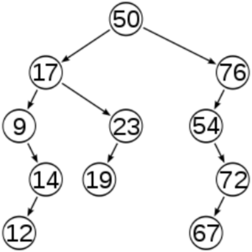
Самобалансирующиеся деревья

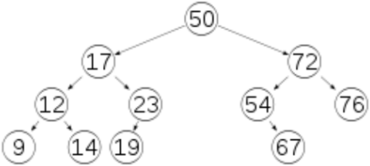
Юрий Литвинов
y.litvinov@spbu.ru

02.11.2021

Проблема

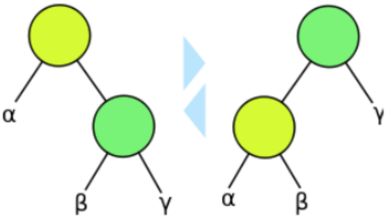
- Если в обычное двоичное дерево поиска вставлять элементы в возрастающем (или убывающем) порядке, оно выродится в список
- $n <= 2^{h+1} - 1$, поэтому $h >= log_2(n+1) - 1 >= floor(log_2(n))$





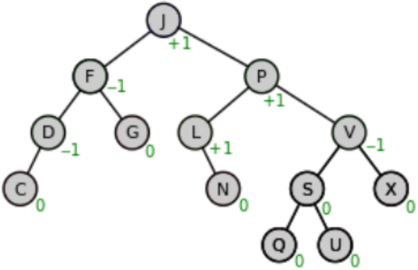
Балансировка

- Перестраиваем дерево каждый раз после вставки и удаления, чтобы сохранить высоту дерева возможно меньшей
- Основная операция — поворот
  - Сохраняет свойства двоичного дерева поиска
  - Возможно, уменьшает его общую высоту
- Конкретных алгоритмов балансировки очень много



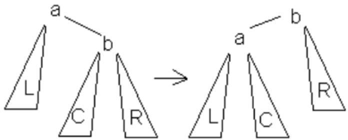
АВЛ-дерево

- 1962г., Г.М. Адельсон-Вельский и Е.М. Ландис
- В каждой вершине хранится разность высот левого и правого поддерева
- Вставка и удаление гарантируют, что разность высот будет не больше 1
- Теоретически лучшая балансировка из популярных деревьев, но относительно большой оверхэд

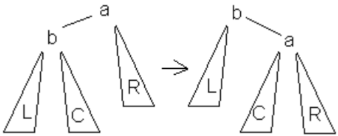


Балансировка

Малое левое вращение



Малое правое вращение

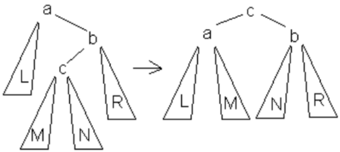


Проводится в случае, если высота $b >$ высота $L + 1$, и высота $C <=$ высоте R

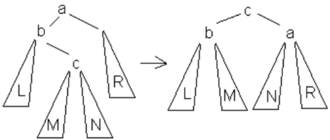
- При повороте важно не забыть обновить значения баланса
  - И не запутаться в указателях

Балансировка

Большое левое вращение

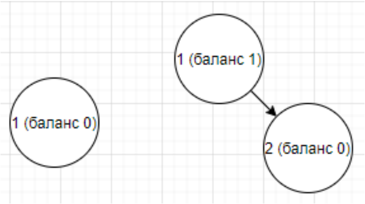


Большое правое вращение



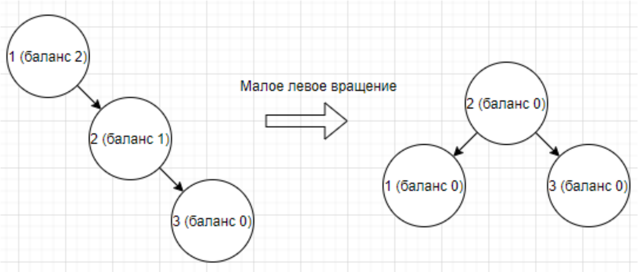
Пример

Вставка 1 и 2



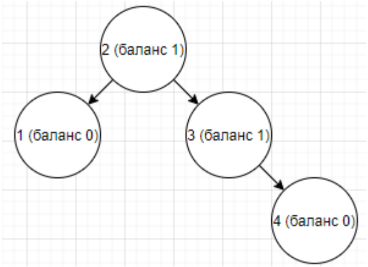
Пример

Вставка 3



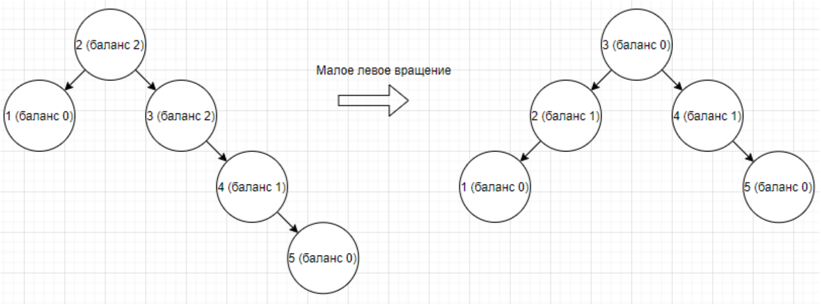
Пример

Вставка 4



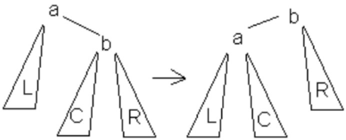
Пример

Вставка 5



Псевдокод

Малое левое вращение




```
Node* rotateLeft(Node *a)
{
   Node *b = a->right;
   Node *c = b->left;
   b->left = a;
   a->right = c;
   return b;
}
```

Псевдокод

Балансировка

```
Node* balance(Node *node) {
  if (node->balance == 2) {
    if (node->right->balance <= 0)
      return rotateLeft(node);
    return bigRotateLeft(node);
  }
  if (node->balance == -2) {
    if (node->left->balance <= 0)
      return rotateRight(node);
    return bigRotateRight(node);
  }
  return node;
}
```

Псевдокод

Вставка

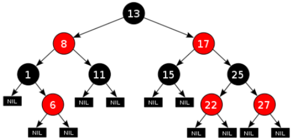
```
Node* insert(Node *node, int value) {
    if (node == NULL) {
        Node *newNode = calloc(1, sizeof(Node));
        newNode->value = value;
        return newNode;
    }
    if (value < node->value) {
        node->left = insert(node->left, value);
        --node->balance;
    } else {
        node->right = insert(node->right, value);
        ++node->balance;
    }
    return balance(node);
}
```

Замечания по реализации

- Балансировка выполняется на обратном проходе рекурсии при вставке и удалении
- Принцип “поменяли-вернули-присвоили”
- Не делайте указатель на родителя, запутаетесь
- Не храните высоту, храните баланс
- Большой поворот — это на самом деле два маленьких, но эффективнее реализовать его отдельно
  - Впрочем, сопровождаемость кода обычно важнее эффективности
- Не читайте статью про АВЛ-деревья на Хабре
  - То есть прочитать можно, но код там очень небрежный

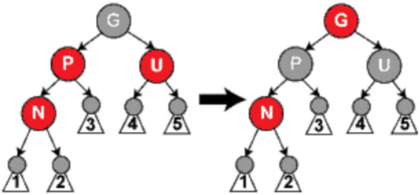
Красно-чёрные деревья

- 1972г., Р. Байер
- Хуже сбалансированы, чем АВЛ-деревья, зато ~~не придуманы в Советском Союзе~~ требуют константного количества поворотов на каждую операцию (в отличие от $O(log(n))$ для АВЛ-деревьев)
  - Поэтому используются практически во всех стандартных библиотеках
- В каждой вершине хранится цвет (красный или чёрный)
  - Корень чёрный
  - Все листья чёрные
  - Оба потомка красного узла — чёрные
  - Всякий путь от данного узла до любого листового узла, являющегося его потомком, содержит одинаковое число чёрных узлов
    - Высота поддеревьев не может отличаться более, чем вдвое



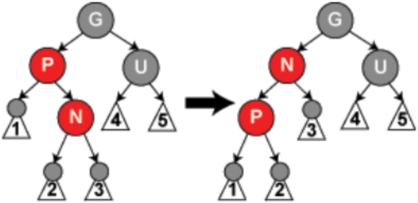
Красно-чёрное дерево, добавление

1. Добавляем в корень — ок, красим его в чёрный
2. Добавляем как сына чёрному узлу — ок, красим в красный
3. Если родитель и “дядя” красные, перекрашиваем их и добавляем наш узел как красный. Дедушка может нарушить ограничения, так что, возможно, его тоже придётся перекрасить (выполнив перекрашивание рекурсивно до корня)



Красно-чёрное дерево, добавление (2)

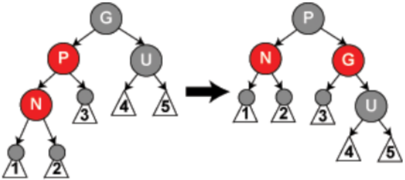
4. Родитель красный, дядя чёрный, узел справа от родителя. Выполняем поворот пары “родитель-сын”.



Ограничение “оба потомка красного узла чёрные” всё ещё нарушается, но об этом позаботится случай 5.

Красно-чёрные деревья, добавление (3)

5. Родитель красный, дядя чёрный, узел слева от родителя. Выполняем поворот относительно пары "родитель-дедушка", который и восстанавливает балансировку.



Опять-таки, надо не забыть перекрасить узлы

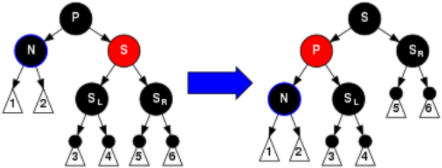
Красно-чёрные деревья, удаление

Сначала делаем как обычно — кладём значение самого большого узла в левом поддереве в удаляемый узел и... надо удалить тот узел, откуда мы взяли значение, но не всё так просто.

- Если он красный, то оба его потомка — чёрные листы. Удаляем красный узел и ставим на его место лист (они не хранят значений, поэтому не важно, какой)
- Если он чёрный, а его единственный нелистовой потомок красный, то ставим потомка на его место и перекрашиваем его в чёрный
- Если он чёрный и его потомок чёрный, то его оба потомка листы, но если кого-то просто удалить, то число чёрных узлов в поддереве изменится, так что надо перебалансировать дерево

Красно-чёрные деревья, удаление (2)

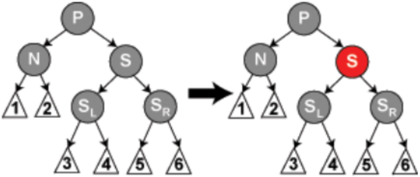
1. Самый простой случай, когда удаляемый узел корень: просто удаляем
2. У удалённого узла был красный брат: делаем поворот по ребру "отец-брат"



Сильно лучше не стало, потому что поддеревья всё ещё имеют разную чёрную высоту, но теперь можно применить правила 4, 5 или 6

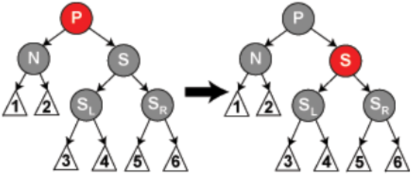
Красно-чёрные деревья, удаление (3)

3. Если родитель чёрный, брат и его сыновья чёрные: перекрашиваем брата в красный. Поскольку из левого поддерева мы только что удалили один чёрный узел, а в правом поддереве один чёрный узел покрасили в красный, баланс восстановлен. Но только в поддереве, потому как оно стало на 1 чёрный узел короче, надо перебалансировать родителей.



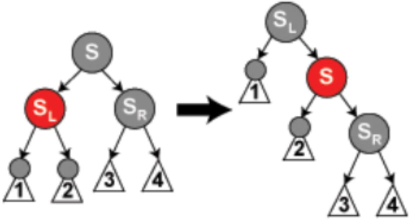
Красно-чёрные деревья, удаление (4)

4. Брат и сыновья брата чёрные, но родитель красный — просто перекрасить брата нельзя. А вот перекрасить одновременно брата и родителя можно, это восстановит баланс (причём, во всём дереве сразу, потому что его чёрная высота не изменится).



Красно-чёрные деревья, удаление (5)

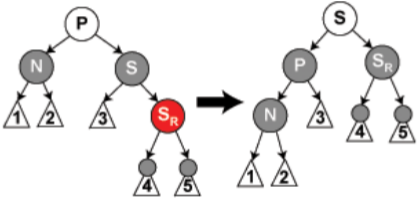
5. Левый сын брата красный, правый — чёрный. Выполняем поворот относительно брата и левого сына, одновременно перекрашивая брата и левого сына:



Глобально ничего не поменялось, но теперь можно применить случай 6.

Красно-чёрные деревья, удаление (6)

6. Брат чёрный, его правый сын красный, левый — чёрный: выполняем поворот вокруг ребра “родитель-брат” и перекрашиваем узлы:



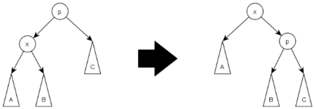
Баланс восстановлен (в левом поддереве на один чёрный узел больше), при этом можно доказать, что это всё ещё красно-чёрное дерево.

Splay-деревья

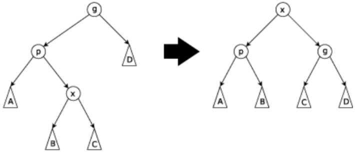
- 1985г., Д. Слитор и Р.А. Тарьян
- Продвигает узлы, к которым часто происходит обращение, ближе к корню, поэтому может быть быстрее остальных деревьев
- Не хранит дополнительных данных в узлах
- Не гарантирует сбалансированности
- Не дружит с параллельными алгоритмами
- Проще в реализации

Splay-деревья, splaying

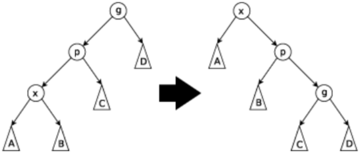
- Zig



- Zig-zag



- Zig-zig

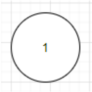


Splay-деревья, операции

- Поиск:
  - Ищем узел как в обычном двоичном дереве поиска
  - Выполняем серию splaying-ов до тех пор, пока найденный узел не окажется корнем
- Вставка:
  - Вставляем узел как обычно в двоичное дерево поиска
  - Выполняем серию splaying-ов до тех пор, пока вставленный узел не окажется корнем
- Удаление:
  - Удаляем узел как обычно
  - Тащим родителя удалённого узла в корень дерева

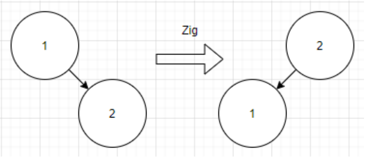
Пример

Вставка 1



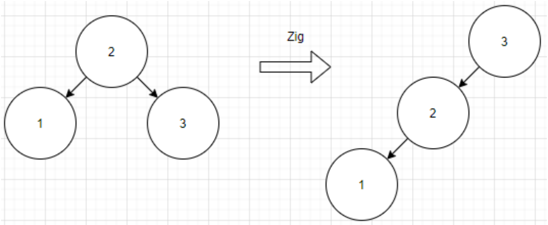
Пример

Вставка 2



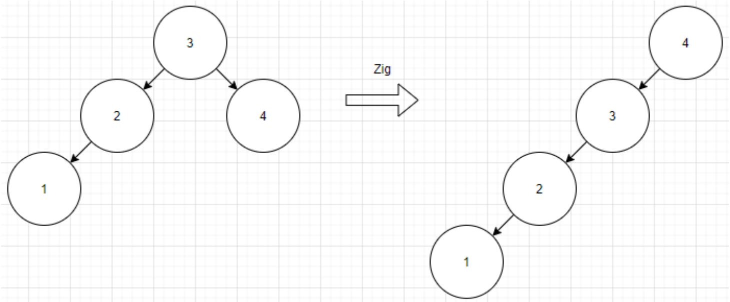
Пример

Вставка 3



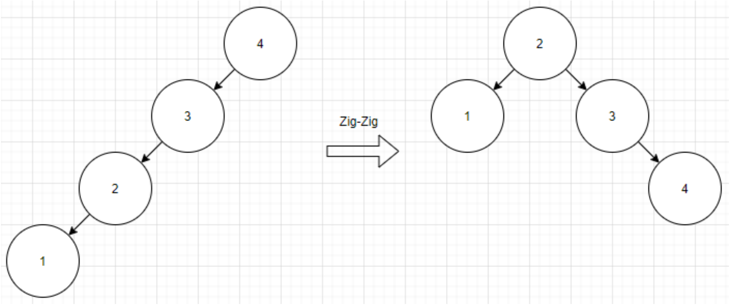
Пример

Вставка 4



Пример

Поиск 2



Псевдокод

Вставка

```
Node* add(Node* node, int value)
{
    if (value < node->value) {
        вставляем как обычно
        return splay(node->left);
    }
    else if (value > node->value) {
        вставляем как обычно
        return splay(node->right);
    }
    return splay(node);
}
```

Псевдокод

Процедура перевешивания узла

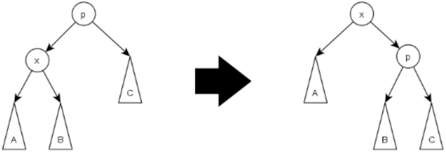
```
typedef enum Direction
{
    left,
    right
} Direction;

void attach(Node* parent, Node* child, Direction direction)
{
    if (direction == left)
        parent->left = child;
    else
        parent->right = child;
    if (child != NULL)
        child->parent = parent;
}
```

Псевдокод

Zig

```
void zig(Node* x)
{
    Node* p = x->parent;
    if (x == p->left) {
        Node* b = x->right;
        attach(x, p, right);
        attach(p, b, left);
    }
    else {
        Node* b = x->left;
        attach(x, p, left);
        attach(p, b, right);
    }
    x->parent = NULL;
}
```

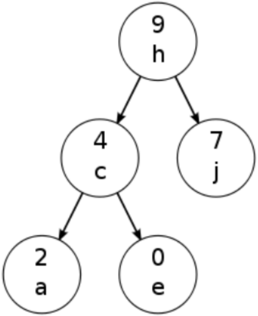


Замечания по реализации

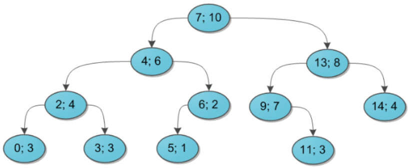
- Тут уже нужен родитель
  - Можно и без него, на прямом проходе, но концептуально сложнее
- Родитель добавляет инвариант (какой?), за ним надо следить
- Принцип “локализации нарушения инварианта”
- enum-ы для более человекочитаемого кода
  - Вообще, читаемость тут критична
- Сильно помогает рисовать картинки
- Есть известный вариант реализации со split/merge

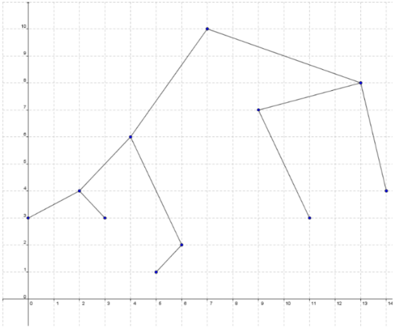
Декартовы деревья

- Бинарное дерево поиска и куча одновременно
  - Храним ключ и “приоритет”
  - Куча по приоритету
  - Приоритет выбирается случайно (!) при добавлении ключа
- Тоже лишь примерно сбалансировано
- Легко пишется
  - Поэтому любимо олимпиадниками



Декартово дерево и плоскость

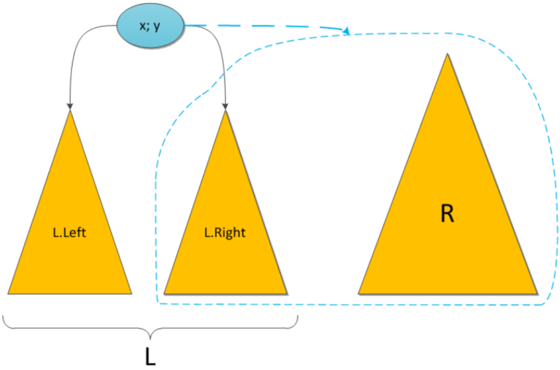




© (c) https://habrahabr.ru/post/101818/

Merge

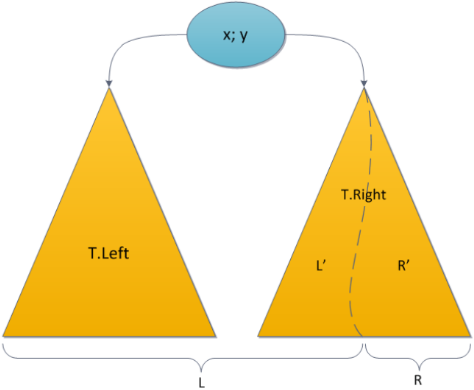
- Сливает два декартовых поддерева в одно
- Ключи в левом поддереве должны быть меньше ключей в правом



- Рекурсивно — сравниваем приоритеты вершин поддеревьев, если второе меньше, сливаем правое поддерево первого и второе, иначе наоборот

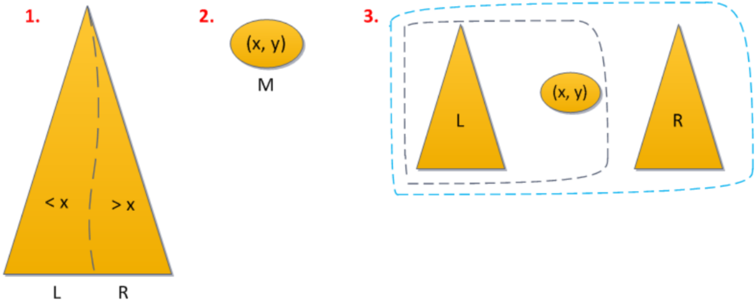
Split

- Разделяет декартово дерево на два
- Ключи в левом меньше заданного, ключи в правом больше



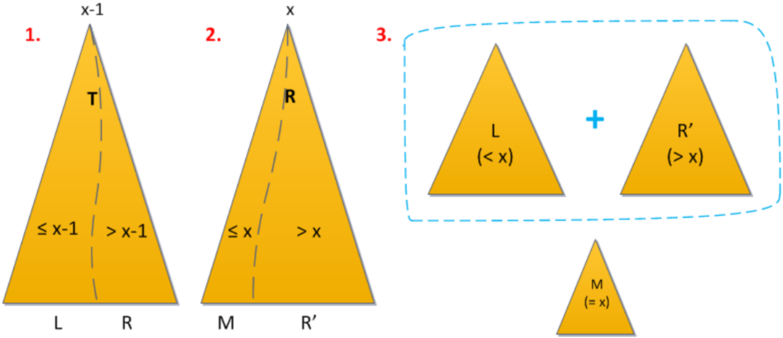
- Тоже рекурсивно — если ключ в корне меньше заданного, добавляем его и его левое поддерево в L, а правое поддерево — результат split от его корня

Добавление



- Делаем split по ключу добавляемого элемента
- Делаем merge L и M
- Делаем merge того, что получилось, и R

Удаление



- Делаем split по ключу удаляемого элемента
- Выкидываем удаляемый элемент
- Делаем merge остатков дерева