1 Sea el eigenvector complejo es $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$

2 Eso significa que el campo es

$\vec{E}(t) \propto \vec{v}' \cos\omega t + \vec{v}'' \sin\omega t$

3 Tomando componentes

$E_x = v'_x \cos\omega t + v''_x \sin\omega t$

$E_y = v'_y \cos\omega t + v''_y \sin\omega t$

4 Eliminando $\cos\omega t$

$v'_y E_x - v'_x E_y = (v'_y v''_x - v'_x v''_y) \sin\omega t$

5 y eliminando $\sin\omega t$

$v''_y E_x - v''_x E_y = (v''_y v'_x - v''_x v'_y) \cos\omega t$

6 De donde podemos despejar

$\sin\omega t = \frac{v'_y E_x - v'_x E_y}{v'_y v''_x - v'_x v''_y}$

$\cos\omega t = -\frac{v''_y E_x - v''_x E_y}{v'_y v''_x - v'_x v''_y}$

7 Con $\cos^2 + \sin^2 = 1$, podemos eliminar al tiempo escribiendo

$\vec{E}^T M \vec{E} = 1$

8 donde escribimos $\vec{E}$ como vector columna y M es una matriz con componentes

$M_{xx} = |v_y|^2/D$

$M_{xy} = -(v'_x v'_y + v''_x v''_y)/D$

$M_{yy} = |v_x|^2/D$

con

$D = (v'_y v''_x - v'_x v''_y)^2.$

9 La ecuacion secular para esta matriz es

$\lambda^2 - \lambda \mathrm{tr}(M) + \det(M) = 0$

con soluciones

$\lambda_\pm = \left(\mathrm{tr}(M) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(M)^2 - 4\det(M)}\right)/2$

a las que corresponden eigenvectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$ (no confundir con polarizaciones circulares derecha e izquierda).

10 Escribiendo $\vec{E} = E_+|+\rangle + E_-|-\rangle$ obtenemos
$\vec{E}^T M \vec{E} = \lambda_- E_-^2 + \lambda_+ E_+^2 = 1$
que es la ecuacion de una elipse con semieje mayor
$a = 1/\sqrt{\lambda_-}$
y semieje menor
$b = 1/\sqrt{\lambda_+}$

11 Las direcciones correspondientes a estos semiejes son
$\tan\psi_- = (\lambda_- - M_{xx})/M_{xy}$
$\tan\psi_+ = (\lambda_+ - M_{xx})/M_{xy}$

12 Para verificarlo hice un programita en gnuplot (anexo).

I. DIAGONALIZATION

Eigenvalues and eigenvectors of a 2×2 symmetric matrix $M|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$, with

$$\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Then,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} M_{xx}-\lambda & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy}-\lambda \end{vmatrix} &= (M_{xx}-\lambda)(M_{yy}-\lambda) - M_{xy}^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(M_{xx}+M_{yy}) + M_{xx}M_{yy} - M_{xy}^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda \mathrm{Tr}[M] + \mathrm{Det}[M] = 0 \\ \to \lambda_\pm &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}[M] \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}[M])^2 - 4\mathrm{Det}[M]}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

The eigenvectors follow from

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{xx}-\lambda & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\ (M_{xx}-\lambda)a + M_{xy}b &= 0 \\ M_{xy}a + (M_{yy}-\lambda)b &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow b &= \frac{\lambda - M_{xx}}{M_{xy}} a, \\
\rightarrow \mathbf{V} &= \frac{a}{M_{xy}} \begin{pmatrix} M_{xy} \\ \lambda - M_{xx} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3}
$$

and use a to normalize the vector, then

$$
\mathbf{v}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{|M_{xy}|^2 + |\lambda_{\pm} - M_{xx}|^2}} \begin{pmatrix} M_{xy} \\ \lambda_{\pm} - M_{xx} \end{pmatrix}, \tag{4}
$$

with $\mathbf{v}_{\pm} \cdot \mathbf{v}_{\pm}^T = 1$, and $\mathbf{v}_{\mp} \cdot \mathbf{v}_{\pm} = 0$ can be easily verified for the case of real M. If M is complex the complex eigenvectors are not necessarily perpendicular.