

PDE SIR

2024 年 3 月 3 日

摘要

老师，模型的建立已经完成，但是在具体实现的时候遇到了一些问题（见章节2）。我想到了三种解决方案，想请教您哪种方案更好，还有其他方案吗？如果要实施的话，从哪个方案开始成功的可能性最大？

表 0.1: 总结

方案	优点	不足
一	1. 可以得到每个年龄段对每个年龄段的传染率 $\lambda(a, a', t)$ 2. 保持模型结构不变	1. 增大计算量 2. 现有数据量可能不足
二	1. 大幅减少计算量	1. 只能得到每个年龄段的易感率 $\lambda(a, t)$
三	1. 可以得到每个年龄段对每个年龄段的传染率 $\lambda(a, a', t)$ 2. 在较少数据下表现更好 3. 训练好的 $NN_2(a, t)$ 可以在其他数据集直接使用	1. 增大计算量 2. 如何生成预训练的仿真数据 3. 是否具有可行性

1 模型建立

假设：

- 由于流行时间较短、数据获取难度较大， $p(a), \delta(a), \gamma(a)$ 只与年龄有关，不随时间变化
- 存在母婴传播，但不存在先天免疫

可能存在的问题：

- 没有考虑病死率（所有群体死亡率一致）
- 没有考虑人口迁入迁出

方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} S(a, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(a, t) = -(d(a, t) + (v(a, t) + \theta(a, t))p(a))S(a, t) - S(a, t) \int_0^A \lambda(a, a', t) I(a', t) da' + \delta(a) R(a, t) \\ \frac{\partial}{\partial a} I(a, t) + \frac{\partial}{\partial t} I(a, t) = S(a, t) \int_0^A \lambda(a, a', t) I(a', t) da' - (d(a, t) + \gamma(a)) I(a, t) \\ \frac{\partial}{\partial a} R(a, t) + \frac{\partial}{\partial t} R(a, t) = (v(a, t) + \theta(a, t))p(a)S(a, t) + \gamma(a) I(a, t) - (d(a, t) + \delta(a)) R(a, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

表 1.1: 符号说明

符号	含义
a	年龄
$d(a, t)$	死亡率
$v(a, t)$	疫苗接种率
$\lambda(a, a', t)$	a' 对 a 的传染率
$p(a)$	疫苗保护率
$\theta(a, t)$	补充接种率
$\delta(a)$	免疫丧失率
$B(t)$	出生人口
$M(t)$	母婴传播数
A	人群最大寿命
$\gamma(a)$	恢复率

边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0, t) = B(t) - M(t) \\ I(0, t) = M(t) \\ R(0, t) = 0 \\ S(a, 0) = S_0(a) \\ I(a, 0) = I_0(a) \\ R(a, 0) = R_0(a) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

2 模型求解

2.1 存在的问题

在之前 ode 的 SEIR 模型 [1] 复现中存在无法同时优化两个网络 (如图2.1), 而导致求解困难, 达不到理想效果的问题。当时的解决方案是把两个网络合并为一个网络。即将

$$\begin{aligned} NN_1(t) &= \lambda \\ NN_2(\lambda, t) &= X \end{aligned} \quad (2.1)$$

改为

$$X, \lambda = NN(t) \quad (2.2)$$

其中 X 为各仓室人口数量, λ 为传染率, 两个网络输入变量相同都是 t , 可以合并。而在 PDE 模型(1.1)中若采用两个网络则

$$\begin{aligned} NN_1(a, a', t) &= \lambda(a, a', t) \\ NN_2(a, t, \lambda) &= X \end{aligned} \quad (2.3)$$

两个网络的输入变量不同, 由以下解决方案。

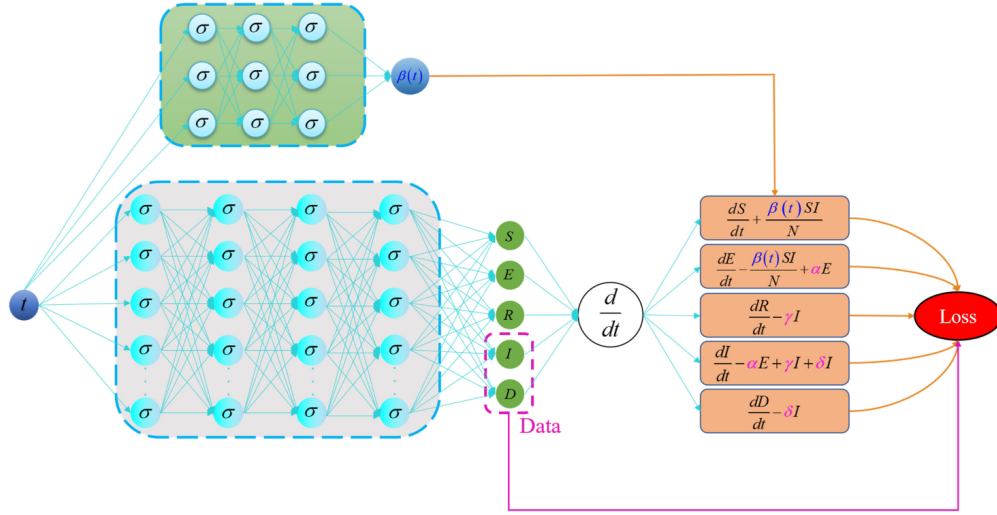


图 2.1: ODE 情况下理论上的网络结构

2.2 解决方案

- 一. 将(2.3)中的 $NN_2(a, t, \lambda)$ 增添一个输入变量 a' 变为 $NN_2(a, a', t, \lambda)$
- 二. 化简(2.3)中的 $\int_0^A \lambda(a, a', t) I(a', t) da'$ 部分, 由积分中值定理

$$\int_0^A \lambda(a, a', t) I(a', t) da' = \lambda(a, \epsilon, t) \int_0^A I(a', t) da', \epsilon \in (0, A) \quad (2.4)$$

每一对 a, t 对应一个 ϵ , 存在 $\hat{\lambda}(a, t)$

$$\hat{\lambda}(a, t) = \lambda(a, \epsilon(a, t), t) \quad (2.5)$$

可以将(2.3)改为

$$\begin{aligned} NN_1(a, t) &= \hat{\lambda}(a, t) \\ NN_2(a, t, \lambda) &= X \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 $\hat{\lambda}(a, t)$ 的实际含义为年龄为 a 的易感群体在 t 时刻的易感程度。

- 三. 分布训练两个模型 (预训练 + LoRA 微调)

在之前 ode 的 SEIR 模型 [1] 中, 损失由数据损失和 ODE 损失两部分组成:

$$Loss = Loss_{data} + Loss_{ODE} \quad (2.7)$$

而在神经网络(2.3)中, $NN_2(a, t)$ 对应 $Loss_{ODE}$, 可以预先设定不同的 $\lambda(a, a', t)$, 使用(1.1)生成多组仿真数据预先训练 $NN_2(a, t)$, 当 $NN_2(a, t)$ 学习到足够多的 PDE 信息后再将其中的参数冻结, 用 $NN_1(a, a', t)$ 代替 $\lambda(a, a', t)$ 使用真实数据进行训练。

References

- [1] Mengqi He et al. "Transmission dynamics informed neural network with application to COVID-19 infections". In: *Computers in Biology and Medicine* 165 (2023), p. 107431.

表 2.1: 总结

方案	优点	不足
一	1. 可以得到每个年龄段对每个年龄段的传染率 $\lambda(a, a', t)$ 2. 保持模型结构不变	1. 增大计算量 2. 现有数据量可能不足
二	1. 大幅减少计算量	1. 只能得到每个年龄段的易感率 $\lambda(a, t)$
三	1. 可以得到每个年龄段对每个年龄段的传染率 $\lambda(a, a', t)$ 2. 在较少数据下表现更好 3. 训练好的 $NN_2(a, t)$ 可以在其他数据集直接使用	1. 增大计算量 2. 如何生成预训练的仿真数据 3. 是否具有可行性