

Вычислительные выражения в F#

Юрий Литвинов
y.litvinov@spbu.ru

07.04.2023

Что это и зачем нужно

- ▶ Механизм управления процессом вычислений
 - ▶ Обобщённые функции
- ▶ В функциональных языках — единственный способ определить порядок вычислений
- ▶ Зачастую — нетривиальным образом (Async)
- ▶ Способ не писать кучу вспомогательного кода (сродни аспектно-ориентированному программированию)
- ▶ В теории ФП они называются монадами
- ▶ На самом деле, синтаксический сахар

Пример

Классический пример с делением на 0

Сопротивление сети из параллельных резисторов:

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$$

R_1 , R_2 и R_3 могут быть 0. Что делать?

- ▶ Бросать исключение — плохо
- ▶ Использовать option — много работы, но попробуем

Реализация вручную

divide

```
let divide x y =  
  match y with  
  | 0.0 -> None  
  | _ -> Some (x / y)
```

Реализация вручную

Само вычисление

```

let resistance r1 r2 r3 =
  let r1' = divide 1.0 r1
  match r1' with
  | None -> None
  | Some x -> let r2' = divide 1.0 r2
    match r2' with
    | None -> None
    | Some y -> let r3' = divide 1.0 r3
      match r3' with
      | None -> None
      | Some z -> let r = divide 1.0 (x + y + z)

```

То же самое, через Workflow Builder

```
type MaybeBuilder() =  
  member this.Bind(x, f) =  
    match x with  
    | None -> None  
    | Some a -> f a  
  member this.Return(x) =  
    Some x  
  
let maybe = new MaybeBuilder()
```

Само вычисление

```
let resistance r1 r2 r3 =  
  maybe {  
    let! r1' = divide 1.0 r1  
    let! r2' = divide 1.0 r2  
    let! r3' = divide 1.0 r3  
    let! r = divide 1.0 (r1' + r2' + r3')  
    return r  
  }
```

Некоторые синтаксические “похожести”

seq — это тоже Computation Expression

```
let daysOfTheYear =  
  seq {  
    let months =  
      ["Jan"; "Feb"; "Mar"; "Apr"; "May"; "Jun";  
       "Jul"; "Aug"; "Sep"; "Oct"; "Nov"; "Dec"]  
    let daysInMonth month =  
      match month with  
      | "Feb" -> 28  
      | "Apr" | "Jun" | "Sep" | "Nov" -> 30  
      | _ -> 31  
    for month in months do  
      for day = 1 to daysInMonth month do  
        yield (month, day)  
  }
```


Ещё один пример

```
let debug x = printfn "value is %A" x
```

```
let withDebug =
```

```
    let a = 1
```

```
    debug a
```

```
    let b = 2
```

```
    debug b
```

```
    let c = a + b
```

```
    debug c
```

```
    c
```

То же самое с Workflow

```
type DebugBuilder() =  
  member this.Bind(x, f) =  
    debug x  
    f x  
  member this.Return(x) = x  
  
let debugFlow = DebugBuilder ()  
  
let withDebug = debugFlow {  
  let! a = 1  
  let! b = 2  
  let! c = a + b  
  return c  
}
```

Что происходит

Как оно устроено внутри

- ▶ Bind создаёт цепочку continuation passing style-функций, возможно, с побочными эффектами
- ▶ Есть тип-обёртка (или монадический тип), в котором хранится состояние вычисления
 - ▶ Или, более функционально, которое представляет действие при вычислении
- ▶ let! вызывает Bind, return — Return, Bind принимает обёрнутое значение и функцию-continuation, return по необёрнутому значению делает обёрнутое
 - ▶ На самом деле, это просто композиция функций, но хитрая, потому что монадический тип
- ▶ WorkflowBuilder — это просто класс, в котором должны лежать методы с нужными сигнатурами, сам workflow — объект этого класса
 - ▶ Обычно он один, но в теории ничто не мешает хранить в нём побочные эффекты
 - ▶ Не путайте WorkflowBuilder с монадическим типом, это другое

Отступление про CPS

C#, код без CPS

```
public int Divide(int a, int b)
{
    if (b == 0)
    {
        throw new InvalidOperationException("div by 0");
    }
    else
    {
        return a / b;
    }
}
```

C#, то же с CPS

```
public T Divide<T>(int a, int b, Func<T> ifZero  
    , Func<int, T> ifSuccess)  
{  
    if (b == 0)  
    {  
        return ifZero();  
    }  
    else  
    {  
        return ifSuccess(a / b);  
    }  
}
```

Вызывающий решает, что делать, а не вызываемый.

То же на F#

Без CPS:

```
let divide a b =  
    if (b = 0)  
    then invalidOp "div by 0"  
    else (a / b)
```

C CPS:

```
let divide ifZero ifSuccess a b =  
    if (b = 0)  
    then ifZero()  
    else ifSuccess (a / b)
```

Примеры

```
let ifZero1 () = printfn "bad"  
let ifSuccess1 x = printfn "good %i" x  
let divide1 = divide ifZero1 ifSuccess1
```

```
let ifZero2() = None  
let ifSuccess2 x = Some x  
let divide2 = divide ifZero2 ifSuccess2
```

```
let ifZero3() = failwith "div by 0"  
let ifSuccess3 x = x  
let divide3 = divide ifZero3 ifSuccess3
```

let, «многословный» синтаксис

let $x = \text{something}$

равносильно

let $x = \text{something}$ **in** [выражение с x]

например,

let $x = 1$ **in**

let $y = 2$ **in**

let $z = x + y$ **in**

z

let и лямбды

fun x -> [выражение с x]

или

something |> (**fun** x -> [выражение с x])

и обращаем внимание, что:

let x = someExpression **in** [выражение с x]

someExpression |> (**fun** x -> [выражение с x])

let и CPS

```
let x = 1 in
  let y = 2 in
    let z = x + y in
      z
1 |> (fun x ->
2 |> (fun y ->
  x + y |> (fun z ->
    z)))
```

Теперь вспомним про Workflow-ы

```
let pipeInto expr f
  expr |> f
pipeInto (1, fun x ->
  pipeInto (2, fun y ->
    pipeInto (x + y, fun z ->
      z)))
```

Зачем

```
let pipeInto (expr, f) =  
  printfn "expression is %A" expr  
  expr |> f  
  
pipeInto (1, fun x ->  
  pipeInto (2, fun y ->  
    pipeInto (x + y, fun z ->  
      z)))
```

То же самое с Workflow

```
type DebugBuilder() =  
  member this.Bind(x, f) =  
    debug x  
    f x  
  member this.Return(x) = x  
  
let debugFlow = DebugBuilder ()  
  
let withDebug = debugFlow {  
  let! a = 1  
  let! b = 2  
  let! c = a + b  
  return c  
}
```

Более сложный пример, с делением

pipeInto, которая потом будет Bind

```
let pipeInto (expr, f) =  
  match expr with  
  | None ->  
    None  
  | Some x ->  
    x |> f
```

Более сложный пример, с делением

Сам процесс

```
let resistance r1 r2 r3 =
  let a = divide 1.0 r1
  pipeInto (a, fun a' ->
    let b = divide 1.0 r2
    pipeInto (b, fun b' ->
      let c = divide 1.0 r3
      pipeInto (c, fun c' ->
        let r = divide 1.0 (a + b + c)
        pipeInto (r, fun r' ->
          Some r
        )))
  )
  )
  )
```

Уберём временные let-ы

```
let resistance r1 r2 r3 =  
  pipeInto (divide 1.0 r1, fun a ->  
    pipeInto (divide 1.0 r2, fun b ->  
      pipeInto (divide 1.0 r3, fun c ->  
        pipeInto (divide 1.0 (a + b + c), fun r ->  
          Some r  
        )))
```


И отформатируем

```
let resistance r1 r2 r3 =  
  pipeInto (divide 1.0 r1, fun a ->  
    pipeInto (divide 1.0 r2, fun b ->  
      pipeInto (divide 1.0 r3, fun c ->  
        pipeInto (divide 1.0 (a + b + c), fun r ->  
          Some r  
        ))))
```

Сравним с оригиналом

```
let resistance r1 r2 r3 =  
  maybe {  
    let! r1' = divide 1.0 r1  
    let! r2' = divide 1.0 r2  
    let! r3' = divide 1.0 r3  
    let! r = divide 1.0 (r1' + r2' + r3')  
    return r  
  }
```

Подробнее про Bind

- ▶ $\text{Bind} : M\langle'T\rangle * ('T \rightarrow M\langle'U\rangle) \rightarrow M\langle'U\rangle$
- ▶ $\text{Return} : 'T \rightarrow M\langle'T\rangle$

let! $x = 1$ **in** $x * 2$

`builder.Bind(1, (fun x -> x * 2))`

Как в Haskell

```
let (>>=) m f = pipeInto(m, f)
```

```
let workflow =  
  1 >>= (+) 2 >>= (*) 42 >>= id
```

Option.bind и maybe

```
module Option =
```

```
  let bind f m =
```

```
    match m with
```

```
    | None ->
```

```
      None
```

```
    | Some x ->
```

```
      x |> f
```

```
type MaybeBuilder() =
```

```
  member this.Bind(m, f) = Option.bind f m
```

```
  member this.Return(x) = Some x
```

Содержимое типа-обёртки может иметь разный тип

Пример, серия запросов к БД

```
type DbResult<'a> =  
  | Success of 'a  
  | Error of string
```

```
type CustomerId = CustomerId of string  
type OrderId = OrderId of int  
type ProductId = ProductId of string
```

Пример, запросы

```
let getCustomerId name =  
  if (name = "")  
  then Error "getCustomerId failed"  
  else Success (CustomerId "Cust42")  
  
let getLastOrderForCustomer (CustomerId custId) =  
  if (custId = "")  
  then Error "getLastOrderForCustomer failed"  
  else Success (OrderId 123)  
  
let getLastProductForOrder (OrderId orderId) =  
  if (orderId = 0)  
  then Error "getLastProductForOrder failed"  
  else Success (ProductId "Product456")
```

Общение с БД вручную

```
let product =  
  let r1 = getCustomerId "Alice"  
  match r1 with  
  | Error e -> Error e  
  | Success custId ->  
    let r2 = getLastOrderForCustomer custId  
    match r2 with  
    | Error e -> Error e  
    | Success orderId ->  
      let r3 = getLastProductForOrder orderId  
      match r3 with  
      | Error e -> Error e  
      | Success productId ->  
        printfn "Product is %A" productId  
        r3
```


Builder

```
type DbResultBuilder() =
```

```
member this.Bind(m, f) =  
    match m with  
    | Error e -> Error e  
    | Success a ->  
        printfn "Successful: %A" a  
        f a
```

```
member this.Return(x) =  
    Success x
```

```
let dbresult = new DbResultBuilder()
```

Workflow

```
let product =  
  dbresult {  
    let! custId = getCustomerId "Alice"  
    let! orderId = getLastOrderForCustomer custId  
    let! productId = getLastProductForOrder orderId  
    printfn "Product is %A" productId  
    return productId  
  }  
printfn "%A" product
```

Композиция Workflow-ов

```
let subworkflow1 = myworkflow { return 42 }
```

```
let subworkflow2 = myworkflow { return 43 }
```

```
let aWrappedValue =  
  myworkflow {  
    let! unwrappedValue1 = subworkflow1  
    let! unwrappedValue2 = subworkflow2  
    return unwrappedValue1 + unwrappedValue2  
  }
```

Вложенные Workflow-ы

```
let aWrappedValue =  
  myworkflow {  
    let! unwrappedValue1 = myworkflow {  
      let! x = myworkflow { return 1 }  
      return x  
    }  
    let! unwrappedValue2 = myworkflow {  
      let! y = myworkflow { return 2 }  
      return y  
    }  
    return unwrappedValue1 + unwrappedValue2  
  }
```

ReturnFrom

```
type MaybeBuilder() =  
  member this.Bind(m, f) = Option.bind f m  
  member this.Return(x) =  
    printfn "Wrapping a raw value into an option"  
    Some x  
  member this.ReturnFrom(m) =  
    printfn "Returning an option directly"  
    m  
  
let maybe = new MaybeBuilder()
```

Пример

```
maybe { return 1 }
```

```
maybe { return! (Some 2) }
```

Зачем это

```
maybe {  
  let! x = divide 24 3  
  let! y = divide x 2  
  return y  
}
```

```
maybe {  
  let! x = divide 24 3  
  return! divide x 2  
}
```

Первый и второй законы монад

- Bind и Return должны быть взаимно обратны

```
myworkflow {  
  let originalUnwrapped = something  
  let wrapped = myworkflow { return originalUnwrapped }  
  let! newUnwrapped = wrapped  
  assertEquals newUnwrapped originalUnwrapped  
}  
  
myworkflow {  
  let originalWrapped = something  
  let newWrapped = myworkflow {  
    let! unwrapped = originalWrapped  
    return unwrapped  
  }  
  assertEquals newWrapped originalWrapped  
}
```


Или то же самое на Haskell

```
return x >>= f == f x  
mv >>= return == mv
```

Или через монадную композицию ($f \gg= g = \lambda x \rightarrow (f\ x \gg= g)$):

```
return >=> f == f  
f >=> return == f
```

В Haskell монады синтаксически приятнее

Третий закон монад

► Ассоциативность композиции

```
let result1 = myworkflow {  
  let! x = originalWrapped  
  let! y = f x  
  return! g y  
}  
  
let result2 = myworkflow {  
  let! y = myworkflow {  
    let! x = originalWrapped  
    return! f x  
  }  
  return! g y  
}  
  
assertEqual result1 result2
```

Или на Haskell

$$(mv \gg= f) \gg= g == mv \gg= (\lambda x \rightarrow (f x \gg= g))$$

Или через композицию:

$$(f \gg= g) \gg= h == f \gg= (g \gg= h)$$

Три закона монад обеспечивают адекватность их композиции.

Какие ещё методы есть у WorkflowBuilder

Имя	Тип	Описание
Delay	$(\text{unit} \rightarrow M\langle T \rangle) \rightarrow M\langle T \rangle$	Превращает в функцию
Run	$M\langle T \rangle \rightarrow M\langle T \rangle$	Исполняет вычисление
Combine	$M\langle T \rangle * M\langle T \rangle \rightarrow M\langle T \rangle$	Последовательное исполнение
For	$\text{seq}\langle T \rangle * (T \rightarrow M\langle U \rangle) \rightarrow M\langle U \rangle$	Цикл for
TryWith	$M\langle T \rangle * (\text{exn} \rightarrow M\langle T \rangle) \rightarrow M\langle T \rangle$	Блок try with
TryFinally	$M\langle T \rangle * (\text{unit} \rightarrow \text{unit}) \rightarrow M\langle T \rangle$	Блок finally
Using	$T * (T \rightarrow M\langle U \rangle) \rightarrow M\langle U \rangle$ when 'U :> IDisposable	use
While	$(\text{unit} \rightarrow \text{bool}) * M\langle T \rangle \rightarrow M\langle T \rangle$	Цикл while
Yield	$T \rightarrow M\langle T \rangle$	yield или ->
YieldFrom	$M\langle T \rangle \rightarrow M\langle T \rangle$	yield! или ->>
Zero	$\text{unit} \rightarrow M\langle T \rangle$	Обёрнутое ()

Можно определять свои методы

```
type Slide = { Header: string }
```

```
type Deck = { Title: string; Slides: Slide list }
```

```
type SlideBuilder() =  
  member inline _.Yield(()) = ()
```

```
[<CustomOperation("header")>]  
member inline _.Header((), header: string) : Slide =  
  { Header = header }
```

```
let slide = SlideBuilder()
```

Как использовать

```
slide {  
  header "Hello world!"  
}
```

Определим набор слайдов

```
[<RequireQualifiedAccess>]
```

```
type DeckProperty = Title of string | Slide of Slide
```

```
type DeckBuilder() =
```

```
  member inline _.Yield(()) = ()
```

```
  member inline _.Yield(slide: Slide) = DeckProperty.Slide slide
```

```
  member inline _.Run(prop) =
```

```
    match prop with
```

```
    | DeckProperty.Title title -> { Title = title; Slides = [] }
```

```
    | DeckProperty.Slide slide -> { Title = ""; Slides = [ slide ] }
```

```
[<CustomOperation("title")>]
```

```
  member inline _.Title((), title: string) = DeckProperty.Title title
```

Как использовать

```
deck {  
  yield slide {  
    header "Hello world!"  
  }  
  
  yield slide {  
    header "Slide2"  
  }  
}
```


А можно и без Yield

```
[<RequireQualifiedAccess>]
```

```
type DeckProperty =
```

```
  | Title of string
```

```
  | Slide of Slide
```

```
type DeckBuilder() =
```

```
  member inline _.Yield(()) = ()
```

```
  member inline _.Yield(slide: Slide) = DeckProperty.Slide slide
```

```
  member inline _.Delay(f: unit -> DeckProperty list) = f ()
```

```
  member inline _.Delay(f: unit -> DeckProperty) = [ f () ]
```

```
  member inline _.Combine(newProp: DeckProperty, previousProps: DeckProperty list) = newProp :: previousProps
```

```
  member inline x.For(prop: DeckProperty, f: unit -> DeckProperty list) = x.Combine(prop, f ())
```

```
  member inline x.For(prop: DeckProperty, f: unit -> DeckProperty) = [prop; f()]
```

```
  member inline x.Run(props: DeckProperty list) =
```

```
    props
```

```
    |> List.fold
```

```
      (fun deck prop ->
```

```
        match prop with
```

```
        | DeckProperty.Title title -> { deck with Title = title }
```

```
        | DeckProperty.Slide slide -> { deck with Slides = deck.Slides @ [ slide ] })
```

```
    { Title = "", Slides = [] }
```

```
  member inline x.Run(prop: DeckProperty) = x.Run([ prop ])
```

```
[<CustomOperation("title")>]
```

```
  member inline _.Title((), title: string) = DeckProperty.Title title
```

Моноиды

Немного алгебры

Множество с бинарной операцией

- ▶ Замкнутость относительно операции
- ▶ Ассоциативность
- ▶ Наличие нейтрального элемента

Например, $[a] @ [b] = [a; b]$

Пример

```
type OrderLine = {Quantity : int; Total : float}
```

```
let orderLines = [  
  {Quantity = 2; Total = 19.98};  
  {Quantity = 1; Total = 1.99};  
  {Quantity = 2; Total = 3.98}; ]
```

```
let addLine line1 line2 =  
  {Quantity = line1.Quantity + line2.Quantity;  
   Total = line1.Total + line2.Total}
```

```
orderLines |> List.reduce addLine
```

Эндоморфизмы

Эндоморфизм — функция, у которой тип входного значения совпадает с типом выходного

Множество функций + композиция — моноид, если функции — эндоморфизмы

Пример

```
let plus1 x = x + 1
```

```
let times2 x = x * 2
```

```
let subtract42 x = x - 42
```

```
let functions = [
```

```
  plus1;
```

```
  times2;
```

```
  subtract42 ]
```

```
let newFunction = functions |> List.reduce (>>)
```

```
printfn "%d" <| newFunction 20
```

Не только эндоморфизмы могут образовать моноид

```
type Predicate<'A> = 'A -> bool
```

```
let predAnd p1 p2 x =  
  if p1 x  
  then p2 x  
  else false
```

```
let predicates = [isMoreThan10Chars; isMixedCase;  
  isNotDictionaryWord]
```

```
let combinePredicates = predicates |> List.reduce predAnd
```

Полезные ссылки

Откуда взяты примеры

- ▶ <https://fsharpforfunandprofit.com/series/computation-expressions.html> — описание Workflow-ов в F# без использования слова “монада”
- ▶ <http://www.slideshare.net/ScottWlaschin/fp-patterns-buildstuffit> — отличная презентация про ФП вообще, включая Railroad programming и монады
- ▶ <https://habr.com/ru/articles/127556/> — перевод статьи с простым объяснением монад в Haskell
- ▶ <https://sleepyfran.github.io/blog/posts/fsharp/ce-in-fsharp/> — пример с DSL на Workflow-ax