$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

① $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(n)x(n-k)$

② $\phi_{yy}(m)=\phi_{xx}(m)*h(m)*h(-m)=\phi_{xy}(m)*h(-m)$

③ $P_{yy}(w)=P_{xx}(w)\cdot H(w)\cdot H^{*}(w)=P_{xx}(w)|H(w)|^2$

④ $\phi_{xx}(m)\longleftrightarrow P_{xx}(w)$ (傅里叶)　$\phi_{xx}(m)\xleftrightarrow{z}\Phi_{xx}(z)$

⑤ $P_{xx}(w)=\Phi_{xx}(z)\big|_{z=e^{jw}}$

$\phi_{xx}(m)$

① 对称　② 斜对角线元素相等　③ R为非负定

④ $\phi_{xx}(0)$最大为正数　($\phi_{xx}(0)=m_x^2+\sigma_x^2$)

⑤ $\phi_{xx}(m)$为实数

$P_{xx}(w)$

① 非负　② 实偶函数　③ 2π为周期

相关卷积定理

$$\begin{cases} e=a*b \\ f=c*d \\ \phi_{ef}(m)=\phi_{ac}(m)*\phi_{bd}(m) \end{cases}$$

Vina

1. 维纳-霍夫方程

$$\phi_{xs}(k)=\sum_{m=0}^{\infty} h_{opt}(m)\,\phi_{xx}(k-m) \qquad k\geq 0$$

2. 维纳滤波（时）

$$J(w)=E[e_n^2]=\sigma_d^2-2P^TW+W^TRW$$

$$J_{min}=\sigma_d^2-P^TW_{opt}=\sigma_d^2-W_{opt}^T\cdot P \quad \text{(都是列向量)} \qquad W_{opt}=R^{-1}P \Longrightarrow P=R\cdot W_{opt} \quad \text{(大是负)}$$

$$R=E[x(n)x^T(n)] \quad , \quad P=E[x(n)d(n)]$$

3. 维纳滤波 (z)（习是负） （$x=s+v$，s与v不相关）

① $\Phi_{xx}(z)=\sigma_w^2B(z)B(z^{-1})$

② $H_{opt}(z)=\dfrac{1}{\sigma_w^2B(z)}\left[\dfrac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})}\right]_+$ 因果 $\quad\left(H_{opt}=\dfrac{\Phi_{xs}(z)}{\Phi_{xx}(z)}\right.$ 非因果 $\left.\right)$

③ $E[e^2]_{min}=\dfrac{1}{2\pi j}\oint[\Phi_{ss}(z)-H_{opt}(z)\cdot\Phi_{xs}(z^{-1})]z^{-1}dz$

4. 因果维纳预测值.（N步）（$v=0$） $\quad d(n)=s(n+N)$

① $\Phi_{xx}(z)=\Phi_{xs}(z)=\Phi_{ss}(z)=\sigma_w^2B(z)B(z^{-1})$

② $H_{opt}(z)=\dfrac{1}{\sigma_w^2B(z)}\left[\dfrac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})}\cdot z^N\right]=\dfrac{1}{B(z)}[z^N B(z)]_+$

$$z^N B(z) \updownarrow b(n+N)u(n)$$

③ $J_{min}=\sigma_w^2\sum_{k=0}^{N-1}b^2(k)$

④ $a_{pk}=-h(k-1)$ （p步预测）（Yule-walker方程）

LMS

① $y(n) = \hat{W}^T(n)\, X(n)$

② $e(n) = d(n) - y(n)$

③ $\hat{W}(n+1) = \hat{W}(n) + 2\mu X(n) e(n)$

④ $\hat{\nabla} J(w) = -2X(n)e(n)$

最速下降法

$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}$，$\lambda$为R的特征值

$W(n+1) = W(n) + \mu[-\nabla J(W(n))]$

$= W(n) + 2\mu[P - RW(n)]$

$\nabla J(w) = -2P + 2RW(n)$

谱估计

1、经典：BT法

$\hat{\Phi}'_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m)$，无偏、方差大

$\Phi_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m)$，有偏、方差小、均方误差小

2. 周期图法

$X_N(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jwn}$

$I_N(w) = \frac{1}{N}|X_N(e^{jw})|^2$，有偏、不是一致估计

$\hat{P}_{xx}(w) = I_N(w)$

$\downarrow$ 改进

Bartlette 平均周期图法，方差降为原来的 $\frac{1}{L}$.

Yule-walker

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(-1) & \Phi_{xx}(-2) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(-1) \\ \Phi_{xx}(2) & \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{p_1} \\ a_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[e^2]_{min} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

二阶预测

$$w(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow x(n)$$

3. 参数化模型

$$\begin{cases} \text{ARMA}(p,q) \\ \text{MA}(q) \\ \text{AR}(p) \longrightarrow H(z) = \dfrac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \end{cases}$$

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + w(n)$$

$$\hat{P}_{xx}(w) = \sigma_w^2 \, |H(w)|^2$$

一、

1. 宽平稳(广义平稳)

$$\begin{cases} ①\ 均值为常数.\ E[x(n)] = m_x,\ 与n无关 \\ ②\ 自相关函数只与时间间隔相关.\ 与n无关.\ \longrightarrow E[x(n_1)x(n_2)] = \phi_{xx}(n_2-n_1) = \phi_{xx}(m) \end{cases}$$

2. 判自相关函数 (页15, 页16)

$$\phi_{xx}(m) = E[x(n)\,x(n+m)]$$

性质
$$\begin{cases} ①\ \phi_{xx}(m) = \phi_{xx}(-m) \\ ②\ \phi_{xx}(0)\ 最大，且为正. \\ ③\ \phi_{xx}(0) = m_x^2 + \sigma_x^2 \end{cases}$$

④ 若 $x(n)$ 不含周期分量，则

$$\phi_{xx}(\infty) = m_x^2$$

3. 判自相关矩阵 (页14)

$$R = E[x(n)\,x^T(n)] = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(-1) & \cdots & \phi_{xx}(1-n) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \phi_{xx}(-1) \\ \phi_{xx}(n-1) & \cdots & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

$$x(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(1) \end{pmatrix}$$

性质
$$\begin{cases} ①\ R为对称矩阵 \\ ②\ R为\text{Toeplitz}矩阵 \longrightarrow 每条对角线上的元素分别相等 \\ ③\ R为非负定 \\ ④\ \phi_{xx}(0)\ 最大 \\ ⑤\ \phi_{xx}(m)\ 为实数 \end{cases}$$

4. 时间平均

各态历经

$$\langle x_n \rangle \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) \xrightarrow[成立]{依概率1} = m_x$$

$$\langle x_n x_{n+m} \rangle \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)\,x(n+m) \xrightarrow[成立]{依概率1} = \phi_{xx}(m)$$

$\langle x_n \rangle$ m_x

所以只有各态历经，才可以用时间平均来代替集合平均。

CPs：一般证明一个随机过程，若满足 $\begin{cases} E[x(n)] = m_x \\ E[x(n_1)x(n_2)] = \sigma_{xx}(m) \end{cases}$ 即广义平稳，但 $\langle x_n \rangle \neq m_x$，即非各态历经。)

5、(1) 自功率谱（页17）

$$\begin{cases} P_{xx}(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sigma_{xx}(m)\, e^{-jwm} \\ \sigma_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(w)\, e^{jwm}\, dw \end{cases} \rightarrow$$

(平稳随机信号)（不过一般默认平稳）

$P_{xx}(w)$ 与 $\sigma_{xx}(m)$ 互为傅里叶变换对

↓ 离散域用Z变换

性质 $\begin{cases} ① 非负实数 \quad ② P_{xx}(w) = P_{xx}(-w) \\ ③ 2\pi 为周期 \end{cases}$

（补：$P_{xx}(w) = \Phi_{xx}(z)\big|_{z=e^{jw}}$）

$\Phi_{xx}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{xx}(m) \cdot z^{-m}$（Z变换）

(2) 互相关函数，互功率谱

$\sigma_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)]$

$$\begin{cases} \sigma_{xy}(m) = \sigma_{yx}(-m) \\ \Phi_{xy}(z) = \Phi_{yx}(z^{-1}) \\ P_{xy}(e^{jw}) = P_{yx}(e^{-jw}) \end{cases}$$

(3) 白噪声 $x(n)$（均值为 m_x，方差为 σ_x^2）

则 $\begin{cases} \sigma_{xx}(m) = \sigma_x^2\, \delta(m) \quad \Phi_{xx}(z) = \sigma_x^2 \\ P_{xx}(w) = \sigma_x^2 \end{cases}$（白噪声功率谱无限宽）（实际上不存在）

6、相关卷积定理（页6、页20、页21）

若 $\begin{cases} e(n) = a(n) * b(n) \\ f(n) = c(n) * d(n) \end{cases} \xrightarrow{则} \sigma_{ef}(m) = \sigma_{ac}(m) * \sigma_{bd}(m)$

↓ 卷积的相关　　↓ 相关的卷积

应用到信号处理中

$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$

⇓

$\sigma_{yy}(m) = \sigma_{xx}(m) * h(m) * h(-m)$

7. 求输出特性 (页18、页27 ①②③，页31 17，

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

① $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n)\, x(n-k)$

② $\phi_{yy}(m) = \phi_{xx}(m) * h(m) * h(-m) = \phi_{xy}(m) * h(-m)$

③ $P_{yy}(\omega) = P_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^{*}(\omega) = P_{xx}(\omega)\,|H(\omega)|^2$

④ $\phi_{xx}(m) \longleftrightarrow P_{xx}(\omega)$ (傅里叶) $\quad \phi_{xx}(m) \xleftrightarrow{z} \Phi_{xx}(z)$

⑤ $P_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

$$\begin{cases} \phi_{yy}(0) = m_y^2 + \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}(\omega)\, d\omega \\ \phi_{yy}(\infty) = m_y^2 \quad / \quad m_y = E[y(n)] = E[x(n) * h(n)] \end{cases}$$ (一般考题)

二、Vina

1. 维纳-霍夫方程（页10，证明）

$$\phi_{xs}(k)=\sum_{m=0}^{\infty} h_{opt}(m)\,\phi_{xx}(k-m) \qquad k\geq 0$$

2. 维纳滤波（时）（页29，页32(1)，页42 → 按页43答案），页40(1)

$$J(w)=E[e_n^2]=\sigma_d^2-2P^TW+W^TRW$$

（都是列向量）　　（大题）

$$J_{min}=\sigma_d^2-P^TW_{opt}=\sigma_d^2-W_{opt}^T\cdot P \qquad W_{opt}=R^{-1}P \Longrightarrow P=R\cdot W_{opt}$$

$$R=E[X(n)X^T(n)] \quad , \quad P=E[X(n)d(n)]$$

3. 维纳滤波（Z）（习题）（$x=s+v$，s与v不相关）（P37 例2.1，页19，页24）（必考题）※※※

① $\Phi_{xx}(z)=\sigma_w^2B(z)B(z^{-1})$

② $H_{opt}(z)=\dfrac{1}{\sigma_w^2B(z)}\left[\dfrac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})}\right]_+$ 因果　　$\left(H_{opt}=\dfrac{\Phi_{xs}(z)}{\Phi_{xx}(z)}\right.$ 非因果 $\left.\right)$

③ $E[e^2]_{min}=\dfrac{1}{2\pi j}\oint\left[\Phi_{ss}(z)-H_{opt}(z)\cdot\Phi_{xs}(z^{-1})\right]z^{-1}dz$

4. 因果维纳预测值.（N步）（$v=0$）　$d(n)=s(n+N)$（页72，页27.28，

① $\Phi_{xx}(z)=\Phi_{xs}(z)=\Phi_{ss}(z)=\sigma_w^2B(z)B(z^{-1})$

② $H_{opt}(z)=\dfrac{1}{\sigma_w^2B(z)}\left[\dfrac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})}\cdot z^N\right]=\dfrac{1}{B(z)}\underset{\Updownarrow}{\left[z^NB(z)\right]_+}$

$b(n+N)u(n)$

③ $J_{min}=\sigma_w^2\sum_{k=0}^{N-1}b^2(k)$

5. Yule-walker 方程

2阶预测

(考试应该不会再高了)

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(-1) & \Phi_{xx}(-2) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(-1) \\ \Phi_{xx}(2) & \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{p_1} \\ a_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[e^2]_{min} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

① $a_{pk} = -h(k-1)$ (P步预测)(与Vina结合，求W_{opt})

(页36，页29)

② (与AR模型结合)

$a_1 = a_{p_1}$，$a_2 = a_{p_2}$

(页53，页56，页60)

$$\begin{cases} H(z) = \dfrac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \\ x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + w(n) \\ \hat{P}_{xx}(w) = \sigma_w^2 \, |H(w)|^2 \end{cases}$$

三.

1. 卡尔曼与维纳区别，卡尔曼的基本思想

页9

2. 新息性质.

$$\tilde{Y}_k = Y_k - \hat{Y}_k' \quad (\text{新息})$$

① 新息序列是相互正交的序列：$E[\tilde{Y}_n \cdot Y_k^T] = 0$，$1 \le k \le n-1$ (相互正交、无冗余)

② n时刻的新息，$\tilde{Y}_n$，与过去的观测数据 $Y_1, Y_2, \cdots Y_{n-1}$ 正交.
$E[\tilde{Y}_n \cdot Y_k^T] = 0$

$$\{Y_1 \cdots Y_n\} \rightleftharpoons \{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \cdots \tilde{Y}_n\}$$

③ 新息序列 $\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2 \cdots \tilde{Y}_n$ 和数据序列 $Y_1 \cdots Y_n$ 存在一一对应关系，可相互转化。

3. 建立状态方程，(输出)观测方程

(页38)

4. P_{54}页公式，　　P_{56}页例题

$x(k) = A_k x_{k-1} + W_{k-1}$　　状态方程

$y_k = C_k x_k + v_k$　　量测方程

$\hat{x}_k = A_k \hat{x}_{k-1} + H_k(y_k - C_k A_k \hat{x}_{k-1})$　　递推公式.

重：　1. 问答.
　　　3. 大题.
　　　其它都很无聊

四.

1. 最速下降、LMS(最小均方算法)、RLS(最小二乘法)(不记公式)

LMS

① $y(n) = \hat{W}^T(n)\,x(n)$

② $e(n) = d(n) - y(n)$

③ $\hat{W}(n+1) = \hat{W}(n) + 2\mu x(n) e(n)$

④ 令 $J(w) = -2x(n)e(n)$

主要是针对某个题目,找到对应符号的含义

$x(n)$:输入向量

$W(n)$:权向量

$y(n)$:实际输出(系统输出)

$d(n)$:期望输出(理论值)

$e(n)$:误差 令 $J(w) = E[e^2(n)]$

μ:步长参数 ※※

{ ① μ 小了,收敛速度慢,μ 大了会导致发散

② 取值范围: $0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}$,$\lambda$ 为 R 的特征值(页41,页40,求λ范围)

当 μ 在这个范围内时,算法收敛

最速下降法

$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}$,$\lambda$ 为 R 的特征值

$W(n+1) = W(n) + \mu[-\nabla J(W(n))]$

$= W(n) + 2\mu[P - RW(n)]$

$\nabla J(w) = -2P + 2RW(n)$

(页13,最速下降法,与LMS的区别)

(页32(2) 根据LMS公式求 $\hat{W}(n+1)$)

(页40(2) 同上)

RLS：　$\varepsilon(k,w)=\sum_{i=1}^{k}\lambda^{k-i}|e(i)|^2$

$$\Phi(n)=\lambda^{1}\Phi(n-1)+\lambda^{0}x(n)x^{T}(n)$$

λ ↓ 遗忘因子，

优点：　收敛快，收敛速度对R的特征值分布不敏感。

(LMS：收敛速度与μ的取值有关，而μ受R的特征值分布的影响，收敛较慢)

缺点：　计算量大，$O(n^2)$

(LMS：　$O(n)$)

2、几个概念

① 失调量(LMS)　$M=\frac{J_{ex}(\infty)}{J_{min}}\approx \mu\, tr[R]$

② 矩阵条件数：

$$cond(R)=\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$，如果条件数很大，则R为病态矩阵

③ LMS算法改进(针对收敛慢)

1) 用归一化的LMS算法，将μ替换成 $\mu(n)=\frac{\tilde{\mu}}{\|x(n)\|}$，$0<\tilde{\mu}<1$

2) 对输入矢量$x(n)$作变换，去掉其相关性(白化)，减小特征值的动态范围，从而提高收敛速度

3) 使用子带域自适应方法。

3、自适应滤波的应用。(画图)

(页44，页45)

(页55，页70)(大概率不会考)

五

1、估计（页67）

① 无偏估计. $E[\hat{\theta}]=\theta$　　$B=\theta-E[\hat{\theta}]$

② 最小方差估计. 最小化 $\sigma_{\hat{\theta}}^2=E[(\theta-E[\hat{\theta}])^2]$，谁方差小 谁更有效

③ 均方误差：$E[e^2]=B^2+\sigma_{\hat{\theta}}^2$

④ 一致估计：$N\to\infty$，$B\to 0$，$\sigma_{\hat{\theta}}^2\to 0$

2、经典谱估计（BT法，周期图法）（页64. 经典法 缺点）

① 经典：BT法（页48.

$\hat{r}'_{xx}(m)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x(n+m)$，无偏，方差大

$\hat{r}_{xx}(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x(n+m)$，有偏，方差小，均方误差小

② 周期图法（页46，根定义，页49.证明，页50计算，页51）

$X_N(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$

$I_N(\omega)=\frac{1}{N}|X_N(e^{j\omega})|^2$，有偏，不是一致估计

$\hat{P}_{xx}(\omega)=I_N(\omega)$

$\downarrow$ 改进（从信号角度看）（页46）

Bartlette 平均周期图法，方差降为原来的 $\frac{1}{L}$.

3、L-D递推算法

$\sigma_k^2=(1-|a_{kk}|^2)\sigma_{k-1}^2$，$|a_{kk}|$ 为反射系数 $|a_{kk}|<1$

时间复杂度：$O(p^2)$　　p为矩阵阶数

矩阵求逆：$O(p^3)$

4. 参数估计 (页63 极限, 页61 模型变换, 页68 页65) $w(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow x(n)$

① 参数化模型
- ARMA (p, q) (峰, 谷)
- MA (q) (谷)
- AR (p) (峰) $\longrightarrow$

※
$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$
$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k)+w(n)$$
$$\hat{P}_{xx}(w)=\sigma_w^2\,|H(w)|^2$$

(Yule-walker)
计算大题(必考) 与线性预测结合
(页53, 页56, 页60)

② 模型阶数 (p)
- 高: 会产生虚假的谱峰
- 低: 分辨率低

当达到p阶后, 方差不再下降, 即 $\sigma_1^2>\sigma_2^2>\cdots>\sigma_p^2=\sigma_{p+1}^2=\sigma_{p+2}^2=\cdots=\sigma_w^2$

③ 最大熵谱估计 (不考计算)

1) 思想: 已知 $\phi_{xx}(0)\cdots\phi_{xx}(p)$, 对 $m>p$ 的 $\phi_{xx}(m)$ 进行外推, 所推信号的自相关所对应的序列具有最大的熵。

2) 与AR的关系: 当 $x(n)$ 为高斯分布时, AR模型与最大熵谱估计等价。

5、前向预测与后向预测

系数相同

$$\hat{x}(n) = -a_{p1}x(n-1) - a_{p2}x(n-2) \cdots - a_{pp}x(n-p)$$

$$\hat{x}(n-p) = -a_{p1}x(n-(p-1)) - \cdots - a_{pp}x(n)$$

6、最小方差法

① 其解不是真正的功率谱，其解的反变换不等于 $x(n)$ 的自相关.

② 同阶次的 Capon 谱估计分辨率低于 AR估计.