Сложность алгоритмов

Юрий Литвинов
y.litvinov@spbu.ru

18.09.2024

Сложность

- Быстрее — не значит лучше!
  - Время работы программиста может быть дороже времени работы программы
  - Но может быть и наоборот, если программа часто используется
- Сложность
  - Вычислительная (время работы)
  - Емкостная (объём потребляемой памяти)
  - Они взаимосвязаны
- Вычислительную сложность непонятно, как измерять
  - Зависит от машины, на которой считаем
  - Зависит от объёма входных данных
  - Зависит от самих входных данных

Асимптотическая сложность

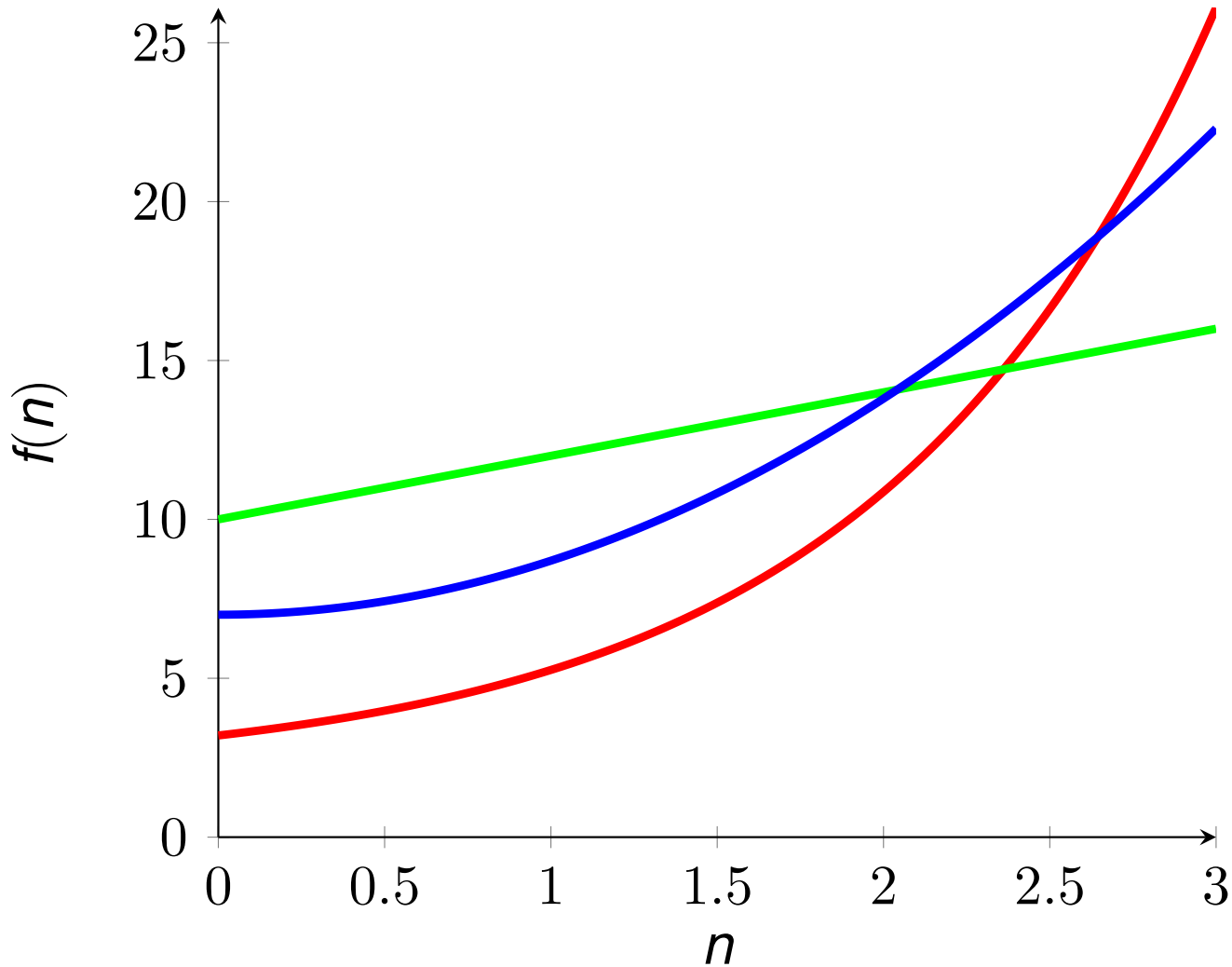
- O-символика

$$f(n) \in O(g(n))$$

$$\exists C > 0, n_0 : \forall n > n_0 \;\; f(n) \leq C(g(n))$$

- То есть “f принадлежит классу функций $O(g)$, если начиная с некоторого n_0 она ограничена сверху функцией g с точностью до некоторого наперёд заданного множителя”
- Или ещё более то есть — “f растёт не быстрее g”

Пример



Правила вычисления трудоёмкости

- Оператор S_1 выполняется за время $T_1(n)$, имеющее порядок $O(f(n))$, оператор S_2 — за время $T_2(n)$, имеющее порядок $O(g(n))$, тогда S_1; S_2 выполняется за время $O(max(f(n), g(n)))$
  - Следствие: $O(n^2 + n) = O(n^2)$
- Если S_1 внутри себя порядка $O(f(n))$ раз вызывает S_2, то итоговая трудоёмкость равна $O(f(n) * g(n))$
  - Это правило позволяет анализировать циклы

Пример: пузырёк

```
for (int i = 0; i < n; ++i)          // O((n - 1) + ... + 1) = O(n * (n - 1) / 2) = O(n^2)
  for (int j = n; j > i; --j)        // O((n - i) * 1) = O(n - i)
    if (a[j - 1] > a[j])             // O(1)
      swap(a[j - 1], a[j]);          // O(1)
```

- Бывают сортировки за $O(n * log(n))$
- Бывает сортировка подсчётом, за $O(n)$
- Это важно, $log_2(1000000) \sim 20$
  - Обратите внимание, $O(log_2(n)) = O(ln(n))$

Анализ рекурсивных алгоритмов

```
int recursiveFactorial(int a) {
    if (a <= 1)
        return 1;
    else
        return a * recursiveFactorial(a - 1);
}
```

- $T(n) = c + T(n-1)$ при $n > 1$, и d, при $n <= 1$
- $T(n) = c + T(n-1) = 2c + T(n-2) = ... = i * c + T(n-i) = ... = (n-1) * c + T(1) = (n-1) * c + d$

Числа Фибоначчи

- $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, F_0 = 1, F_1 = 1$
- $F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$
- Рекурсивное решение — ?
- Итеративное решение — ?
- Решение за $O(log(n))$:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

- Формула Бине:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Пример времён вычисления в зависимости от трудоёмкости алгоритма

Сложность алгоритма	$n = 10$	$n = 10^3$	$n = 10^6$
$log(n)$	1 с.	2 с.	5 с.
n	1 с.	1 мин. 40 с.	27 ч. 46 мин. 40 с.
n^2	1 с.	2 ч. 46 мин. 40 с.	$\sim$ 317 лет
2^n	1 с.	$\sim 40 \times 10^{21}$ лет	Очень много