卡尔曼滤波

(注：维纳滤波器只适用于标量、平稳信号)　　(可以用于矢量、非平稳信号)

根据前一个估计值和当前的观测值，对信号(状态变量)作递推估计.

补

状态方程：是多维一阶差分方程，它把系统内部的状态变量与输入节点变量联系起来。
(动态方程)

观测方程：是代数方程，它把输出节点变量、状态变量、和输入节点变量联系起来.

状态方程: $W(n+1) = AW(n) + BX(n)$　(一阶差分方程)(动态方程)

观测方程: $Y(n) = CW(n) + DX(n)$　(瞬态方程)

$W(n)$: n时刻的状态向量.

$X(n)$: 输入.　$Y(n)$: 输出

可控，可观测

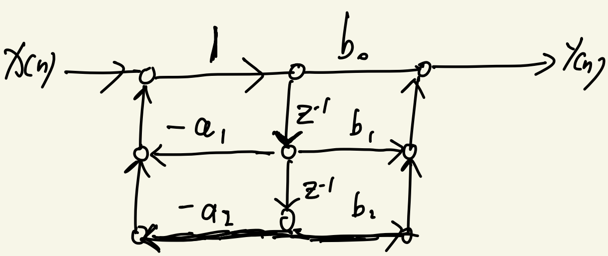
系统内部有很多节点，如果已知输入信号和n_0时刻的一组节点变量值，就可计算出$n \geq n_0$时刻的输出信号，以及系统内部任意节点变量值，这样的一组最少的节点变量就是状态变量(不唯一)

状态变量定义

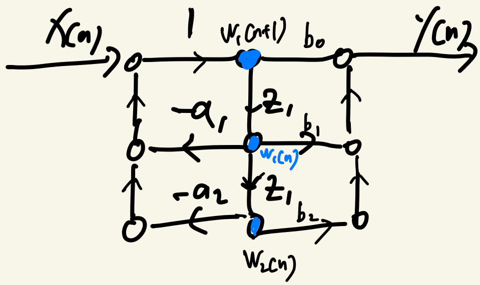
例:

例

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$



状态变量一般选在信号流图中单位延迟支路输出节点处，因为该处的节点变量值是该支路输入节点变量前一时刻存起来的数据，可看作已知数据。



$$w_1(n+1) = -a_1 w_1(n) - a_2 w_2(n) + x(n)$$
$$w_2(n+1) = w_1(n)$$

接上例

（状态方程）

$$W(n+1) = \begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

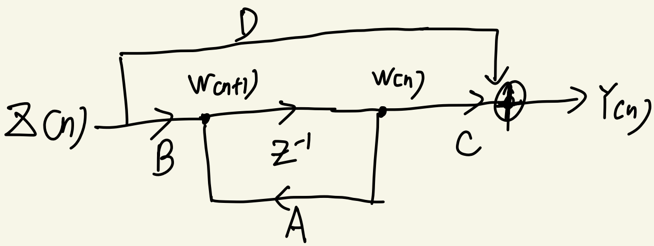
（状态向量）

$$y(n) = b_0 w_1(n+1) + b_1 w_1(n) + b_2 w_2(n) = b_0(-a_1 w_1(n) - a_2 w_2(n) + x(n)) + b_1 w_1(n) + b_2 w_2(n)$$
$$= (b_1 - b_0 a_1) w_1(n) + (b_2 - b_0 a_2) w_2(n) + b_0 x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 & b_2 - b_0 a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n)$$

（观测方程）

$\therefore$ $A =$ $\quad B =$ $\quad C =$ $\quad D =$



卡尔曼滤波基本方程.

$$\begin{cases} x_k = A_k x_{k-1} + W_{k-1} \\ Y_k = C_k x_k + V_k \end{cases}$$

(C随着时间变化，可适用于非平稳信号)

补 维纳:

白噪声 $\longrightarrow$ $\boxed{A(z)}$ $\xrightarrow{\text{期望输出}}$ $\oplus$ $\longrightarrow$ $x(n)$

$\uparrow v(n)$ (白噪声)

$x_k = S_k + V_k$ 标量 (适用C平稳)

其中，W_k 是激励白噪声.

V_k 是观测白噪声.

假定 $E[W_k]=0=\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$, $E[V_k]=0=\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$, $Q_k = E[W_k W_k^T]$ $R_k = E[V_k V_k^T]$

$$E[W_k W_j^T] = \begin{cases} Q_k, & k=j \\ \underset{(0矩阵)}{0}, & k\neq j \end{cases} \qquad E[V_k V_j^T] = \begin{cases} R_k, & k=j \\ \underset{(0矩阵)}{0}, & k\neq j \end{cases}$$

初始状态 x_0 与 W_k, V_k 不相关.

※※

$\boxed{\text{问题: 已知 } \hat{x}_{k-1} \text{ 和 } Y_k \text{, 求 } \hat{x}_k \text{, 使 } \underset{(误差)}{P_k} = E[(x_k-\hat{x}_k)(x_k-\hat{x}_k)^T] \text{ 最小.}}$

补: 矩阵A和B怎样比较大小?

$A>B$: $A-B$ 是正定矩阵, 即对于任意不为0的列向量 y, $y^T(A-B)y>0$

令: $W_{k-1}=0$,

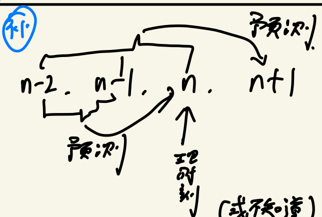
$\hat{x}_k' = A_k \hat{x}_{k-1}$, 作一步预测

$\hat{Y}_k' = C_k \hat{x}_k' = C_k A_k \hat{x}_{k-1}$

$\tilde{Y}_k = Y_k - \hat{Y}_k'$, (新息)

$$\hat{x}_k = \underbrace{A_k \hat{x}_{k-1}}_{预测} + \underbrace{H_k}_{加权矩阵}\underbrace{(Y_k - \hat{Y}_k')}_{\tilde{Y}_k\text{(新息)}}$$

补



有现时刻的值, 但是不用, 从以前的值推现时刻的值, 也叫预测

① 新息序列是相互正交的序列: $E[\tilde{Y}_n \cdot Y_k^T]=0$, $1\le k\le n-1$ (相互正交, 无冗余)

② n时刻的新息, $\tilde{Y}_n$, 与过去的观测数据 $Y_1, Y_2, \cdots Y_{n-1}$ 正交.

$E[\tilde{Y}_n \cdot Y_k^T]=0$

$\{Y_1 \cdots Y_n\} \rightleftharpoons \{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \cdots \tilde{Y}_n\}$

③ 新息序列 $\tilde{Y}_1\, \tilde{Y}_2 \cdots \tilde{Y}_n$ 和数据序列 $Y_1 \cdots Y_n$ 存在一一对应关系, 可相互转化。

$$\hat{x}_k = \underbrace{A_k \hat{x}_{k-1}}_{\text{预测}} + \underbrace{H_k}_{\text{加权矩阵}} \underbrace{(Y_k - Y_k')}_{\tilde{Y}_k\ (\text{新息})}$$

$$= A_k \hat{x}_{k-1} + \underbrace{H_k}_{\text{只有}H_k\text{未知}} (Y_k - C_k A_k \hat{x}_{k-1})$$

H_k 在状态估计中具有对新息加权的性质，是一个加权矩阵，称为卡尔曼滤波的增益矩阵。

$\boxed{\text{定义}}$ H_k

求 H_k 使 P_k 最小，最优 H_k 的选取与 W_k, V_k 的统计特性有关。

H_k 与 Q_{k-1} 成 正 比，H_k 与 R_k 成 反 比（不严谨，关系很复杂）

$Q_{k-1}\uparrow \longrightarrow H_k\uparrow$ $\quad$ $R_k\uparrow \longrightarrow H_k\downarrow$ （定性分析）

$$\underbrace{P_k' \triangleq E[(x_k - \hat{x}_k')(x_k - \hat{x}_k')^T]}_{\text{预测误差}} \geq \underbrace{P_k \triangleq E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]}_{\text{滤波误差}}$$

编程实现：

$$\mathrm{Var}[x_0] = P_0 \longrightarrow P_1' \longrightarrow H_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2' \longrightarrow H_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \cdots \quad (\text{迭代})$$

$(\hat{x}_0)$ $\quad$ $(\hat{x}_1)$ $\quad$ $(\hat{x}_2)$

维纳滤波		卡尔曼滤波
1. $E[e^2(n)]$	都是使目标函数最小	$E[(x_k-\hat{x}_k)(x_k-\hat{x}_k)^T]$
2.	稳态解相同
3. z 域解 $H_{opt}(z)$		时域解 $\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + H_k(y_k - C_k A_k \hat{x}_{k-1})$
一维 适用于平稳随机序列		多维，适用于多输入、多输出 既适用于平稳随机序列，也适用于非平稳随机序列。
4.	缺点:	① 有发散的风险，算法可能不收敛 模型有误差（对模型进行了简化） ② 计算量大（因为有矩阵求逆） ③ 仅适用于线性系统。（改进：扩展卡尔曼滤波 粒子滤波 ……）

5.
都要求已知信号和噪声的统计特性 $\phi_{xx}(m)$、$\Phi_{xx}(z)$、R、$P_{xx}(\omega)$

若上述统计特性未知，怎么办？

提问题

① 由测量数据估计 $\phi_{xx}(m)$ 和 $P_{xx}(\omega)$（第五章）

② 自适应滤波（第四章）（绕开这些统计特性，从数据出发）