Ликбез по F#

Юрий Литвинов

14.07.2021г

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 1/73

Функциональное программирование

Программа как вычисление значения выражения в математическом смысле на некоторых входных данных.

$$\sigma' = f(\sigma)$$

- ► Нет состояния ⇒ нет переменных
- ► Нет переменных ⇒ нет циклов
- Нет явной спецификации потока управления

Порядок вычислений не важен, потому что нет состояния, результат вычисления зависит только от входных данных.



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 2/73

Сравним

C++

```
int factorial(int n) {
  int result = 1;
  for (int i = 1; i <= n; ++i) {
     result *= i;
  return result;
F#
let rec factorial x =
  if x = 1 then 1 else x * factorial (x - 1)
```

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 3/73

Как с этим жить

- Состояние и переменные «эмулируются» параметрами функций
- Циклы «эмулируются» рекурсией
- Последовательность вычислений рекурсия + параметры

```
F#

let rec sumFirst3 ls acc i =

if i = 3 then

acc

else

sumFirst3

(List.tail ls)

(acc + ls.Head)

(i + 1)
```



Пример: функции высших порядков

```
let rec sumFirst3 ls acc i =
  if i = 3 then acc
  else sumFirst3 (List.tail ls) (acc + ls.Head) (i + 1)
let sumFirst3 ls =
  Seq.fold (fun x acc \rightarrow acc + x) 0 (Seq.take 3 ls)
let sumFirst3 ls = ls |> Seq.take 3 |> Seq.fold (+) 0
```

let sumFirst3 = **Seq**.take 3 >> **Seq**.sum

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 5/73

Ещё пример

Возвести в квадрат и сложить все чётные числа в списке

```
let calculate =
    Seq.filter (fun x -> x % 2 = 0)
    >> Seq.map (fun x -> x * x)
    >> Seq.reduce (+)
```



Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 6/73

F#

- Типизированный функциональный язык для платформы .NET
- НЕ чисто функциональный (можно императивный стиль и ООП)
- Первый раз представлен публике в 2005 г., актуальная версия
 5.0 (10 ноября 2020 года)
- Создавался под влиянием OCaml (практически диалект OCaml под .NET)
- Использует .NET CLI
- Компилируемый и интерпретируемый
- Иногда используется в промышленности, в отличие от многих чисто функциональных языков

Что скачать и поставить

- Под Windows Visual Studio, Rider
- Под Linux Rider, Visual Studio Code + Ionide
- ▶ Прямо в браузере: https://dotnetfiddle.net/



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 8/73

Пример программы

printfn "%s" "Hello, world!"



Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 9/73

let-определение

```
let x = 1
let x = 2
printfn "%d" x
можно читать как
let x = 1 in let x = 2 in printfn "%d" x
и понимать как подстановку того, что справа от x = 0 вместо того, что
```

слева, в выражение после in

let-определение, функции

```
let powerOfFour x =
let xSquared = x * x
xSquared * xSquared
```

- Позиционный синтаксис
 - Отступы строго пробелами
 - ► Не надо ":"
- Нет особых синтаксических различий между переменной и функцией
- Не надо писать типы
- Не надо писать return
- Нет возможности вернуться из функции раньше её конца

Вложенные let-определения

```
let powerOfFourPlusTwoTimesSix n =
   let n3 =
    let n1 = n * n
   let n2 = n1 * n1
        n2 + 2
   let n4 = n3 * 6
   n4
```

- n3 не функция!
- Компилятор отличает значения и функции по наличию аргументов
- Значение вычисляется, когда до let «доходит управление», функция — когда её вызовут. Хотя, конечно, функция — тоже значение.

Типы

```
let rec f x =
    if x = 1 then
    1
    else
        x * f (x - 1)
```

F# Interactive

val f: x:int -> int

Каждое значение имеет тип, известный во время компиляции

Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 13/73

Элементарные типы

- ▶ int
- double
- ► bool
- string
- ► ... (.NET)
- ▶ unit тип из одного значения, (). Аналог void.



Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 14/73

Кортежи (tuples)

```
let site1 = ("scholar.google.com", 10)
let site2 = ("citeseerx.ist.psu.edu", 5)
let site3 = ("scopus.com", 4)
let sites = (site1, site2, site3)
let url, relevance = site1
```

let site1, site2, site3 = sites



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 15/73

Лямбды

```
let primes = [2; 3; 5; 7]
let primeCubes = List.map (fun n -> n * n * n) primes
F# Interactive
```

> primeCubes;;

val it : int **list** = [8; 27; 125; 343]

let
$$f = \text{fun } x -> x * x$$

let $n = f 4$



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 16/73

Списки

Синтаксис	Описание	Пример
	Пустой список	
[expr;; expr]	Список с элементами	[1; 2; 3]
expr :: list	cons, добавление в голову	1 :: [2; 3]
[expr expr]	Промежуток целых чисел	[110]
[for x in list \rightarrow expr]	Генерированный список	$[\textit{for x in } 199 \rightarrow \textit{x} * \textit{x}]$
list @ list	Конкатенация	[1; 2] @ [3; 4]



Примеры работы со списками

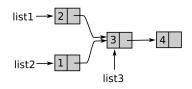
```
let oddPrimes = [3; 5; 7; 11]
let morePrimes = [13; 17]
let primes = 2 :: (oddPrimes @ morePrimes)
let printFirst primes =
    match primes with
    | h :: t -> printfn "First prime in the list is %d" h
    | [] -> printfn "No primes found in the list"
```



18/73

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г

Устройство списков



let list3 = [3; 4]

let list1 = 2 :: list3

let list2 = 1 :: list3

- Списки немутабельны
- Cons-ячейки, указывающие друг на друга
- ▶ cons за константное время, @ за линейное



19/73

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г

Операции над списками

Модуль Microsoft.FSharp.Collections.List

Функция	Описание	Пример	Результат
List.length	Длина списка	List.length $[1;2;3]$	3
List.nth	n-ый элемент списка	List.nth [1; 2; 3] 1	2
List.init	Генерирует список	List.init $3(\text{fun } i \rightarrow i * i)$	[0;1;4]
List.head	Голова списка	List.head [1; 2; 3]	1
List.tail	Хвост списка	List.tail [1; 2; 3]	[2; 3]
List.map	Применяет функцию ко всем элементам	$\begin{array}{c} \textit{List.map (fun i} \rightarrow \\ \textit{i*i)} \ [1;2;3] \end{array}$	[1; 4; 9]
List.filter	Отбирает нужные элементы	List.filter (fun $x \rightarrow x \% 2 <> 0$) [1;2;3]	[1; 3]
List.fold	"Свёртка"	$\begin{array}{c} \textit{List.fold (fun x acc} \ \rightarrow \\ \textit{acc} * \textit{x}) \ 1 \ [1;2;3] \end{array}$	6

20/73

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г

Тип Option

Либо *Some что-то*, либо *None*, представляет возможное отсутствие значения.

```
let people = [ ("Adam", None); ("Eve", None);
    ("Cain", Some("Adam","Eve"));
    ("Abel", Some("Adam","Eve")) ]
let showParents (name, parents) =
    match parents with
    | Some(dad, mum) ->
        printfn "%s, father %s, mother %s" name dad mum
    | None -> printfn "%s has no parents!" name
```

Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 21/73

Рекурсия

```
let rec length I =
    match I with
    | [] -> 0
    | h :: t -> 1 + length t

let rec even n = (n = 0u) || odd(n - 1u)
and odd n = (n <> 0u) && even(n - 1u)
```

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 22/73

Каррирование, частичное применение

```
let shift (dx, dy) (px, py) = (px + dx, py + dy)
let shiftRight = shift (1, 0)
let shiftUp = shift (0, 1)
let shiftLeft = shift (-1, 0)
let shiftDown = shift (0, -1)

F# Interactive
> shiftDown (1, 1);;
val it : int * int = (1, 0)
```

Зачем — функции высших порядков

```
let lists = [[1; 2]; [1]; [1; 2; 3]; [1; 2]; [1]] let lengths = List.map List.length lists или let lists = [[1; 2]; [1]; [1; 2; 3]; [1; 2]; [1]] let squares = List.map (List.map (fun x \rightarrow x \times x ) lists
```

Функции стандартной библиотеки стараются принимать список последним, для каррирования



Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 24/73



Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 25/73

Оператор >>

Композиция

let (>>) f g x = g (f x) let sumFirst3 = Seq.take 3 >> Seq.fold (+) 0 let result = sumFirst3 [1; 2; 3; 4; 5]



Операторы < | и <<

Pipe-backward и обратная композиция

let
$$(<|)$$
 f x = f x
let $(<<)$ f g x = f (g x)
Зачем? Чтобы не ставить скобки:
printfn "Result = %d" $<|$ factorial 5

Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 27/73

Использование библиотек .NET

open System.Windows.Forms

form.ShowDialog () |> ignore

```
form.Controls.Add(textB)
open System.IO
open System.Net
/// Get the contents of the URL via a web request
let http(url: string) =
  let reg = System.Net.WebRequest.Create(url)
  let resp = reg.GetResponse()
  let stream = resp.GetResponseStream()
  let reader = new StreamReader(stream)
  let html = reader.ReadToEnd()
  resp.Close()
  html
textB.Text <- http://www.google.com")
```

let form = new Form(Visible = false, TopMost = true, Text = "Welcome to F#")
let textB = new RichTextBox(Dock = DockStyle.Fill, Text = "Some text")

Сопоставление шаблонов

```
let urlFilter url agent =
  match (url, agent) with
   "http://www.google.com", 99 -> true
   "http://www.yandex.ru", -> false
  , 86 -> true
  -> false
let sign x =
  match x with
  | when x < 0 -> -1
  | when x > 0 -> 1
  -> 0
```

F# — не Prolog

```
Не получится писать так:
let isSame pair =
  match pair with
  | (a, a) -> true
  | -> false
Нужно так:
let isSame pair =
  match pair with
  | (a, b) when a = b \rightarrow true
  | -> false
```

Какие шаблоны бывают

Синтаксис	Описание	Пример
(pat,,pat)	Кортеж	(1, 2, ("3", x))
[pat; ; pat]	Список	[x; y; 3]
pat :: pat	cons	h :: t
pat pat	"Или"	[x] ["X"; x]
pat & pat	"И"	[p]& $[(x,y)]$
pat as id	Именованный шаблон	[x] as inp
id	Переменная	X
_	Wildcard (что угодно)	_
литерал	Константа	239, DayOfWeek.Monday
:? type	Проверка на тип	:? string

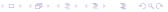
 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 31/73

Последовательности

Ленивый тип данных

Типичные операции с последовательностями

Операция	Тип
Seq.append	#seq<'a> o #seq<'a> o seq<'a>
Seq.concat	$\#seq < \#seq < 'a >> \rightarrow seq < 'a >$
Seq.choose	$('a \rightarrow' b \ option) \rightarrow \#seq <' a > \rightarrow seq <' b >$
Seq.empty	seq <' a >
Seq.map	$('a \rightarrow 'b) \rightarrow \#seq < 'a > \rightarrow \#seq < 'b >$
Seq.filter	('a o bool) o #seq < 'a > o seq < 'a >
Seq.fold	$('s \rightarrow' a \rightarrow' s) \rightarrow' s \rightarrow seq <' a > \rightarrow' s$
Seq.initInfinite	$(\textit{int} \rightarrow' \textit{a}) \rightarrow \textit{seq} <' \textit{a} >$



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 33/73

Записи

```
type Person =
  { Name: string
    DateOfBirth: System.DateTime }

{ Name = "Bill"
    DateOfBirth = new System.DateTime(1962, 09, 02) }

{ new Person
    with Name = "Anna"
    and DateOfBirth = new System.DateTime(1968, 07, 23) }
```

Деконструкция

Размеченные объединения

Discriminated unions

let bus = Bus(420)

Известные примеры

```
| None
| Some of 'a

type 'a list =
| ([])
| (::) of 'a * 'a list
```

type 'a option =

Использование размеченных объединений

```
type IntOrBool = I of int | B of bool
let i = 1.99
let b = B true
type C = Circle of int | Rectangle of int * int
[1..10]
> List.map Circle
[1..10]
|> List.zip [21..30]
|> List.map Rectangle
```

Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 38/73

Использование в match

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 39/73

Пример

True

type Proposition =

Дерево разбора логического выражения

And of Proposition * Proposition

```
Or of Proposition * Proposition
   Not of Proposition
let rec eval (p: Proposition) =
  match p with
   True -> true
   And(p1, p2) -> eval p1 && eval p2
   Or (p1, p2) -> eval p1 || eval p2
   Not(p1) \rightarrow not (eval p1)
printfn "%A" <| eval (Or(True, And(True, Not True)))
```

Факториал без хвостовой рекурсии

```
let rec factorial x =
  if x <= 1
  then 1
  else x * factorial (x - 1)
let rec factorial x =
  if x <= 1
  then
  else
    let resultOfRecusion = factorial (x - 1)
     let result = x * resultOfRecusion
     result
```

Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 41/73

Факториал с хвостовой рекурсией

```
let factorial x =
  let rec tailRecursiveFactorial x acc =
    if x <= 1 then
        acc
    else
        tailRecursiveFactorial (x - 1) (acc * x)
  tailRecursiveFactorial x 1</pre>
```

После декомпиляции в С#

```
C#
public static int tailRecursiveFactorial(int x, int acc)
  while (true)
    if (x <= 1)
       return acc;
    acc *= x;
    X--;
```

Паттерн "Аккумулятор"

```
let rec map f list =
  match list with
  | [] -> []
   hd :: tl -> (f hd) :: (map f tl)
let map f list =
  let rec mapTR f list acc =
     match list with
     | [] -> acc
     hd:: tl -> mapTR f tl (f hd:: acc)
  mapTR f (List.rev list) []
```

Шаблонные типы

```
type 'a list = ...
type list<'a> = ...
List.map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
let map<'a,'b>: ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list =
  List.map
let rec map (f : 'a -> 'b) (I : 'a list) =
   match | with
   | h :: t -> (f h) :: (map f t)
   | | | | -> | |
```

Автоматическое обобщение

```
let getFirst (a, b, c) = a
let mapPair f g (x, y) = (f x, g y)
```

F# Interactive

```
val getFirst: 'a * 'b * 'c -> 'a
val mapPair : ('a -> 'b) -> ('c -> 'd)
-> ('a * 'c) -> ('b * 'd)
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 46/73

Автоматический вывод типов

- Алгоритм Хиндли-Милнера
- На самом деле, «алгоритм W Дамаса-Милнера» над системой типов Хиндли-Милнера
 - ightharpoonup Одно из типизированных λ -исчислений
 - Используется далеко не только в F#
- Построение системы уравнений над типами с учётом ограничений
 - литералы, функции и другие виды «взаимодействия значений», явные ограничения на типы, аннотации типов
- Решение методом унификации
 - Множество выражений и «переменных типа», им соответствующих
 - Постепенное уточнение этого множества
 - Если остались переменные типа, обобщение
 - Алгоритм глобальный!



Однако не всё так просто

```
List.map (fun x -> x.Length) ["hello"; "world"]
```

— не скомпилируется, в момент вызова х неизвестно, что х строка

```
["hello"; "world"] |> List.map (fun x -> x.Length)
```

— скомпилируется

```
List.map (fun (x: string) -> x.Length) ["hello"; "world"]
```

— или так



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 48/73

Методы у типов

```
type Vector = {x : float; y : float} with
  member v.Length = sqrt(v.x * v.x + v.y * v.y)

let vector = {x = 1.0; y = 1.0}
let length = vector.Length

type Vector with
  member v.Scale k = {x = v.x * k; y = v.y * k}

let scaled = vector.Scale 2.0
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 49/73

Статические методы

```
type Vector = \{x : float; y : float\} with
static member Create x y = \{x = x; y = y\}
```

let vector = **Vector**.Create 1.0 1.0

type System.Int32 with static member IsEven x = x % 2 = 0

printfn "%b" < | System.Int32.IsEven 10



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 50/73

Методы и каррирование

open Operators

```
type Vector = {x : float; y : float} with
  static member Create x y = \{x = x; y = y\}
let transform v rotate scale =
  let r = System.Math.PI * rotate / 180.0
  \{ x = scale * v.x * cos r - scale * v.y * sin r; \}
   v = scale * v.x * sin r + scale * v.v * cos r 
type Vector with
```

member v.Transform = transform v

printfn "%A" < (Vector.Create 1.0 1.0).Transform 45.0 2.0



Юрий Литвинов Ликбез по Е# 14 07 2021r 51/73

Каррирование против кортежей

```
type Vector with
  member v.TupledTransform (r, s) = transform v r s
  member v.CurriedTransform r s = transform v r s
```

```
let v = Vector.Create 1.0 1.0
printfn "%A" <| v.TupledTransform (45.0, 2.0)
printfn "%A" <| v.CurriedTransform 45.0 2.0
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 52/73

Кортежи: перегрузка

```
type Vector with
  member v.TupledTransform (r, s) =
  transform v r s
  member v.TupledTransform r =
  transform v r 1.0
```

```
let v = Vector.Create 1.0 1.0 printfn "%A" <| v.TupledTransform (45.0, 2.0) printfn "%A" <| v.TupledTransform (90.0)
```



Кортежи против каррирования

За:

- Можно вызывать из .NET-кода
- Опциональные и именованные аргументы, перегрузки

Против:

- Не поддерживают частичное применение
- Не дружат с функциями высших порядков

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 54/73

Классы, основной конструктор

```
type Vector(x, y) =
  member v.Length = x * x + y * y > sqrt
printfn "%A" < | Vector (1.0, 1.0)
F# Interactive
FSI 0003+Vector
type Vector =
 class
  new: x:float * y:float -> Vector
  member Length: float
 end
val it : unit = ()
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 55/73

Методы и свойства

```
type Vector(x : float, y : float) =
  member v.Scale s = Vector(x * s, y * s)
  member v.X = x
  member v.Y = y
F# Interactive
type Vector =
 class
  new: x:float * y:float -> Vector
  member Scale: s:float -> Vector
  member X: float
  member Y: float
 end
```

Private-поля и private-методы

```
type Vector(x : float, y : float) =
let mutable mX = x
let mutable mY = y
let lengthSqr = mX * mX + mY * mY
member v.Length = sqrt lengthSqr
member v.X = mX
member v.Y = mY
member v.SetX x = mX <- x
member v.SetY y = mY <- y</pre>
```



Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 57/73

Мутабельные свойства

```
type Vector(x, y) =
let mutable mX = x
let mutable mY = y
member v.X
  with get () = mX
  and set x = mX <- x
member v.Y
  with get () = mY
  and set y = mY <- y</pre>
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 58/73

Автоматические свойства

```
type Vector(x, y) =
  member val X = x with get,set
  member val Y = y with get,set
```

let
$$v = Vector(1.0, 1.0)$$

 $v.X < -2.0$



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 59/73

Вернёмся к конструкторам

Дополнительное поведение

```
type Vector(x : float, y : float) =
  let length () = x * x + v * v > sart
  do
    printfn "Vector (%f, %f), length = %f"
       x y < length ()
    printfn "Have a nice day"
  let mutable x = x
  let mutable y = y
let v = Vector(1.0, 1.0)
```

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 60/73

let-функции и методы

```
type Vector(x: float, y: float) =
let length () = x * x + y * y |> sqrt
let normalize () = Vector(x / length(), y / length())
member this.Normalize = normalize
member this.X = x
member this.Y = y

let v = Vector(2.0, 2.0)
let v' = v.Normalize ()
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021r
 61/73

Рекурсивные методы



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 62/73

Много конструкторов

```
type Vector(x : float, y : float) =
  member this.X = x
  member this.Y = y
  new () =
    printfn "Constructor with no parameters"
    Vector(0.0, 0.0)

let v = Vector(2.0, 2.0)
let v' = Vector()
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 63/73

Модификаторы видимости

```
type Example() =
  let mutable privateValue = 42
  member this Public Value = 1
  member private this.PrivateValue = 2
  member internal this Internal Value = 3
  member this. Private Set Property
    with get() =
      privateValue
    and private set(value) =
      privateValue <- value
```



 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 64/73

Наследование

```
type Shape() = class end
```

```
type Circle(r) =
inherit Shape()
member this.R = r
```



Абстрактные классы

```
[<AbstractClass>]
type Shape() =
  abstract member Draw: unit -> unit
  abstract member Name: string
type Circle(r) =
  inherit Shape()
  member this B = r
  override this.Draw () =
    printfn "Drawing circle"
  override this. Name = "Circle"
```

66 / 73

Реализация по умолчанию

```
type Shape() =
  abstract member Draw : unit -> unit
  abstract member Name : string
  default this.Draw () =
    printfn "Drawing shape"
  default this.Name =
    "Shape"
```

Вызов метода родителя

```
type Shape() =
  abstract member Draw: unit -> unit
  abstract member Name : string
  default this.Draw () = printfn "Drawing shape"
  default this.Name = "Shape"
type Circle(r) =
  inherit Shape()
  member this R = r
  override this.Draw () =
    base.Draw()
    printfn "Drawing circle"
  override this. Name = "Circle"
```

 Юрий Литвинов
 Ликбез по F#
 14.07.2021г
 68/73

Интерфейсы

type Shape =

```
abstract member Name : string

type Circle(r) =
    member this.R = r
    interface Shape with
    member this.Draw () =
        printfn "Drawing circle"
    member this.Name = "Circle"
```

abstract member Draw: unit -> unit

69/73

Явное приведение типов

```
let c = Circle 10
c.Draw () // Ошибка
(c :> Shape).Draw () // Ок
let draw (s : Shape) = s.Draw ()
```

draw c // OK

Наследование интерфейсов

type | Enumerable < 'a> =

```
abstract GetEnumerator : unit -> IEnumerator<'a>
type | Collection < 'a> =
  inherit |Enumerable<'a>
  abstract Count : int
  abstract IsReadOnly: bool
  abstract Add: 'a -> unit
  abstract Clear: unit -> unit
  abstract Contains: 'a -> bool
  abstract CopyTo: 'a[] * int -> unit
  abstract Remove: 'a -> unit
```

Юрий Литвинов Ликбез по F# 14.07.2021г 71/73

Модули

```
type Vector =
  { x : float; y : float }
module VectorOps =
  let length v = sqrt(v.x * v.x + v.y * v.y)
  let scale k v = \{ x = k * v.x : v = k * v.v \}
  let shiftX x v = \{ v \text{ with } x = v.x + x \}
  let shiftY v v = \{ v \text{ with } v = v \cdot v + v \}
  let shiftXY (x, y) v = \{ x = v.x + x; y = v.y + y \}
  let zero = { x = 0.0: v = 0.0 }
  let constX dx = \{ x = dx; v = 0.0 \}
  let constY dy = \{ x = 0.0; y = dy \}
```

Пространства имён

namespace Vectors

```
type Vector =
  { x : float; y : float }

module VectorOps =
  let length v = sqrt(v.x * v.x + v.y * v.y)
```