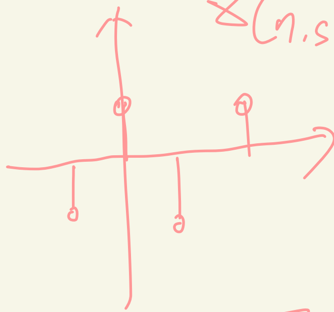
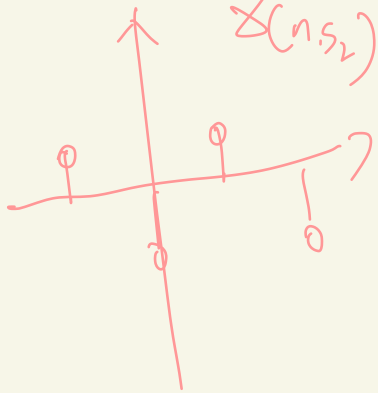
$x(n,s)$



$x(n,s_1)$



$x(n,s_2)$

① $n$ 确定，$x(n,s)$ 是 随机变量

② $s$ 确定，$x(n,s)$ 是 样本序列（确定）

③ $n,s$ 都确定，$x(n,s)$ 是 常数

④ $n,s$ 都不确定，$x(n,s)$ 是 随机过程

---

广义平稳（宽平稳）（二阶平稳）：

① 均值为常数，$E[x(n,s)] = m_x$（常数），与 $n$ 无关

一般 $s$ 不写

② 自相关函数只与时间间隔有关，与 $n$ 无关

$\phi_{xx}(n_1,n_2)=E[x(n_1)\cdot x^*(n_2)]=\phi_{xx}(n_2-n_1)=\phi_{xx}(m)$

③ 均方值有界，$E[|x(n)|^2]<\infty$（平均功率），一般都满足

只有各态历经过程，才可以用时间平均来代替集合平均.

时间平均:

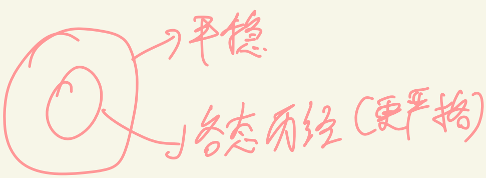
$$\langle x_n \rangle \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

$$\langle x_n x_{n+m} \rangle \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)\,x(n+m)$$

$$E[(x-y)^2] = E(x^2)+E(y^2)-2\underbrace{E(xy)}_{\text{表征:两个变量的相关性}}$$

如果 $\overset{\text{时间平均}}{\langle x(n)\rangle} = \overset{\text{统计平均}}{m_x}$, $\langle x(n)\,x(n+m)\rangle = \phi_{xx}(m)$

依概率1成立,对过程 $x(n)$ 是(宽)广义各态历经过程,简称各态历经。



$X(n,s)=A$，A是一方差不为0的随机变量（与n无关）

$\begin{cases} EX = m_X \\ R_{XX}(n) = E(X^2) - E(X)E(X) = DX \end{cases}$

证：平稳，但非各态历经

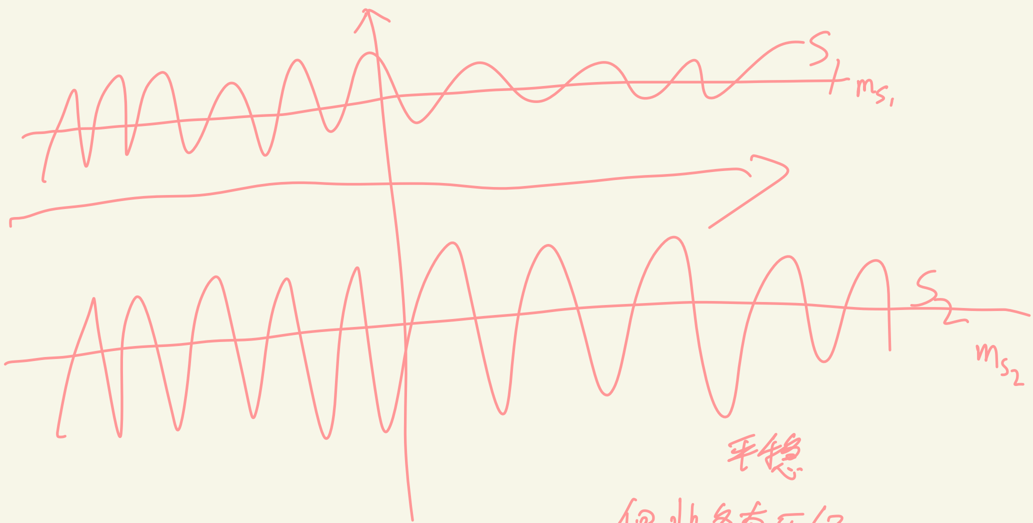
1. $E[X(n,s)] = E[A] = m_A$

$E[X(n_1)X(n_2)] = E[A\cdot A] = E[A^2]$，均与n无关，

平稳

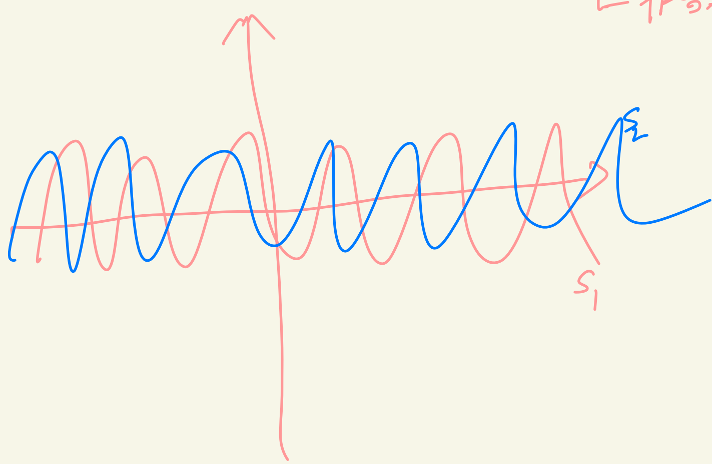
2. $\langle X_n \rangle = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N} X(n) = \frac{1}{2N+1}(\underbrace{A+\cdots+A}_{(2N+1)个}) = A \neq m_X$

∴ 非各态历经




平稳

但非各态历经




各态历经：

$S_1$与$S_2$各过程

都能经历一遍.

# 1.2 时域表示

自相关函数:

$\phi_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)]$，反映了 $x(n)$ 与 $x(n+m)$ 相关联程度

自协方差函数:

$\gamma_{xx}(m) = E[(x(n)-m_x)(x(n+m)-m_x)]$

互相关函数:

$\phi_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)]$

---

性质:

① 对称性: $\phi_{xx}(m) = \phi_{xx}(-m)$

$$E[x(n)x(n+m)] = E[x(n+m)x(n)]$$

② 如果 $x(n)$ 不含周期分量,

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] = E[x(n)]E[x(n+m)] = m_x^2$$


③ 矢量信号: $x(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(1) \end{bmatrix}$ $E[x(n)] = \begin{bmatrix} E(x(n)) \\ E(x(n-1)) \\ \vdots \\ E(x(1)) \end{bmatrix}$

---

相关矩阵:

$$\boxed{R = E[x(n)x^T(n)]} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \cdots & \phi_{xx}(N-1) \\ \phi_{xx}(-1) & \phi_{xx}(0) & \cdots & \phi_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}(N-1) & \cdots & \cdots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

( $R = E[x(n)x^H(n)]$
复信号， 共轭转置

Toeplitz矩阵

① 对称: $R=R^T$, $R=R^H$

② 对角线上元素相等

③ $R \geq 0$，非负定

证明: 任意 $y \neq 0$, $y^T R y \geq 0$

# 1.3 频域表示

1、平稳随机序列无始无终，能量无限。

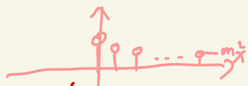
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2=\infty$$

不存在离散时间傅里叶变换，也不存在Z变换，也不满足绝对可和。$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|<\infty$

但是其功率是有限的，存在功率谱。

2、如果 $\phi_{xx}(m)$ 符合绝对可和，则其存在离散时间随机变量。

且 $m_x=0$




只有当 $m_x=0$ 时，其和才能收敛。满足绝对可和。

（自功率谱是非负的实偶函数）

3、$P_{xx}(\omega)=\lim_{N\to\infty}E\left[\frac{1}{N}|X(\omega)|^2\right]$，平均功率的谱密度，简称功率谱。

$P_{xx}(\omega)$ 表示信号的平均功率沿频率轴的分布

$P_{xx}(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}(m)e^{-j\omega m}$ （频域）

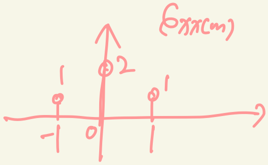
$\phi_{xx}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\omega)e^{j\omega m}d\omega$ （时域）

平稳随机信号的功率谱密度等于该信号自相关函数的傅里叶变换。

性质：① $P_{xx}(\omega)$ 实数，对称性：$P_{xx}(\omega)=P_{xx}(-\omega)$ = 若干余弦函数的相加+常数

② $P_{xx}(\omega)\geq 0$

③ $T=2\pi$




$$P_{xx}(\omega)=\sum_{-1}^{1}\phi_{xx}(m)e^{-j\omega m}=1\cdot e^{-j\omega(-1)}+2\cdot e^{-j\omega 0}+1\cdot e^{-j\omega 1}$$

$$=e^{j\omega}+e^{-j\omega}+2$$

$$=2\cos\omega+2$$

4、$x(n)$ $\quad y(n)=x(n)\cdot e^{j\theta}$

因为功率谱不包含相位信息，∴ $x(n)$、$y(n)$ 具有相同的功率谱。

即一谱不定确定一个信号。

## 5、相关函数的z变换

$$\phi_{xx}(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}(m)\,z^{-m}$$

$$\phi_{xx}(m)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \phi_{xx}(z)\cdot z^{m-1}\,dz$$

$z=r\cdot e^{jw}$ 是个复数.

$$P_{xx}(w)=\phi_{xx}(z)\big|_{z=e^{jw}}$$

∵ $\phi_{xx}(m)=\phi_{xx}(-m)$ → 自相关函数是实偶函数.
(不一定非负)

$\Rightarrow \phi_{xx}(z)=\phi_{xx}(z^{-1})$

补：

$x(n) \longleftrightarrow X(z)=X(e^{jw})$

$x(-n) \longleftrightarrow X(z^{-1})=X(e^{-jw})$

$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(z^*)$

时间翻转和频率翻转一样

证: $\sum_n x^*(n)\,z^{-n}=\sum_n\left[x(n)\,z^{*(-n)}\right]^*=X^*(z^*)$

## 6. 互相关函数. (互相关不具有对称性)

$\Phi_{xy}(z)=\Phi_{yx}(z^{-1})$

$P_{xy}(e^{jw})=P_{yx}(e^{-jw})$

复数, 因为 $\phi_{xy}(m)$ 不对称

$$\phi_{xy}(m)=\phi_{yx}(-m)$$

∵ $E[x(n)\,y(n+m)]=E[y(n+m)\,x(n)]$

$$\phi_{xy}(z)=\phi_{yx}(z^{-1})$$

$$P_{xy}(e^{jw})=P_{yx}(e^{-jw})$$

例：$\phi_{xx}(m)=a^{|m|}$，$|a|<1$，求 $\Phi_{xx}(z)$

$$\Phi_{xx}(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}(m)z^{-m}=\sum_{-\infty}^{-1}a^{-m}\cdot z^{-m}+\sum_{0}^{\infty}a^{m}z^{-m}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}(az)^{m}+\sum_{0}^{\infty}(az^{-1})^{m}$$

$$=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$=\frac{1-a^{2}}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

极点：$a$，$\frac{1}{a}$.

令 $z=e^{j\omega}$，$P_{xx}(\omega)=\frac{1-a^{2}}{(1+a^{2}-2a\cos\omega)}$

7. 零极点问题

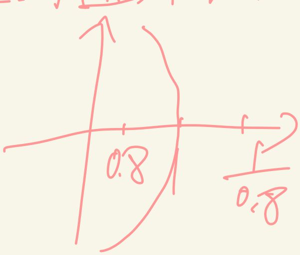
如果 $z=z_1$ 是 $\Phi_{xx}(z)$ 的一个极点，

∵ $\Phi_{xx}(z)=\Phi_{xx}(z^{-1})$ ∴ $z^{-1}$ 也是其一个极点.

即极点总是成对出现 $(z, \frac{1}{z})$

设 $R_a<1$，$|z|=R_a$ 上有一个极点是最接近单位圆的

则 $|z|=\frac{1}{R_a}$ 的圆上必有一个对应的点，它是最接近单位圆的圆外极点。




$0.8<|z|<\frac{1}{0.8}$

包含单位圆.

常的最大字号，表示矩阵正定

$y^T R y \geq 0$

$y^T R y = y^T E[x(n) \cdot x^T(n)] y = E[y^T x(n) x^T(n) y]$

$= E[(y^T x(n))^2] \geq 0$

## 1.4 线性系统对随机信号的响应

$x(n) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(n)$

平稳 (稳定) 平稳

(确定) (随机)

$y(n) = \sum_k h(k) \cdot x(n-k)$

① $m_y = E[y(n)] = E[\sum_k h(k) x(n-k)] = \sum_k h(k) E[x(n-k)] = \sum_k h(k) m_x$

$= m_x \cdot (\sum_k h(k)) = m_x H(e^{j0})$ 直流增益

$\therefore m_y$ 与 n 无关

② $\varphi_{yy}(n, n+m) = E[y(n) y(n+m)] = E[\sum_k h(k) x(n-k) \sum_r h(r) x(n+m-r)]$

$= E[x(n-k) x(n+m-r)] \sum_k \sum_r h(k) h(r) = \varphi_{xx}(m-r+k) \sum_k \sum_r h(k) h(r) \triangleq \varphi_{yy}(m)$

$\therefore \varphi_{yy}$ 与 n 无关，只与时间间隔 $\Delta t = m$ 有关。

$\therefore$ 综上：$y(n)$ 平稳

自相关：令 $r-k = l$，$r = l+k$

$\varphi_{yy}(m) = \sum_l \varphi_{xx}(m-l) \underbrace{\sum_k h(k) h(k+l)} = \sum_l \varphi_{xx}(m-l) \underbrace{V_{hh}(l)} = \varphi_{xx}(m) * V_{hh}(m)$

其中 $V_{hh}(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) h(k+l)$ ⟵ - - - ⟶ 类比 $E[x(n) x(n+m)]$

对于确定性信号：系统 $h(n)$ 的自相关 非确定性序列的自相关函数

(能量有限)(序列)：

$V_{hh}(l)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)h(k+l)$

卷积定义

Memo No.

Date / /

Mo Tu We Th Fr Sa Su

用$-k$换$k$

$V_{hh}(l)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(l-k)h(-k) \xleftrightarrow[p(k)=h(-k)]{令} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(l-k)p(k) = h(l)*p(l)$

$= h(l)*h(-l)$

一次翻转　又一次翻转.

两次翻转，等于没动.

只剩下平移、相乘、相加的过程. ←→ 与自相关函数类似

$\sigma_{yy}(m)=\sigma_{xx}(m)*V_{hh}(m)=\sigma_{xx}(m)*h(m)*h(-m)$

相关卷积定理：卷积的相关 = 相关的卷积

(($x(n)$与$h(n)$卷积的自相关，等于$x(n)$的自相关和$h(n)$的自相关的卷积.))

$\sigma_{yy}(z)=\sigma_{xx}(z)\times H(z)H(z^{-1})$

令 $z=e^{jw}$

$P_{yy}(w)=P_{xx}(w)\underbrace{H(e^{jw})H(e^{-jw})}$ → $H(e^{jw})=H^*(e^{-jw})$

$\boxed{\therefore P_{yy}(w)=P_{xx}(w)\cdot|H(e^{jw})|^2}$ ※※

互相关：$\sigma_{xy}(m)=E[x(n)y(n+m)]=E[x(n)\sum_k h(k)x(n+m-k)]$ | $\sigma_{xy}(z)=H(z)\cdot\sigma_{xx}(z)$

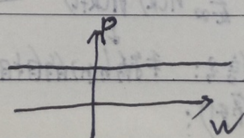
$=\sum_k h(k)\sigma_{xx}(m-k)=\sigma_{xx}(m)*h(m)$

$\therefore \sigma_{yy}(m)=\sigma_{xx}(m)*h(m)*h(-m)$

$=\sigma_{xy}(m)*h(-m)$ ←→ | $\sigma_{yy}(z)=H(-z)\sigma_{xy}(z)$

白噪声：$w_n$ : $\sigma_{xx}(m)=\sigma_m^2\cdot\delta(m)$

$P_{ww}(m)=\sigma_m^2$



(一个信号在某个域窄，则在另外一个域一定宽。)

$\Delta T \cdot \Delta F \geq$ 常数.

若输入 $x(n) = w(n)$,

$$\sigma_{xy}(m) = \sigma_{ww}(m) * h(m) = \sigma_w^2 h(m)$$

$$h(m) = \frac{1}{\sigma_w^2} \sigma_{xy}(m)$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{\sigma_w^2} \cdot P_{xy}(e^{jw})$$

$$P_{xy}(e^{jw}) = H(e^{jw}) P_{xx}(w) = H(e^{jw}) \sigma_w^2$$

实际上白噪声不存在，工程中只需保证我们想要的那一段接近白噪声即可。