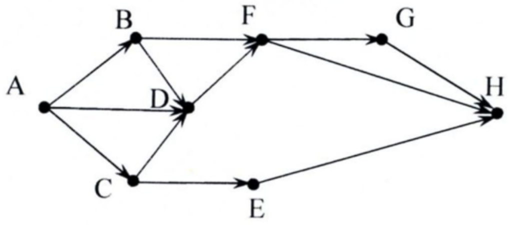
Графы

Юрий Литвинов
y.litvinov@spbu.ru

16.11.2022

Что это и зачем

- Граф — совокупность вершин и рёбер
- Нужен для моделирования систем с нетривиальными связями между элементами



- Например:
  - Граф дорог, соединяющих города
  - Граф компьютерной сети
  - Граф зависимостей модулей в процессе компиляции
  - Дерево — подвид графа
- Есть куча известных алгоритмов на графах, позволяющих узнать о них очень многое

Определения

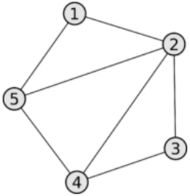
- Ориентированный граф G — пара из множества вершин V и множества дуг (или рёбер) E, где E — упорядоченная пара вершин (v, w)
  - E — бинарное отношение над множеством вершин
  - v называется началом, w — концом дуги
  - Дуги вида (v, v) называются петлями
- Путём в орграфе называется последовательность вершин, для которых существуют дуги из предыдущей в следующую
  - Длина пути — количество дуг, составляющих путь
  - Путь называется простым, если все вершины на нём, за исключением, быть может, первой и последней, различны
  - Цикл — это простой путь длины не менее 1, который начинается и заканчивается в одной вершине
  - Граф без циклов называется ациклическим

Ещё определения

- Неориентированный граф — это ориентированный граф, у которого для каждого ребра (v, w) существует противоположное ребро (w, v)
  - то есть отношение E симметрично
- Если $e = (u, v) \in E$, то вершины u и v называются смежными в G, а ребро e и эти вершины называются инцидентными
- Степенью вершины в неориентированном графе называется число смежных с ней вершин
  - Вершина степени 0 называется изолированной
- Граф может быть помеченным (или взвешенным) – каждой вершине и/или дуге сопоставлена некоторая метка (число, строка и т.д.)

Матрица смежности

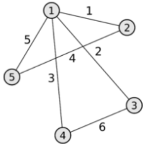
- Для графа из n вершин матрица смежности — матрица размера n на n, где в строке i и столбце j стоит 1 (или true), если есть дуга из i в j
  - Для неориентированного графа матрица симметрична относительно главной диагонали
  - Для взвешенного графа вместо 1 стоит вес дуги
- Занимает $O(n^2)$ памяти, проверка наличия дуги и определение веса — за константное время



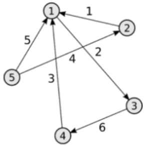
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности

- Для графа из n вершин и m ребёр матрица инцидентности — матрица размера m на n, где строка соответствует вершине, а столбец ребру
  - Для ориентированного графа в ячейке (i, j) стоит 1, если ребро i выходит из вершины j, и -1, если входит
  - Для неориентированного графа в ячейке (i, j) стоит 1, если ребро i инцидентно вершине j
  - Нужно специальное значение для петель



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



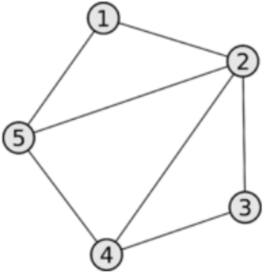
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности, свойства

- В каждом столбце только два элемента ненулевые (1, если петля)
- Для неориентированного графа сумма элементов в столбце равна 2, в строке — степени вершины
- Требует $O(m * n)$ памяти для хранения
- Проверка наличия ребра между двумя вершинами — за $O(m)$
- Поиск инцидентных ребру вершин — за $O(n)$, проверка на инцидентность — за $O(1)$

Список смежности

- Для каждой вершины хранится список вершин, смежных с данной
  - Как правило, списки лежат в массиве длины n
  - Вместе с номером смежной вершины в списке может лежать вес ребра
- Требует $O(m + n)$ памяти для хранения
- Проверка наличия ребра между двумя вершинами — $O(m)$
  - Если в графе мало рёбер, в среднем $O(1)$
- Несколько сложнее в реализации



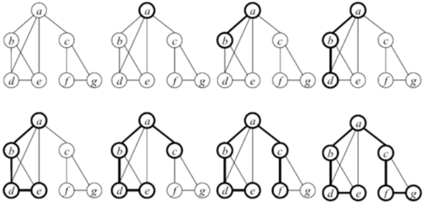
1: 2, 5
2: 1, 5, 4, 3
3: 2, 4
4: 5, 2, 3
5: 1, 2, 4

Достижимость

- Вершина w называется достижимой из вершины v, если $v = w$ или в G есть путь от v в w
  - Рефлексивное и транзитивное замыкание отношения E
  - Если E симметрично, то достижимость — отношение эквивалентности
  - Классы эквивалентности по отношению достижимости называются компонентами связности
  - Для ориентированных графов эквивалентность — отношение взаимной достижимости
- Проверка на достижимость — обходы графа в глубину или ширину, алгоритм Уоршелла

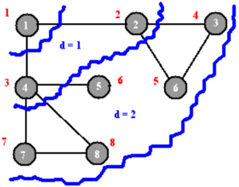
Обход в глубину

- Посещаем вершину
- Рекурсивно обходим все смежные ей вершины, в которых мы ещё не были
  - Нужно множество (или битовая шкала) посещённых вершин, проще всего передавать как параметр в рекурсивный вызов
- Можно нерекурсивно, тогда нам потребуется стек рассматриваемых вершин
  - И множество посещённых



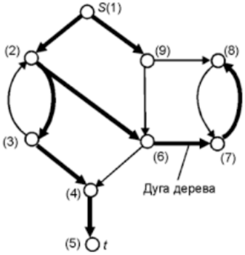
Обход в ширину

- То же, что и обход в глубину, но вместо стека рассматриваемых вершин — очередь
- На каждой итерации берём из очереди вершину, посещаем её и кладём в очередь все смежные вершины, в которых мы ещё не были
  - Тоже требуется множество непосещённых вершин
- Если знаем, что цель недалеко, обход в ширину эффективнее
- Обход в глубину зато строит глубинное остовное дерево (на самом деле, глубинный остовный лес)



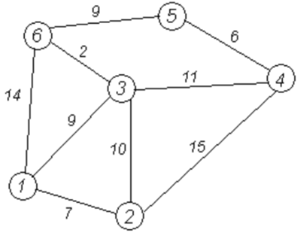
Проверка графа на ацикличность

- Остовное дерево графа — подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом
  - То есть не содержащий циклов, даже если рассматривать граф как неориентированный
- Глубинное остовное дерево — путь алгоритма поиска в глубину по графу
- Обратная дуга — дуга, не принадлежащая остовному дереву, ведущая от потомка к предку
  - Если обратных дуг нет, в графе нет циклов
- Посещая вершину, красим её в серый, выходя из её поддерева — в чёрный
- Если дуга ведёт в серую вершину, мы нашли цикл



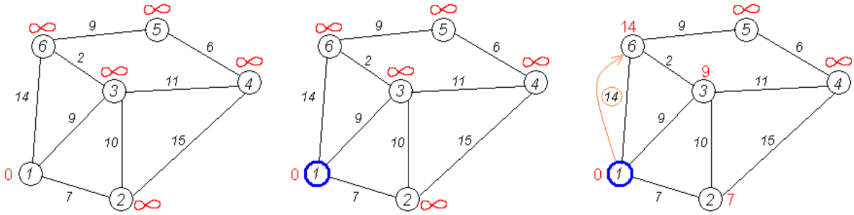
Задача поиска кратчайшего пути в графе

- Дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$ с неотрицательными весами дуг
- Одна вершина $s \in V$ помечена как стартовая
- Задача — найти кратчайшие пути от стартовой вершины до всех остальных вершин
  - Длина пути определяется как сумма весов дуг, составляющих путь
- Парадокс изобретателя — иногда проще решить более общую задачу и получить из неё решение частной задачи, чем решать частную
  - Знание целевой вершины поиск кратчайшего пути не упрощает



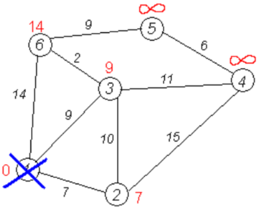
Алгоритм Дейкстры

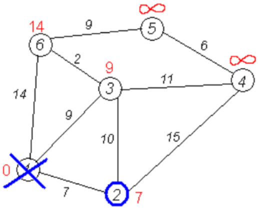
Поиск в ширину, где мы запоминаем длину кратчайшего пути в посещённой вершине, обновляя её, если нашли лучше

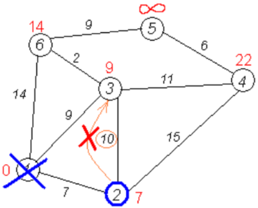


Алгоритм Дейкстры, пример, продолжение

Когда все соседи вершины посещены, посчитанная для неё длина пути окончательна и минимальна, выкидываем её из рассмотрения

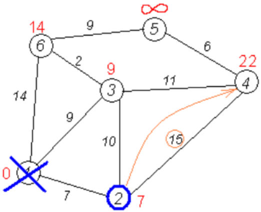


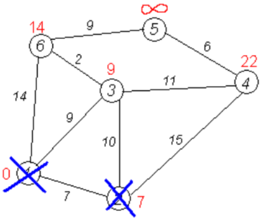


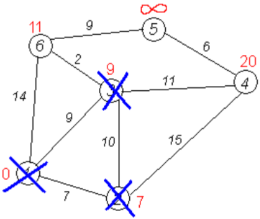


Алгоритм Дейкстры, пример, продолжение (2)

Продолжаем, пока не посетили все вершины (правда, бывают несвязные графы)







Алгоритм Дейкстры, псевдокод

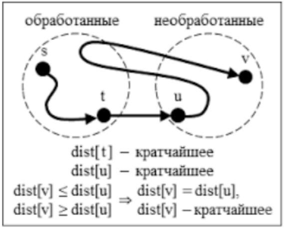
```
procedure Dijkstra(s)
    for v ∈ V do
        d[v] ← ∞
        used[v] ← false
    end for
    d[s] ← 0
    for i ∈ V do
        v ← null
        for j ∈ V do
            if !used[j] and (v == null or d[j] < d[v]) then
                v ← j
            end if
        end for
        if d[v] == ∞ then
            break
        end if
        used[v] ← true
        for e ∈ исходящие из v рёбра do
            if d[v] + e.len < d[e.to] then
                d[e.to] ← d[v] + e.len
            end if
        end for
    end for
end procedure
```

Тонкости реализации

- Иногда надо знать не длину пути, а сам путь
  - Тогда помимо массива длин d полезно иметь массив родителей p, такой что $p[v] = u$, если мы пришли кратчайшим путём в v из u
  - Обновляем этот массив там же, где мы обновляем d
- Множество used можно представлять битовой шкалой, или, если вершин много, множеством на двоичных деревьях или хеш-таблицах
- Поиск ближайшей вершины из множества нерассмотренных можно хранить в очереди с приоритетами, тогда просматривать всё V будет не надо (можно обойтись $O(log(n))$
  - Как — кучей (вспомните heapsort)
- Трудоёмкость наивной реализации — $O(n^2 + m)$, с кучей — $O(n * log(n) + m * log(n))$

Почему работает

- По индукции
  - На первом шаге $d(s) = 0$, расстояние до неё кратчайшее
  - Для n шагов всё ок, на $n+1$-м выбрана для добавления вершина v. Покажем, что посчитанный для неё сейчас путь — кратчайший.
  - Если это не так, существует непросмотренная вершина u на кратчайшем пути, $d(v) >= d(u)$, потому что веса путей неотрицательны
  - Но тогда u была бы добавлена раньше, поскольку на каждом шагу выбирается ближайшая к стартовой из непросмотренных вершин
- Пример жадного алгоритма



Алгоритм Флойда

- Считает кратчайший путь из каждой вершины в каждую
- Над матрицей смежности выполняется n итераций, на k-й итерации $A[i, j]$ содержит значение наименьшей длины путей из вершины i в вершину j, которые не проходят через вершины с номером, большим k:

```
for k = 1 to n
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      W[i, j] = min(W[i, j], W[i, k] + W[k, j])
```

- Трудоёмкость — $O(n^3)$
  - Зато очень просто реализуется
- Сам кратчайший путь — заводим матрицу P, такую, что на каждой итерации $P[i, j] = k$, дальше рекурсивно восстанавливаем путь по $P[i, k]$ и $P[k, j]$

Алгоритм Уоршелла

```
for k = 1 to n
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      A[i, j] = A[i, j] or (A[i, k]  and A[k, j])
```

- Чаще эти два алгоритма называют алгоритмом Флойда-Уоршелла, хотя они разработаны независимо (причём, за 3 года и до Флойда, и до Уоршелла, Бернардом Роем)
- Строит транзитивное замыкание отношения E
  - Легко искать компоненты связности неориентированного графа

Графы и математика

- Любой граф задаёт бинарное отношение над некоторым множеством
  - Ну он и есть бинарное отношение E, да
- Ациклический орграф задаёт отношение строгого частичного порядка:
  - Антирефлексивность: $\forall x \neg xRx$
  - Транзитивность: $\forall x, y, z : xRy \cap yRz \rightarrow xRz$
  - Пример: отношения “больше” и “меньше” на множестве вещественных чисел, отношение строгого включения множеств
- Топологическая сортировка множества V относительно отношения частичного порядка R — построение последовательности v_1, v_2, ..., v_n: $\forall i, j \in 1..n v_i, v_j \in V$ и $v_i R v_j$ или $(v_i, v_j) \notin R$
  - Например, сортировка графа зависимостей файлов при сборке
  - Делается поиском в глубину (глубинная остовная нумерация)

Доклады

1. Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта
2. Алгоритм Бойера-Мура
3. Алгоритм Рабина-Карпа
4. Алгоритм A*
5. Визуализация графа пакетом GraphViz