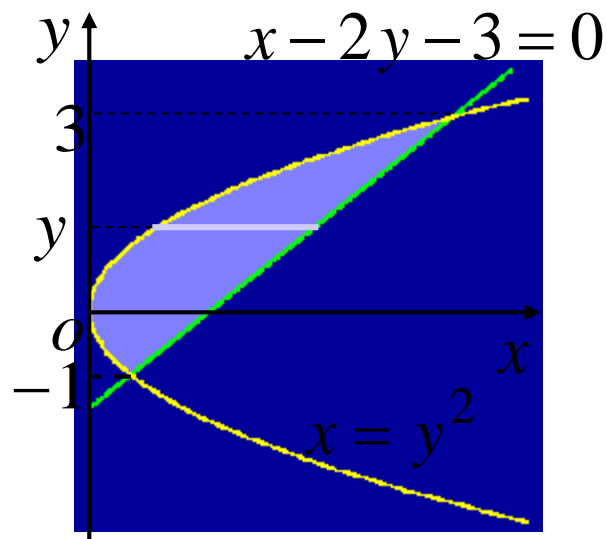
1. 用定积分表示图中阴影部分的面积 A 及边界长 s .

提示: 交点为 $(1, -1)$, $(9, 3)$, 以 x 为积分变量, 则要分两段积分, 故以 y 为积分变量.

$$A = \int_{-1}^3 [(2y + 3) - y^2] dy = \frac{32}{3}$$

$$s = \overset{\text{弧线段部分}}{\int_{-1}^3 \sqrt{1 + 4y^2} dy} + \overset{\text{直线段部分}}{\int_{-1}^3 \sqrt{1 + 2^2} dy}$$

$$= 3\sqrt{37} + 5\sqrt{5} + \frac{1}{4} [\ln(6 + \sqrt{37}) + \ln(2 + \sqrt{5})]$$



2. 试用定积分求圆 $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ ($R < b$) 绕 x 轴旋转而成的环体体积 V 及表面积 S .

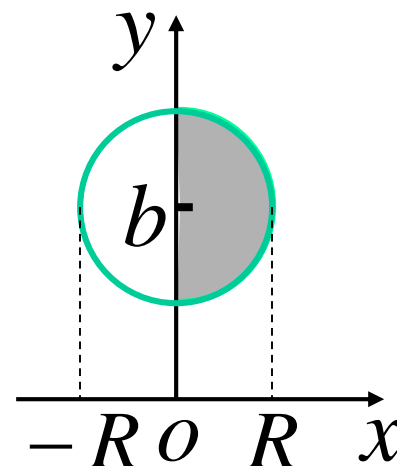
提示: $\frac{\text{上}}{\text{下}}$ 半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$

$$y' = \mp \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

求体积:

方法1 利用对称性

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^R \pi \left[(b + \sqrt{R^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{R^2 - x^2})^2 \right] dx \\ &= 2\pi^2 R^2 b \end{aligned}$$

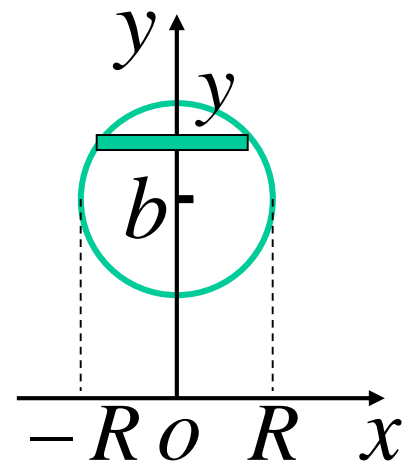


上
下 半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

方法2 用柱壳法

$$dV = 2\pi y \cdot 2x \cdot dy$$

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{b-R}^{b+R} y \sqrt{R^2 - (y-b)^2} dy \\ &= 2\pi^2 R^2 b \end{aligned}$$

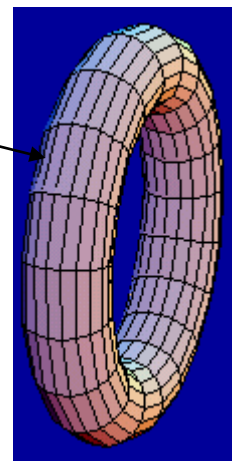


说明: 上式可变形为

$$dV = \pi R^2 \cdot b d\theta$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} \pi R^2 \cdot b d\theta$$

此式反映了环体微元的另一种取法(如图所示).



上
下 半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

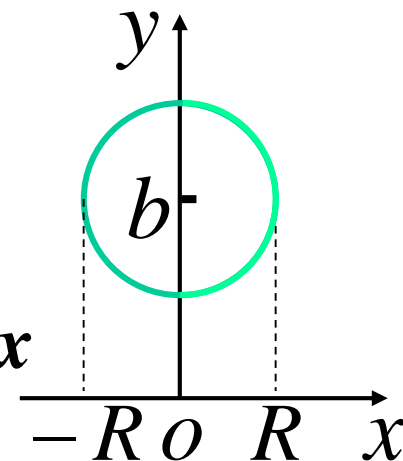
求侧面积：

$$S = 2 \int_0^R 2\pi(b + \sqrt{R^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx$$

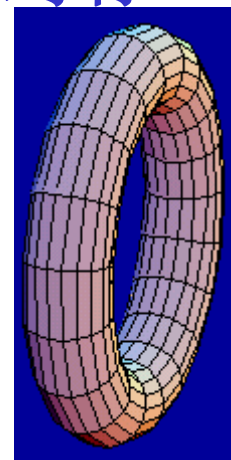
$$+ 2 \int_0^R 2\pi(b - \sqrt{R^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx$$

二者 y'^2 相同

$$= 8\pi b \int_0^R \sqrt{1 + y'^2} dx = 4\pi^2 b R$$



利用对称
性



上式也可写成 $S = 2\pi R \cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} 2\pi R \cdot b d\theta$

它也反映了环面微元的另一种取法.

五、作业

4-7: 1 (单) , 3 (单) , 6, 8 (单)