第五章 功率谱估计

5.1 引言

谱估计的目的：确定信号在特定频率处的功率含量。

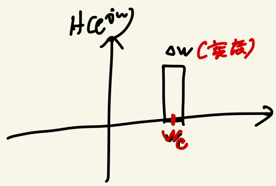
补：自相关函数的傅里叶变换正是该信号的功率谱密度。

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(e^{jw})} \longrightarrow y(n)$$

$P_{xx}(w)$ $\qquad\qquad$ $P_{yy}(w)$

$$P_{yy}(w) = P_{xx}(w)\cdot|H(e^{jw})|^2$$

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w \pm w_c| < \frac{\Delta w}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

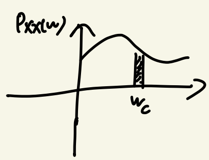


窄带滤波器

$$E[y^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}(w)\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(w)\cdot|H(e^{jw})|^2\,dw$$

$$\approx 2\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot P_{xx}(w_c)\cdot\Delta w$$



$\therefore P_{xx}(w_c) \approx \frac{\pi}{\Delta w}E[y^2]$ （单位频带内的功率）

Δw 越小，估计越准确。

改变 w_c（扫描）覆盖所有感兴趣的频带，来估计功率谱。

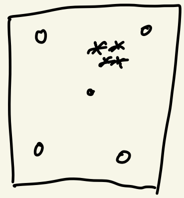
理论实用。实际实现不了。

功率谱估计：
- 参数方法：模型辨识法．最大熵法．
- 非参数方法：BT法．周期图法．

设 $\hat{\theta}$ 是对真实值 θ 的估计值，一个好的估计应该满足：

(1) 无偏估计：$E[\hat{\theta}] = \theta$ ， $B = \underbrace{Bias}_{偏差}[\hat{\theta}] = \theta - E[\hat{\theta}]$

(2) 最小方差估计：最小化 $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = E[(\theta - E[\hat{\theta}])^2]$



均方误差(综合)(1)(2)

$$E[e^2] = E[(\theta - \hat{\theta})^2]$$

$$= B^2 + \sigma_{\hat{\theta}}^2$$

(3) 一致估计：$N \to \infty$ ， $Bias[\hat{\theta}] \longrightarrow 0$

(N是数据量) $N \to \infty$ ， $\sigma_{\hat{\theta}}^2 \longrightarrow \theta$

5.2 经典谱估计

$\begin{cases} \text{BT法(相关图法)} \\ \text{周期图法} \longrightarrow \text{Bartlett 平均周期图法.} \end{cases}$

1. (1) 相关函数的估计 (BT法)
(相关图法)

假定 $x(n)$ 是各态历经的. (长度为 N)

(时间平均代替集合平均)

依概率相等.

$\downarrow$

$x(0) \cdots x(N-1)$

$$\Phi_{xx}(m) = E[x(n)\,x(n+m)]$$

$$\hat{\Phi}'_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)\,x(n+m), \quad m \le N-1$$ (时间平均)

① $E[\hat{\Phi}'_{xx}(m)] \overset{?}{=} \Phi_{xx}(m)$ (是无偏吗?) 答: 当然!

$$= \frac{1}{N-|m|} E\left[\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)\,x(n+m)\right]$$

$$= \frac{1}{N-|m|}\Big[E(x(0)x(m)) + E(x(1)x(m+1)) + \cdots + E(x(N-1-|m|)\cdot x(N-1))\Big]$$

$$= \frac{1}{N-|m|}\cdot \Phi_{xx}(m)\cdot(N-|m|) = \Phi_{xx}(m).$$ ∴ 无偏估计.

② 方差估计: 当 m 趋近于 N 时, 估计的方差会越来越大.

(2) 改进:

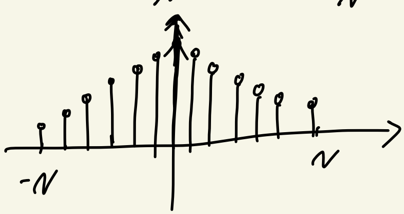
$$\hat{\Phi}_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)\,x(n+m)$$

$$\hat{\Phi}'_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\cdot\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)\,x(n+m)$$

$$\boxed{\hat{\Phi}_{xx}(m) = \frac{N-|m|}{N}\hat{\Phi}'_{xx}(m)}$$

$$= W_B(m)\,\hat{\Phi}'_{xx}(m)$$

$$W_B(m) = \frac{N-|m|}{N} = 1 - \frac{|m|}{N}$$ (三角窗)



① 有偏

$\downarrow$

$$E[\hat{\Phi}_{xx}(m)] = W_B(m)\cdot\Phi_{xx}(m)$$

$\downarrow$

$N\to\infty$ 时, $E[\hat{\Phi}_{xx}(m)] = \Phi_{xx}(m)$

渐近无偏估计.

② 方差变小

$$Var[\hat{\Phi}_{xx}(m)] = Var[W_B(m)\hat{\Phi}'_{xx}(m)]$$
$$= W_B^2(m) Var[\hat{\Phi}'_{xx}(m)] < Var[\hat{\Phi}'_{xx}(m)]$$

两者均方误差。

$\hat{\Phi}_{xx}(m) < \hat{\Phi}'_{xx}(m)$，综合指标更好。

∴ BT法：$\hat{P}_{xx}(m) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{\Phi}_{xx}(m) \cdot e^{-j\omega m}$

m 越大，参与平均的项数越少，平均效果越差。

当 m=N-1 时，求和项只有一项，所以 m 较大时，估计值 $\hat{\Phi}_{xx}(m)$ 不可靠，估计方差大，（功率谱）

2、周期图法

$$X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \longrightarrow \text{周期图}$$

$$\hat{P}_{xx}(m) = I_N(\omega)$$

① 看均值：

$$E[I_N(\omega)] = E[\frac{1}{N}|X_N(e^{j\omega})|^2] = \frac{1}{N} E[X_N(e^{j\omega}) \cdot X_N^*(e^{j\omega})]$$

$$= \frac{1}{N} E[\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega k} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j\omega n}]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} E[x(k) x^*(n) \cdot e^{j\omega(n-k)}]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \Phi_{xx}(k-n) \cdot e^{-j\omega(k-n)}, \quad k-n=m$$

自相关 → $q_N(m)$

$$E[I_N(\omega)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(n) d(n+m)} \Phi_{xx}(m) e^{-j\omega m}, \quad d(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{q_N(m) \cdot \Phi_{xx}(m) \cdot e^{-j\omega m}}_{\text{这个信号的傅里叶变换}}$$

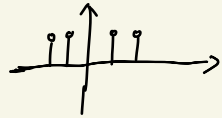
$E[I_N(\omega)] = Q_N(e^{j\omega}) * P_{xx}(\omega)$ → 有偏估计

$Q_N \neq \delta(\omega)$

$q_N(m) = \frac{1}{N} d(m) * d(-m)$ → 自相关.

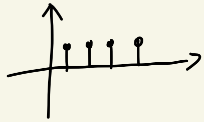
$Q_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \cdot D(e^{j\omega}) \cdot D(e^{-j\omega})$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{\sin(\frac{\omega}{2}\cdot N)}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]^2$$

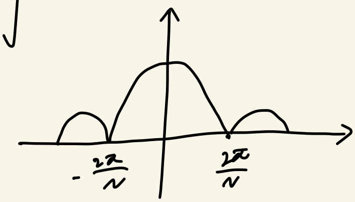


$\leftrightarrow \frac{\sin(\frac{\omega}{2} N)}{\sin\frac{\omega}{2}}$

⇓ 平移



$\leftrightarrow \frac{\sin(\frac{\omega}{2} N)}{\sin\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\cdot\omega} = D(e^{j\omega})$



$\frac{\omega}{2}\cdot N = \pi$

⇓

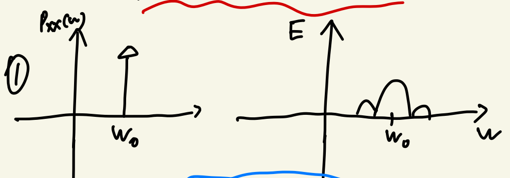
$\omega = \frac{2\pi}{N}$

$\therefore E[I_N(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_N(\theta)\cdot P_{xx}(\omega-\theta)\,d\theta$ | $E[I_N(\omega)] = Q_N(e^{j\omega}) * P_{xx}(\omega)$

$N\to\infty$, $\lim_{N\to\infty} E[I_N(\omega)] = P_{xx}(\omega)$, 渐近无偏.

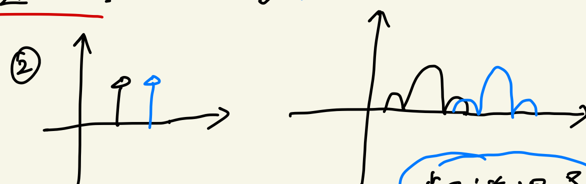
问题 ① ② ③

①



频谱泄漏

②



频谱混叠

(极限情况下.

主瓣 不在一块儿.

频域

分辨率取决于主瓣宽度.

数据量大则分辨率高.

(主瓣窄)

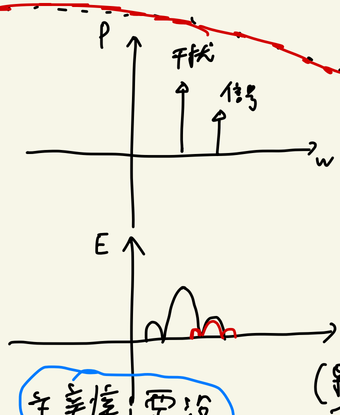
(指时域：观测时间大)

∴观测时间越长，分辨率越高

$\Delta f \cdot \Delta t \geq$ 常数.

时间分辨率与频率分辨率不可能同时提高

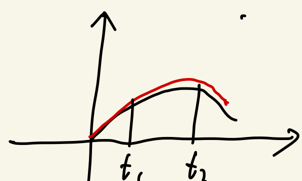
③



小信号的主瓣接近于大信号的旁瓣.

(导致小信号被淹没)

主瓣淹没



$t_2 > t_1$

分辨率更好.

假定 $x(n)$ 高斯白噪声.

$$Var[I_N(w)] = \sigma_x^2\left[1+\left(\frac{\sin Nw}{N\cdot\sin w}\right)^2\right]$$

$$N\to\infty,\ Var[I_N(w)] \to \begin{cases}\sigma_x^2 \\ 2\sigma_x^2, & w=0\end{cases}$$

$$Var[I_N(w)] = P_{xx}(w)\left[1+\left(\frac{\sin Nw}{N\cdot\sin w}\right)^2\right]$$

$$N\to\infty,\quad Var[I_N(w)] \not\to 0$$

∴ 周期图法不是一致估计. ($N\to\infty$ 时, 方差到不了 0) 改进 (方差降为原来的 $\frac{1}{L}$)

Bartlette 法:

设 L 个互不相关的随机变量 $x_1 \cdots x_L$ 的均值都是 c, 方差都是 σ^2 (白噪声)

$$x = \frac{1}{L}(x_1+\cdots+x_L)$$

$$E[x] = c \qquad D(x) = \frac{1}{L}\sigma^2$$

线性变换用系统表示

数学域 证明

$$Var[x] = E[(x-c)^2]$$
$$= E\left[\left(\frac{1}{L}(x_1+\cdots+x_L)-c\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{L^2}E\left[\left((x_1+\cdots+x_L)-Lc\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{L^2}E\left[\left[(x_1-c)+(x_2-c)+\cdots+(x_L-c)\right]^2\right]$$ (互不相关) (交叉乘项为 0)
$$= \frac{1}{L^2}\cdot L\sigma^2 = \frac{1}{L}\sigma^2$$

信号域 证明 ① ②

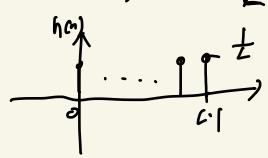
$$H(e^{jw}) = \frac{\sin\frac{wL}{2}}{L\cdot\sin\frac{w}{2}}\cdot e^{-j\frac{L-1}{2}w}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow y(n) = \frac{1}{L}(x(n)+\cdots+x(n-L+1))$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$
$$= \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x(n-k)$$
$$= h(0)\cdot x(n)+\cdots+h(L-1)x(n-L+1)$$

$$\therefore h(0) = h(1) = \cdots = \frac{1}{L}$$

∴



证: $\Phi_{yy}(0) = m_y^2 + \sigma_y^2$

①

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}(w)\,dw$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(w)\cdot|H(w)|^2\,dw$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{jw})|^2\,dw$$ 帕塞瓦定理

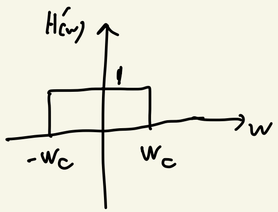
频域能量不好算

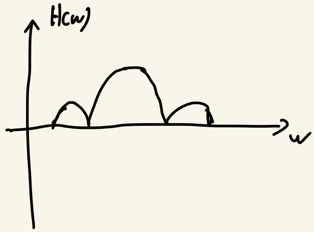
频域能量 = 时域能量

$$\sigma_y^2 = \sum_{n=0}^{L-1} h^2(n)\cdot\sigma^2 = \left(\frac{1}{L}\right)^2\cdot L\cdot\sigma^2 = \frac{1}{L}\sigma^2$$

(谱形状) ②

那么是否可以构造一个简单形状的滤波器来代替原$h(n)$，直接在频域算积分呢？

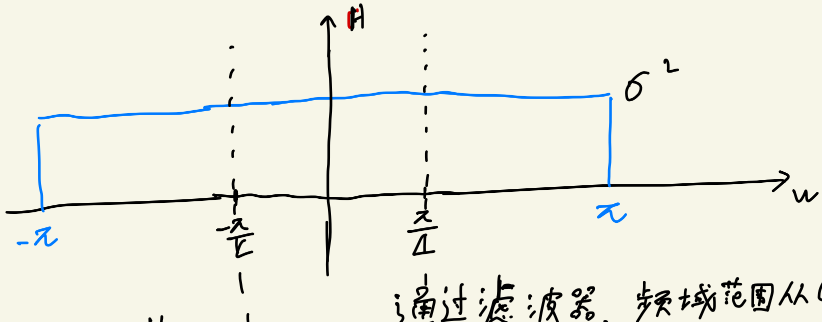


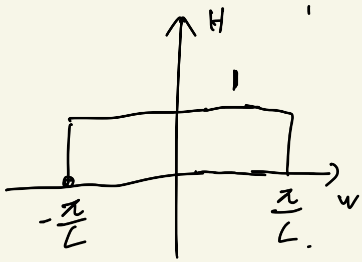


两谱能量相等

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c}|F(e^{jw})|^2dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{jw})|^2dw = \frac{1}{L}$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2w_c = \frac{1}{L} \Rightarrow w_c = \frac{\pi}{L}$$



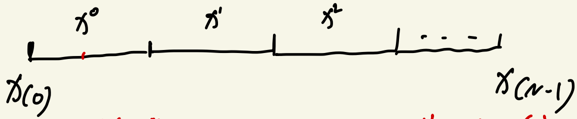


通过滤波器，频域范围从$(-\pi,\pi)$限制到$(-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L})$，幅值没有变化，$\sigma^2\cdot 1=\sigma^2$。

相当于面积减小为原来的$\frac{1}{L}$。

方差减小为原来的$\frac{1}{L}$。

将改进方法用于周期图法.



指的是第i节内的第n个元素，每过一节，n从0重新开始，最大到这节的长度-1 (M-1)

$x^i(n) = x(i\cdot M+n)$

分段 $N=L\cdot M$ (一共N个元素)

L段，每段长度 $M=\frac{N}{L}$

$0\le n\le M-1$, $0\le i\le L-1$

i指节数(分段数)

第i段数据的周期图

$$I_M^i(\omega)=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x^i(n)e^{-j\omega n}\right|^2$$

原周期图.

$$I_N(\omega)=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}\right|^2$$

选择M，使得 $m>M$ 时 $|R_{xx}(m)|$ 很小 (尽量不相关)

总的谱估计法为L段周期图的平均

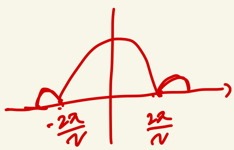
$$\hat{P}_{xx}(\omega)=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{N-1}I_M^i(\omega)$$

改进后

优：若各段数据互不相关，则估计方差只有原来不分段的 $\frac{1}{L}$.

缺：但L增加，M减小，谱分辨率下降.

$\Downarrow$



$\frac{2\pi}{N}$ 越小，谱越接近冲击函数. 分辨率越强.

分段后，$\frac{2\pi}{N}\to\frac{2\pi}{M}$，$M<N$，导致主瓣变宽.

分辨率变差.

5.3 谱估计的参数化模型方法

$w(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow x(n)$

白噪声

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k\cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k\cdot z^{-k}}$$

只要把参数估计出来，估计谱就可以直接算出来

$$P_{xx}(\omega)=\sigma_w^2\,|H(\omega)|^2=\sigma_w^2\left|\frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2$$

(谱估计 ⟶ 参数估计)

① ARMA (p, q)
② MA (q)
③ AR (p)

1、ARMA模型 (p, q)

$a_0=1$, 其它的 a_n 和 b_n 都不全为0.
$b_0=1$,

既适合表示功率谱中的峰值，也适合表示功率谱中的谷值. (特点)

2. MA模型 (q)

$a_0=1,\ a_k=0,\ 1\le k\le p$, 无分母.

适合表示功率谱中的谷值.

3、AR模型 (p) ※ (重点) ($a_0=1$)

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k\cdot z^{-k}}\qquad P_{xx}(\omega)=\frac{\sigma_w^2}{\left|1+\sum_{k=1}^{p} a_k\cdot e^{-j\omega k}\right|^2}$$

有利于表示功率谱中的峰值.

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p} a_k\, x(n-k)+w(n)$$

(差分方程)

$x(n)$：输出. $w(n)$：输入

$$\Phi_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)]$$

$$= E\left[x(n)\cdot\left(-\sum_{k=1}^{p} a_k x(n+m-k) + w(n+m)\right)\right]$$

$$= -\sum_{k=1}^{p} a_k \Phi_{xx}(m-k) + E[x(n)\cdot w(n+m)]$$

$m \geq 0$

$$E[x(n)\cdot w(n+m)]$$

$$= \begin{cases} 0, & m>0 \quad (x(n)\text{只与 } w(n)\text{相关}) \\ E[h(0)w(n)w(n)], & m=0 \end{cases}$$

why

$$= h(0)\cdot \sigma_w^2$$

$$= \sigma_w^2$$

初值定理

$$\left(h(0) = H(z)\big|_{z=\infty} = 1 = \frac{1}{a_0}\right)$$

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + w(n) \quad (\text{差分方程})$$

$$x(n) = -a_1 x(n-1) + w(n) \quad (\text{差分方程形式})$$

$$= -a_1(-a_2 x(n-2) + w(n-1)) + w(n)$$

↓ 可一直套娃到 $w(1)$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n-1} h(k)w(n-k) \quad (\text{卷积形式})$$

$$= h(0)w(n) + h(1)\cdot w(n-1) + \cdots + h(n-1)\cdot w(1)$$

⇓ $m>0$ 时

$x(n)\cdot w(n+1)$ ($m=1$ 时)

$$= [h(0)w(n) + \cdots]\cdot w(n+1)$$

$$= h(0)\cdot w(n)\cdot w(n+1) + \cdots$$

∵ $w(n)$ 只有 $w(n)$ 相关，与 $w(n+1)$、$w(n-1)$ 均不相关

∴ $E[x(n)\cdot w(n+1)] = 0$

推广至：$m>0$ 时，$E[x(n)\cdot w(n+m)] = 0$

当 $m=0$ 时，同样只有 $E[h(0)w(n)\cdot w(n)]$ 有值，其他均为 0.

回代 $E[x(n)w(n+m)]$

$$\therefore \Phi_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \Phi_{xx}(m-k) + \sigma_w^2, & m=0 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \Phi_{xx}(m-k), & m>0 \end{cases}$$

↓ 矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(-1) & \cdots & \Phi_{xx}(-p) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(p) & \cdots & \cdots & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Yule-Walker 方程}$$

这个AR模型好就好在可以线性方程组求解.

只要求出 $\{a_1, \cdots, a_p, \sigma_w^2\}$，即可进行谱估计。

与一步线性预测 Yule-Walker 方程对比:

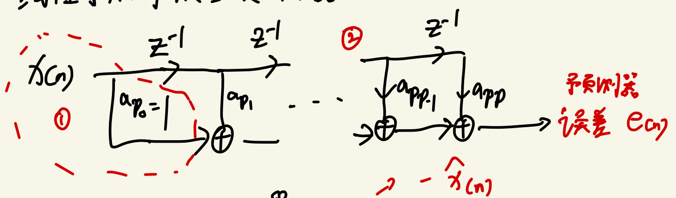
$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_{pk}\, x(n-k) \qquad a_k = a_{pk}.$$

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) \qquad \sigma_w^2 = E[e^2]_{min}$$

∴ 同阶次的线性预测和 AR 模型是等价的.

解释:

线性预测误差滤波器



因为分两块.

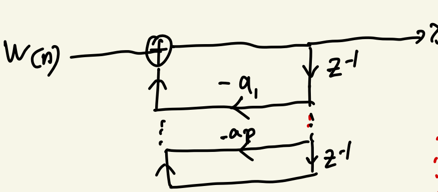
①: $x(n)$

②: 得到的是 $-\hat{x}(n)$

①+② = $x(n)-\hat{x}(n) = e(n)$ → 预测误差.

$$e(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_{pk}\, x(n-k)$$

AR模型.



$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k\, x(n-k)$$

AR模型 预测误差滤波器

$$(\sigma_w^2)\; W(n) \to \boxed{\frac{1}{A(z)}} \to x(n) \to \boxed{A(z)} \to e_n = w(n)$$

输出为白噪声

说明没有相关性

最佳(理想)情况.

(要保证两个同阶).

例: $AR(2)$: $\dfrac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = H(z)$ (2阶)

$$w(n) \to \boxed{H(z)} \to x(n)$$

$\hat{x}(n) = -a_{11}x(n-1)$ (一阶预测)

$x(n)-\hat{x}(n) = e_1(n).\ (\sigma_1^2)$

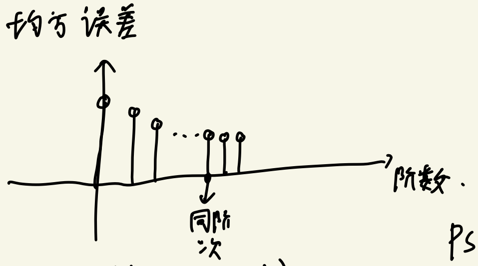
$a_{11} \ne a_1 \ne a_2$ ✗

$\hat{x}(n) = -a_{21}x(n-1) - a_{22}x(n-2)$ (二阶预测)

(σ_2^2) $e_2(n) = x(n)-\hat{x}(n) = x(n) - a_{21}x(n-1) - a_{22}x(n-2)$

理想结果: $a_{21} = a_1$, $a_{22} = a_2$ ✓

$\sigma_1^2 > \sigma_w^2$, $\sigma_2^2 = \sigma_w^2$, σ_3^2(三阶预测) $= \sigma_w^2$



(AR模型与线性预测)

所以AR模型定阶是一个难题.

(实际中并不知道系统阶次)

通过从增阶看均方误差的下降情况来定阶.

PS: (其实当均方误差下降不那么明显时,就可以近似认为达到阶次,停止增长. 毕竟从付出和回报不成正比了)