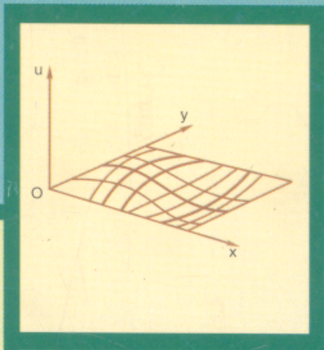
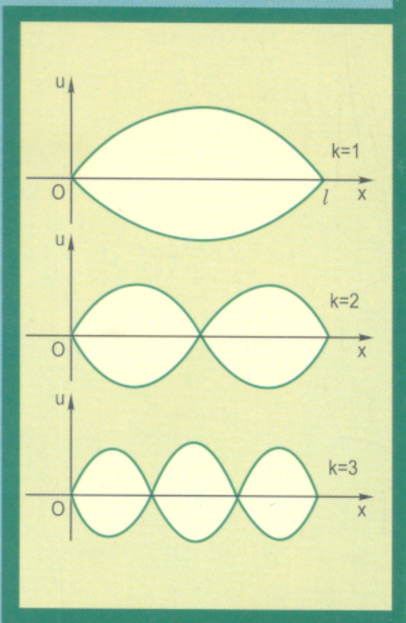
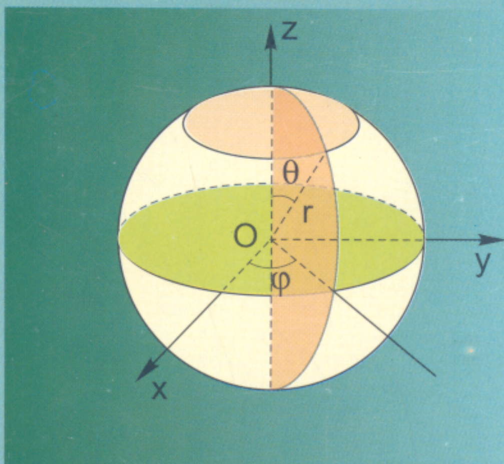
ĐỖ ĐÌNH THANH (Chủ biên) – VŨ VĂN HÙNG

PHƯƠNG PHÁP TOÁN LÍ







NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

ĐỖ ĐÌNH THANH (Chủ biên)
VŨ VĂN HÙNG

PHƯƠNG PHÁP TOÁN LÍ

(Có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

770 – 2007/CXB/1 – 1676/GD Mã số : 7K674T7 – DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Các phương pháp toán học dùng cho Vật lí học hiện đại rất phong phú, gồm một khối lượng lớn các phần như : hàm thực, hàm biến phức, phương trình vi phân, các phép biến đổi tích phân, đại số tuyến tính...

Cuốn sách **Phương pháp toán lí** *do GS.TS. Đỗ Đình Thanh biên soạn, xuất bản trong những năm qua đã được dùng làm giáo trình giảng dạy của khoa Vật lí các trường Đại học Sư phạm. Trong cuốn sách này đã trình bày : giải tích vectơ trong hệ toạ độ cong, tenxơ aphin trực giao và các phương trình vật lí toán.*

Để sát với yêu cầu thực tế, trong lần xuất bản này, tác giả đã bổ sung thêm phần tenxơ tổng quát ở chương II. Phần này được viết đơn giản, ngắn gọn để tiện áp dụng trong Vật lí, không đi sâu vào các khái niệm hình học thuần tuý. Ngoài ra, để phục vụ cho sinh viên, học viên cao học, học các chuyên đề, làm luận văn, luận án, cuốn sách còn được bổ sung thêm chương VII và chương VIII về các phép tính gần đúng trong Vật lí học, do PGS.TS. Vũ Văn Hùng biên soạn.

Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của quý độc giả về cuốn sách này, để nó ngày một hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau.

Các tác giả

Chương I

TRƯỜNG VÔ HƯỚNG VÀ TRƯỜNG VECTƠ

§1. KHÁI NIỆM VỀ TRƯỜNG VÔ HƯỚNG VÀ TRƯỜNG VECTƠ

Khái niệm về trường nói lên một quan hệ số lượng và hình dạng không gian của thế giới vật chất.

1. Trường vô hướng là một phần của không gian mà mỗi điểm M của nó ứng với một giá trị của một đại lượng vô hướng nào đó $\varphi(M)$.

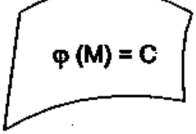
Cho một trường vô hướng có nghĩa là cho một hàm vô hướng $\varphi(M)$ có các giá trị phụ thuộc vào từng điểm của phần không gian đang xét.

Trong hệ toạ độ Đêcac Oxyz, ta có

$$\varphi(M) = \varphi(x, y, z) \tag{1.1}$$

Ví dụ : Xét một vật không đồng chất, thì mật độ ρ phụ thuộc vào từng điểm của vật và ta có trường mật độ $\rho(M)$.

Nếu hàm vô hướng $\varphi(M)$ của trường không đổi theo thời gian, ta nói ta có *trường dừng*. Nếu φ còn phụ thuộc cả vào thời gian, thì ta có *trường không dừng* hay trường thay đổi $\varphi(M, t)$.



Hình 1

Để biểu diễn hình học trường vô hướng, ta dùng khái niệm *mặt mức* (H.1). Mặt mức là một mặt trong không gian mà trên đó trường vô hướng có giá trị không đổi.

$$\varphi(M) = \varphi(x, y, z) = C \quad (1.2)$$

Ứng với mỗi giá trị của C ta có một mặt mức. Cho C các giá trị khác nhau, ta có một *họ các mặt mức*.

2. Trường vectơ là một phần của không gian mà mỗi điểm M của nó ứng với một giá trị của đại lượng vectơ $\vec{A}(M)$ nào đó.

Cho một trường vectơ, có nghĩa là cho một hàm vectơ $\vec{A}(M)$ phụ thuộc vào từng điểm M. Trong hệ toạ độ Đêcac, ta có

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x, y, z) \qquad (1.3)$$

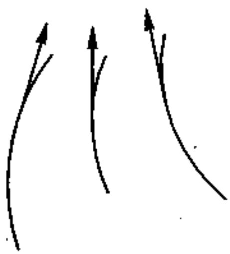
Ví dụ : Một điện tích điểm e sinh ra quanh nó một điện trường, được biểu diễn bằng một vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ phụ thuộc vào điểm ta xét.

$$\vec{E} = k\frac{e}{r^3}\vec{r} \; ; \; \vec{r} \text{ là bán kính vectơ}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Để biểu diễn hình học trường vectơ, ta dùng các đường vectơ, là các đường trong không gian mà tại mỗi điểm vectơ $\vec{A}$ nằm dọc theo tiếp tuyến của nó (H.2).

Trong chương này ta sẽ xét việc biểu diễn vectơ trong hệ toạ độ cong tổng quát, các phép tính đạo hàm, vi phân và tích phân của chúng.



Hình 2

§2. HỆ TOẠ ĐỘ CONG

1. Định nghĩa. Vị trí của một điểm M trong không gian được xác định bằng bán kính vectơ $\vec{r}$. Trong hệ toạ độ Đêcac Oxyz

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Trong nhiều bài toán, để xác định vị trí của điểm M, thay cho bộ ba số x, y, z, người ta dùng bộ ba số khác q_1, q_2, q_3 phù hợp và thuận tiện hơn với bài toán đang xét. Ngược lại, ta giả thiết một bộ ba số q_1, q_2, q_3 ứng với một bán kính vectơ $\vec{r}$, do đó ứng với một điểm M nào đó của không gian. Các đại lượng q_1, q_2, q_3 được gọi là toạ độ cong của điểm M.

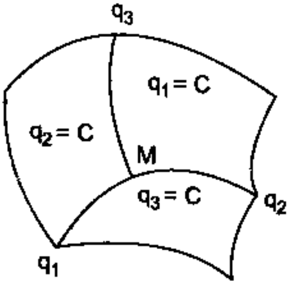
Vì mỗi điểm M ứng với ba toạ độ q_1, q_2, q_3, do đó mỗi một toạ độ này là một hàm của bán kính vectơ $\vec{r}$

$$\begin{cases} q_1(\vec{r}) = q_1(x, y, z) \\ q_2(\vec{r}) = q_2(x, y, z) \\ q_3(\vec{r}) = q_3(x, y, z) \end{cases} \tag{1.4}$$

Ngược lại, bán kính vectơ $\vec{r}$ của mỗi điểm trong không gian được xác định hoàn toàn khi cho ba số q_1, q_2, q_3. Nghĩa là ba thành phần x, y, z của $\vec{r}$ là hàm số của q_1, q_2, q_3.

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \tag{1.5}$$

Các mặt mức $q_i = C$ (i = 1, 2, 3) tạo thành một họ mặt nào đó. Mỗi họ mặt mức có một mặt đi qua điểm M nào đó của không gian. Ta gọi các mặt này là các *mặt toạ độ*. Giao tuyến của hai mặt toạ độ gọi là *đường toạ độ* (H.3) chẳng hạn, giao tuyến



Hình 3

của hai mặt $q_2 = C$, và $q_1 = C$ cho ta đường toạ độ q_3. Dọc theo đường toạ độ này, chỉ có toạ độ q_3 biến thiên, còn hai toạ độ q_1, q_2 giữ nguyên giá trị.

2. Ví dụ. Hai hệ toạ độ cong hay dùng nhất là hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ cầu.

a) Toạ độ trụ. Vị trí của một điểm M được xác định bằng bộ ba số (H.4) :

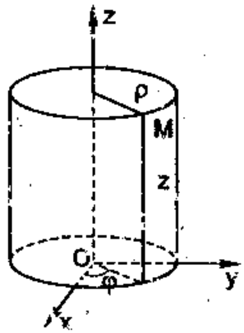
$$q_1 = \rho\ ;\ \ q_2 = \varphi\ ;\ \ q_3 = z$$

Ta có mối liên hệ giữa hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ Đêcac vuông góc :

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

$$z = z$$



Hình 4

Khoảng biến thiên :

ρ : từ 0 đến ∞

φ : từ 0 đến 2π

z : từ $-\infty$ đến $+\infty$

Các mặt toạ độ :

$\rho = C$: mặt trụ có trục là Oz

$\varphi = C$: nửa mặt phẳng giới hạn bởi Oz

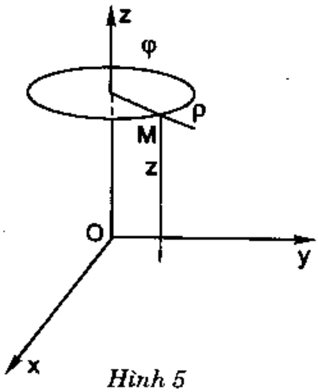
$z = C$: mặt phẳng vuông góc với trục Oz

Các đường toạ độ (H.5) :

Đường ρ : nửa đường thẳng xuất phát từ trục Oz và vuông góc với trục Oz.

Đường φ : đường tròn có tâm nằm trên trục Oz trong mặt phẳng vuông góc với trục Oz.

Đường z : đường thẳng song song với trục Oz.

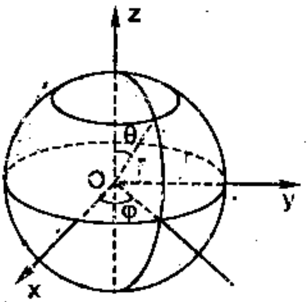


Hình 5

b) Toạ độ cầu

Vị trí của một điểm được xác định bởi bộ ba số (H.6) :

$$q_1 = r\ ;\ q_2 = \theta\ ;\ q_3 = \varphi$$



Hình 6

Hệ thức liên hệ giữa hệ toạ độ cầu và hệ toạ độ Đêcac vuông góc :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

Khoảng biến thiên :

r : từ 0 đến ∞

θ : từ 0 đến π

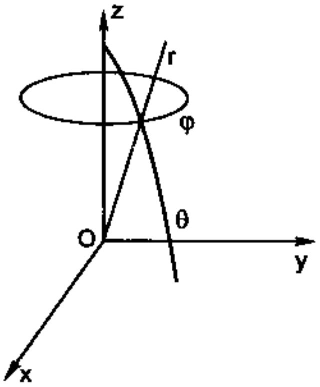
φ : từ 0 đến 2π

Các mặt toạ độ :

r = C : mặt cầu tâm O

θ = C : nửa mặt nón có đỉnh là O, trục là Oz

φ = C : nửa mặt phẳng giới hạn bởi Oz



Hình 7

Các đường toạ độ (H.7) :

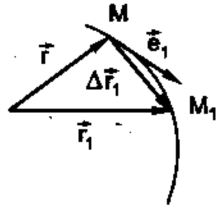
Đường r : nửa đường thẳng xuất phát từ gốc O ;

Đường θ : kinh tuyến trên mặt cầu ;

Đường φ : đường tròn vĩ tuyến trên mặt cầu.

3. Hệ số Lame (Lamer)

Ta trở lại xét các đường toạ độ. Trên các đường này, ta đưa vào các vectơ đơn vị $\vec{e}_i$ (i = 1, 2, 3) có phương tiếp tuyến với các đường toạ độ và có chiều theo chiều tăng của các toạ độ q_i. Xét điểm M, có bán kính vectơ $\vec{r}$ (q_1, q_2, q_3), trên đường toạ độ q_1. Dọc theo chiều tăng của q_1, lấy số gia của bán kính vectơ $\Delta\vec{r}_1$ có đầu mút



Hình 8

ở điểm M_1, có toạ độ là $(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ (H.8). Lập tỉ số

$$\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta q_1} = \frac{\vec{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1}$$

Lấy giới hạn của tỉ số trên khi M_1 tiến đến M, ta có vectơ $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta q_1}$ tiến đến vectơ cùng phương cùng chiều với vectơ đơn vị $\vec{e}_1$ tại M.

Đó là vectơ đạo hàm

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}, \text{ do đó } \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = h_1\vec{e}_1$$

Đại lượng này xác định vận tốc biến thiên của bán kính vectơ dọc theo đường toạ độ q_1.

Hệ số h_1 chỉ độ lớn của vectơ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$.

Ta có
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k}$$

do đó
$$(h_1)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2$$

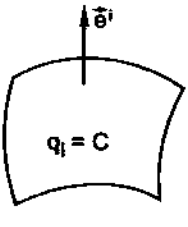
Tương tự, ta có $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = h_2\vec{e}_2$; $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = h_3\vec{e}_3$

trong đó
$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \qquad (1.6)$$

được gọi là *hệ số Lame* của hệ toạ độ cong đang xét.

4. Thông số vi phân hạng nhất

Ta xét các vectơ $\mathrm{grad}q_i$. Nó có phương vuông góc với mặt toạ độ $q_i = C_i$ và hướng theo chiều tăng của toạ độ q_i. Nếu lấy vectơ đơn vị $\vec{e}^i$ có phương pháp tuyến với mặt toạ độ $q_i = C_i$ và hướng theo chiều tăng của q_i, ta có (H.9)



Hình 9

$$\mathrm{grad}q_i = k_i\vec{e}^i$$

hệ số k_i chỉ độ lớn của vectơ $\mathrm{grad}q_i$. Ta biết
$$\mathrm{grad}q_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\vec{k}$$

nên
$$k_i^2 = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)^2 \qquad (1.7)$$

Các đại lượng k_i (i = 1, 2, 3) gọi là các *thông số vi phân hạng nhất* của hệ toạ độ cong.

Bây giờ ta xét mối liên hệ giữa hệ số Lame h_i và thông số vi phân hạng nhất k_i.

Từ công thức vi phân toàn phần của bán kính vectơ

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}dq_3$$

Nhân vô hướng cả hai vế với $\text{grad}q_i$, ta có

$$(d\vec{r}\,\text{grad}q_i) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\text{grad}q_i\right)dq_1 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\text{grad}q_i\right)dq_2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\text{grad}q_i\right)dq_3 \quad (*)$$

Mặt khác, ta có

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}dx + \frac{\partial q_i}{\partial y}dy + \frac{\partial q_i}{\partial z}dz = (d\vec{r}\,\text{grad}q_i) \qquad (**)$$

so sánh hai đẳng thức (*) và (**), ta có

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\text{grad}q_i\right) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = k \\ 0 \text{ khi } i \neq k \end{cases} \qquad (1.8)$$

Trong hệ toạ độ cong tổng quát, các đường toạ độ nói chung không vuông góc với các mặt toạ độ, do đó các vectơ đơn vị pháp tuyến $\vec{e}^i$ và tiếp tuyến $\vec{e}_i$ không trùng nhau. Phân tích một vectơ $\vec{A}$ bất kì theo các vectơ đơn vị này, ta có

$$\begin{cases} \vec{A} = A^1\vec{e}^1 + A^2\vec{e}^2 + A^3\vec{e}^3 \\ \vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 \end{cases} \qquad (1.9)$$

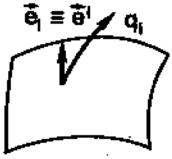
nói chung, các $A^i \neq A_i$.

Các đường toạ độ là các đường cong, các mặt toạ độ là các mặt cong nên các vectơ $\vec{e}^i$ và $\vec{e}_i$ có phương thay đổi từ điểm này sang điểm khác.

§3. HỆ TOẠ ĐỘ CONG TRỰC GIAO

1. Định nghĩa. Hệ toạ độ cong mà các đường toạ độ vuông góc với nhau từng đôi một tại mỗi điểm gọi là hệ toạ độ cong trực giao. Hiển nhiên ta có các vectơ đơn vị $\vec{e}_i$ và $\vec{e}^i$ trùng nhau (H.10)

$$\vec{e}_i \equiv \vec{e}^i$$



Hình 10

do đó

$(\vec{e}_i\vec{e}_j) = (\vec{e}_i\vec{e}^j) = \delta_{ij}$ khi đó, từ hệ thức (1.8)

ta có $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\text{grad}q_i = h_i k_i(\vec{e}_i\vec{e}^i) = h_i k_i = 1$

do đó trong hệ toạ độ cong trực giao, ta có

$$h_i = \frac{1}{k_i} \tag{1.10}$$

hay $$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)^2\right]^{-1} \tag{1.11}$$

2. Điều kiện cần và đủ để hệ toạ độ cong là trực giao

Từ định nghĩa hệ toạ độ cong trực giao, ta có

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j) = (\vec{e}^i\vec{e}^j) = 0 \text{ với } i \neq j$$

nhưng $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i$$

$$\text{grad}q_i = k_i \vec{e}^i$$

Do đó

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) = h_i h_j (\vec{e}_i \vec{e}_j) = 0 \text{ với } i \neq j$$

$$(\text{grad}q_i \ \text{grad}q_j) = k_i k_j (\vec{e}^i \vec{e}^j) = 0$$

Trong hệ toạ độ cong trực giao $\vec{e}_i \equiv \vec{e}^j$ nên ta chỉ cần một trong hai đẳng thức trên.

Vậy, điều kiện cần và đủ để một hệ toạ độ cong là trực giao là

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) = 0$$

hay

$$(\text{grad}q_i \text{grad}q_j) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial q_j}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial q_j}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\frac{\partial q_j}{\partial z}\right) = 0 \quad (1.12)$$

Ví dụ : Khảo sát xem hệ toạ độ cong sau có trực giao hay không ?

$$q_1 = \ln(x^2 + y^2) - z$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z$$

$$q_3 = \text{arctg}\frac{y}{x}$$

Dùng hệ thức (1.12) để xét cặp toạ độ q_1, q_3

$$\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial q_3}{\partial y} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial q_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2}\frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = 0$$

do đó q_1 và q_3 vuông góc với nhau.

Xét tiếp cặp toạ độ q_1, q_2

$$\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial q_2}{\partial z} =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2}x + \frac{2y}{x^2 + y^2}y - 1 = 1$$

Do đó, cặp toạ độ này không vuông góc với nhau.

Vậy hệ toạ độ cong xét trên là không trực giao.

Có thể thử lại dễ dàng các hệ toạ độ cầu và trụ là các hệ toạ độ cong trực giao.

Trong các mục tiếp theo, chúng ta chỉ xét các hệ toạ độ cong trực giao.

§4. CÁC TOÁN TỬ VI PHÂN

1. Các yếu tố vi phân

Xét vi phân bán kính vectơ

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}dq_3$$
$$= h_1 dq_1 \bar{e}_1 + h_2 dq_2 \bar{e}_2 + h_3 dq_3 \bar{e}_3$$

Vậy các yếu tố vi phân độ dài dọc theo các trục toạ độ là

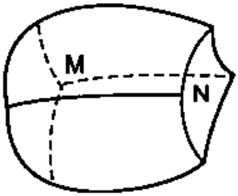
$$ds_i = h_i dq_i$$

Yếu tố vi phân khoảng cách

$$(d\vec{r})^2 = ds^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 dq_i^2 \qquad (1.13)$$

Giả sử $d\vec{r} = \overline{MN}$, trong đó N là điểm vô cùng gần M, ta dựng qua N ba mặt toạ độ, cùng với ba mặt toạ độ qua M, chúng tạo thành một hình hộp cong vô cùng bé (H.11) có các cạnh là

$$ds_i = h_i dq_i$$



Hình 11

Khi đó mặt biên của nó có diện tích là

$$\begin{cases} d\sigma_1 = h_2h_3dq_2dq_3 \\ d\sigma_2 = h_1h_3dq_1dq_3 \\ d\sigma_3 = h_1h_2dq_1dq_2 \end{cases} \qquad (1.14)$$

Còn thể tích của nó bằng

$$dV = h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3. \qquad (1.15)$$

2. Građiên của một hàm vô hướng

Ta đã biết

$$\mathrm{grad}\varphi(q) = \nabla\varphi(q) = \frac{d\varphi}{dq}\mathrm{grad}q$$

∇ là toán tử "nabla" hay toán tử Hamintơn, trong hệ toạ độ Đêcac vuông góc, nó có dạng

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Ta xét trường vô hướng trong hệ toạ độ cong

$$\varphi = \varphi(q_1, q_2, q_3)$$

khi đó

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\mathrm{grad}q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\mathrm{grad}q_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\mathrm{grad}q_3$$

Thay $\mathrm{grad}q_i = k_i\vec{e}^i = \frac{1}{h_i}\vec{e}_i$, ta có

$$\mathrm{grad}\varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \qquad (1.16)$$

Ví dụ : Tìm biểu thức của gradψ trong hệ toạ độ trụ.

Đầu tiên ta tính các hệ số Lame

$$h_\varphi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \rho^2$$

$$h_\rho^2 = 1 \; ; \; h_z^2 = 1$$

vậy $h_\varphi = \rho$; $h_\rho = 1$; $h_z = 1$

$$\text{grad}\psi = \vec{e}_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Tương tự, ta có biểu thức gradψ trong hệ toạ độ cầu

$$\text{grad}\psi = \vec{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

3. Dive của một trường vectơ

Xét một điểm M nào đó của trường, ta bao quanh nó bằng một thể tích nhỏ V và tính thông lượng P của vectơ $\vec{A}$ qua mặt S bao quanh V

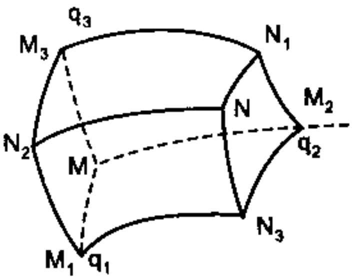
$$P = \oint_S A_n dS$$

trong đó, A_n là hình chiếu của vectơ $\vec{A}$ trên phương pháp tuyến $\vec{n}$ của S.

Lập tỉ số $\frac{P}{V}$ để quy về một đơn vị thể tích rồi chuyển qua giới hạn khi mọi kích thước của thể tích V tiến đến không. Kết quả ta nhận được một con số nào đó phụ thuộc vào dáng điệu của vectơ $\vec{A}$ ở gần điểm M và đặc trưng cho mức độ chảy ra khỏi lân cận điểm M, kí hiệu là $\text{div}\vec{A}$ (dive của vectơ $\vec{A}$).

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S A_n dS}{V} \quad (1.17)$$

Từ biểu thức định nghĩa này ta thiết lập công thức cụ thể cho $\operatorname{div}\vec{A}$ trong hệ toạ độ cong trực giao.



Hình 12

Xét một hình hộp chữ nhật cong, có đỉnh tại điểm M đang xét, các mặt bên trùng với các mặt toạ độ, các mặt đối diện với các mặt toạ độ đi qua điểm N vô cùng gần điểm M (H.12).

Mặt $MM_2N_1M_3$ có diện tích $h_2h_3dq_2dq_3$. Thành phần của vectơ $\vec{A}$ trên pháp tuyến của mặt này là $-A_1$, do đó thông lượng tương ứng của $\vec{A}$ đi qua mặt này là $-A_1h_2h_3dq_2dq_3$.

Xét mặt $M_1N_3NN_2$.

Ở mặt này toạ độ q_1 có giá trị $q_1 + dq_1$, do đó thông lượng qua mặt này là

$$\left[A_1h_2h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3)dq_1\right]dq_2dq_3$$

Từ đó thông lượng qua hai mặt $MM_2N_1M_3$ và $M_1N_3NN_2$ bằng

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3)dq_1dq_2dq_3$$

Tương tự, thông lượng qua hai mặt $MM_1N_2M_3$, $M_2N_3NN_1$ và thông lượng qua hai mặt $MM_1N_3M_2$, $M_3N_2NN_1$ là

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_1h_3)dq_1dq_2dq_3 \; ; \; \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)dq_1dq_2dq_3$$

Cộng cả ba biểu thức trên lại ta được biểu thức thông lượng toàn phần

$$\oint_S A_n dS$$

Chia cho thể tích của hình hộp

$$V = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

ta được

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right] \quad (1.18)$$

Ví dụ : Viết biểu thức $\operatorname{div}\overrightarrow{A}$ trong toạ độ trụ.

Các hệ số Lame $h_\rho = 1$; $h_\varphi = \rho$; $h_z = 1$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\rho\partial A_z}{\partial z}\right]$$

Áp dụng tính $\operatorname{div}\overline{A}$ khi $\overline{A} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Trong toạ độ trụ, $\overrightarrow{A}$ có dạng

$$\overrightarrow{A} = \rho\bar{e}_\rho + z\bar{e}_z$$

Do đó

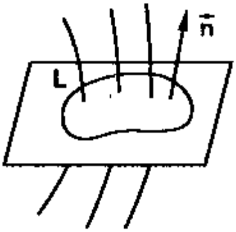
$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\rho) + 0 + \frac{\partial z}{\partial z} = 2 + 1 = 3$$

như kết quả đã tính trong hệ toạ độ Đêcac.

4. Rota của một trường vectơ

Trong trường vectơ $\overline{A}$ ta xét một vòng kín L nằm trên mặt phẳng có pháp tuyến $\overline{n}$ (H.13). Tính lưu thông Q của vectơ $\overrightarrow{A}$ dọc theo L. Đó chính là tích phân đường loại hai.

$$Q = \oint_L \overline{A} d\overline{r}$$



Hình 13

Bây giờ ta lấy điểm M trong trường, bao quanh nó bằng đường cong kín L vô cùng bé. Diện tích của miền bao bởi L là S.

Tỉ số $\frac{Q}{S}$ là mật độ lưu thông trung bình trên diện tích S. Ta đưa vào định nghĩa vectơ $\mathrm{rot}\overline{A}$ đặc trưng cho độ xoáy của trường tại điểm M

$$\mathrm{rot}_n \overline{A} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{r}}{S} \qquad (1.19)$$

trong đó $\mathrm{rot}_n \overline{A}$ là hình chiếu của vectơ $\mathrm{rot}\overline{A}$ trên phương pháp tuyến của mặt.

Ta hãy tìm biểu thức của $\mathrm{rot}\overline{A}$ trong hệ toạ độ cong trực giao.

Trước hết, ta tính hình chiếu của vectơ $\mathrm{rot}\overline{A}$ trên đường toạ độ q_1. Muốn thế ta xét vòng kín $MM_2N_1M_3M$ (H.12).

Diện tích của yếu tố vi phân mặt giới hạn bởi vòng kín đó là

$$d\sigma_1 = h_2h_3dq_2dq_3$$

Trên đoạn MM_2, ta có

$$\int_{MM_2} \vec{A}d\vec{r} = A_2ds_2 = A_2h_2dq_2$$

Trên đoạn M_3N_1, giá trị của toạ độ thứ ba là $q_3 + dq_3$.

Do đó

$$\int_{M_3N_1} \vec{A}d\vec{r} = \left[A_2h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)dq_3\right]dq_2$$

Tương tự ta có

$$\int_{MM_3} \vec{A}d\vec{r} = A_3h_3dq_3$$

$$\int_{M_2N_1} \vec{A}d\vec{r} = \left[A_3h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3)dq_2\right]dq_3$$

vậy
$$\int_{MM_2N_1M_3M} \vec{A}d\vec{r} = \int_{MM_2} + \int_{M_2N_1} - \int_{M_3N_1} - \int_{MM_3}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right]dq_2dq_3$$

Chia biểu thức này cho $d\sigma_1$ và làm tương tự, ta có

$$\begin{cases} \text{rot}_1\vec{A} = \dfrac{1}{h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right] \\ \text{rot}_2\vec{A} = \dfrac{1}{h_3h_1}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1) - \dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\right] \\ \text{rot}_3\vec{A} = \dfrac{1}{h_1h_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2) - \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1)\right] \end{cases} \tag{1.20}$$

Ví dụ : Ta viết các biểu thức (1.20) trong hệ toạ độ cầu.

Các hệ số Lame $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r\sin\theta$.

Thay vào biểu thức trên, ta có

$$\text{rot}_r\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}A_\varphi\sin\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

$$\text{rot}_\theta\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)$$

$$\text{rot}_\varphi\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}$$

Áp dụng tính rot của trường vectơ $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3}$.

Các thành phần của $\vec{A}$ là $A_r = \frac{1}{r^2}$; $A_\theta = 0$; $A_\varphi = 0$, do đó $\text{rot}_r\vec{A} = 0$; $\text{rot}_\theta\vec{A} = 0$; $\text{rot}_\varphi\vec{A} = 0$.

Đó là một trường không xoáy.

5. Toán tử Laplaxơ (Laplace)

Dùng kí hiệu toán tử nabla ∇, ta có

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi,\ \text{div}\vec{A} = \nabla\vec{A},\ \text{rot}\vec{A} = [\nabla \times \vec{A}]$$

Nếu tác dụng toán tử ∇ lên chúng một lần nữa, ta được các toán tử vi phân hạng hai.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \text{divgrad}\varphi = \nabla\nabla\varphi \\
\varphi \arrow[r] & \text{grad}\varphi = \nabla\varphi \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \text{rotgrad}\varphi = [\nabla \times \nabla\varphi]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{div}\vec{A} = \nabla\vec{A} \arrow[r] & \text{graddiv}\vec{A} = \nabla(\nabla\vec{A}) \\
\vec{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{divrot}\vec{A} = \nabla[\nabla \times \vec{A}] \\
 & \text{rot}\vec{A} = [\nabla \times \vec{A}] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \text{rotrot}\vec{A} = [\nabla \times [\nabla \times \vec{A}]]
\end{tikzcd}$$

Trong đó có một số hệ thức cần chú ý :

a) Đối với trường thế

$$\text{rotgrad}\varphi = 0$$

thật vậy $\qquad [\nabla \times \nabla\varphi] = [\nabla \times \nabla]\varphi = 0$

vì tích hữu hướng của hai vectơ cộng tuyến bằng không.

b) $\text{divrot}\vec{A} = \nabla[\nabla \times \vec{A}] = 0$

vì vectơ $[\nabla \times \vec{A}]$ vuông góc với ∇, mà tích vô hướng của hai vectơ vuông góc với nhau bằng không.

Đặt $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, ta có $\text{div}\vec{B} = 0$ nghĩa là $\vec{B}$ là trường hình ống.

c) $\text{rotrot}\vec{A} = \left[\nabla \times \left[\nabla \times \vec{A}\right]\right] = \nabla(\nabla\vec{A}) - (\nabla\nabla)\vec{A}$

$$= \text{graddiv}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$$

trong đó $\nabla^2 = \Delta$ gọi là toán tử Laplaxơ.

d) $\text{divgrad}\varphi = \nabla\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$

Ta có thể biểu diễn các toán tử vi phân hạng hai trong hệ toạ độ cong trực giao. Đối với toán tử Laplaxơ, ta áp dụng phối hợp các biểu thức của $\text{grad}\varphi$ và $\text{div}\vec{A}$, ta có

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right] \quad (1.21)$$

Ví dụ : Ta viết biểu thức của toán tử Laplaxơ trong toạ độ cầu

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

Áp dụng tính $\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right)$.

Vì $\psi = \frac{1}{r^2}$ không phụ thuộc vào θ và φ nên trong công thức trên chỉ có mặt số hạng thứ nhất

$$\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{-2}{r^3}\right) = \frac{2}{r^4}$$

§5. CÁC ĐỊNH LÍ TÍCH PHÂN

Dive và rota của một trường vectơ đặc trưng cho tính chất của trường trong một vùng bất kì nhưng đủ nhỏ. Các định lí tích phân xét dưới đây sẽ thiết lập những hệ thức đặc trưng cho trường trong những vùng lớn.

1. Định lí Ôxtrôgratxki – Gauxơ (Ostrogradski – Gauss)

Xuất phát từ định nghĩa của dive, ta hãy xét một yếu tố vi phân thể tích ΔV_k bao bởi mặt kín S_k, ta có

$$\operatorname{div}\overline{A}(M_k) = \lim_{\Delta V_k \to 0} \frac{\oint\limits_{S_k} A_n dS}{\Delta V_k}$$

Từ đó, theo tính chất của giới hạn, ta có thể chọn một số ε_k nhỏ tuỳ ý để cho

$$\left| \operatorname{div}\overline{A}(M_k) - \frac{\oint\limits_{S_k} A_n dS}{\Delta V_k} \right| < \varepsilon_k$$

hay
$$\left| \operatorname{div}\overline{A}(M_k)\Delta V_k - \oint\limits_{S_k} A_n dS \right| < \varepsilon_k \Delta V_k$$

Lấy tổng theo tất cả các yếu tố vi phân thể tích

$$\left| \sum_k \operatorname{div}\overline{A}(M_k)\Delta V_k - \sum_k \oint\limits_{S_k} A_n dS \right| < \sum_k \varepsilon_k \Delta V_k$$

Cho các yếu tố vi phân thể tích tiến đến không và chú ý là

$$\lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_k \operatorname{div}\overline{A}(M_k)\Delta V_k = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{A} dV$$

$$\sum_k \oint_{S_k} A_n dS = \oint_S A_n dS$$

trong đó S là mặt bao quanh thể tích V, ta có

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}dV = \oint_S A_n dS. \qquad (1.22)$$

Đó là công thức Ôxtrôgratxki – Gauxơ cho ta mối liên hệ giữa tích phân theo thể tích và tích phân mặt bao quanh thể tích đó.

2. Phương trình liên tục

Xét chất lỏng hoặc khí với trường vận tốc là $\vec{v}(M)$. Vectơ mật độ dòng chất lỏng

$\overline{A} = \rho\overline{v}$ với ρ là mật độ khối lượng.

Tích phân $\oint_S \rho\vec{v}d\vec{S}$ là lượng chất lỏng thoát ra khỏi mặt kín S.

Theo định luật bảo toàn khối lượng, ta thấy lượng chất lỏng thoát ra khỏi mặt kín S chính là do độ giảm khối lượng trong thể tích V gây ra. Do đó

$$\oint_S \rho\vec{v}d\vec{S} = \int_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dV$$

Áp dụng công thức Ôxtrôgratxki – Gauxơ, ta có

$$\int_S \rho\vec{v}d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})dV$$

Từ đó ta suy ra

$$\int_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dV = \int_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})dV$$

Vì thể tích V chọn tuỳ ý, ta có

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

hay
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}\vec{v} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\rho = 0$$

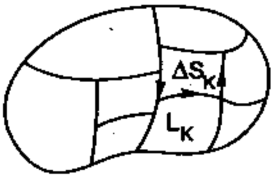
Thế nhưng $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\rho$

do đó
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{v} = 0 \qquad (1.23)$$

Phương trình này gọi là *phương trình liên tục.*

3. Định lí Xtôc (Stokes)

Bây giờ ta xét mối liên hệ giữa tích phân theo mặt của hình chiếu của rota một trường vectơ trên phương pháp tuyến của một mặt cong và tích phân theo đường cong giới hạn mặt cong này.



Hình 14

Xuất phát từ định nghĩa rota, ta xét một yếu tố vi phân mặt ΔS_k giới hạn bởi đường cong L_k (H.14), ta có

$$\mathrm{rot}_n\vec{A}(M) = \lim \frac{\oint_{L_k} \vec{A}d\vec{r}}{\Delta S_k}$$

cũng như trên, ta có

$$\left| \mathrm{rot}_n\vec{A}(M_k) - \frac{\oint_{L_k} \vec{A}d\vec{r}}{\Delta S_k} \right| < \varepsilon_k$$

Nhân cả hai vế với ΔS_k và lấy tổng theo tất cả các yếu tố vi phân mặt, rồi tìm giới hạn khi $\max\Delta S_k \to 0$, với chú ý là

$$\sum_{k} \oint_{L_k} \vec{A}d\vec{r} = \oint_{L} \vec{A}d\vec{r}$$

$$\lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum \mathrm{rot}_n \vec{A}(M_k)\Delta S_k = \int_{S} \mathrm{rot}\vec{A}d\vec{S}$$

Ta có
$$\int_{S} \mathrm{rot}\vec{A}d\vec{S} = \oint_{L} \vec{A}d\vec{r} \tag{1.24}$$

Đó là định lí Xtôc.

4. Công thức Grin (Green)

Xét trường vectơ $\vec{A}$ có dạng : $\vec{A} = \psi \mathrm{grad}\varphi$ trong đó ψ và φ là các hàm vô hướng.

Áp dụng định lí Ôxtrôgratxki cho trường hợp này, ta có

$$\oint_{S} \psi \mathrm{grad}\varphi d\vec{S} = \int_{V} \mathrm{div}(\psi \mathrm{grad}\varphi)dV$$

$$= \int_{V} (\psi \mathrm{div}\mathrm{grad}\varphi + \mathrm{grad}\psi \mathrm{grad}\varphi)dV$$

hay
$$\oint_{S} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{V} (\psi \Delta \varphi + \nabla\varphi\nabla\psi)dV \tag{1.25a}$$

$\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của mặt S. Đó là công thức Grin thứ nhất.

Nếu ta đổi chỗ ψ và φ trong (1.25a), ta có

$$\oint_{S} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_{V} (\varphi \Delta \psi + \nabla\psi\nabla\varphi)dV \tag{1.25b}$$

Trừ hai phương trình (1.25a) và (1.25b) cho nhau, ta được

$$\oint_{S} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS = \int_{V} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)dV$$

đó là công thức Grin thứ hai.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Viết biểu thức của $\mathrm{div}\vec{A}$ trong hệ toạ độ cầu.

Đáp số :

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

2. Viết biểu thức của $\mathrm{rot}\vec{A}$ trong hệ toạ độ trụ.

Đáp số :

$$\mathrm{rot}_\rho A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}_\varphi A = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}$$

$$\mathrm{rot}_z A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}$$

3. Cho hệ toạ độ cong

$$q_1 = \frac{y}{x^2}$$

$$q_2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$$

$$q_3 = x$$

Khảo sát sự trực giao của hệ toạ độ cong này và tính các hệ số Lame h_i.

4. Làm tương tự như bài 3 đối với hệ toạ độ cong

$$\lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + z}$$

$$\mu = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - z}$$

$$\eta = \mathrm{artg}\frac{y}{x}$$

5. Làm tương tự như bài 3 đối với hệ toạ độ cầu tổng quát

$$x = au\sin w\cos v$$

$$y = bu\sin w\sin v$$

$$z = cu\cos w$$

với các khoảng biến thiên của các biến số mới

$$0 \le u \le \infty$$

$$0 \le v \le 2\pi$$

$$0 \le w \le \pi$$

6. Tìm đường vectơ của trường $\vec{E} = \dfrac{kq\vec{r}}{r^3}$ của điện tích điểm q, trong đó r là khoảng cách từ điểm quan sát đến điện tích điểm.

Đáp số : Các tia xuất phát từ điểm đặt điện tích.

7. Chứng minh rằng đường vectơ của trường đồng nhất $\vec{R} = \overrightarrow{\text{const}}$ là các đường thẳng song song.

8. Một quả cầu bán kính a được tích điện. Các điện tích phân bố đều trên mặt với mật độ $\sigma = \dfrac{q}{4\pi a^2}$.

Tìm cường độ điện trường $\vec{D}$ ở trong và ngoài quả cầu.

Đáp số : $\vec{D} = \dfrac{k4\pi a^2\sigma}{r^3}\vec{r} \quad (r > a)$

$$\vec{d} = 0 \quad (r < a)$$

9. Tìm thông lượng của vectơ cường độ điện trường $\vec{E} = \dfrac{kq\vec{r}}{r^3}$ của điện tích điểm q qua mặt S kín bao quanh điện tích đó.

Đáp số : $4\pi q$

10. Cho trường vectơ $\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$

Dùng công thức Xtôc để tính tích phân đường

$$\oint_C \vec{A}d\vec{r}\text{, trong đó C là đường tròn}$$

$$C \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

chạy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục x.

Đáp số : $\pi a^2\sqrt{3}$

Chương II

TRƯỜNG TENXƠ

§1. KHÁI NIỆM VỀ TENXƠ

Trong chương I chúng ta đã nghiên cứu các đại lượng vô hướng và vectơ, trong đó vô hướng được xác định bằng một con số, còn vectơ thì ngoài việc xác định bằng một con số đặc trưng cho độ lớn của nó còn phải thêm vào các thông số khác xác định phương và chiều của nó trong không gian. Trong hệ toạ độ Đêcac vuông góc, ba con số x, y, z hoàn toàn xác định điều đó. Các số này gọi là các thành phần của vectơ.

Trong vật lí có nhiều đại lượng được xác định bằng một số thành phần nhiều hơn ba và do đó xuất hiện khái niệm về tenxơ.

Ví dụ : Xét một điện trường $\vec{E}$ tác dụng lên một vật dẫn điện. Vectơ mật độ dòng điện kí hiệu là $\vec{j}$. Nếu vật dẫn là một vật thể đẳng hướng thì ta có hệ thức

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

trong đó σ là độ dẫn điện. Hệ thức đó chứng tỏ trong vật dẫn đẳng hướng, vectơ mật độ dòng điện hướng theo vectơ cường độ điện trường. Các thành phần của vectơ $\vec{j}$ liên hệ với các thành phần của vectơ $\vec{E}$ trong hệ toạ độ Đêcac $Ox_1x_2x_3$ như sau

$$j_1 = \sigma E_1 \; ; j_2 = \sigma E_2 \; ; j_3 = \sigma E_3$$

Tuy nhiên, nếu vật dẫn đang xét là không đẳng hướng thì vectơ mật độ dòng điện không còn cùng phương với vectơ cường độ điện trường nữa, do đó thành phần j_1 của vectơ $\vec{j}$ không chỉ phụ thuộc vào E_1 nữa mà phụ thuộc cả vào E_2 và E_3. Nói chung các thành phần j_i (i = 1, 2, 3) phụ thuộc vào các E_i (i = 1, 2, 3) theo hệ thức

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3$$

hay $j_i = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}E_k$

Điều đó nói lên rằng khi biết vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$, muốn biết vectơ mật độ dòng $\vec{j}$ ta phải biết 9 đại lượng σ_{ik}. Vậy, 9 đại lượng này đặc trưng cho độ dẫn điện của vật không đẳng hướng và gọi là *tenxơ độ dẫn điện.*

§2. ĐỊNH NGHĨA TENXƠ

Trong hình học giải tích, toạ độ của một điểm trong hệ toạ độ $Ox_1x_2x_3$ khi chuyển sang hệ toạ độ $Ox'_1x'_2x'_3$ biến đổi theo công thức

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k \qquad (2.1)$$

$$i = 1, 2, 3$$

Trong phép biến đổi toạ độ này, vô hướng là đại lượng không thay đổi, còn các thành phần A_i của một vectơ A biến đổi theo công thức

$$A'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_k \qquad (2.2)$$

$$i = 1, 2, 3$$

Vì vậy ta có thể định nghĩa :

Vô hướng là đại lượng hoàn toàn được xác định trong một hệ toạ độ bất kì bằng một số. Số này không thay đổi trong phép biến đổi toạ độ.

Vectơ là đại lượng được xác định trong hệ toạ độ bất kì bằng ba số. Các số này biến đổi theo công thức (2.2) trong phép biến đổi toạ độ.

Bây giờ ta mở rộng định nghĩa vectơ ở trên thành định nghĩa về tenxơ.

Nếu trong hệ toạ độ $Ox_1x_2x_3$ ta có 3 vectơ $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$, chuyển sang hệ toạ độ $Ox'_1x'_2x'_3$, chúng biến đổi thành 3 vectơ $\vec{t}'_1$, $\vec{t}'_2$, $\vec{t}'_3$, theo hệ thức (2.2)

$$\vec{t}'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \vec{t}_k \qquad (2.3)$$

hay viết chi tiết

$$\vec{t}'_1 = a_{11}\vec{t}_1 + a_{12}\vec{t}_2 + a_{13}\vec{t}_3$$

$$\vec{t}'_2 = a_{21}\vec{t}_1 + a_{22}\vec{t}_2 + a_{23}\vec{t}_3$$

$$\vec{t}'_3 = a_{31}\vec{t}_1 + a_{32}\vec{t}_2 + a_{33}\vec{t}_3$$

thì tập hợp ba vectơ này xác định một đại lượng mới T gọi là *tenxơ aphin trực giao hạng hai.*

Các vectơ $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ có thể gọi là các thành phần của tenxơ T theo các trục Ox_1, Ox_2, Ox_3. Tương tự như vectơ, ta quy ước viết

$$T = \vec{i}_1\vec{t}_1 + \vec{i}_2\vec{t}_2 + \vec{i}_3\vec{t}_3 \tag{2.4}$$

trong đó $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ và $\vec{i}_3$ là các vectơ đơn vị trên các trục Ox_1, Ox_2 và Ox_3.

Mỗi vectơ $\vec{t}_i$ (i = 1, 2, 3) có ba thành phần theo ba trục toạ độ

$$\vec{t}_i = \sum_{k=1}^{3} \vec{i}_k t_{ik} \tag{2.5}$$

hay viết chi tiết

$$\vec{t}_1 = \vec{i}_1 t_{11} + \vec{i}_2 t_{12} + \vec{i}_3 t_{13}$$

$$\vec{t}_2 = \vec{i}_1 t_{21} + \vec{i}_2 t_{22} + \vec{i}_3 t_{23}$$

$$\vec{t}_3 = \vec{i}_1 t_{31} + \vec{i}_2 t_{32} + \vec{i}_3 t_{33}$$

do đó tenxơ T được xác định bằng 9 yếu tố t_{ik}, ta có thể viết dưới dạng ma trận

$$T = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

Ta hãy xem các thành phần t_{ik} của tenxơ T biến đổi như thế nào trong phép biến đổi toạ độ.

Các vectơ $\vec{t}_i$ trong phép biến đổi toạ độ chuyển thành các vectơ $\vec{t}'_i$ theo công thức (2.3)

$$\vec{t}'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \vec{t}_k$$

Các vectơ $\vec{t}_i'$ và $\vec{t}_k'$ lại có các thành phần biến đổi theo công thức (2.2)

$$(\vec{t}_i')_j = t'_{ij} = \sum_{l=1}^{3} a_{jl}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} t_{kl}\right)$$

$$= \sum_{l,\, k=1}^{3} a_{jl} a_{ik} t_{kl} = \sum_{k,\, l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} t_{kl}$$

Vậy

$$t'_{ij} = \sum_{k,\, l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} t_{kl} \qquad (2.7)$$

Vậy ta có định nghĩa :

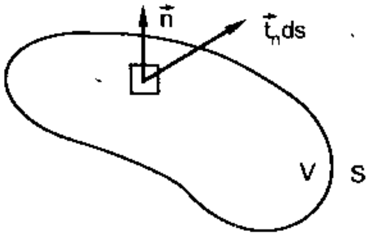
Tenxơ hạng hai (hay ở đây gọi tắt là tenxơ) là một đại lượng được xác định trong hệ toạ độ bất kì, bằng chín số (hay hàm số) t_{ik}. Trong phép biến đổi toạ độ, nó chuyển thành chín số t'_{ik} theo công thức (2.7).

Ở đây ta chỉ xét hệ toạ độ Đêcac vuông góc nên ta có các tenxơ aphin trực giao. Mở rộng định nghĩa này, ta có các tenxơ hạng khác : Vô hướng là tenxơ hạng không, vectơ là tenxơ hạng một (biến đổi theo công thức (2.2)). Tổng quát ta có tenxơ hạng m trong không gian ba chiều, đó là 3^m đại lượng $t_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m}$ mà trong phép biến đổi toạ độ thì chuyển thành 3^m đại lượng $t'_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ theo công thức

$$t'_{i_1, i_2, \dots, i_m} = \sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=1}^{3} \dots \sum_{k_m=1}^{3} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_m k_m} t_{k_1, k_2, \dots, k_m} \qquad (2.8)$$

§3. TENXƠ SUẤT CĂNG ĐÀN HỒI

Ta hãy xét một ví dụ trong cơ học : Cho một vật thể đàn hồi thể tích V giới hạn bởi mặt S. Trong quá trình biến dạng, mỗi yếu tố diện tích dS của mặt ngoài chịu tác dụng của một lực (H.15). Vì vật thể đàn hồi không đẳng hướng nên phương của lực tác dụng lên dS không trùng với phương pháp tuyến của nó.



Hình 15

Gọi $\vec{t}_n$, là lực tác dụng lên một đơn vị diện tích có pháp tuyến $\vec{n}$, lực tác dụng lên yếu tố dS sẽ là $\vec{t}_n dS$; $\vec{t}_n$ được gọi là suất căng trên diện tích dS. Tại mỗi điểm của vật thể đàn hồi, ứng với mỗi hướng $\vec{n}$, ta có một vectơ suất căng $\vec{t}_n$ riêng (không trùng phương với $\vec{n}$). Do đó, đối với mỗi hệ toạ độ ta có thể xác định được ba vectơ $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$. Ta sẽ chứng minh rằng chúng lập thành một tenxơ T.

Ta gọi $\vec{F}$ là ngoại lực tác dụng lên một đơn vị khối lượng của vật thể, $\vec{w}$ là gia tốc của các điểm của vật thể, ρ là mật độ. Trên vật có ba loại lực tác dụng :

– ngoại lực $\int\limits_V \vec{F}\rho dV$

– lực quán tính $-\int\limits_V \rho\vec{w}dV$

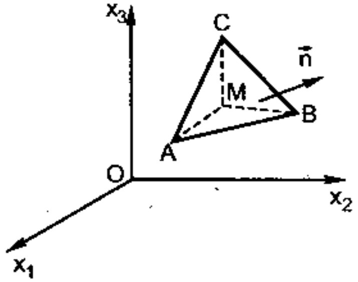
– lực căng trên bề mặt $\int\limits_S \vec{t}_n dS$ gây ra bởi các phần tử của môi trường nằm ngoài mặt S.

Theo nguyên lí Đalămbe (D'Alambert) : Tổng tất cả các ngoại lực đặt lên vật kể cả lực quán tính phải bằng không.

$$\int_V \rho(\vec{F} - \vec{w})dV + \int_S \vec{t}_n dS = 0 \qquad (2.9)$$

Áp dụng công thức này cho tứ diện vô cùng bé MABC dựng tại điểm M (H.16) sao cho ba mặt của nó song song với ba mặt toạ độ, còn mặt thứ tư (có diện tích S) trực giao với vectơ $\vec{n}$.

Trên mặt ABC có lực tác dụng $\vec{t}_n S$ (giá trị của vectơ $\vec{t}_n$ phải chọn tại một điểm nào đó của mặt ABC).



Hình 16

Lực tác dụng trên mặt MBC là $\vec{t}_1 S\cos(\vec{n}, x_1)$, vì mặt này là hình chiếu của S trên mặt x_2x_3 và có pháp tuyến hướng theo chiều âm của x_1. Tương tự như vậy ta có lực tác dụng lên các mặt MAC và MAB tương ứng là $\vec{t}_2 S\cos(\vec{n}, x_2)$ và $\vec{t}_3 S\cos(\vec{n}, x_3)$. Giá trị của tích phân thứ nhất trong (2.9), tỉ lệ với thể tích V, kí hiệu là $V\vec{q}$, trong đó $\vec{q}$ là một vectơ hữu hạn nào đó. Vậy từ (2.9), ta có

$$S[\vec{t}_n - \vec{t}_1\cos(\vec{n}, x_1) - \vec{t}_2\cos(\vec{n}, x_2) - \vec{t}_3\cos(\vec{n}, x_3)] + V\vec{q} = 0$$

Chia hai vế của phương trình này cho S, cho tứ diện thu về điểm M và chú ý là $\lim\frac{V}{S} = 0$, ta có

$$\vec{t}_n = \vec{t}_1\cos(\vec{n}, x_1) + \vec{t}_2\cos(\vec{n}, x_2) + \vec{t}_3\cos(\vec{n}, x_3) \qquad (2.10)$$

Vì hướng của vectơ $\vec{n}$ chọn tuỳ ý nên có thể lần lượt chọn nó trùng với các trục toạ độ mới x'_1, x'_2 và x'_3, ta có

$$t'_1 = t_1\cos(x'_1, x_1) + t_2\cos(x'_1, x_2) + t_3\cos(x'_1, x_3)$$
$$t'_2 = t_1\cos(x'_2, x_1) + t_2\cos(x'_2, x_2) + t_3\cos(x'_2, x_3)$$
$$t'_3 = t_1\cos(x'_3, x_1) + t_2\cos(x'_3, x_2) + t_3\cos(x'_3, x_3)$$

hay thay $$a_{ik} = \cos(x'_i, x_k)$$

ta có $$\vec{t}'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\vec{t}_k$$

Nghĩa là ba vectơ $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ lập thành một tenxơ T. Biết tenxơ này, ta có thể xác định được lực căng tác dụng lên một đơn vị diện tích có pháp tuyến $\bar{n}$ bất kì của vật thể đàn hồi. Vì vậy ta gọi T là *Tenxơ suất căng đàn hồi*.

§4. TENXƠ ĐƠN VỊ. TENXƠ CẶP ĐÔI

Ta hãy xét tenxơ I có các yếu tố $t_{ii} = 1$ (i = 1, 2, 3) ; $t_{kl} = 0$ $(k \neq l)$. Nó có dạng ma trận

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (2.11)$$

Tenxơ này gọi là tenxơ đơn vị, nó bất biến đối với phép biến đổi toạ độ. Thật vậy, theo công thức (2.7) ta có

$$t'_{kk} = \sum_{l=1}^{3} a_{kl}^2, \quad t'_{kj} = \sum_{l=1}^{3} a_{kl}a_{jl} \ (k \neq j)$$

Do tính chất trực chuẩn của ma trận của phép biến đổi toạ độ, ta có

$$t'_{kk} = 1 \text{ và } t'_{kj} = 0 \qquad (k \neq j)$$

Rõ ràng rằng đối với tenxơ đơn vị

$$\vec{t}_1 = \vec{i}_1,\ \vec{t}_2 = \vec{i}_2,\ \vec{t}_3 = \vec{i}_3$$

nên
$$I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$$

Bây giờ ta lấy hai vectơ $\vec{p}$ và $\vec{q}$ và lập ma trận

$$\vec{p}\vec{q} = \begin{vmatrix} p_1q_1 & p_1q_2 & p_1q_3 \\ p_2q_1 & p_2q_2 & p_2q_3 \\ p_3q_1 & p_3q_2 & p_3q_3 \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

do công thức

$$p'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}p_k\ ;\ q'_j = \sum_{l=1}^{3} a_{jl}q_l$$

ta có
$$p'_i\,q'_j = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}p_kq_l$$

Vậy các phần tử của ma trận (2.12) biến đổi theo công thức (2.7) nên nó xác định một tenxơ gọi là *tenxơ cặp đôi* (hay diat).

Các thành phần theo các trục x_1, x_2, x_3 của tenxơ này là $\vec{a}_1 = p_1\vec{q}$, $\vec{a}_2 = p_2\vec{q}$, $\vec{a}_3 = p_3\vec{q}$.

Chú ý là

$$\vec{q}\,\vec{p} = \begin{vmatrix} q_1p_1 & q_1p_2 & q_1p_3 \\ q_2p_1 & q_2p_2 & q_2p_3 \\ q_3p_1 & q_3p_2 & q_3p_3 \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

khác với tenxơ cặp đôi $\vec{p}\,\vec{q}$.

Ta hãy xét hai tenxơ : tenxơ T có các phần tử t_{ij} và tenxơ U có các phần tử $u_{kl} = t_{lk}$. Áp dụng công thức (2.7), ta có

$$u'_{kl} = t'_{lk} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{li}a_{kj}t_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{li}a_{kj}u_{ji}$$

$$u'_{kl} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{kj} a_{li} u_{ji}$$

Viết dưới dạng ma trận

$$U = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{Vmatrix}^c = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} = T^c$$

"c" là kí hiệu chuyển vị của ma trận.

Tenxơ U được gọi là *tenxơ liên hợp* của tenxơ T. Hiển nhiên ta có $(T^c)^c = T$.

Hiển nhiên ta có tenxơ cặp đôi (2.13) là chuyển vị của tenxơ cặp đôi (2.12).

$$(\vec{q}\,\vec{p}) = (\vec{p}\,\vec{q})^c$$

§5. PHÉP TỔNG VÀ PHÂN TÍCH TENXƠ

1. Tổng hai tenxơ. Cho tenxơ U có các thành phần là u_{ij}, kí hiệu $U = \|u_{ij}\|$ và tenxơ $V = \|v_{ij}\|$.

Ta sẽ chứng minh rằng $T = \|t_{ij}\| = \|u_{ij} + v_{ij}\|$ cũng là một tenxơ gọi là tổng của U và V. Thật vậy

$$t'_{ij} = u'_{ij} + v'_{ij} = \sum_{k,\,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} u_{kl} + \sum_{k,\,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} v_{kl}$$

$$= \sum_{k,\,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} (u_{kl} + v_{kl}) = \sum_{k,\,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} t_{kl}$$

đó là điều cần chứng minh.

2. Nhân tenxơ với hằng số. Cho tenxơ $U = \|u_{ij}\|$ và hằng số λ, ta sẽ có một tenxơ mới mà các phần tử của nó là λu_{ij}

$$T = \lambda U = \|\lambda\, u_{ij}\|$$

3. Các tính chất đối xứng. Nếu $T = T^c$ nghĩa là $t_{ij} = t_{ji}$ thì T gọi là tenxơ đối xứng. Trong tenxơ đối xứng, các phần tử đối xứng qua đường chéo của ma trận là bằng nhau, vậy nó có 6 phần tử độc lập.

Nếu tenxơ T thoả mãn $T = -T^c$ nghĩa là $t_{ij} = -t_{ji}$ thì ta gọi nó là một tenxơ phản xứng. Trong tenxơ phản xứng chỉ có ba phần tử độc lập vì các phần tử trên đường chéo bằng không.

$$t_{ii} = -t_{ii} \text{ nên } t_{ii} = 0$$

Ta có thể viết một tenxơ phản xứng A dưới dạng ma trận

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

4. Phân tích tenxơ

a) Mọi tenxơ đều có thể phân tích thành tổng của hai tenxơ : một đối xứng S và một phản xứng A.

Thật vậy, ta có $S^c = S$ và $A^c = -A$.

Đặt $T = S + A$ ta có $T^c = S^c + A^c = S - A$.

Cộng hai vế với nhau ta rút ra $S = \dfrac{T + T^c}{2}$.

Trừ hai vế với nhau ta rút ra $A = \dfrac{T - T^c}{2}$.

b) Mọi tenxơ đều có thể phân tích thành tổng của ba tenxơ cặp đôi. Thật vậy ta xét ba tenxơ cặp đôi

$$\vec{i}_1\vec{t}_1 = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \vec{i}_2\vec{t}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\vec{i}_3\vec{t}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix}$$

Khi cộng cả ba tenxơ cặp đôi này lại, rõ ràng ta nhận được tenxơ T

$$T = \vec{i}_1\vec{t}_1 + \vec{i}_2\vec{t}_2 + \vec{i}_3\vec{t}_3 = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} \qquad (2.14)$$

§6. PHÉP NHÂN TENXƠ VỚI VECTƠ

1. Nhân vô hướng tenxơ với vectơ

Cho một tenxơ $\qquad T = \vec{i}_1\vec{t}_1 + \vec{i}_2\vec{t}_2 + \vec{i}_3\vec{t}_3$

và vectơ $\qquad \vec{p} = \vec{i}_1 p_1 + \vec{i}_2 p_2 + \vec{i}_3 p_3.$

Tích vô hướng của tenxơ T với vectơ $\bar{p}$ từ bên phải là một vectơ,tính theo công thức

$$\vec{p}\,' = T.\vec{p} = \vec{i}_1(\vec{t}_1\vec{p}) + \vec{i}_2(\vec{t}_2\vec{p}) + \vec{i}_3(\vec{t}_3\vec{p}) =$$

$$= \vec{i}_1(t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3) + \vec{i}_2(t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{23}p_3) +$$

$$+ \vec{i}_3(t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \vec{i}_k(\vec{t}_k . \vec{p}) \qquad (2.15)$$

trong đó $(\vec{t}_k . \vec{p})$ kí hiệu tích vô hướng của hai vectơ $\vec{t}_k$ và $\vec{p}$.

Vậy các thành phần của vectơ $\vec{p}'$ là

$$\begin{cases} p'_1 = t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3 \\ p'_2 = t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{23}p_3 \\ p'_3 = t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3 \end{cases} \tag{2.16}$$

Vì vậy, vectơ $\vec{p}' = T.\vec{p}$ là hàm vectơ tuyến tính của vectơ $\vec{p}$.

Từ (2.16) ta thấy tích vô hướng của một tenxơ với vectơ có các tính chất kết hợp và phân phối

$$(T_1 + T_2).\vec{p} = T_1.\vec{p} + T_2.\vec{p}$$

$$T.(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = T.\vec{p}_1 + T.\vec{p}_2$$

$$T.m\vec{a} = m(T.\vec{a})$$

Trong trường hợp T là một tenxơ cặp đôi của hai vectơ $\vec{q}$ và $\vec{r}$

$$T = \vec{q}\,\vec{r} = \begin{Vmatrix} q_1r_1 & q_1r_2 & q_1r_3 \\ q_2r_1 & q_2r_2 & q_2r_3 \\ q_3r_1 & q_3r_2 & q_3r_3 \end{Vmatrix}$$

thì $\vec{p}' = T.\vec{p} = (\vec{q}\,\vec{r}).\vec{p} = \vec{q}(\vec{r}.\vec{p})$

Tương tự (2.15) ta có định nghĩa tích vô hướng của tenxơ T với vectơ $\vec{p}$ từ bên trái, đó là vectơ $\vec{p}''$ tính theo công thức

$$\begin{aligned} \vec{p}'' = \vec{p}.T &= (\vec{p}.\vec{i}_1)\vec{t}_1 + (\vec{p}.\vec{i}_2)\vec{t}_2 + (\vec{p}.\vec{i}_3)\vec{t}_3 \\ &= \vec{i}_1(t_{11}p_1 + t_{21}p_2 + t_{31}p_3) + \vec{i}_2(t_{12}p_1 + t_{22}p_2 + t_{32}p_3) + \\ &\qquad + \vec{i}_3(t_{13}p_1 + t_{23}p_2 + t_{33}p_3) \\ &= \sum_k (\vec{p}.\vec{i}_k)\vec{t}_k \end{aligned}$$

So sánh hai phép nhân tích vô hướng của tenxơ với vectơ từ bên phải và bên trái, ta rút ra

$$T.\vec{p} = \vec{p}.T^c$$

Vậy thứ tự nhân ở đây là quan trọng. Ở ví dụ đầu chương về tenxơ độ dẫn điện σ, ta có

$$\vec{j} = \sigma.\vec{E}$$

nghĩa là vectơ mật độ dòng điện là tích vô hướng của tenxơ độ dẫn σ với vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$.

Để làm ví dụ thứ hai, ta xét trường vectơ $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x_1, x_2, x_3)$. Các thành phần của gia lượng $d\vec{a}$ của vectơ $\vec{a}$ liên hệ với các thành phần của gia lượng $d\vec{r}$ của $\vec{r}$ theo công thức

$$\begin{cases} da_1 = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3 \\ da_2 = \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3}dx_3 \\ da_3 = \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3}dx_3 \end{cases} \tag{2.17}$$

So sánh với các công thức (2.15) và (2.16) ta thấy các hệ số của biểu thức tuyến tính (2.17) tạo thành một tenxơ, ta gọi nó là tenxơ đạo hàm của vectơ $\vec{a}$ theo vectơ $\vec{r}$, kí hiệu là

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix} \tag{2.18}$$

Công thức (2.17) bây giờ có dạng đơn giản

$$d\vec{a} = \frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} \, . \, d\vec{r} \tag{2.19}$$

Tenxơ liên hiệp với tenxơ đạo hàm $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ là tenxơ gradiên của vectơ $\vec{a}$

$$\text{grad}\,\vec{a} = \nabla\vec{a} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix} \qquad (2.20)$$

Từ đây ta có

$$d\vec{a} = d\vec{r}\,.\,\text{grad}\,\vec{a} = d\vec{r}\,.\,\nabla\vec{a} \qquad (2.21)$$

2. Nhân hữu hướng tenxơ với vectơ

Tích hữu hướng của tenxơ T với vectơ $\vec{p}$ về bên phải là một tenxơ mới tính theo công thức

$$T' = (T \times \vec{p}) = \vec{i}_1(\vec{t}_1 \times \vec{p}) + \vec{i}_2(\vec{t}_2 \times \vec{p}) + \vec{i}_3(\vec{t}_3 \times \vec{p})$$

$$= \sum_k \vec{i}_k(\vec{t}_k \times \vec{p}) \qquad (2.22)$$

Từ công thức này ta thấy tích hữu hướng của một tenxơ với một vectơ có tính chất phân phối. Nếu tenxơ T là một tenxơ cặp đôi $\vec{q}\,\vec{r}$ thì ta dễ dàng có

$$(\vec{q}\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{q}(\vec{r} \times \vec{p})$$

Tương tự, ta có phép nhân hữu hướng tenxơ T với một vectơ $\vec{p}$ từ bên trái

$$T'' = (\vec{p} \times T) = (\vec{p} \times \vec{i}_1)\vec{t}_1 + (\vec{p} \times \vec{i}_2)\vec{t}_2 + (\vec{p} \times \vec{i}_3)\vec{t}_3$$

$$= \sum_k (\vec{p} \times \vec{i}_k)\vec{t}_k \qquad (2.23)$$

§7. PHÉP NHÂN HAI TENXƠ

1. Định nghĩa : Cho hai tenxơ $A = \|a_{ik}\|, B = \|b_{ik}\|$ và vectơ $\vec{p}$. Trong mục trên, ta đã xét phép nhân vô hướng tenxơ với vectơ về bên phải để được một vectơ mới

$$\vec{p}\,' = B.\vec{p} \qquad (2.24)$$

Bây giờ ta nhân vô hướng tiếp tục tenxơ A với vectơ $\vec{p}\,'$ về bên phải, ta được vectơ $\vec{p}\,''$

$$\vec{p}\,'' = A.\vec{p}\,' = A.(B.\vec{p}) \qquad (2.25)$$

Thay cho hai tenxơ A và B, ta có thể coi $\vec{p}\,''$ là kết quả của phép nhân vô hướng về bên phải của một tenxơ C với vectơ $\vec{p}$.

$$\vec{p}\,'' = C.\vec{p} \qquad (2.26)$$

Khi đó tenxơ C được gọi là tích vô hướng của hai tenxơ A và B.

$$C = A.B = AB \qquad (2.27)$$

Ta viết lại các đẳng thức trên đối với các phần tử

$$p'_k = \sum_{j=1}^{3} b_{kj}p_j$$

$$p''_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}p'_k$$

Do đó $$p''_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{3} b_{kj}p_j\right) = \sum_{k,\,j=1}^{3} a_{ik}b_{kj}p_j$$

So sánh với biểu thức

$$p''_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij}p_j$$

ta có
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \tag{2.28}$$

Nghĩa là các phần tử của tenxơ C là tích vô hướng của hai tenxơ A và B được tính theo công thức (2.28).

2. Nhân các tenxơ cặp đôi. Nếu cho hai tenxơ A và B dưới dạng

$A = \vec{p}\,\vec{q}$, $B = \vec{r}\,\vec{s}$ thì dựa vào định nghĩa trên, ta có

$$A.B = (\vec{p}\,\vec{q})(\vec{r}\,\vec{s}) = \vec{p}(\vec{q}.\vec{r})\vec{s} = (\vec{q}.\vec{r})\vec{p}\vec{s}$$

3. Các tính chất. Dựa trên định nghĩa, ta chứng minh được các tính chất sau :

(A + B)C = A.C + B.C (tính chất phân bố)

(mA.B) = A.(mB) = m(A.B)

(A . B).C = A.(B.C) (tính chất kết hợp)

A.B ≠ B.A (không có tính chất giao hoán). Cũng từ định nghĩa phép nhân tích vô hướng hai tenxơ, ta có định nghĩa về tenxơ nghịch đảo

$$A.A^{-1} = I \tag{2.29}$$

với I là tenxơ đơn vị.

Viết hệ thức (2.29) dưới dạng ma trận và tính định thức của chúng, ta có

$$\det A.\det A^{-1} = 1$$

Vậy điều kiện để có tenxơ nghịch đảo là định thức tương ứng của nó phải khác không. Ta dễ dàng chứng minh

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

* §8. TENXƠ ĐỐI XỨNG. ELIPXOIT TENXƠ

Xét tenxơ đối xứng T, ta có

$$t_{kl} = t_{lk} \quad (k, l = 1, 2, 3) \qquad (2.30)$$

Ta chứng minh tính chất quan trọng sau đây của tenxơ đối xứng

$$\vec{b}.(T.\vec{a}) = \vec{a}(T.\vec{b}) \qquad (2.31)$$

Thật vậy

$$\vec{b}.(T.\vec{a}) = \sum_{k=1}^{3} b_k \sum_{l=1}^{3} t_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} t_{kl} b_k a_l$$

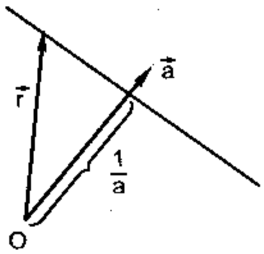
$$\vec{a}.(T.\vec{b}) = \sum_{l=1}^{3} a_l \sum_{k=1}^{3} t_{lk} b_k = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} t_{lk} b_k a_l$$

Do (2.30), hai biểu thức này bằng nhau.

Bây giờ ta xét sự minh hoạ hình học của tenxơ đối xứng.

Xét mặt phẳng biểu diễn bằng phương trình

$$\vec{a}.\vec{r} = 1 \qquad (2.32)$$



Hình 17

Đó là một mặt phẳng vuông góc với vectơ $\vec{a}$ cách gốc một khoảng là $\frac{1}{a}$, vì tất cả các vectơ biến thiên có hình chiếu trên $\vec{a}$ là $\frac{1}{a}$ đều nằm trên mặt phẳng này (H.17).

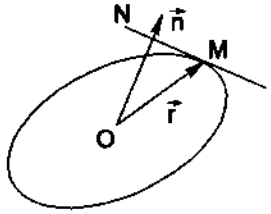
Bây giờ ta tiến hành tương tự đối với tenxơ đối xứng T. Xét mặt phẳng

$$\vec{r}.(T.\vec{r}) = 1 \qquad (2.33)$$

Thực hiện phép nhân, ta có

$$t_{11}x_1^2 + t_{22}x_2^2 + t_{33}x_3^2 + 2t_{12}x_1x_2 + 2t_{23}x_2x_3 + 2t_{31}x_3x_1 = 1 \quad (2.34)$$

Như vậy, ta nhận được một mặt bậc hai có tâm O (H.18). Rõ ràng mặt nhận được không phụ thuộc cách chọn hệ toạ độ. Ta hãy tìm giao điểm của nó với các trục toạ độ. Trên trục Ox_1 ta có $x_2 = x_3 = 0$; vì vậy, theo (2.34), ta có $x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{t_{11}}}$.



Hình 18

Nhưng vì mọi bán kính xuất phát từ gốc toạ độ *và có hướng* $\vec{n}$ *đều có thể chọn là trục* x_1, bán kính đó cắt mặt (2.33) tại điểm cách gốc toạ độ một khoảng

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{t_{nn}}} \qquad (2.35)$$

Vì vậy, nếu trên mỗi đường thẳng đi qua gốc toạ độ ta đặt một đoạn bằng nghịch đảo của căn bậc hai của t_{nn}, thì quỹ tích các đầu mút của các đoạn đó là mặt bậc hai (2.34). Nếu t_{nn} dương đối với mọi hướng $\vec{n}$ thì mặt (2.34) rõ ràng là mặt elipxoit. Vì vậy phương trình này gọi là phương trình elipxoit tenxơ, mặc dù nó có thể biểu diễn mặt bậc hai khác.

Tích vô hướng $T.\vec{r}$ có ý nghĩa hình học đơn giản : Nếu $\vec{r}$ có đầu mút tại điểm M của mặt (2.33) thì vectơ

$$\vec{r}_1 = T.\vec{r} \qquad (2.36)$$

có hướng pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc với mặt (2.33) tại điểm M.

Thực vậy, nếu ta dịch chuyển M nằm trên mặt một khoảng vô cùng nhỏ, thì bán kính vectơ $\vec{r}$ nhận gia lượng $d\vec{r}$ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt tại điểm M. Khi đó chúng ta có

$$d[\vec{r}.(T.\vec{r})] = 0$$

(vì $\vec{r}(T.\vec{r}) = 1$ trên mặt phẳng), hay

$$d\vec{r}.(T.\vec{r}) + \vec{r}.(T.d\vec{r}) = 0$$

Do tính chất (2.31) của tenxơ đối xứng ta rút ra

$$d\vec{r}.\vec{r}_1 = 0$$

Tức là vectơ $\vec{r}_1$ vuông góc với mọi hướng nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt tại điểm M. Đó là điều cần chứng minh.

*§9. TRỤC CHÍNH, GIÁ TRỊ CHÍNH VÀ BẤT BIẾN CỦA TENXƠ

Ta hãy xét một tenxơ T nào đó và giả sử

$$T.\vec{a} = \vec{b}$$

Nếu vectơ $\vec{b}$ cộng tuyến với vectơ $\vec{a}$, tức là sau tác dụng của tenxơ T, vectơ $\vec{a}$ chỉ thay đổi độ dài mà không đổi hướng. Trong trường hợp này hướng của vectơ $\vec{a}$ gọi là hướng chính của tenxơ. Nếu $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ thì đại lượng λ gọi là giá trị chính của tenxơ. Bây giờ ta hãy tìm hướng chính và giá trị chính của một tenxơ. Theo định nghĩa, ta có

$$T.\vec{a} = \lambda\vec{a} \tag{2.37}$$

Viết phương trình này trong một hệ toạ độ nào đó, ta có

$$\begin{cases} t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3 = \lambda a_1 \\ t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3 = \lambda a_2 \\ t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3 = \lambda a_3 \end{cases} \tag{2.38}$$

Ta nhận được hệ ba phương trình tuyến tính thuần nhất đối với a_1, a_2, a_3. Hệ này có nghiệm khác không khi

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.39)$$

Đây là một phương trình bậc ba đối với λ. Từ đó có thể nhận được các giá trị của λ. Từ hệ phương trình (2.38) ta có thể xác định được tỉ số $a_1 : a_2 : a_3$, tức là xác định được hướng chính của tenxơ ứng với nghiệm λ của phương trình (2.39).

Trong trường hợp tenxơ đối xứng, chúng ta đã có phương trình mặt

$$t_{11}x_1^2 + t_{22}x_2^2 + t_{33}x_3^2 + 2t_{12}x_1x_2 + 2t_{23}x_2x_3 + 2t_{31}x_3x_1 = 1 \qquad (2.40)$$

mặt này không phụ thuộc việc chọn hệ toạ độ.

Do đó chọn thích hợp hệ toạ độ $O\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, phương trình (2.40) sẽ có dạng

$$\lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + \lambda_3\overline{x}_3^2 = 1 \qquad (2.41)$$

Như vậy, trong hệ toạ độ này, tất cả các phần tử của tenxơ, trừ các phần tử nằm trên đường chéo chính, đều bằng không, và tenxơ có dạng

$$T = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} \qquad (2.42)$$

và biến đổi $T.\vec{a} = \vec{b}$ có dạng rất đơn giản

$$b_1 = \lambda_1 a_1 \ ; \ b_2 = \lambda_2 a_2 \ ; \ b_3 = \lambda_3 a_3 \qquad (2.43)$$

Vậy đối với tenxơ đối xứng, hướng của các trục $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ và $\overline{x}_3$ là hướng chính, và các đại lượng λ_1, λ_2 và λ_3 là các giá trị chính tương ứng.

Bây giờ nếu ta khai triển phương trình bậc ba đối với λ theo các luỹ thừa giảm dần của λ, ta có

$$\lambda^3 + \lambda^2(t_{11} + t_{22} + t_{33}) + \lambda\left(\begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix}\right) -$$

$$- \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.44)$$

Ta biết các nghiệm λ_1, λ_2 và λ_3 của phương trình này không phụ thuộc vào việc chọn hệ toạ độ. Mặt khác ta biết các hệ thức giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình là

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \qquad (2.45)$$

Vì vậy các đại lượng I_1, I_2 và I_3 không thay đổi qua phép biến đổi toạ độ và được gọi là các *bất biến của tenxơ*. Từ các bất biến đó, ta có thể lập được nhiều bất biến khác, chẳng hạn

$$I_1^2 - 2I_2 = t_{11}^2 + t_{22}^2 + t_{33}^2 + 2t_{12}t_{21} + 2t_{23}t_{32} + 2t_{31}t_{13} =$$

$$= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \qquad (2.46)$$

§10. ĐẠO HÀM TENXƠ THEO ĐỐI SỐ VÔ HƯỚNG

Bây giờ ta hãy nghiên cứu tenxơ mà các phần tử của nó là các hàm của một đại lượng vô hướng t nào đó, chẳng hạn thời gian. Thông thường tenxơ T(t) được viết dưới dạng

$$T(t) = \begin{Vmatrix} t_{11}(t) & t_{12}(t) & t_{13}(t) \\ t_{21}(t) & t_{22}(t) & t_{23}(t) \\ t_{31}(t) & t_{32}(t) & t_{33}(t) \end{Vmatrix} \qquad (2.47)$$

Ta có định nghĩa sau : Đạo hàm của tenxơ T theo đối số vô hướng t là giới hạn của tỉ số giữa gia lượng của tenxơ và gia lượng của biến số độc lập khi gia lượng của biến số độc lập này tiến đến không

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \qquad (2.48)$$

Ta luôn luôn giả thiết đạo hàm được xét là tồn tại và liên tục.

Nếu tenxơ cho dưới dạng (2.47) thì theo quy tắc trừ tenxơ và chia tenxơ cho một vô hướng ta có biểu thức sau :

$$\frac{dT}{dt} = \begin{Vmatrix} \dot{t}_{11}(t) & \dot{t}_{12}(t) & \dot{t}_{13}(t) \\ \dot{t}_{21}(t) & \dot{t}_{22}(t) & \dot{t}_{23}(t) \\ \dot{t}_{31}(t) & \dot{t}_{32}(t) & \dot{t}_{33}(t) \end{Vmatrix} \qquad (2.49)$$

trong đó dấu chấm kí hiệu đạo hàm theo t.

Ta dễ dàng chứng minh được các công thức sau dựa trên định nghĩa đạo hàm.

Nếu T(t) cho dưới dạng

$$T(t) = \vec{i}_1\vec{t}_1(t) + \vec{i}_2\vec{t}_2(t) + \vec{i}_3\vec{t}_3(t) \qquad (2.50)$$

thì

$$\frac{dT}{dt} = \vec{i}_1\dot{\vec{t}}_1(t) + \vec{i}_2\dot{\vec{t}}_2(t) + \vec{i}_3\dot{\vec{t}}_3(t) \qquad (2.51)$$

Nếu T có dạng tenxơ cặp đôi

$$T(t) = \vec{p}_1(t)\vec{q}_1(t) + \vec{p}_2(t)\vec{q}_2(t) + \vec{p}_3(t)\vec{q}_3(t) \qquad (2.52)$$

thì

$$\frac{dT}{dt} = \dot{\vec{p}}_1(t)\vec{q}_1(t) + \vec{p}_1(t)\dot{\vec{q}}_1(t) + \dot{\vec{p}}_2(t)\vec{q}_2(t) +$$

$$+ \vec{p}_2(t)\dot{\vec{q}}_2(t) + \dot{\vec{p}}_3(t)\vec{q}_3(t) + \vec{p}_3(t)\dot{\vec{q}}_3(t) \qquad (2.53)$$

Các tính chất cơ bản của đạo hàm vẫn đúng đối với đạo hàm của các tenxơ. Chẳng hạn :

Đạo hàm của một tổng các tenxơ

$$\frac{d(T_1 + T_2)}{dt} = \frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt}$$

Đạo hàm của tích một tenxơ với một vô hướng

$$\frac{d(mT)}{dt} = \frac{dm}{dt}T + m\frac{dT}{dt}$$

Đạo hàm của tích một tenxơ T với vectơ $\vec{a}$

$$\frac{d(T\vec{a})}{dt} = \frac{dT}{dt}\vec{a} + T\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d(T\times\vec{a})}{dt} = \left(\frac{dT}{dt}\times\vec{a}\right) + \left(T\times\frac{d\vec{a}}{dt}\right)$$

Đạo hàm của tích vô hướng hai tenxơ

$$\frac{d(T_1T_2)}{dt} = \frac{dT_1}{dt}T_2 + T_1\frac{dT_2}{dt}$$

*§11. DIVE CỦA TRƯỜNG TENXƠ

Dive của một tenxơ được định nghĩa giống như dive của vectơ.

Ta xét trường tenxơ

$$T(\vec{r}) = \vec{i}_1\vec{t}_1(\vec{r}) + \vec{i}_2\vec{t}_2(\vec{r}) + \vec{i}_3\vec{t}_3(\vec{r})$$

Tại mỗi điểm của trường, ta xác định vectơ

$$\vec{t}_n = \vec{n}.T = \vec{t}_1\cos(\vec{n}, x_1) + \vec{t}_2\cos(\vec{n}, x_2) + \vec{t}_3\cos(\vec{n}, x_3)$$

đối với mỗi hướng $\vec{n}$.

Bây giờ ta áp dụng công thức Ôxtrôgratxki – Gauxơ đối với tích phân mặt $\oint\limits_S \vec{t}_n dS$:

$$\oint\limits_S \vec{t}_n dS = \oint\limits_S \left[\vec{t}_1\cos(\vec{n}, x_1) + \vec{t}_2\cos(\vec{n}, x_2) + \vec{t}_3\cos(\vec{n}, x_3)\right]dS$$

$$= \int\limits_V \left(\frac{\partial\vec{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\vec{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\vec{t}_3}{\partial x_3}\right)dV \qquad (2.54)$$

Nếu coi $\frac{\partial \vec{t}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \vec{t}_3}{\partial x_3}$ là liên tục thì giới hạn

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint\limits_S \vec{t}_n dS}{V}$$

sẽ tồn tại và là một vectơ gọi là dive của tenxơ T, kí hiệu là

$$\text{div}T = \lim_{V \to 0} \frac{\oint\limits_S \vec{t}_n dS}{V} = \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{t}_3}{\partial x_3} \quad (2.55)$$

Các thành phần của vectơ đó là

$$(\text{div}T)_1 = \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{31}}{\partial x_3}$$

$$(\text{div}T)_2 = \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_3}$$

$$(\text{div}T)_3 = \frac{\partial t_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} \quad (2.56)$$

Công thức (2.54) có thể viết lại

$$\oint\limits_S \vec{t}_n dS = \int\limits_V \text{div}T dV \quad (2.57)$$

Ví dụ 1 : Ta xét div(φI), trong đó I là tenxơ đơn vị, φ là một hàm vô hướng.

$$\text{div}(\varphi I) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint\limits_S \varphi \vec{n} dS}{V} = \frac{\partial(\varphi \vec{i}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varphi \vec{i}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\varphi \vec{i}_3)}{\partial x_3}$$

$$= \vec{i}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \text{grad}\varphi$$

Ví dụ 2 : Trong §2 khi xét đến tenxơ suất căng đàn hồi, ta có phương trình (2.9).

$$\int_V \rho(\vec{F} - \vec{w})dV + \oint_S \vec{t}_n dS = 0$$

ta đã suy ra suất căng đàn hồi lập thành một tenxơ T.

Thay $\vec{w} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ và sử dụng công thức (2.57) ta có

$$\int_V \left[\rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right) + \mathrm{div}T\right] dV = 0$$

Vì thể tích V là tuỳ ý nên ta suy ra công thức cơ bản của cơ học môi trường liên tục

$$\rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right) + \mathrm{div}T = 0$$

§12. SƠ LƯỢC VỀ KHÔNG GIAN N CHIỀU

Để mở rộng xét tenxơ trong toạ độ cong n chiều, ta nghiên cứu một số khái niệm cơ bản.

Trong không gian n chiều, một điểm được xác định bằng n toạ độ $(x^1, x^2, ..., x^n)$. Các chỉ số 1, 2,..., n được gọi là các chỉ số trên (không phải là số mũ).

Khoảng cách giữa hai điểm M $(y^1, y^2, ..., y^n)$ và N $(x^1, x^2, ..., x^n)$ được xác định bằng công thức

$$MN^2 = (y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + ... + (y^n - x^n)^2.$$

Nếu điểm M vô cùng gần điểm N thì nó có các toạ độ là

$$x^1 + dx^1,\ x^2 + dx^2, \ldots,\ x^n + dx^n$$

và khoảng cách giữa chúng được xác định bằng công thức :

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 \quad (2.58)$$

Tương tự như trong trường hợp ba chiều, nếu sử dụng các toạ độ cong $q_1, q_2, \ldots q_n$, ta có

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n) dq_i dq_k \quad (2.59)$$

trong đó ta có thể coi $g_{ik} = g_{ki}$.

Để thuận tiện cho việc thiết lập các công thức, dưới đây ta kí hiệu các chữ $x^1, x^2, \ldots, x^n$ đã là toạ độ cong rồi.

Thay cho các toạ độ $x^1, x^2, \ldots, x^n$, ta sử dụng hệ toạ độ mới $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$, liên hệ với hệ toạ độ cũ bằng các công thức

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \quad (2.60)$$

Ta nói rằng, công thức này xác định một phép biến đổi toạ độ. Ta cũng giả thiết rằng, trong miền biến thiên đang xét của các toạ độ $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$, các hàm trên là đơn trị, liên tục và có đạo hàm liên tục ở tất cả các hạng mà ta cần. Ngoài ra ta cũng đòi hỏi Jacôbiên

$$\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} \cdots \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} \dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} \cdots \dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \quad (2.61)$$

phải khác không. Như vậy, ta có thể giải phương trình (2.60) đối với các $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$.

$$\overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^1, x^2, ..., x^n) \quad (\alpha = 1, 2, ..., n) \tag{2.62}$$

Trong kí hiệu mới, dạng toàn phương (2.59) có dạng

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ik}dx^i dx^k \tag{2.63}$$

còn gọi là dạng mêtric. Không gian n chiều trong trường hợp này gọi là không gian Riman (Riemann), còn không gian n chiều tương ứng với dạng toàn phương (2.59) gọi là không gian Ơclit (Euclide).

§13. VECTƠ HIỆP BIẾN VÀ PHẢN BIẾN

Trong không gian ba chiều, ta đã định nghĩa vectơ theo công thức biến đổi các thành phần của nó theo công thức (2.2)

$$A'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_k \qquad i = 1, 2, 3$$

Trong biến đổi toạ độ (2.1)

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k \qquad i = 1, 2, 3$$

ta có thể thay $a_{ik} = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x_k}$.

Mở rộng cho trường hợp trong không gian n chiều tổng quát ta có : Nếu đối với mỗi hệ toạ độ $x^1, x^2, ..., x^n$ có xác định một tập hợp n hàm số $A^1, A^2, ..., A^n$, với phép biến đổi toạ độ (2.60) nó biến đổi tương ứng thành $\overline{A}^1, \overline{A}^2, ..., \overline{A}^n$

$$\overline{A}^i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (i = 1, ..., n) \tag{2.64}$$

thì ta nói rằng tập hợp các đại lượng $A^1, A^2, ..., A^n$ xác định một vectơ phản biến. Các đại lượng $A^1, A^2, ..., A^n$ được gọi là các thành phần của một vectơ phản biến.

Ta quy ước khi gặp các chỉ số lặp lại hai lần trong biểu thức, thì ta hiểu là tổng từ 1 đến n, do đó công thức (2.64) có thể viết :

$$\overline{A}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \tag{2.65}$$

i = 1, 2, ..., n, nên ta có n công thức dạng (2.65).

Ví dụ quan trọng nhất của vectơ phản biến là vectơ dx^i, có các thành phần là vi phân của các toạ độ.

Thật vậy, từ công thức (2.60), theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^2} dx^2 + ... + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

đó chính là công thức biến đổi các thành phần của vectơ phản biến (2.64).

Nếu n đại lượng $A_1, A_2, ..., A_n$ trong hệ toạ độ $(x^1, x^2, ..., x^n)$ liên hệ với n đại lượng $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ trong hệ toạ độ $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n)$ bằng các phương trình biến đổi

$$\overline{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i} \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2.66}$$

thì chúng được gọi là các thành phần của một vectơ hiệp biến.

Ví dụ về các thành phần của vectơ hiệp biến chính là các đạo hàm vô hướng φ theo toạ độ. Đối với mỗi hệ toạ độ $x^1, x^2, \ldots, x^n$, ta xác định được tập hợp n đại lượng

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}$$

trong phép biến đổi toạ độ (2.60), nó biến đổi như sau :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i}$$

Đặt $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = A_\alpha$; $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^\alpha} = \bar{A}_\alpha$ ta có

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}, \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

chính là biến đổi (2.66).

§14. TENXƠ HẠNG HAI

Mở rộng các công thức biến đổi các thành phần tenxơ aphin trực giao, và các định nghĩa vectơ trong §13, ta đi đến các định nghĩa sau đây.

Nếu đối với mỗi hệ toạ độ x^α, ta có một tập hợp n^2 hàm $A^{\alpha\beta}$ mà trong phép biến đổi toạ độ (2.60) chúng tuân theo công thức

$$\bar{A}^{ik} = A^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^\beta} \qquad (2.67)$$

thì các hàm đó xác định một tenxơ phản biến hạng hai và chúng là các thành phần của tenxơ đó.

Hoàn toàn tương tự, n^2 thành phần $A_{\alpha\beta}$ của tenxơ hiệp biến hạng hai biến đổi theo công thức

$$\overline{A}_{ik} = A_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}} \tag{2.68}$$

và n^2 thành phần A_{α}^{β} của một tenxơ hỗn hợp hạng hai biến đổi theo công thức

$$\overline{A}_{i}^{k} = A_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}} \tag{2.69}$$

Chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng định nghĩa trên cho các tenxơ hạng ba, hạng bốn...

Ví dụ : Các thành phần của tenxơ $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ hai lần hiệp biến và một lần phản biến, biến đổi theo công thức

$$\overline{A}_{ik}^{l} = A_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{\gamma}}$$

Một ví dụ khác : Kí hiệu đenta Krônecke (Kronecker)

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } \alpha = \beta \\ 0 \text{ nếu } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{2.70}$$

chính là một tenxơ hỗn hợp hạng hai. Thật vậy, ta sẽ chứng minh

$$\overline{\delta}_{i}^{k} = \delta_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}$$

Để dễ thấy, ta trở lại kí hiệu tổng

$$\delta_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} = \sum_{\alpha=1}^{n}\delta_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{i}}$$

ở đây ta đã sử dụng (2.70). Do đó

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\delta_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{i}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}=\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{i}} \tag{2.71}$$

Theo các công thức (2.60) và (2.62) thì $\bar{x}^k$ có thể coi như hàm hợp của $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ qua các hàm phụ $x^1, x^2, \dots, x^n$.

$$\bar{x}_k(x^1(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n),\dots,x^n(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n))=\bar{x}_k$$

Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức này theo $\bar{x}^i$, ta được :

$$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{i}}=\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial \bar{x}^{i}}=\bar{\delta}_{i}^{k}=\begin{cases}1 \text{ nếu } i=k\\ 0 \text{ nếu } i\neq k\end{cases}$$

Nhờ (2.71) ta có công thức (2.70). Tenxơ nhận được có tính chất đặc biệt là các thành phần của nó có cùng một giá trị trong mọi hệ toạ độ.

Với cách định nghĩa tenxơ hạng hai như trên, ta có thể coi các vectơ là tenxơ hạng nhất, còn các đại lượng vô hướng là tenxơ hạng không.

Một cách tổng quát, ta có thể đưa ra định nghĩa tenxơ hạng cao hơn hai, chẳng hạn : $A_{\alpha\beta}^{\gamma\lambda\tau}$ là các thành phần của tenxơ hỗn hợp hạng năm, ba lần phản biến và hai lần hiệp biến, biến đổi theo công thức

$$\bar{A}_{ij}^{klm}=\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial \bar{x}^{l}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{\tau}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{j}}A_{\alpha\beta}^{\gamma\lambda\tau}$$

§15. ĐẠI SỐ TENXƠ

1. Phép nhân tenxơ với đại lượng vô hướng

Ví dụ : Nhân tenxơ $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ với đại lượng vô hướng φ, ta nhận được một tenxơ mới cùng hạng có các thành phần là $\varphi A^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

2. Phép tổng hai tenxơ cùng dạng. Tổng của hai tenxơ cùng dạng $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ và $B^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (cùng số lượng chỉ số trên và dưới) là một tenxơ cũng cùng dạng có các thành phần là $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} + B^{\gamma}_{\alpha\beta} \tag{2.72}$$

Ta dễ dàng thấy rằng phép tổng tenxơ có các tính chất thông thường như giao hoán và kết hợp.

3. Các tính chất đối xứng. Tenxơ phản biến hạng hai $A^{\alpha\beta}$ được gọi là đối xứng nếu khi thay đổi thứ tự của các chỉ số, các thành phần của chúng không thay đổi giá trị, nghĩa là :

$$A^{\beta\alpha} = A^{\alpha\beta} \tag{2.73}$$

Còn tenxơ $A^{\alpha\beta}$ được gọi là phản xứng, nếu khi thay đổi thứ tự các chỉ số, các thành phần của chúng đổi dấu

$$A^{\beta\alpha} = - A^{\alpha\beta} \tag{2.74}$$

Ta có thể định nghĩa tương tự về tính chất đối xứng đối với hai chỉ số hiệp biến.

4. Tích của hai tenxơ. Cho hai tenxơ hoàn toàn tuỳ ý, chẳng hạn A^{β}_{α} và $B^{\varepsilon}_{\gamma\delta}$. Tenxơ thứ nhất có n^2 thành phần, tenxơ thứ hai có n^3 thành phần. Nhân mỗi thành phần của tenxơ thứ nhất với từng thành phần của tenxơ thứ hai, ta nhận được n^5 thành phần.

$$C^{\beta\varepsilon}_{\alpha\gamma\delta} = A^{\beta}_{\alpha}B^{\varepsilon}_{\gamma\delta} \tag{2.75}$$

n^5 thành phần này cũng lập nên một tenxơ. Thật vậy, ta đã có các biến đổi

$$\overline{A}^{k}_{i} = A^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}$$

$$\overline{B}^{n}_{lm} = B^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial \overline{x}^{m}}\frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

Nhân các đẳng thức này với nhau, ta được

$$\overline{A}^{k}_{i}\overline{B}^{n}_{lm} = A^{\beta}_{\alpha}B^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial \overline{x}^{m}}\frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

hay

$$\overline{C}^{kn}_{ilm} = C^{\beta\varepsilon}_{\alpha\gamma\delta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial \overline{x}^{m}}\frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

đẳng thức này chỉ ra rằng $C^{\beta\varepsilon}_{\alpha\gamma\delta}$ là một tenxơ ba lần hiệp biến, hai lần phản biến. Tenxơ nhận được gọi là tích của hai tenxơ đã cho.

5. Phép co chỉ số. Cho tenxơ, trong các thành phần của nó có ít nhất một chỉ số hiệp biến và một chỉ số phản biến, chẳng hạn tenxơ $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ có n^3 thành phần. Bây giờ ta đặt $\gamma = \beta$ và lấy tổng theo β từ 1 đến n, ta nhận được n thành phần

$$B_{\alpha} = A^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{2.76}$$

Bây giờ ta chứng minh n thành phần này lập nên một tenxơ hạng nhất. Công thức biến đổi của $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ có dạng

$$\overline{A}^{l}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{\gamma}}$$

đặt $l = k$ và lấy tổng theo k từ 1 đến n, ta có

$$\overline{A}^{k}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\gamma}}$$

Ta đã biết $\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\beta}_{\gamma}$

nên $$\overline{A}^{k}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\delta^{\beta}_{\gamma}$$

Thực hiện phép tổng theo γ, ta được

$$\overline{A}^{k}_{ik} = A^{\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}$$

(ta đã sử dụng tính chất $\delta^{\beta}_{\gamma} = 1$ nếu $\gamma = \beta$ và $\delta^{\beta}_{\gamma} = 0$ nếu $\gamma \neq \beta$)

Nhưng $A^{\beta}_{\alpha\beta} = B_{\alpha}$, nên ta dễ dàng có

$$\overline{B}_{i} = \overline{A}^{k}_{ik} = A^{\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} = B_{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}$$

Đây là công thức biến đổi của một vectơ hiệp biến, nên B_{α} là một vectơ hiệp biến. Như vậy, từ một tenxơ hỗn hợp, bằng cách rút bớt một chỉ số hiệp biến, một chỉ số phản biến, ta nhận được một tenxơ mới có hạng nhỏ hơn tenxơ ban đầu hai đơn vị. Tenxơ mới được gọi là tenxơ rút gọn từ tenxơ đã cho theo phép co chỉ số.

Nếu có một tenxơ hạng bốn $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$, ta có thể rút gọn nó thành các tenxơ hạng hai

$$B^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \; ; \; C^{\gamma}_{\beta} = A^{\gamma\alpha}_{\alpha\beta} \; ; \; D^{\delta}_{\alpha} = A^{\beta\delta}_{\alpha\beta} \; ; \; E^{\gamma}_{\alpha} = A^{\gamma\beta}_{\alpha\beta}$$

Tiếp tục rút gọn các tenxơ hỗn hợp hạng hai này, ta nhận được hai bất biến

$$F = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \; ; \; G = A^{\beta\alpha}_{\alpha\beta}$$

Tổ hợp hai phép toán tích tenxơ và co chỉ số, ta được phép tính như tích vô hướng trong phần tenxơ aphin trực giao. Chẳng hạn cho hai tenxơ hạng ba $A^{\beta\gamma}_{\alpha}$ và $B^{\varepsilon}_{\delta\lambda}$. Khi tính tích hai tenxơ này và đặt $\alpha = \varepsilon$, ta được tenxơ

$$C^{\beta\gamma}_{\delta\lambda} = A^{\beta\gamma}_{\varepsilon} B^{\varepsilon}_{\delta\lambda}$$

là một tenxơ hạng bốn. Ta có thể tiếp tục co theo các cặp chỉ số phản biến và hiệp biến khác.

§16. TENXƠ CƠ SỞ

1. Dạng toàn phương cơ sở. Theo (2.63), ta đã có

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ik} dx^i dx^k$$

hay viết dưới dạng rút gọn

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{2.77}$$

Các đại lượng g_{ik} là các thành phần của một tenxơ hiệp biến hạng hai, được gọi là tenxơ mêtric hay tenxơ cơ sở. Các hàm g_{ik} thoả mãn điều kiện đối xứng

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{2.78}$$

và định thức

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.79}$$

phải khác không trong miền biến thiên của các biến số, g được gọi là định thức cơ sở.

2. Tenxơ cơ sở phản biến. Xét vectơ phản biến bất kì A^{α}. Lập tích g_{ik} và A^{α} rồi co theo chỉ số k và α ta được một vectơ hiệp biến có các thành phần kí hiệu là A_i.

$$A_i = g_{ik}A^k \tag{2.80}$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $A_1, A_2, ..., A_n$.

$$g_{11}A^1 + g_{12}A^2 + \ ... + g_{1n}A^n = A_1$$
$$g_{21}A^1 + g_{22}A^2 + \ ... + g_{2n}A^n = A_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{n1}A^1 + g_{n2}A^2 + \ ... + g_{nn}A^n = A_n$$

Theo quy tắc Crame (Cramer) ta nhận được

$$A^i = \frac{G_{1i}A_1 + G_{2i}A_2 + \ ... + G_{ni}A_n}{g}$$

trong đó G_{ik} là phần phụ đại số của phần tử g_{ik} trong định thức cơ sở.

Đặt

$$g^{ik} = \frac{G_{ki}}{g} \tag{2.81}$$

ta có thể viết gọn lại công thức trên

$$A^i = g^{ik}A_k \tag{2.82}$$

g^{ik} được gọi là tenxơ cơ sở phản biến. Ta cũng dễ dàng thấy là nó cũng có tính chất đối xứng

$$g^{ik} = g^{ki} \tag{2.83}$$

Thực hiện phép tích và co chỉ số của hai tenxơ cơ sở trên, ta được tenxơ cơ sở hỗn hợp

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

Thay (2.82) vào (2.80), ta có

$$A_i = g_{i\alpha} A^\alpha = g_{i\alpha} g^{\alpha k} A_k = g_i^k A_k$$

Đẳng thức này phải đúng với mọi giá trị của A_k nên

$$g_i^k = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad i = k \\ 0 & \text{nếu} \quad i \neq k \end{cases} \tag{2.84}$$

Co chỉ số của tenxơ g_i^k, ta có

$$g_i^i = g_{i\alpha} g^{\alpha i} = n \tag{2.85}$$

là số chiều của không gian Riman đang xét.

Vậy tenxơ cơ sở hỗn hợp có các thành phần trong mọi hệ toạ độ là δ_i^k.

3. Phép nâng, hạ chỉ số. Sử dụng các tenxơ cơ sở trên, ta cũng có thể nâng hoặc hạ chỉ số của các tenxơ. Chẳng hạn, nhân tenxơ $A^{\alpha\beta}$ với g_{ik} và co theo chỉ số α và k, ta nhận được tenxơ

$$A^{\alpha\beta} g_{i\alpha} = A_i^{\bullet\beta} \tag{2.86}$$

các dấu chấm ở đây để nói rõ chỉ số nào bị nâng hoặc hạ. Rút gọn theo chỉ số β và i, ta được

$$A^{\alpha\beta} g_{\beta k} = A_{\bullet k}^{\alpha\bullet} \tag{2.87}$$

Tương tự, ta có :

$$A^{\alpha\beta}g_{i\alpha}g_{\beta k} = A_{i\bullet}^{\bullet\beta}g_{\beta k} = A_{ik} \tag{2.88}$$

$$A_{ik}g^{k\beta} = A_{i\bullet}^{\bullet\gamma}g_{\gamma k}g^{k\beta} = A_{i\bullet}^{\bullet\gamma}g_{\gamma}^{\beta} = A_{i\bullet}^{\bullet\beta} \tag{2.89}$$

$$A_{ik}g^{k\beta}g^{i\alpha} = A_{i\bullet}^{\bullet\beta}g^{i\alpha} = A^{\alpha\beta} \tag{2.90}$$

Ta có thể coi tập hợp các đại lượng $A^{\alpha\beta}$, $A_{i\bullet}^{\bullet\beta}$, $A_{\bullet k}^{\alpha\bullet}$, A_{ik} như các thành phần phản biến, hỗn hợp và hiệp biến của một tenxơ hạng hai.

Áp dụng với chính tenxơ cơ sở, ta có

$$g_{ik}g^{i\alpha} = g_{k}^{\alpha} \;\; ; \;\; g_{ik}g^{i\alpha}g^{k\beta} = g^{\alpha\beta} \tag{2.91}$$

Tenxơ g_{i}^{k} còn có thể coi như tenxơ để thay tên chỉ số

$$A_{\alpha\beta}g_{i}^{\beta} = A_{\alpha i} \tag{2.92}$$

4. Chiều dài và góc giữa các vectơ. Xét tích của vectơ phản biến A^{α} và vectơ hiệp biến B_{β}: $A^{\alpha}B_{\beta}$, sau đó co chỉ số ta nhận được một vô hướng

$$\lambda = A^{\alpha}B_{\alpha}$$

Nếu lấy tích của các thành phần phản biến và hiệp biến của cùng một vectơ A^{α}, A_{β} rồi co chỉ số, vô hướng nhận được chính là bình phương chiều dài của vectơ $\overrightarrow{A}$.

$$\lambda = l^2 = A^{\alpha}A_{\alpha} = g^{\alpha\beta}A_{\alpha}A_{\beta} = g_{\alpha\beta}A^{\alpha}A^{\beta} \tag{2.93}$$

$$l(A^{i}) = \sqrt{A^{i}A^{i}} = \sqrt{g^{ik}A_{i}A_{k}} = \sqrt{g_{ik}A^{i}A^{k}} \tag{2.94}$$

còn góc giữa hai vectơ là

$$\cos\theta = \frac{A^{\alpha}A_{\beta}}{\sqrt{(A^{\alpha}A_{\alpha})(B^{\beta}B_{\beta})}} \qquad (2.95)$$

§17. GIẢI TÍCH TENXƠ

Trong mục này, ta thiết lập khái niệm về đạo hàm tenxơ. Đối với tenxơ hạng không, nghĩa là một hàm vô hướng φ, vi phân của nó là $d\varphi$ ứng với việc chuyển từ một điểm M sang một điểm vô cùng gần khác M'. Rõ ràng $d\varphi$ là bất biến đối với phép biến đổi toạ độ.

Bây giờ ta xét trường vectơ hiệp biến A_i, sao cho các thành phần A_i là các hàm điểm. Theo quy tắc vi phân toàn phần, ta có

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k \qquad (2.96)$$

Chuyển sang hệ toạ độ mới $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$, ta có

$$\overline{A}_i = A_{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^i} \qquad (2.97)$$

Lấy vi phân hai vế, ta được

$$d\overline{A}_i = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^i}dA_{\alpha} + A_{\alpha}d\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^i}$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^i}dA_{\alpha} + A_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k}d\overline{x}^k \qquad (2.98)$$

Nếu các đại lượng dA_α là các thành phần của một vectơ hiệp biến thì các công thức biến đổi phải có dạng

$$d\overline{A}_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i} dA_\alpha$$

Điều đó chỉ xảy ra khi

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} = 0$$

với tất cả các chỉ số α, i, k, nghĩa là trong trường hợp x^α là hàm tuyến tính của $\overline{x}^i$ như đã gặp trong phần tenxơ aphin trực giao, còn trong phép tính tenxơ tổng quát thì nói chung

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k}$$

khác không, nên dA_i không mang đặc tính tenxơ.

Để giải quyết khó khăn này, ta phải dùng công cụ trợ giúp là các kí hiệu Crixtôpphen (Christoffel).

Kí hiệu Crixtôpphen loại 1 :

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,i} = [\alpha\beta, i] = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) \quad (2.99)$$

Kí hiệu Crixtôpphen loại 2 :

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \{\alpha\beta, \lambda\} = \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{Bmatrix} = g^{i\lambda}\Gamma_{i,\alpha\beta} \quad (2.100)$$

Ở đây ta đưa ra các cách viết khác nhau của kí hiệu Crixtôpphen. Khi chuyển từ hệ toạ độ x^α sang hệ toạ độ $\overline{x}^i$, ta dễ dàng có công thức

$$\overline{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^\lambda} \quad (2.101)$$

$$\overline{\Gamma}_{ik,l} = \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{l}} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{l}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{i}\partial \overline{x}^{k}} \quad (2.102)$$

Các kí hiệu Crixtôpphen không phải là các tenxơ vì như nhận xét trên, nói chung $\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}\partial \overline{x}^{k}}$ khác không.

Từ các công thức (2.99) và (2.100), ta cũng rút ra các tính chất đối xứng

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = \Gamma_{i,\beta\alpha}\ ;\ \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} \quad (2.103)$$

Đạo hàm hiệp biến :

Xét hàm vô hướng φ là hàm của n toạ độ $x^1, x^2, ..., x^n$. Khi đó n đại lượng $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ là các thành phần của một vectơ hiệp biến vì khi biến đổi toạ độ, các đại lượng này biến đổi theo công thức

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{x}^{i}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} \quad (2.104)$$

đặc trưng cho vectơ hiệp biến. Vectơ này là sự mở rộng của vectơ gradφ trong giải tích vectơ thông thường.

Bây giờ ta xét vectơ hiệp biến A_i, khi biến đổi toạ độ, các thành phần của nó biến đổi theo công thức

$$\overline{A}_i = A_{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} \quad (2.105)$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này theo $\overline{x}^k$, ta nhận được

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^{k}} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} + A_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}\partial \overline{x}^{k}} \quad (2.106)$$

vì đại lượng $\dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k}$ nói chung khác không, nên đại lượng $\dfrac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^k}$ không mang đặc trưng tenxơ.

Bây giờ ta biểu diễn đạo hàm bậc hai trên qua kí hiệu Crixtôpphen nhờ (2.101).

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \overline{x}^r}\overline{\Gamma}^r_{ik} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^k}\overline{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} \tag{2.107}$$

Thay vào (2.106) và đổi kí hiệu α bằng λ, ta có

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^k} - A_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \overline{x}^r}\overline{\Gamma}^r_{ik} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^k}$$

Từ (2.105), ta có

$$A_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \overline{x}^r} = \overline{A}_r$$

Thay vào biểu thức trên, ta được

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^k} - \overline{A}_r \overline{\Gamma}^r_{ik} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^k}$$

Đẳng thức này chứng tỏ đại lượng

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \tag{2.108}$$

là một tenxơ hiệp biến hạng hai và được gọi là đạo hàm hiệp biến của vectơ hiệp biến.

Lí luận tương tự, ta cũng có thể dẫn đến định nghĩa

$$\nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} - A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \tag{2.109}$$

là đạo hàm hiệp biến của vectơ phản biến.

Bằng phương pháp như trên, ta có thể tiếp tục định nghĩa đạo hàm hiệp biến của một tenxơ bất kì. Chẳng hạn, công thức đạo hàm hiệp biến của tenxơ hạng ba $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ có dạng

$$\nabla_{\lambda} A^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - A_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} - A_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} + A^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda} \tag{2.110}$$

Nghĩa là khi lấy đạo hàm hiệp biến của tenxơ, ta phải trừ vào đạo hàm thông thường một số số hạng phụ bằng số chỉ số dưới của tenxơ và cộng vào đạo hàm đó một số số hạng phụ bằng số chỉ số trên của tenxơ. Các số hạng phụ này chứa kí hiệu Crixtôpphen như trong các công thức (2.108) và (2.109).

Để làm ví dụ, ta lấy đạo hàm hiệp biến của tenxơ cơ sở.

Ta dễ dàng rút ra công thức biểu diễn các thành phần của tenxơ cơ sở qua kí hiệu Crixtôpphen.

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} \tag{2.111}$$

Bây giờ ta tính đạo hàm của định thức cơ sở g. Lấy vi phân của (2.79) theo x^{α} : vi phân lần lượt từng hàng, còn giữ nguyên các hàng còn lại rồi cộng toàn bộ các định thức nhận được, ta có :

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\alpha}} G_{ik}$$

trong đó G_{ik} là phần phụ đại số của phần tử g_{ik}. Từ công thức (2.81) và (2.82), ta nhận được

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = g g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\alpha}}$$

Theo (2.111) ta có

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = gg^{ki}\left(\Gamma_{i,k\alpha} + \Gamma_{k,i\alpha}\right) = g\Gamma^k_{k\alpha} + g\Gamma^i_{i\alpha} = 2g\Gamma^i_{i\alpha}$$

hay $$\Gamma^i_{i\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha} \qquad (2.112)$$

Bây giờ ta xét tenxơ cơ sở hiệp biến g_{ik}. Áp dụng công thức (2.110), ta được

$$\nabla_\lambda g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu k}\Gamma^\mu_{i\lambda} - g_{i\mu}\Gamma^\mu_{k\lambda}$$

và từ các công thức (2.100), (2.103) và (2.111), ta có

$$\nabla_\lambda g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{k,i\lambda} - \Gamma_{i,k\lambda} = 0$$

Các tính toán tương tự cũng được làm cho g_i^k và g^{ik} kết quả là :

$$\nabla_\lambda g_i^k = 0 \ ; \ \nabla_\lambda g^{ik} = 0$$

Do đó ta có quy tắc : Khi lấy đạo hàm tenxơ của các tenxơ cơ sở, các tenxơ này được coi là các đại lượng không đổi.

Các khái niệm về đạo hàm phản biến được xây dựng từ phép nâng, hạ chỉ số, chẳng hạn

$$\nabla^\mu A_i = g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda A_i$$

$$\nabla^\mu A^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda A^\gamma_{\alpha\beta} \qquad (2.113)$$

Công thức (2.104) cho ta xác định các thành phần của vectơ gradφ là $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$, biến đổi như vectơ hiệp biến, nên ta có thể viết

$$\nabla_\alpha\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \qquad (2.114)$$

Các thành phần phản biến của vectơ này là các đại lượng

$$\nabla^{\alpha}\varphi = g^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\varphi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}} \tag{2.115}$$

Trong trường hợp hệ toạ độ cong trực giao trong không gian ba chiều, ta nhận lại được kết quả đã có trong chương I

$$(\mathrm{grad}\varphi)_{x^i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \tag{2.116}$$

Bây giờ ta xét vectơ phản biến A^i. Lấy đạo hàm hiệp biến của nó, ta có

$$\nabla_i A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + A^{\lambda}\Gamma^k_{i\lambda}$$

Đặt k = i, ta được

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^{\lambda}\Gamma^i_{i\lambda} \tag{2.117}$$

Biểu thức này có thể coi như dive của vectơ phản biến A^i. Thay (2.112) đối với $\Gamma^i_{i\lambda}$ vào, ta có

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}}A^i\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(A^i\sqrt{g})}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}g^{ik}A_k)}{\partial x^i} \tag{2.118}$$

Trong trường hợp hệ toạ độ cong trực giao trong không gian ba chiều, ta lại nhận được kết quả đã có trong chương I.

$$\mathrm{div}\overline{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3A_{x^1})}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_3H_1A_{x^2})}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1H_2A_{x^3})}{\partial x^3}\right]$$

(2.119)

Trong các trường hợp (2.116) và (2.119), ta đã sử dụng hệ số Lame H_i

$$H_i = \left(\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^i}\right)^2$$

và ta có

$$g_{ii} = H_i^2 \ ; \ g = H_1^2 H_2^2 H_3^2 \ ; \ g^{ii} = \frac{1}{H_i^2}$$

$$g_{ik} = g^{ik} = 0 \ \text{khi } i \neq k$$

Ứng dụng (2.114) và (2.118), ta tính dive của vectơ $\nabla_\alpha \varphi$, nghĩa là

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \ ; \ A^i = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

ta sẽ nhận được toán tử Laplaxơ

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) \tag{2.120}$$

Trong hệ toạ độ cong ba chiều trực giao, ta lại có

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)\right] \tag{2.121}$$

Công thức tính rota, có thể tiến hành qua đạo hàm tenxơ

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i$$

Đây là một tenxơ hiệp biến hạng hai có các thành phần là

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik}$$

$$= \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \qquad (2.122)$$

Để lập một vectơ từ tenxơ này, ta lập vectơ phản biến

$$B^\lambda = e^{ik\lambda}\nabla_i A_k \qquad (2.123)$$

trong đó e^{ikl} có các thành phần

$$\left.\begin{aligned} e^{123} &= e^{231} = e^{312} = \frac{1}{\sqrt{g}} \\ e^{132} &= e^{213} = e^{321} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \end{aligned}\right. \qquad (2.124)$$

$e^{ikl} = 0$ trong mọi trường hợp còn lại.

Vectơ B^λ có các thành phần là

$$B^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right);$$

$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right); \qquad (2.125)$$

$$B^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right).$$

Các thành phần hiệp biến được tính theo công thức

$$B_i = g_{i\alpha}B^\alpha \qquad (2.126)$$

là
$$B_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[g_{i1}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right) + \right.$$

$$\left. + g_{i2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right) + g_{i3}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)\right] \qquad (2.127)$$

Trong trường hợp hệ toạ độ cong trực giao, ta lại có

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_{x^1} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_3A_{x^3})}{\partial x^2} - \frac{\partial(H_2A_{x^2})}{\partial x^3}\right] \qquad (2.128)$$

Ta sẽ có công thức tương tự cho $(\mathrm{rot}\vec{A})_{x^2}$ và $(\mathrm{rot}\vec{A})_{x^3}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và tenxơ T. Nếu ta có $\vec{a}' = T.\vec{a}$; $\vec{b}' = T.\vec{b}$; $\vec{c}' = T.\vec{c}$ là ba vectơ đồng phẳng thì hãy chứng minh rằng với vectơ $\vec{u}$ bất kì, mọi vectơ $\vec{u}' = T.\vec{u}$ đều đồng phẳng và tìm được vectơ $\vec{v}$ khác không để cho $T.\vec{v} = 0$.

2. Chứng minh điều kiện cần và đủ để cho tenxơ T phản xứng là với một vectơ $\vec{a}$ bất kì, ta có $\vec{a}(T.\vec{a}) = 0$

3. Chứng minh rằng $(\vec{a} \times T)^c = -(T^c \times \vec{a})$.

4. Chứng minh rằng tenxơ $U = T.T^c$ là tenxơ đối xứng.

5. Tìm các bất biến của tenxơ cặp đôi $T = \vec{a}.\vec{b}$.

Đáp số : $I_1 = \vec{a}.\vec{b}$; $I_2 = I_3 = 0$.

6. Tính các bất biến của tenxơ phản xứng có các thành phần ứng với các thành phần của vectơ $\vec{\omega}$.

Đáp số : $I_1 = I_3 = 0$; $I_2 = \vec{\omega}^2$.

7. Chứng minh rằng nếu $T = \vec{i}_1\vec{t}_1 + \vec{i}_2\vec{t}_2 + \vec{i}_3\vec{t}_3$ thì

$$I_1 = \vec{i}_1.\vec{t}_1 + \vec{i}_2.\vec{t}_2 + \vec{i}_3.\vec{t}_3$$

$$I_2 = \vec{i}_1.(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3) + \vec{i}_2.(\vec{t}_3 \times \vec{t}_1) + \vec{i}_3.(\vec{t}_1 \times \vec{t}_2)$$

$$I_3 = \vec{t}_1.(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3)$$

8. Chứng minh rằng mỗi tenxơ phản biến hay hiệp biến hạng hai đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một tenxơ đối xứng và một tenxơ phản xứng.

9. Chứng minh rằng đối với hệ trục toạ độ cong trực giao trong không gian ba chiều thì các thành phần của tenxơ mêtric và tenxơ nghịch đảo của nó là

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} \; ; \; g_{22} = \frac{1}{g^{22}} \; ; \; g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

$$g_{ik} = g^{ik} = 0 \text{ với mọi } i \neq k$$

10. Áp dụng bài 9 cho hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ cầu

Đáp số : Toạ độ trụ :

$$g_{11} = 1 \; ; \; g_{22} = \rho^2 \; ; \; g_{33} = 1$$

$$g_{ik} = 0, \text{ với mọi } i \neq k$$

$$g^{11} = 1 \; ; \; g^{22} = \frac{1}{\rho^2} \; ; \; g^{33} = 1$$

$$g^{ik} = 0, \text{ với mọi } i \neq k$$

Toạ độ cầu :

$$g_{11} = 1 \; ; \; g_{22} = r^2 \; ; \; g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{ik} = 0, \text{ với mọi } i \neq k$$

$$g^{11} = 1 \; ; \; g^{22} = \frac{1}{r^2} \; ; \; g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$g^{ik} = 0, \text{ với mọi } i \neq k$$

11. Tính $\operatorname{div}\vec{A}$, $\nabla^2\varphi$ trong hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ cầu từ (2.119 và 2.121).

Hướng dẫn : Xem biểu thức $\operatorname{div}\vec{A}$ trong hệ toạ độ trụ và toán tử Laplaxơ trong hệ toạ độ cầu.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH SÓNG MỘT CHIỀU

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH VẬT LÍ TOÁN CƠ BẢN

Các phương trình mô tả sự biến thiên của trường theo thời gian thường là các phương trình vi phân đạo hàm riêng, trong đó chứa hàm chưa biết (hàm nhiều biến), các đạo hàm riêng của nó và các biến số độc lập.

Cấp của đạo hàm cấp cao nhất của hàm chưa biết có mặt trong phương trình là cấp của phương trình.

Phương trình đạo hàm riêng gọi là *tuyến tính* nếu nó là bậc nhất đối với hàm chưa biết và đạo hàm riêng của nó.

Trong cuốn sách này chúng ta chỉ xét các phương trình vật lí toán cơ bản là phương trình sóng, phương trình truyền nhiệt và phương trình Laplaxơ.

Sau đây để đơn giản ta hãy xét việc phân loại các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai với hai biến số độc lập. Trường hợp nhiều biến số độc lập cũng được phân loại tương tự.

Dạng tổng quát của phương trình như vậy là

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \quad (3.1)$$

trong đó hàm chưa biết u phụ thuộc hai biến số độc lập x, y : $u = u(x, y)$, các hệ số A, B, C, D, E, F là những hàm của x, y.

Nhờ phép biến đổi toạ độ thích hợp, ta có thể đưa phương trình (3.1) về một trong ba dạng sau :

1. Nếu $AC - B^2 > 0$ trong một miền nào đó, thì có thể đưa phương trình (3.1) trong miền ấy về dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u = G_1\ (\xi, \eta) \quad (3.2)$$

Phương trình này gọi là phương trình loại eliptic. Dạng đơn giản nhất của phương trình eliptic là phương trình Laplaxơ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.3)$$

nghĩa là $D_1 = E_1 = F_1 = G_1 \equiv 0$

2. Nếu $AC - B^2 < 0$ trong một miền nào đó thì có thể đưa phương trình (3.1) trong miền ấy về dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_2 u = G_2\ (\xi, \eta). \quad (3.4)$$

Phương trình này gọi là phương trình loại hipebolic. Dạng đơn giản nhất của phương trình hipebolic là phương trình dao động của dây

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = G_2(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

nghĩa là $D_2 = E_2 = F_2 \equiv 0$.

3. Nếu $AC - B^2 = 0$ trong một miền nào đó thì phương trình (3.1) có thể được đưa về dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_3 u = G_3\ (\xi, \eta) \quad (3.6)$$

Phương trình này gọi là phương trình loại parabolic, nó có dạng đơn giản nhất là phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} = G_3(\xi, \eta) \tag{3.7}$$

nghĩa là $D_3 = F_3 \equiv 0$.

Trong các phương trình (3.5) và (3.7), ta thường lấy một biến số là thời gian, còn một biến số kia là toạ độ x, khi đó ta có phương trình dao động của dây (hay phương trình sóng một chiều).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.8}$$

Phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.9}$$

Phương trình Laplaxơ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.10}$$

Nhiều bài toán vật lí và kĩ thuật dẫn đến các phương trình này, nên người ta gọi chúng là những phương trình vật lí – toán cơ bản.

Các phương trình (3.8), (3.9) và (3.10) đều có vô số nghiệm, vì vậy, ta phải đặt thêm các điều kiện phụ để xác định nghiệm của chúng.

Các phương trình (3.8) và (3.9) xuất hiện khi các quá trình là không dừng (biến đổi theo thời gian t). Nếu quá trình đó xảy ra trong một khoảng không gian x hữu hạn (dao động của sợi dây có hai đầu gắn chặt, truyền nhiệt trong thanh hữu hạn thì ta có hai loại điều kiện phụ sau :

1. *Điều kiện ban đầu* cho biết trạng thái lúc t = 0.

2. *Điều kiện biên* cho biết quá trình xảy ra ở biên của khoảng không gian. Bài toán tìm nghiệm của phương trình thoả mãn các điều kiện ban đầu và điều kiện biên gọi là bài toán hỗn hợp, nếu quá trình xảy ra trên cả khoảng vô hạn $-\infty < x < +\infty$, thì ta chỉ cần điều kiện ban đầu. Bài toán đó gọi là *bài toán Côsi* (Cauchy).

Phương trình (3.10) không chứa thời gian, cả hai biến số x, y đều là biến số không gian. Nó xuất hiện khi nghiên cứu các quá trình dừng. Để xác định nghiệm, ta chỉ cần các điều kiện biên, vì vậy, bài toán này gọi là *bài toán biên*.

Các điều kiện ban đầu và điều kiện biên thường xuất phát từ việc đo đạc thực nghiệm trong vật lí và kĩ thuật, nghĩa là mang tính chất gần đúng. Những sai số nhỏ của các điều kiện đó sẽ kéo theo những sai số nhỏ của nghiệm. Do đó, ta đòi hỏi nghiệm của bài toán đặt ra phải phụ thuộc liên tục vào các điều kiện biên và các điều kiện ban đầu. Các bài toán được thiết lập sao cho nghiệm của nó tồn tại, duy nhất và phụ thuộc liên tục vào các điều kiện phụ, gọi là các bài toán được thiết lập đúng.

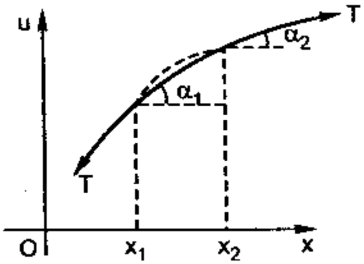
Những bài toán ta xét dưới đây là những bài toán truyền thống của vật lí – toán, chúng đều được thiết lập đúng.

§2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA DÂY

Xét sợi dây căng, có lực căng là T nghĩa là ở mỗi điểm của sợi dây có lực T tác dụng theo phương tiếp tuyến với nó. Giả thiết sợi dây là đàn hồi, dao động là nhỏ để có thể bỏ qua sự tăng chiều dài của sợi dây và do đó sức căng T là như nhau ở mọi tiết diện trong suốt quá trình dao động.

Giả sử trong trạng thái cân bằng, sợi dây nằm dọc theo trục x, còn dao động xảy ra sao cho mỗi điểm của sợi dây đều di chuyển vuông góc với trục x và nằm trong cùng một mặt phẳng chứa trục x. Lấy trên mặt phẳng này hệ toạ độ Đêcac vuông góc x, u, trong đó u là kí hiệu độ lệch của dây khỏi vị trí cân bằng. Trong quá trình dao động, u là hàm của hoành độ x và thời gian t, $u = u(x, t)$. Ta thiết lập phương trình cho $u(x, t)$.

Xét đoạn dây từ điểm x_1 đến điểm x_2. Tách đoạn này ra khỏi sợi dây ở thời điểm t và thay thế ở hai đầu bằng các lực căng T. Ta hãy xác định hình chiếu trên trục u của các lực tác dụng lên phần đang xét của dây.



Hình 19

Gọi α_1 là góc giữa tiếp tuyến của sợi dây với trục x tại điểm x_1, α_2 là góc tương ứng ở điểm x_2. Tổng hình chiếu của lực căng sẽ là : $T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1$ (H.19).

Giả sử rằng lực ngoài tác dụng lên sợi dây song song và ngược chiều với trục u (chẳng hạn trọng lượng của dây). Mật độ phân bố của lực ngoài dọc theo sợi dây kí hiệu là $-\rho g(x, t)$. Thành thử hợp lực tác dụng lên phần sợi dây đang xét là

$$-\rho\int_{x_1}^{x_2} g(x, t)dx$$

trong đó ρ là mật độ khối tuyến tính của sợi dây, nghĩa là khối lượng của một đơn vị dài của dây. Ta coi dây là đồng chất nên ρ là hằng số.

Mặt khác, gia tốc của các điểm của sợi dây là $u''_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, nên hợp lực quán tính trên phần đang xét của sợi dây là

$$\rho\int_{x_1}^{x_2} u''_{tt}(x, t)dx$$

Do đó ở thời điểm t, ta có đẳng thức

$$\rho\int_{x_1}^{x_2} u''_{tt}(x, t)dx = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) - \rho\int_{x_1}^{x_2} g(x, t)dx \qquad (3.11)$$

Ta đã biết

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

do đó

$$T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right] = T\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Ở đây ta đã giả thiết là chiều dài của sợi dây không thay đổi trong suốt thời gian dao động nên vi phân cung

$$ds = \sqrt{1+u'^2_x(x, t)}\,dx = dx$$

nghĩa là đại lượng $u'^2_x(x, t)$ là đủ nhỏ để có thể thay thế $\sqrt{1+u'^2_x}$ bằng 1, ta coi u'^2_x có thể bỏ qua so với 1. Ở đây trong quá trình dao động, độ lệch của sợi dây so với trục x luôn luôn rất nhỏ. Vậy đẳng thức (3.11) có dạng

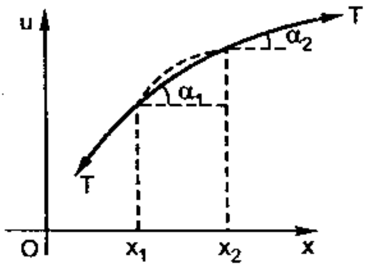
$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\rho u''_{tt}(x, t) - Tu''_{xx}(x, t) + \rho g(x, t)\right]dx = 0$$

Bởi vì đẳng thức này có thể xảy ra đối với một phần bất kì (x_1, x_2) của dây, cho nên biểu thức dưới dấu tích phân phải bằng không ở một điểm bất kì của dây và tại một thời điểm bất kì, nghĩa là có thể xảy ra đẳng thức

$$\rho u''_{tt}(x, t) - Tu''_{xx}(x, t) + \rho g(x, t) = 0$$

bằng. Trong quá trình dao động, u là hàm của hoành độ x và thời gian t, u = u(x, t). Ta thiết lập phương trình cho u(x, t).

Xét đoạn dây từ điểm x_1 đến điểm x_2. Tách đoạn này ra khỏi sợi dây ở thời điểm t và thay thế ở hai đầu bằng các lực căng T. Ta hãy xác định hình chiếu trên trục u của các lực tác dụng lên phần đang xét của dây.



Hình 19

Gọi α_1 là góc giữa tiếp tuyến của sợi dây với trục x tại điểm x_1, α_2 là góc tương ứng ở điểm x_2. Tổng hình chiếu của lực căng sẽ là : $T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1$ (H.19).

Giả sử rằng lực ngoài tác dụng lên sợi dây song song và ngược chiều với trục u (chẳng hạn trọng lượng của dây). Mật độ phân bố của lực ngoài dọc theo sợi dây kí hiệu là $-\rho g(x, t)$. Thành thử hợp lực tác dụng lên phần sợi dây đang xét là

$$-\rho\int_{x_1}^{x_2} g(x, t)dx$$

trong đó ρ là mật độ khối tuyến tính của sợi dây, nghĩa là khối lượng của một đơn vị dài của dây. Ta coi dây là đồng chất nên ρ là hằng số.

Mặt khác, gia tốc của các điểm của sợi dây là $u''_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, nên hợp lực quán tính trên phần đang xét của sợi dây là

$$\rho\int_{x_1}^{x_2} u''_{tt}(x, t)dx$$

hay $$u''_{tt}(x, t) - a^2u''_{xx}(x, t) = -g(x, t) \tag{3.12}$$

trong đó $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ là một hằng số dương.

Phương trình dao động của dây (3.12) là một *phương trình vi phân đạo hàm riêng hạng hai có hệ số là hằng số*. Nó là một trong các phương trình vi phân vật lí - toán đơn giản nhất.

Nếu không có ngoại lực tác dụng vào sợi dây thì $g(x, t) = 0$ và phương trình là thuần nhất, nó mô tả dao động tự do của dây. Còn phương trình (3.12) với $g(x, t) \neq 0$ là không thuần nhất và mô tả dao động cưỡng bức của sợi dây.

§3. DAO ĐỘNG CỦA DÂY VÔ HẠN. BÀI TOÁN CÔSI

Sợi dây vô hạn là sự trừu tượng hoá sợi dây có chiều dài lớn đến mức là các đầu mút không ảnh hưởng gì đến dao động của phần sợi dây đang xét. Lúc đó dao động của phần này chỉ chịu ảnh hưởng của điều kiện ban đầu.

Sự xuất hiện dao động của sợi dây vô hạn có thể hình dung như sau : ở thời điểm ban đầu nào đó $t = 0$, sợi dây có một hình dạng nào đó

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u(x, 0) = f(x)$$

và mỗi điểm của sợi dây nhận một vận tốc ban đầu

$$u'_t(x, t)\big|_{t=0} = u'_t(x, 0) = F_{(x)}$$

sau đó sợi dây tự nó chuyển động.

Hàm $f(x)$ và $F(x)$ phải được xác định trên toàn bộ trục x.

Thành thử ta có bài toán vật lí - toán sau đây.

Tìm nghiệm $u = u(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ của phương trình

$$u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0 \tag{3.13}$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu

$$u_t\Big|_{t=0} = f(x),\ u'_t\Big|_{t=0} = F(x)\ ;\ -\infty < x < \infty \qquad (3.14)$$

Đó là bài toán Côsi đối với phương trình (3.13). Điều kiện (3.14) gọi là điều kiện ban đầu.

Muốn tìm nghiệm của phương trình (3.13), ta hãy đưa nó về dạng dễ giải hơn bằng cách đổi biến số.

Đặt $\xi = x + at$; $\eta = x - at$, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\ 4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

Vậy phương trình (3.13) có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Vì $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$, nên $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \varphi_1(\xi)$.

Trong đó φ_1 là một hàm tuỳ ý. Từ đó

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi_1(\xi)d\xi + \psi(\eta)$$

Trong đó ψ là một hàm tuỳ ý. Vì φ_1 là một hàm tuỳ ý nên tích phân của nó φ cũng là một hàm tuỳ ý. Vậy

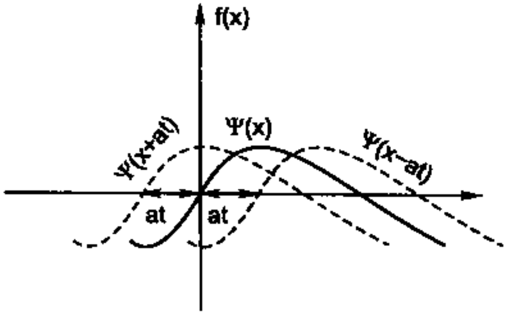
$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

Trở về các biến số cũ x, t, ta được

$$u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \tag{3.15}$$

Trong đó φ, ψ là các hàm tuỳ ý, khả vi liên tục hai lần để cho phép đổi biến số trên là đúng. Nghiệm (3.15) được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (3.13).

Ta thấy nghiệm tổng quát u(x, t) là tổng của hai hàm φ và ψ. Nếu coi hai hàm này là hai sóng nào đó thì nghiệm đó là kết quả của việc chồng chập hai sóng, một sóng truyền sang trái, một sóng truyền sang phải với vận tốc a. Thật vậy, hàm $\psi(x - at)$ lấy tại điểm x ở thời điểm t có giá trị bằng giá trị mà nó lấy tại điểm $x - at$ ở thời điểm 0. Vậy đồ thị của hàm $\psi(x - at)$ suy ra từ đồ thị của hàm $\psi(x)$ bằng phép tịnh tiến một đoạn + at song song với trục hoành. Vậy $\psi(x - at)$ biểu diễn một sóng truyền sang phải với vận tốc a. Tương tự như vậy hàm $\psi(x + at)$ biểu diễn một sóng truyền sang trái với vận tốc a (H.20) ; a gọi là vận tốc truyền sóng. Sóng truyền sang phải là sóng thuận, sóng truyền sang trái là sóng nghịch.



Hình 20

Bây giờ ta dựa vào các điều kiện ban đầu (3.14) để xác định các hàm φ và ψ. Trong (3.15) ta thay t = 0

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = a\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} - a\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = F(x) \tag{3.17}$$

Lấy tích phân hai vế của (3.17) từ 0 đến x ta được

$$a[\varphi(x) - \varphi(0)] - a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(\xi)d\xi$$

hay nếu đặt $C = \varphi(0) - \psi(0)$, ta được

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(\xi)d\xi + C \tag{3.18}$$

Giải hệ phương trình (3.16) và (3.18), ta được

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(\xi)d\xi + \frac{C}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(\xi)d\xi - \frac{C}{2}$$

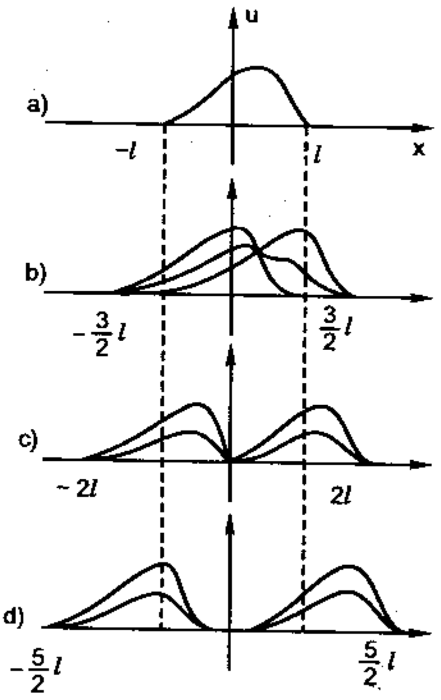
Thay các biểu thức này vào (3.15), ta được

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\{f(x - at) + f(x + at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\xi)d\xi \tag{3.19}$$

Công thức này gọi là nghiệm Đalămbe của bài toán Côsi đối với phương trình dao động của dây.

Bây giờ ta hãy nghiên cứu ý nghĩa vật lí của nghiệm này. Muốn vậy, đầu tiên ta giả sử rằng $F(x) \equiv 0$ và $f(x) \neq 0$ trong một quãng hữu hạn $(-l, l)$. Điều đó có nghĩa là dao động xuất hiện chỉ là do độ lệch ban đầu của dây khỏi vị trí cân bằng trong quãng $(-l, l)$ (H.21a). Khi đó phương trình dao động (3.19) có dạng

$$u = \frac{1}{2}\{f(x - at) + f(x + at)\} \tag{3.20}$$



Hình 21

Để dựng đồ thị ở các thời điểm tiếp theo t, ta dịch chuyển đồ thị ban đầu một đoạn at sang phải, và sang trái và cộng tung độ của đồ thị này lại.

Các đồ thị (H.21b, c, d) ứng với các thời điểm

$$t = \frac{l}{2a}, \frac{l}{a}, \frac{3l}{2a}$$

Bắt đầu từ thời điểm $t = \frac{l}{a}$, hai sóng không cộng lại với nhau nữa mà lan truyền về hai phía và sau khi sóng đi qua, các điểm của sợi dây lại trở lại vị trí nằm yên trên trục hoành. Ta có thể kết luận như sau :
Một điểm nằm ngoài quãng $(-l, l)$ $(|x| \geq l)$ vẫn giữ nguyên trạng thái nằm yên cho đến khi một trong các sóng truyền tới (sóng thuận nếu $x > l$, nghịch nếu $x < -l$). Điều đó xảy ra ở thời điểm $t_1 = \frac{|x| - l}{a}$. Khi sóng tương ứng đi qua điểm này, nghĩa là sau thời điểm $t_2 = \frac{|x| + l}{a}$, một lần nữa nó lại trở về trạng thái đứng yên.

Ta nói rằng ở thời điểm t_1, *mặt đầu sóng* đi tới điểm x, còn ở thời điểm t_2 là *mặt cuối sóng* đi tới điểm x. Giữa các thời điểm

t_1 và t_2 sóng đi qua điểm x và làm cho nó lệch khỏi vị trí cân bằng.

Bây giờ ta xét trường hợp ngược lại, khi dao động xảy ra do vận tốc ban đầu không có độ lệch ban đầu nghĩa là f(x) = 0. Khi đó nghiệm có dạng

$$u = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\xi)d\xi \qquad (3.21)$$

Ta giả sử rằng $F(x) \neq 0$ chỉ trong quãng $(-l, l)$, nghĩa là

$$F(x) = [H(t + l) - H(t - l)]\, v_o$$

Trong đó $H(\tau)$ là hàm Hêvisai (Heaviside)

$$H(\tau) = \begin{cases} 0;\ \tau < 0 \\ 1;\ \tau > 0 \end{cases}$$

v_o là một hằng số.

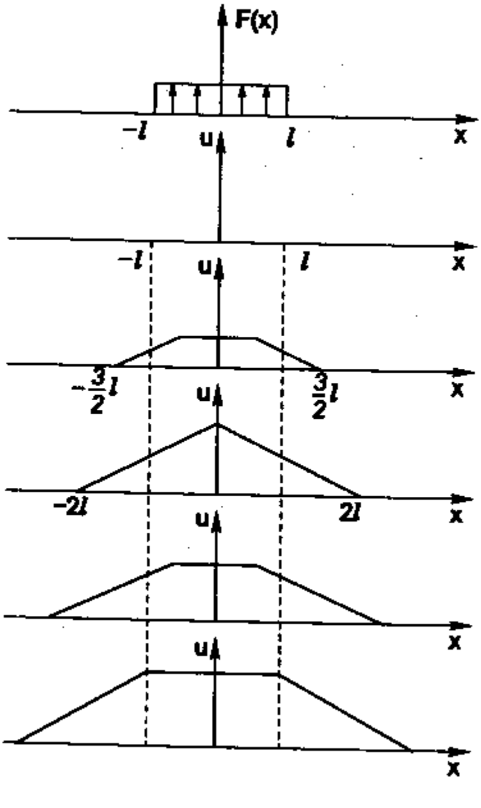
Khi t = 0 thì $u \equiv 0$. Khi tăng thời gian t, miền lấy tích phân trong (3.21) mở rộng ra. Trên hình 22 biểu diễn dạng của sợi dây ở các thời điểm $t = 0,\ \frac{l}{2a},\ \frac{l}{a},\ \frac{3l}{2a},\ \frac{2l}{a}$. Độ lệch cực đại về phía trên, nếu coi F(x) là va chạm xung từ phía dưới lên là

$$\frac{1}{2a}\int_{-l}^{l} v_o d\xi = \frac{v_o l}{a}$$

Điểm x = 0 đạt tới độ cao này sớm nhất khi $t = \frac{l}{a}$. Sau đó, các điểm khác của sợi dây lần lượt đạt tới độ lệch này. Ở thời điểm $t > \frac{l}{a}$, tất cả các điểm của sợi dây mà $|x| < at - l$ đạt được độ lệch này. Mỗi điểm x, nhận được vận tốc ban đầu (nghĩa là $|x| < l$) ở thời điểm $t = 0$ bắt đầu nâng lên và đạt được độ cao cực đại ở các thời điểm

$$t = \frac{|x| + l}{a}$$

sau đó nó vẫn ở trên độ cao này (H.22).



Hình 22

Tuy nhiên quá trình dao động mô tả ở đây có tính chất lí tưởng vì ta không thể bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực và ảnh hưởng của các đầu mút của sợi dây.

§4. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA SỢI DÂY HỮU HẠN

Bài toán hỗn hợp - Phương pháp Furiê (Fourier)

Ta hãy xét một sợi dây hữu hạn chiều dài l, chiếm đoạn $[0, l]$ của trục x khi cân bằng. Giả sử các đầu mút $x = 0$ và $x = l$ của sợi dây là gắn chặt nghĩa là $u|_{x=0} = 0 = u|_{x=l} = 0$ với mọi $t \geq 0$.

Điều kiện này được gọi là điều kiện biên.

Ta phải tìm nghiệm của phương trình thuần nhất

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \qquad (3.22)$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = f(x) \ ; \ u'_t|_{t=0} = F(x), \ (0 < x < l) \qquad (3.23)$$

Và điều kiện biên

$$u|_{x=0} = 0 \ ; \ u|_{x=l} = 0, \ t \geq 0 \qquad (3.24)$$

Bài toán này chứa cả điều kiện biên lẫn điều kiện ban đầu nên gọi là bài toán hỗn hợp đối với phương trình dao động của dây.

Một phương pháp vô cùng quan trọng khi giải phương trình vật lí toán là phương pháp Furiê hay phương pháp tách biến. Trước hết ta tìm nghiệm của phương trình (3.22) chỉ thoả mãn điều kiện biên (3.24) dưới dạng tích của một hàm chỉ phụ thuộc x với một hàm chỉ phụ thuộc t

$$u(x, t) = X(x)\,T(t) \qquad (3.25)$$

Ta có $u''_{tt} = XT''$, $u''_{xx} = X''T$.

Từ phương trình (3.22) ta rút ra

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Bởi vì vế trái của đẳng thức này không phụ thuộc vào x, còn vế phải không phụ thuộc vào t. Do đó cả $\frac{T''}{T}$ lẫn $\frac{X''}{X}$ không phụ thuộc vào x và t nghĩa là

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const}$$

Đặt hằng số là $-\lambda$, ta có

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (3.26)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \qquad (3.27)$$

Các nghiệm riêng mà ta cần tìm phải thoả mãn các điều kiện biên (3.24), nên với mọi t, ta có

$$u\big|_{x=0} = X(0).T(t) = 0\,,\ u\big|_{x=l} = X(l).T(t) = 0$$

Để tìm nghiệm không đồng nhất bằng không, ta phải có

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \qquad (3.28)$$

Vậy ta sẽ tìm nghiệm không đồng nhất bằng không của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai (3.26) thoả mãn các điều kiện biên (3.28). Bài toán sẽ chỉ có nghiệm không đồng nhất bằng không với một số giá trị đặc biệt của λ. Thật vậy phương trình đặc tính của phương trình (3.26) là

$$r^2 + \lambda = 0$$

Tuỳ theo dấu của λ, ta sẽ có các trường hợp sau đây :

a) $\lambda = -c^2$, nghiệm tổng quát của (3.26) là :

$$X(x) = C_1e^{cx} + C_2e^{-cx}$$

Trong đó C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý.

Từ các điều kiện biên (3.28), ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1e^{cl} + C_2e^{-cl} = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ này là $C_1 = C_2 = 0$. Vậy trong trường hợp này bài toán chỉ có nghiệm không.

b) $\lambda = 0$. Phương trình (3.26) có nghiệm tổng quát là

$$X(x) = C_1 + C_2x$$

Từ các điều kiện biên, ta có

$$C_1 = 0$$

$$C_1 + C_2 l = 0$$

do đó $C_1 = C_2 = 0$ và $X(x) = 0$.

c) $\lambda = c^2$. Nghiệm tổng quát của (3.26) là

$$X(x) = C_1 \cos cx + C_2 \sin cx$$

Từ các điều kiện biên, ta được

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X(l) = C_2 \sin cl = 0$$

Với $C_2 \neq 0$ thì $\sin cl = 0$. Điều đó xảy ra khi

$$cl = k\pi,\ k = \pm 1\ ;\ \pm 2...$$

hay với

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \qquad (3.29)$$

Bài toán sẽ có nghiệm không tầm thường là

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3.30)$$

trong đó A_k là hằng số tuỳ ý có thể lấy dấu tuỳ ý, λ_k gọi là giá trị riêng, còn $X_k(x)$ gọi là hàm riêng tương ứng của phương trình (3.26) với điều kiện biên (3.28).

Các hàm $X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$ lập thành một họ hàm trực giao trong đoạn $[0, l]$, nghĩa là

$$\int_0^l X_k(x)X_j(x)dx = 0 \text{ nếu } k \neq j.$$

Với λ cho bởi (3.29), ta dễ dàng có nghiệm tổng quát của (3.27) là

$$T_k(t) = B_k \cos\frac{k\pi at}{l} + D_k \sin\frac{k\pi at}{l} \qquad (3.31)$$

Thay các biểu thức (3.30), (3.31) vào (3.25) ta được các nghiệm riêng của phương trình (3.22) thoả mãn điều kiện (3.24) là

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3.32)$$

với $a_k = A_kB_k$, $b_k = A_kD_k$. Các dao động của dây ứng với $u_k(x, t)$ gọi là các *dao động riêng* hay các *sóng đứng*.

Mỗi điểm x của sợi dây thực hiện các dao động điều hoà có tần số $\omega_k = \lambda_k a = \frac{k\pi a}{l}$ với biên độ $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\sin\lambda_k x$.

Mặt khác, tất cả các điểm của sợi dây đồng thời đạt được độ lệch cực đại của mình về phía này hay phía kia (H.23).

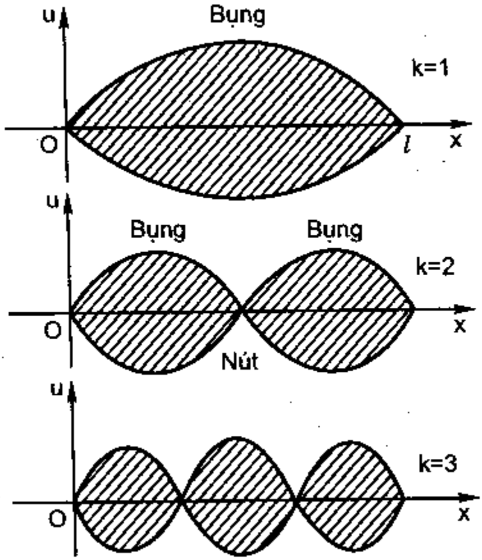
Sóng đứng $u_k(x, t)$ đối với $k \geq 2$ có $k - 1$ điểm nằm trong trạng thái tĩnh $x = \frac{1}{k}l$; $x = \frac{2}{k}l$,...

$$x = \frac{k-1}{k}l$$

Các điểm này gọi là *nút*. Các điểm lệch cực đại gọi là *bụng*. Sóng đứng $u_k(x, t)$ có k bụng, $k \geq 1$.

Tần số $\omega_k = \lambda_k a = \frac{k\pi a}{l}$ của dao động riêng được gọi là *tần số riêng* của sợi dây. Tần số riêng nhỏ nhất $\omega_l = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ là tần số *âm cơ bản* của sợi dây.

Tần số này càng cao nếu dây càng ngắn (l càng nhỏ), sức căng T càng lớn, ρ càng nhỏ. Tần số ω_k, đối với $k \geq 2$, là tần số của các hoạ âm tương ứng (H.23).



Hình 23

Nhờ tính chất tuyến tính và đồng nhất của phương trình (3.22), hàm

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$u = \sum_{k=1} \left\{ a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l} \right\} \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3.33)$$

là tổng hay là chồng chập các sóng đứng, cũng là nghiệm của phương trình này, nếu chuỗi (3.33) là hội tụ và có thể vi phân được theo x và theo t biểu thức dưới tổng hai lần. Ngoài ra hàm (3.33) hiển nhiên thoả mãn các điều kiện biên như mỗi một u_k với các giá trị bất kì của a_k và b_k. Bây giờ ta xác định các hệ số a_k, b_k để cho hàm (3.33) thoả mãn các điều kiện ban đầu (3.23).

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x) \qquad (3.34)$$

$$u'\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi a_k k}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} = F(x) \qquad (3.35)$$

Điều đó có nghĩa là a_k và $\frac{\pi a_k k}{l} b_k$ phải là các hệ số Furiê của các hàm f(x) và F(x) trong khai triển chúng theo sin trên quãng $(0, l)$ và các hệ số của chúng được tính theo công thức

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi \\ b_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^l F(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi \end{cases} \qquad (3.36)$$

Ta thấy rằng, hàm (3.33) mô tả *dao động duy trì*, nghĩa là dao động giữ nguyên cường độ với mọi $t \geq 0$. Điều đó là do ta bỏ qua sức cản của môi trường, nghĩa là bỏ qua sự tiêu tán năng lượng dao động.

Ví dụ 1 : Tìm dao động của sợi dây gắn chặt tại x = 0 và $x = l$, nếu dạng của sợi dây ban đầu là cung parabol $f(x) = \dfrac{x(l-x)}{M}$ và vận tốc ban đầu bằng không F(x) = 0.

Theo công thức (3.36), ta có

$$a_k = \frac{2}{lM}\int_0^l \xi(l-\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi =$$

$$= \frac{2}{lM}\left[-\frac{l}{k\pi}\xi(l-\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l + \frac{l}{k\pi}\int_0^l (l-2\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\right] =$$

$$= \frac{2}{k\pi M}\left[\frac{l}{k\pi}(l-2\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l + \frac{2l}{k\pi}\int_0^l \sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\right] =$$

$$= \frac{4l^2}{k^3\pi^3 M}\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l = \frac{4l^2}{k^3\pi^3 M}(1-\cos k\pi) =$$

$$= \frac{4l^2}{k^3\pi^3 M}\{1-(-1)^k\}$$

và $b_k = 0$. Vậy ta có định luật dao động là

$$u = \frac{4l^2}{\pi^3 M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$u = \frac{8l^2}{\pi^3 M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \qquad (3.37)$$

Bởi vì với k chẵn k = 2n + 2, ta có $1-(-1)^k = 0$, chuỗi (3.37) nhận được là hội tụ và có thể vi phân hai lần theo t và theo x

$$u''_{tt} = -a^2\frac{8}{\pi M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

$$u''_{xx} = -\frac{8}{\pi M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

nghĩa là hàm u thoả mãn phương trình $u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0$. Nó cũng thoả mãn các điều kiện biên và điều kiện ban đầu, do đó nó là nghiệm của bài toán.

Thừa số $\frac{1}{M}$ đưa vào hàm ban đầu f(x) để cho nghiệm toán học của bài toán gần với dao động thực của sợi dây vật lí. Bởi vì khi rút ra phương trình (3.22), ta đã có điều kiện là u'^2_x có thể bỏ qua so với 1, cho nên $f(x) = \frac{x(l-x)}{M}$ phải có đạo hàm mà bình phương của nó là nhỏ. Khi đó u'^2_x sẽ đủ nhỏ. Thật vậy

$$u'_x = \frac{8l}{\pi^2 M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

nghĩa là $\left|u'_x\right| \le \frac{8l}{\pi^2 M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{l}{M}$; vì $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Vậy $u'^2_x \le \frac{l^2}{M^2}$. Thành thử u'^2_x sẽ là đủ nhỏ, nếu M là đủ lớn. Do đó nghiệm (3.37) sẽ biểu diễn gần đúng dao động vật lí thực của sợi dây chỉ khi M đủ lớn.

Ví dụ 2 : Ở thời điểm t = 0, ta truyền cho các điểm của sợi dây nằm trong khoảng (c − ε, c + ε) một vận tốc ban đầu không đổi v_o. Hãy xác định dao động của sợi dây, nếu lúc đầu nó nằm yên.

Ta có các điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \begin{cases} v_o \text{ nếu } x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \\ 0 \text{ nếu } x \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \end{cases}$$

Vậy $a_k = 0$ và

$$b_k = \frac{2v_o}{k\pi a}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$b_k = \frac{2lv_o}{k^2\pi^2 a}\left[\cos\frac{k\pi(c-\varepsilon)}{l} - \cos\frac{k\pi(c+\varepsilon)}{l}\right]$$

Do đó

$$u_k(x, t) = \frac{2lv_o}{\pi^2 a}\,\frac{\cos\frac{k\pi(c-\varepsilon)}{l} - \cos\frac{k\pi(c+\varepsilon)}{l}}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}$$

Bây giờ cho $\varepsilon \to 0$ sao cho xung lượng p không thay đổi. Nếu ρ là mật độ của sợi dây thì ta có

$$p = 2\varepsilon\rho v_o$$

Nghiệm u(x, t) có thể được viết dưới dạng

$$u(x, t) = \frac{pl}{\pi^2 a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\cos k\pi(c-\varepsilon)}{l} - \cos\frac{k\pi(c+\varepsilon)}{l}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}$$

Theo quy tắc Lôpitan (L' Hopital)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos\frac{k\pi(c-\varepsilon)}{l} - \cos\frac{k\pi(c+\varepsilon)}{l}}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k\pi}{l}\left[\sin\frac{k\pi(c-\varepsilon)}{l} + \sin\frac{k\pi(c+\varepsilon)}{l}\right] =$$

$$= \frac{2k\pi}{l}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Vậy

$$u(x, t) = \frac{2lp}{\pi a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}$$

Đó là dao động của sợi dây đứng yên ở thời điểm ban đầu và ta truyền cho nó một xung lượng p tập trung tại điểm x = c.

§5. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA SỢI DÂY HỮU HẠN

Bây giờ ta xét phương trình dao động không thuần nhất của sợi dây

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = -g(x, t) \qquad (3.38)$$

với các điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=0} = f(x) \;;\; u'_t\big|_{t=0} = F(x) \qquad (3.39)$$

và các điều kiện biên

$$u\big|_{x=0} = 0 \;;\; u\big|_{x=l} = 0 \qquad (3.40)$$

Bài toán này cũng có thể giải được bằng phương pháp Furiê, nhưng ở đây ta chọn các sóng đứng là

$$u_k = T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Với $T_k(t)$ là hàm chưa biết. Nghiệm u sẽ được tìm dưới dạng tổng của các sóng đứng :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3.41)$$

Bởi vì mỗi sóng đứng u_k đều thoả mãn điều kiện biên (3.40) nên u cũng thoả mãn các điều kiện biên này. Nếu thay thế chuỗi (3.41) vào phương trình (3.38), ta có phương trình

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T''_k(t) + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k(t)\right\}\sin\frac{k\pi x}{l} = -g(x, t)$$

Ta giả sử rằng đối với mỗi t ≥ 0 quy định, hàm $-g(x, t)$ phân tích được thành chuỗi theo sin :

$$-g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Khi đó ta có đồng nhất thức

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ T_k''(t) + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2} T_k(t) \right\} \sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Từ đó ta rút ra

$$T_k''(t) + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2} T_k(t) = \gamma_k(t) \qquad (3.42)$$

(với k = 1, 2, 3, ...), trong đó $\gamma_k(t)$ là hàm ta đã biết.

Đối với hàm chưa biết $T_k(t)$, ta nhận được phương trình vi phân thông thường, tuyến tính hạng hai có hệ số hằng số mà ta có thể giải dễ dàng. Các điều kiện ban đầu của phương trình (3.42) có thể rút ra từ các điều kiện ban đầu (3.39). Thực vậy

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x)$$

và

$$u_t'\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin\frac{k\pi x}{l} = F(x)$$

Từ đó ta rút ra

$$\begin{cases} T_k(0) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(\xi) \sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = a_k \\ T_k'(0) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(\xi) \sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = b_k \end{cases} \qquad (3.43)$$

Bây giờ hàm $T_k(t)$ có thể hoàn toàn xác định từ phương trình (3.42) và các điều kiện (3.43).

Thay kết quả vào (3.41), ta nhận được nghiệm của bài toán.

Ví dụ 3 : Ta xét dao động của dây trong ví dụ 1 và giả sử rằng g(x, t) = g, trong đó g là hằng số dương đủ nhỏ. Chúng ta phải tìm hàm u = u(x, t) thoả mãn phương trình

$$u''_{tt} - a^2u''_{xx} = -g$$

với các điều kiện ban đầu $u\big|_{t=0} = \dfrac{x(l-x)}{M}$; $u'_t\big|_{t=0} = 0$ và các điều kiện biên $u\big|_{x=0} = 0$; $u\big|_{x=l} = 0$.

Nếu ứng dụng phương pháp trình bày ở trên, đầu tiên ta xác định $\gamma_k(t)$. Muốn vậy ta phân tích hằng số $-g$ thành chuỗi theo sin trong khoảng $(0, l)$.

$$-g = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Từ đó

$$\gamma_k = -\frac{2}{l}\int_0^l g\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = \frac{2g}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Big|_0^l = \frac{2g}{k\pi}\{(-1)^k - 1\}$$

Vì g(x, t) không phụ thuộc t nên ở đây γ_k cũng không phụ thuộc t. Do đó đối với các hàm chưa biết $T_k(t)$, chúng ta có

$$T''_k + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k = \frac{2g}{k\pi}\{(-1)^k - 1\}$$

với các điều kiện ban đầu

$$T_k(0) = a_k = \frac{4l^2}{k^3\pi^3M}\{1-(-1)^k\} \; ; \; T'_k(0) = 0$$

Ta dễ dàng tìm được

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l} - \frac{2gl}{k^3\pi^3a^2}\{1-(-1)^k\}$$

trong đó

$$a_k + \frac{2gl}{k^3\pi^3a^2}\left\{1-(-1)^k\right\} = \frac{2l}{k^3\pi^3}\left(\frac{2l}{M} + \frac{g}{a^2}\right)\left\{1-(-1)^k\right\}$$

và $B_k = 0$. Do đó nghiệm của bài toán trong trường hợp đã cho là hàm

$$u = \frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left[\left(\frac{2l}{M} + \frac{g}{a^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l} - \frac{g}{a^2}\right] \times$$

$$\times \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

Dao động này có thể viết dưới dạng tổng của hai dao động : Dao động của sợi dây không trọng lượng trong ví dụ 1

$$\frac{8l^2}{\pi^3 M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

và dao động

$$\frac{4l^2 g}{\pi^3 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left[1 - \cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]$$

là nghiệm của phương trình không thuần nhất với điều kiện ban đầu bằng không.

§6. TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN HỖN HỢP

Phương trình

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = G(x, t) \qquad (3.44)$$

là phương trình sóng một chiều. Phương trình sóng ba chiều có dạng là

$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) = G(x, y, z, t) \qquad (3.45)$$

Từ đó ta có thể nhận được phương trình (3.44) như một trường hợp đặc biệt của (3.45).

Như ta đã thấy, phương trình (3.44) mô tả các quá trình sóng lan truyền dọc theo trục x. Hàm chưa biết $u = u(x, t)$ có thể có ý nghĩa vật lí khác nhau tuỳ thuộc vào quá trình cụ thể được xét. Trong mọi trường hợp, hằng số a đều là vận tốc lan truyền sóng. Vế phải $G(x, t)$ là hàm đã cho cũng có ý nghĩa vật lí tuỳ thuộc vào bài toán.

Ta hãy xét các điều kiện ban đầu tuỳ ý

$$u\big|_{t=0} = f(x),\ u'_t\big|_{t=0} = F(x) \qquad (3.46)$$

và điều kiện biên tuỳ ý

$$u\big|_{x=0} = \varphi(t)\ \text{(I)} \qquad u\big|_{x=l} = \Phi(t)\ \text{(III)}$$

$$u'_x\big|_{x=0} = \varphi_1(t)\ \text{(II)} \qquad u'_x\big|_{x=l} = \Phi_1(t)\ \text{(IV)} \qquad (3.47)$$

trong đó, để tổng quát ta giả sử là tồn tại một trong các tổ hợp bất kì (I), (III) ; (I), (IV) ; (II), (III) ; (II), (IV). Vậy có thể có 4 bài toán hỗn hợp giải được bằng phương pháp tách biến.

Bây giờ ta chứng minh rằng không thể tồn tại hơn một nghiệm của các bài toán như vậy. Về mặt vật lí, chứng minh này là rất lí thú vì nó dựa trên định luật bảo toàn năng lượng.

Giả sử rằng có tồn tại hai hàm u_1 và u_2 thoả mãn phương trình (3.44), điều kiện ban đầu (3.46) và tổ hợp bất kì điều kiện biên (3.47). Khi đó hiệu của chúng $u = u_1 - u_2$ phải thoả mãn phương trình thuần nhất

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \tag{3.48}$$

với điều kiện ban đầu

$$u\Big|_{t=0} = 0\,;\;\; u'_t\Big|_{t=0} = 0 \tag{3.49}$$

và tổ hợp các điều kiện biên

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 \text{ (I)} & u\big|_{x=l} = 0 \text{ (III)} \\ u'_x\big|_{x=0} = 0 \text{ (II)} & u'_x\big|_{x=l} = 0 \text{ (IV)} \end{cases} \tag{3.50}$$

Tuy nhiên, bây giờ ta giả thiết rằng các điều kiện ban đầu đối với u có thể tuỳ ý, khác không, như là (3.14). Khi đó, ta nhân (3.48) với u'_t và bằng cách tích phân nó theo x toàn quãng $(0, l)$ ta được :

$$\int_0^l u'_t u''_{tt} dx - a^2 \int_0^l u'_t u''_{xx} dx = 0 \tag{3.51}$$

Bởi vì

$$u'_t u''_{tt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u'_t)^2$$

nên tích phân thứ nhất của (3.51) là

$$\int_0^l u'_t u''_{tt} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u'^2_t dx$$

Mặt khác, nếu tính tích phân từng phần ở số hạng thứ hai của (3.51), ta có

$$\int_0^l u'_t u''_{xx} dx = u'_t u'_x \Big|_0^l - \int_0^l u''_{tx} u'_x dx$$

Theo điều kiện biên (3.49)

$$u'_t u'_x \Big|_0^l = 0$$

Do đó $\displaystyle\int_0^l u'_t u''_{xx} dx = -\int_0^l u'_x u''_{tx} dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l u'^2_x dx$

Vậy cuối cùng thay các kết quả tính được vào (3.51) ta được

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l (u'^2_t + a^2 u'^2_x) dx = 0$$

Từ đó, rút ra

$$\int_0^l (u'^2_t + a^2 u'^2_x) dx = C = \text{const} \qquad (3.52)$$

Ta sẽ chứng minh rằng, đẳng thức này là biểu thức toán học của định luật bảo toàn năng lượng của dao động tự do với điều kiện biên không, nghĩa là không có dòng năng lượng từ ngoài vào hoặc có sự tiêu tán năng lượng trong quá trình dao động. Tính không đồng nhất trong phương trình và tính không đồng nhất trong các điều kiện biên nói lên sự có mặt của các nhân tố tác dụng thường xuyên, cung cấp hoặc làm tiêu tán năng lượng. Còn tính không đồng nhất của các điều kiện ban đầu chỉ có nghĩa là ở thời điểm ban đầu, quá trình có một dự trữ năng lượng được bảo toàn trong suốt quá trình dao động.

Đẳng thức (3.52) được gọi là tích phân năng lượng, ta viết nó dưới dạng

$$\int_0^l \left(\frac{1}{2}\rho u'^2_t + \frac{1}{2} T u'^2_x\right) dx = E \qquad (3.53)$$

trong đó $E = \dfrac{1}{2}\rho C$.

Ta thấy rằng

$$\int_0^l \frac{1}{2}\rho u_t'^2 dx = K(t) \tag{3.54}$$

là động năng của sợi dây ở thời điểm t, còn

$$\int_0^l \frac{1}{2} T u_x'^2 dx = U(t) \tag{3.55}$$

là thế năng của nó.

Điều đó rõ ràng vì động năng của yếu tố dx của sợi dây là $\frac{1}{2}mv^2$, trong đó $m = \rho dx$, còn $v = u'_t(x, t)$.

Tích phân từ 0 đến l, ta được (3.54). Còn thế năng là công của lực căng, nghĩa là đối với yếu tố dx.

$$T(ds - dx) = T(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1)dx \approx \frac{1}{2} T u_x'^2 dx$$

vì $u_x'^2$ nhỏ so với 1 nên $\sqrt{1 + u_x'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x'^2$.

Thành thử thế năng của yếu tố dx ở thời điểm t là $\frac{1}{2} T u_x'^2 dx$.

Tích phân từ 0 đến l ta được thế năng của sợi dây.

Vậy ở thời điểm t bất kì của dao động, ta có đẳng thức

$$K(t) + U(t) = E \tag{3.56}$$

trong đó E là năng lượng toàn phần của dây.

Ta thay $t = 0$ trong các công thức (3.54) và (3.55) và kể đến

$$u_t'\big|_{t=0} = F(x)$$

còn $u\big|_{t=0} = f(x)$, thì $u_x'\big|_{t=0} = f'(x)$.

Ta sẽ có đẳng thức

$$E = K(0) + U(0) = \frac{1}{2}\rho\int_0^l F^2(x)dx + \frac{1}{2}T\int_0^l f'^2(x)dx$$

Nghĩa là ở thời điểm t của dao động

$$\frac{1}{2}\rho\int_0^l u_t'^2 dx + \frac{1}{2}T\int_0^l u_x'^2 dx = \frac{1}{2}\rho\int_0^l F^2(x)dx + $$

$$+ \frac{1}{2}T\int_0^l f'^2(x)dx \qquad (3.57)$$

Đẳng thức này nói lên rằng, năng lượng toàn phần của sợi dây không đổi trong suốt quá trình dao động và bằng năng lượng ban đầu của nó.

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của nghiệm của bài toán hỗn hợp. Vì hiệu $u = u_1 - u_2$ thoả mãn các điều kiện ban đầu $F(x) = 0$ và $f(x) = 0$, do đó đối với $t \geq 0$, ta có

$$\frac{1}{2}\rho\int_0^l u_t'^2 dx + \frac{1}{2}T\int_0^l u_x'^2 dx = 0$$

Từ đó hiển nhiên ta rút ra

$$u_t'(x, t) \equiv 0 \text{ và } u_x'(x, t) \equiv 0.$$

Điều đó có nghĩa là $u(x, t) = C = \text{const}$. Nhưng bởi vì $u\big|_{t=0} = 0$, cho nên $C = 0$ và do đó $u(x, t) \equiv 0$ nghĩa là $u_1 \equiv u_2$. Vậy ta đã chứng minh được rằng không tồn tại hai hàm khác nhau thoả mãn phương trình (3.44) với các điều kiện ban đầu (3.46) và các điều kiện biên (3.47), nghĩa là bài toán không có hơn một nghiệm.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Một sợi dây vô hạn có dạng ban đầu là

$$u\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 \text{ khi } x \le 1 \\ x - 1 \text{ khi } 1 < x \le 2 \\ 3 - x \text{ khi } 2 < x \le 3 \\ 0 \text{ khi } x > 3 \end{cases}$$

Hãy vẽ dạng của sợi dây ở các thời điểm $t_o = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2{,}5$. Xét dao động của các điểm $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, biết vận tốc truyền sóng $a = 2$.

2. Một sợi dây hữu hạn, được gắn chặt ở các đầu mút $x = 0$ và $x = l$, dao động với vận tốc ban đầu bằng không. Sợi dây có dạng ban đầu là

$$u(x, 0) = \frac{4x(l - x)}{l^2} \qquad 0 \le x \le l$$

Đáp số :

$$u(x, t) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{l}$$

3. Tìm tần số dao động của sợi dây dài 10cm có tiết diện chữ nhật $(0{,}2 \times 0{,}4)\text{mm}^2$, nếu mật độ của nó $\rho = 7{,}8\text{gcm}^{-3}$ và sức căng bằng 1KG.

Đáp số : 632 dao động trong một giây.

4. Xác định dao động tự do của sợi dây hữu hạn, gắn chặt tại các mút $x = 0$ và $x = l$, có độ lệch ban đầu bằng không và vận tốc ban đầu là

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \begin{cases} v_o \cos(x-c) \text{ nếu } |x-c| < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \qquad\qquad \text{nếu} \quad |x-c| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

trong đó v_o là hằng số dương và $-\frac{\pi}{2} < c < l < \frac{\pi}{2}$.

Đáp số : $u(x, t) = \dfrac{4v_o}{\pi a} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{k\pi c}{l}\cos\dfrac{k\pi}{2l}}{k\left(1-\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}\right)} \sin\dfrac{k\pi x}{l} \sin\dfrac{k\pi at}{l}$

5. Một sợi dây đồng chất gắn chặt ở hai đầu $x = 0$ và $x = l$. Ở thời điểm ban đầu $t = 0$ được căng lên độ cao h ở điểm $x = x_o$ và sau đó buông ra không có vận tốc ban đầu. Hãy tính năng lượng của dao động tử thứ n của sợi dây dao động.

Đáp số : $E_n = \rho l h^2 \dfrac{a^2 l^2}{\pi^2 n^2 x_o (l - x_o)^2} \sin\dfrac{\pi n x_o}{l}$

Chỉ dẫn : năng lượng của dao động tử thứ n (sóng đứng thứ n : u_n) của sợi dây dao động ngang là

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx$$

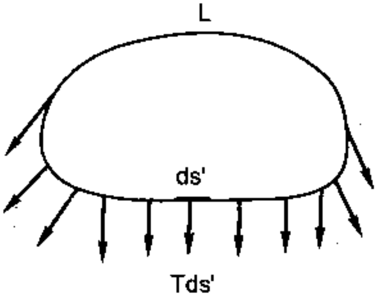
Trong đó T là sức căng, ρ là mật độ dài của sợi dây.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA MÀNG

§1. THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Giả sử ta có một màng được kéo bằng lực căng T. Điều đó có nghĩa là nếu tách ra một phần của màng giới hạn bởi đường cong kín L, thì phần còn lại có thể thay thế bằng các lực đặt lên L' nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với màng hướng theo pháp tuyến ngoài của L' (H.24) và được phân bố sao cho trên yếu tố cung ds' của đường cong L' có lực tác dụng Tds', trong đó T là mật độ phân bố không đổi của lực căng.

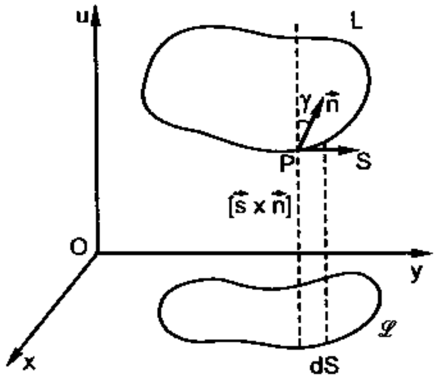


Hình 24

Màng được giả thiết là đàn hồi, dao động nhỏ đến mức là độ tăng diện tích của màng trong quá trình dao động có thể bỏ qua. Khi đó mật độ phân bố lực căng T là như nhau trong tất cả các tiết diện của màng.

Giả sử khi nằm yên, màng ở trong mặt phẳng (x, y), còn dao động xảy ra sao cho mỗi điểm của màng đều lệch theo phương vuông góc với mặt phẳng này. Kí hiệu độ lệch này là u ; u là hàm của các toạ độ x, y và thời gian t

$$u = u(x, y, t)$$



Hình 25

Bây giờ ta tìm phương trình mà hàm này thoả mãn.

Khi nằm yên, màng chiếm diện tích σ trên mặt phẳng (x, y) (H.25). Ta hãy xác định hình chiếu lên trục u của lực tác dụng lên mẫu màng này.

Gọi vectơ đơn vị pháp tuyến với màng tại điểm P của đường cong L là $\vec{n}$.

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\vec{n}$.

Vectơ đơn vị tiếp tuyến của L tại P là $\vec{S}$

$$\vec{S} = \cos\alpha'\vec{i} + \cos\beta'\vec{j} + \cos\gamma'\vec{k}$$

$\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ là các cosin chỉ phương của $\vec{S}$. Lực căng T tác dụng theo phương của vectơ

$$[\vec{S}, \vec{n}] = (\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma')\vec{i} +$$

$$+ (\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha')\vec{j} + (\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')\vec{k}.$$

Thành thử hình chiếu của lực căng tác dụng lên yếu tố cung ds' của L' trên trục u là :

$$T(\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')ds'$$

Còn hình chiếu tương ứng của hợp lực căng phân bố theo chu tuyến L' là

$$T\oint_{L'}(\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')ds' = T\oint_{L'}(\cos\beta dx' - \cos\alpha dy') \quad (4.1)$$

bởi vì $\cos\alpha' ds' = dx'$; $\cos\beta' ds' = dy'$.

Ta đã biết các cosin chỉ phương của pháp tuyến đối với mặt u = u(x, y, t) là

$$\cos\alpha = \frac{-u_x}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}} \;;\; \cos\beta = \frac{u_y'}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}}$$

(góc giữa $\vec{n}$ và trục u coi như là nhọn). Mặt khác diện tích của mẫu màng là

$$\oint_\sigma \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}\,dS = S_\sigma = \int_\sigma dS$$

Ta đã giả thiết là diện tích của màng trong quá trình dao động không thay đổi nên $\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}$ có thể lấy bằng 1, nghĩa là $u_x'^2$, $u_y'^2$ có thể bỏ qua so với 1. Do đó ta có thể đặt

$$\cos\alpha = -u_x' \;;\; \cos\beta = -u_y' \;;\; \cos\gamma = 1$$

và biểu thức (4.1) có dạng

$$-T\oint_{L'}(u_y'dx' - u_x'dy') \qquad (4.2)$$

Ta kí hiệu hình chiếu của chu tuyến L trên mặt phẳng xy là $\mathscr{L}$. Vì ta đặt cosγ = 1, nghĩa là γ = 0 nên dx' = dx, dy' = dy với dx, dy là hình chiếu của yếu tố cung ds của chu tuyến $\mathscr{L}$ lên các trục Ox và Oy. Do đó tích phân (4.2) có thể lấy theo $\mathscr{L}$.

$$-T\oint_{\mathscr{L}'}(u_y'dx' - u_x'dy') = -T\oint_{\mathscr{L}}(u_y'dx - u_x'dy)$$

Biến đổi thành tích phân mặt theo công thức Grin, ta có

$$\int_{\mathscr{L}} u_y'dx - u_x'dy = -\int_\sigma (u_{xx}'' + u_{yy}'')dS$$

Thành thử cuối cùng hình chiếu trên trục u của hợp lực căng phân bố theo chu tuyến $\mathscr{L}'$ là :

$$T\int_{\sigma}(u''_{xx}+u''_{yy})dS \tag{4.3}$$

Ngoài ra, giả sử màng chịu tác dụng của ngoại lực song song và ngược chiều với trục u (chẳng hạn trọng lượng của màng) có mật độ phân bố theo màng là $\rho g(x, y, t)$, thì hợp lực của chúng là

$$-\rho\int_{\sigma}g(x, y, t)dS$$

Nếu ρ là mật độ mặt không đổi của màng, thì hợp lực quán tính theo mẫu màng đang xét là

$$\rho\int_{\sigma}u''_{tt}dS$$

và đối với mọi $t \geq 0$, ta có đẳng thức

$$\rho\int_{\sigma}u''_{tt}dS = T\int_{\sigma}(u''_{xx}+u''_{yy})dS-\rho\int_{\sigma}gdS$$

hay
$$\int_{\sigma}\left\{\rho u''_{tt} - T(u''_{xx}+u''_{yy})+g\rho\right\}dS = 0 \tag{4.4}$$

Bởi vì σ là một vùng bất kì của mặt (x, y), nên biểu thức dưới dấu tích phân trong (4.4) phải bằng không ở điểm bất kì của màng ở thời điểm bất kì, nghĩa là phải xảy ra đẳng thức

$$\rho u''_{tt} - T(u''_{xx}+u''_{yy})+\rho g(x, y, t) = 0$$

hay
$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx}+u''_{yy}) = -g(x, y, t) \tag{4.5}$$

trong đó $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ là hằng số dương.

Phương trình (4.5) được gọi là *phương trình dao động của màng*. Nó là phương trình sóng hai chiều, hệ số a như trước kia là vận tốc lan truyền sóng ; nếu $g(x, y, t) \equiv 0$, thì phương trình là thuần nhất, nó mô tả dao động tự do của màng. Phương trình không thuần nhất (4.5) mô tả dao động cưỡng bức của màng.

Bài toán hỗn hợp đối với phương trình dao động của màng được thiết lập như sau. Giả sử trong trạng thái tĩnh, màng chiếm vùng D trong mặt phẳng (x, y) giới hạn bởi chu tuyến $\mathcal{L}$ là biên của màng. Điều kiện ban đầu đối với (4.5) là

$$u\Big|_{t=0} = f(x, y) \ ; \ u'_t\Big|_{t=0} = F(x, y) \qquad (4.6)$$

trong đó hàm f(x, y) và F(x, y) được xác định trong vùng D là độ lệch ban đầu và vận tốc ban đầu của các điểm x, y của màng. Nếu xét dao động của màng, có biên gắn chặt, thì điều kiện biên được viết dưới dạng

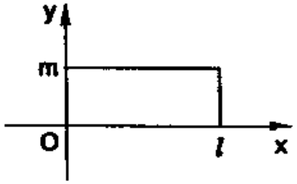
$$u\Big|_{L=0} \qquad (4.7)$$

$u\big|_L$ là kí hiệu giá trị của hàm u ở các điểm của chu tuyến L.

§2. DAO ĐỘNG CỦA MÀNG CHỮ NHẬT

Ta hãy xét màng hình chữ nhật, lúc cân bằng nằm trên mặt phẳng (x, y) chiếm miền $G\{0 \le x \le l, 0 \le y \le m\}$ (H.26). Các điều kiện biên gắn chặt được viết dưới dạng sau

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0, \ \ u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{y=0} = 0, \ \ u\big|_{y=m} = 0 \end{cases} \qquad (4.8)$$



Hình 26

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình

$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx} + u''_{yy}) = 0 \tag{4.9}$$

bằng phương pháp tách biến. Muốn vậy, ta viết u dưới dạng

$$u = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

Bởi vì

$$u''_{tt} = XYT'',\ u''_{xx} = X''YT,\ u''_{yy} = XY''T$$

cho nên phương trình (4.9) có dạng

$$XYT'' - a^2(X''YT + XY''T) = 0$$

hay

$$\frac{T''}{T} = a^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) \tag{4.10}$$

Bởi vì vế trái không phụ thuộc vào x và y còn vế phải không phụ thuộc vào t, nên chúng phải là hằng số

$$\frac{T''}{T} = a^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) = c = \text{const}$$

và

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2,\quad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2$$

Giống như lí luận trong chương III, cả hai hằng số trên phải là âm để bài toán có nghiệm khác không.

Từ đó chúng ta có

$$\frac{T''}{T} = -(\lambda^2 + \mu^2)a^2$$

Do đó, các hàm T(t), X(x), Y(y) thoả mãn các phương trình vi phân thường

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{4.11}$$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \tag{4.12}$$

$$T'' + (\lambda^2 + \mu^2)a^2 T = 0 \tag{4.13}$$

Từ đó ta rút ra

$$T = A\cos\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,at + B\sin\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,at$$

$$X = C_1\cos\lambda x + D_1\sin\lambda x$$

$$Y = C_2\cos\mu y + D_2\sin\mu y$$

Để hàm u = XYT thoả mãn điều kiện biên (4.8), ta phải đặt

$$X\big|_{x=0} = X\big|_{x=l} = 0 \text{ và } Y\big|_{y=0} = Y\big|_{y=m} = 0 \qquad (4.14)$$

Từ các đẳng thức này ta rút ra $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

$$\sin\lambda l = 0 \text{ và } \sin\mu m = 0, \text{ nghĩa là}$$

$$\lambda l = k_1\pi,\ \mu m = k_2\pi$$

trong đó k_1 và k_2 là các số nguyên tuỳ ý, ta đặt $k_1 = 1, 2, 3...$ và $k_2 = 1, 2, 3...$

Thành thử ta có

$$\lambda = \frac{k_1\pi}{l},\ \mu = \frac{k_2\pi}{m} \qquad k_1, k_2 = 1, 2, 3...$$

$$T(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k_1^2\pi^2}{l^2} + \frac{k_2^2\pi^2}{m^2}}\,at\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k_1^2\pi^2}{l^2} + \frac{k_2^2\pi^2}{m^2}}\,at\right)$$

$$X(x) = D_1\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$

$$Y(y) = D_2\sin\frac{k_2\pi y}{m}$$

và u = X(x) Y(y) T(t)

$$u = \{AD_1D_2\cos\omega_{k_1,k_2}t + BD_1D_2\sin\omega_{k_1,k_2}t\}\ \sin\lambda_{k_1}x\sin\mu_{k_2}y$$

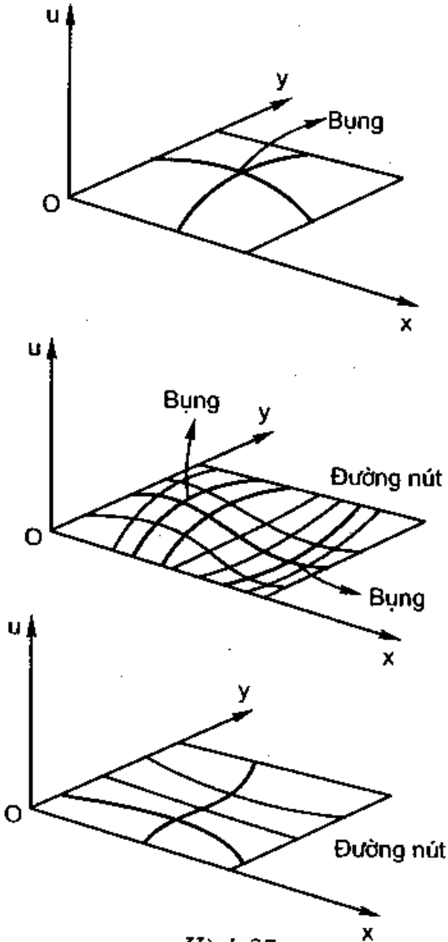
trong đó

$$\omega_{k_1,k_2} = \sqrt{\frac{k_1^2\pi^2}{l^2} + \frac{k_2^2\pi^2}{m^2}}\ a = \sqrt{\frac{k_1^2}{l^2} + \frac{k_2^2}{m^2}}\ \pi a \qquad (4.15)$$

và $$\lambda_{k_1} = \frac{k_1\pi}{l},\ \mu_{k_2} = \frac{k_2\pi}{m}$$

Đặt các hằng số $AD_1D_2 = a_{k_1,k_2}$, $BD_1D_2 = b_{k_1,k_2}$, ta có

$$u_{k_1,k_2}(x, y, t) = (a_{k_1,k_2}\cos\omega_{k_1,k_2}t +$$
$$+ b_{k_1,k_2}\sin\omega_{k_1,k_2}t)\sin\lambda_{k_1}x\sin\mu_{k_2}y \qquad (4.16)$$



Hình 27

Hàm (4.16) thoả mãn phương trình (4.9) và các điều kiện biên (4.8), nghĩa là nghiệm của bài toán biên, các hàm

$$X_{k_1}(x) = \sin\lambda_{k_1}x$$

và $Y_{k_2}(y) = \sin\mu_{k_2}y$ (4.17)

là nghiệm của bài toán biên đối với các phương trình vi phân thông thường (4.11), (4.12) với các điều kiện biên (4.14). Thành thử các số λ_{k_1} và μ_{k_2} là các giá trị riêng còn (4.17) là các hàm riêng của bài toán biên này.

Tần số ω_{k_1,k_2} xác định bằng (4.15) được gọi là các tần số riêng của màng chữ nhật, còn dao động (4.16) là các dao động riêng, đó là các sóng đứng đối với màng chữ nhật. Mỗi điểm của màng x, y thực hiện một dao động điều hoà tần số ω_{k_1,k_2} có biên độ là

$$\sqrt{\alpha^2_{k_1,k_2} + \beta^2_{k_1,k_2}}\ \sin\lambda_{k_1}x\sin\mu_{k_2}y$$

hơn nữa tất cả các điểm của màng đồng thời đạt được độ lệch cực đại của mình về phía này hay phía kia. Chẳng hạn, trên hình 27 ta có dạng của màng (nghĩa là dạng của sóng đứng) ứng với các dao động

$$u_{1,1}\ (k_1 = 1, k_2 = 1)$$

$$u_{2,1}\ (k_1 = 2, k_2 = 1)$$

và $$u_{1,2}\ (k_1 = 1, k_2 = 2)$$

ở thời điểm các độ lệch là cực đại. Với dao động u_{k_1,k_2} có $(k_1 - 1)$ đường thẳng song song với trục y là

$$x = \frac{1}{k_1} l,\ x = \frac{2}{k_1} l, \ldots,\ x = \frac{k_1 - 1}{k_1} l\ ; \qquad k_1 \geq 2$$

và $(k_2 - 1)$ đường thẳng song song với trục x là

$$y = \frac{1}{k_2} m,\ y = \frac{2}{k_2} m, \ldots,\ y = \frac{k_2 - 1}{k_2} m\ ; \quad k_2 \geq 2$$

Chúng được gọi là các đường nút. Điểm mà màng lệch cực đại so với trạng thái đứng yên gọi là bụng. Song u_{k_1,k_2} có k_1k_2 bụng $(k_1 \geq 1, k_2 \geq 1)$.

Tần số âm cơ bản của màng (tần số riêng thấp nhất) là

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{\pi^2}{m^2}}\, a = \pi \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2}}\ \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Các tần số còn lại ω_{k_1,k_2} là các hoạ âm.

Đối với màng vuông, tần số âm cơ bản là

$$\omega_{1,1} = \frac{\pi}{l}\sqrt{2}\, a = \frac{\pi}{l}\sqrt{2}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

nghĩa là lớn hơn tần số âm cơ bản của sợi dây $\sqrt{2}$ lần.

Bây giờ ta cộng tất cả các sóng dừng lại, nghĩa là tổng 2 lần theo k_1 và k_2

$$u = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} u_{k_1,k_2} = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} (a_{k_1,k_2}\cos\omega_{k_1,k_2}t + b_{k_1,k_2}\sin\omega_{k_1,k_2}t)\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi y}{m} \quad (4.18)$$

Hàm này thoả mãn phương trình (4.9) và điều kiện biên (4.8).

Bây giờ ta xác định các hệ số a_{k_1,k_2} và b_{k_1,k_2} từ các điều kiện ban đầu.

Từ công thức (4.18), tại $t = 0$, ta có

$$f(x, y) = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1,k_2}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi y}{m}$$

$$0 < x < l$$

$$0 < y < m$$

Thành thử để xác định các hệ số a_{k_1,k_2}, ta phải phân tích hàm f(x, y) thành chuỗi Furiê hai lớp theo sin. Đầu tiên, giả sử x không đổi, ta phân tích hàm f(x, y) như hàm của y thành chuỗi theo sin

$$f(x, y) = \sum_{k_2=1}^{\infty} a^*_{k_2}(x)\sin\frac{k_2\pi y}{m} \quad (0 < y < m)$$

trong đó

$$a^*_{k_2}(x) = \frac{2}{m}\int_0^m f(x, \eta)\sin\frac{k_2\pi\eta}{m}d\eta \quad (4.19)$$

Sau đó phân tích tiếp $a^*_{k_2}(x)$ thành chuỗi theo sin

$$a^*_{k_2}(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1,k_2} \sin\frac{k_1\pi x}{l} \qquad (0 < x < l)$$

trong đó
$$a_{k_1,k_2} = \frac{2}{l}\int_0^l a(\xi)\sin\frac{k_1\pi\xi}{l}d\xi \qquad (4.20)$$

Thay vào f(x, y) ta có

$$f(x, y) = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1,k_2} \sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi y}{m}$$

Thay (4.19) vào (4.20), ta có

$$a_{k_1,k_2} = \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m f(\xi, \eta)\sin\frac{k_2\pi\eta}{m}\sin\frac{k_1\pi\xi}{l}d\eta d\xi \qquad (4.21)$$

Mặt khác nếu vi phân (4.18) theo t và sau đó đặt t = 0, ta có

$$F(x, y) = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} \omega_{k_1,k_2} b_{k_1,k_2} \sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi y}{m} \quad \text{với} \begin{cases} 0 < x < l \\ 0 < y < m \end{cases}$$

Từ đó giống như công thức (4.21), ta có công thức sau cho b_{k_1,k_2}

$$b_{k_1,k_2} = \frac{1}{\omega_{k_1,k_2}}\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m P(\xi, \eta)\sin\frac{k_2\pi\eta}{m}\sin\frac{k_1\pi\xi}{l}d\eta d\xi \qquad (4.22)$$

Do đó bài toán về dao động tự do của màng đã giải xong : nghiệm có dạng (4.18), các hệ số a_{k_1,k_2} và b_{k_1,k_2} được tính theo các công thức (4.21), (4.22), còn ω_{k_1,k_2} được tính theo công thức (4.15).

Bài toán về dao động cưỡng bức của màng chữ nhật được giải bằng phương pháp tách biến tương tự như bài toán dao động cưỡng bức của dây hữu hạn. Nghiệm của phương trình

$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx} + u''_{yy}) = -g(x, y, t) \tag{4.23}$$

với điều kiện ban đầu (4.6) và điều kiện biên (4.8) được viết dưới dạng

$$u = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} T_{k_1,k_2}(t)\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi y}{m} \tag{4.24}$$

Vế phải $-g(x, y, t)$ được khai triển thành chuỗi hai lớp theo sin

$$-g(x, y, t) = \sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty} \gamma_{k_1,k_2}(t)\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi y}{m} \tag{4.25}$$

và đối với hàm $T_{k_1,k_2}(t)$ ta rút ra được phương trình vi phân thông thường từ phương trình (4.23) và khai triển (4.25).

$$T''_{k_1,k_2} + \omega_{k_1,k_2}T_{k_1,k_2} = \gamma_{k_1,k_2}(t)$$

với các điều kiện ban đầu

$$T_{k_1,k_2}(0) = a_{k_1,k_2},\ T'_{k_1,k_2}(0) = \omega_{k_1,k_2}b_{k_1,k_2}$$

Trong đó a_{k_1,k_2} và b_{k_1,k_2} được xác định bằng các công thức (4.21) và (4.22).

Nghiệm của bài toán dao động cưỡng bức của màng sẽ xác định được nhờ thay thế $T_{k_1,k_2}(t)$ vào công thức (4.24).

*§3. CÁC ĐƯỜNG NÚT TRÊN MÀNG CHỮ NHẬT

Để đơn giản, ta xét trường hợp màng hình vuông. Khi đó ta có $m = l$. Tần số dao động của sóng đứng là

$$\omega_{k_1,k_2} = \frac{\pi}{l}a\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

giá trị của ω_{k_1,k_2} không thay đổi, với các k_1, k_2 thoả mãn phương trình $k_1^2 + k_2^2 = \text{const}$.

Chẳng hạn với $\omega_{1,1}$, ta luôn luôn có một sóng đứng kể cả đối với màng chữ nhật. Ứng với $\omega_{5,5} = \omega_{1,7} = \omega_{7,1}$ $(5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2 = 7^2 + 1^2)$, ta có ba sóng đứng có cùng tần số. Như vậy, sẽ có một vài hàm riêng tương ứng với cùng một giá trị riêng (bội của các giá trị riêng). Trong dao động của sợi dây, không có hiện tượng này.

Ta xét trường hợp dao động của màng vuông có tần số $\omega_{1,2} = \omega_{2,1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{5}\,a$. Dao động tổng hợp có dạng

$$u_{1,2} + u_{2,1} = \left(a_{1,2}\cos\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at + b_{1,2}\sin\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at\right)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{l} +$$

$$+\left(a_{2,1}\cos\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at + b_{2,1}\sin\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at\right)\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$$

Ta tìm các đường nút trong dao động này nghĩa là các điểm đứng yên đối với mọi $t \geq 0$ $(u_{1,2} + u_{2,1} = 0)$. Các điểm x, y đó phải thoả mãn đẳng thức

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{l}}{\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}} = -\frac{a_{2,1}\cos\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at + b_{2,1}\sin\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at}{a_{1,2}\cos\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at + b_{1,2}\sin\frac{\pi}{l}\sqrt{5}\ at}$$

Từ đó ta rút ra

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{l}}{\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}} = \frac{p}{q} = \text{const}$$

Vì vế trái chỉ phụ thuộc toạ độ còn vế phải chỉ phụ thuộc thời gian, mặt khác vì ở các điểm trong màng

$0 < x < l$; $0 < y < l$ thì $\sin\frac{\pi y}{l} \neq 0$ và $\sin\frac{\pi x}{l} \neq 0$ nên đẳng thức trên có thể viết

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{l} 2\sin\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi y}{l}}{2\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}} = \frac{\cos\frac{\pi y}{l}}{\cos\frac{\pi x}{l}} = \frac{p}{q}$$

từ đó ta có phương trình của đường nút

$$q\cos\frac{\pi y}{l} = p\cos\frac{\pi x}{l}$$

Đó là dạng đơn giản nhất của các đường nút tương ứng với hoạ âm thấp nhất.

Ta xét các trường hợp cụ thể :

a) $p = q \neq 0$ thì $\cos\frac{\pi y}{l} = \cos\frac{\pi x}{l}$, ta rút ra

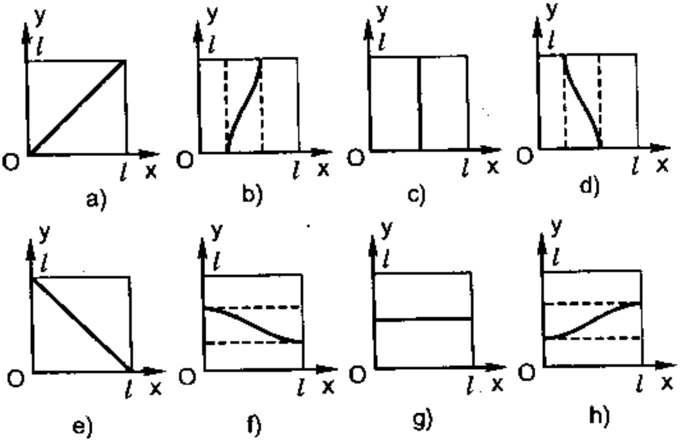
$y = x$: ta có đường nút là đường chéo của màng (H. 28a)

b) $\frac{p}{q} > 1$ thì đường nút nằm trong một dải song song với trục y, trong đó $\left|\cos\frac{\pi x}{l}\right| \leq \frac{q}{p}$ (bởi vì $\left|\cos\frac{\pi x}{l}\right| \leq 1$), nghĩa là trong dải $\left|x - \frac{l}{2}\right| \leq \arcsin\frac{q}{p}$ (H.28b).

c) $q = 0$, thì $x = \frac{l}{2}$ (H.28c).

d) $\frac{p}{q} < -1$, đường nút nằm trong dải $\left|x - \frac{l}{2}\right| \leq \arcsin\left|\frac{p}{q}\right|$ (H.28d).

e) $q = -p \neq 0$ thì $y = l - x$, đường nút là đường chéo thứ hai của màng (H.28e).



Hình 28

f) $-1 < \frac{p}{q} < 0$, thay y cho x ta dẫn đến trường hợp d) (H.28f).

g) $p = 0$ thì $y = \frac{l}{2}$ (H.28g).

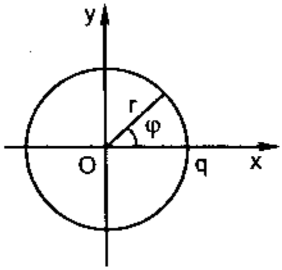
h) $0 < \frac{p}{q} < 1$, thay y cho x ta dẫn đến trường hợp b) (H.28h).

Tất cả các đường nút đều đi qua tâm của màng $x = y = \frac{l}{2}$. Hình 28 biểu diễn các đường nút đó.

Đối với các tần số riêng cao hơn ω_{k_1,k_2} $(k_1 \geq 2 ; k_2 \geq 2)$, các đường nút có dạng phức tạp hơn.

§4. DAO ĐỘNG CỦA MÀNG TRÒN VÀ HÀM BETSEN (BESSEL)

1. Phương trình Betsen



Hình 29

Xét dao động của một màng tròn. Giả sử màng chiếm một hình tròn D bán kính q trên mặt phẳng xy có tâm ở gốc toạ độ. Nếu ta dùng toạ độ cực thì phương trình của đường tròn biên của màng sẽ là r = q (H.29). Độ lệch của một điểm của màng u là hàm của r, φ và t

$$u = u(r, \varphi, t)$$

Điều kiện biên bây giờ có dạng

$$u\big|_{r=q} = 0 \qquad (4.26)$$

Trong toạ độ cực, toán tử Laplaxơ hai chiều có dạng

$$\Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)$$

(có thể suy ra từ toán tử Laplaxơ trong toạ độ trụ với $u''_{zz} = 0$).

Do đó phương trình dao động tự do của màng trong toạ độ cực có dạng

$$u''_{tt} - a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)\right] = 0$$

hay

$$u''_{tt} - a^2\left[\frac{1}{r}(ru'_r)'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\varphi\varphi}\right] = 0 \qquad (4.27)$$

Các điều kiện ban đầu trong toạ độ cực có dạng

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi),\ u'_t\big|_{t=0} = F(r, \varphi) \qquad (4.28)$$

Dùng phương pháp tách biến, ta có thể viết nghiệm của phương trình (4.27) biểu diễn sóng đứng trên màng tròn dưới dạng

$$u = R(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$$

Thay vào phương trình (4.27), ta được

$$R\Phi T'' - a^2\left[\frac{1}{r}(rR')'\Phi T + \frac{1}{r^2}R\Phi''T\right] = 0$$

hay

$$\frac{T''}{T} - a^2\left[\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}\right] = 0$$

Từ phương trình này, ta có thể đặt

$$\frac{T''}{T} = -\nu^2 a^2 \tag{4.29}$$

và

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\nu^2 \tag{4.30}$$

trong đó ν là hằng số

Phương trình (4.30) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -r^2\left[\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \nu^2\right]$$

Từ đó ta rút ra

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = c \tag{4.31}$$

và

$$-r^2\left[\frac{\frac{1}{r}(rR')}{R} + \nu^2\right] = c \tag{4.32}$$

trong đó c là hằng số, có giá trị phụ thuộc vào sự tuần hoàn của hàm Φ : $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Thực vậy, từ phương trình (4.31) ta tìm được

$$\Phi(\varphi) = D_1\cos k\varphi + D_2\sin k\varphi \tag{4.33}$$

trong đó D_1 và D_2 là các hằng số bất kì và $k^2 = -c$

Thành thử đối với hàm R(r) ta có phương trình

$$-r^2\left[\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + v^2\right] = -k^2$$

hay
$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(v^2 - \frac{k^2}{r^2}\right)R = 0$$

Bây giờ ta đưa vào biến số mới $x = vr$ và đặt

$$R(r) = R\left(\frac{x}{v}\right) = y \tag{4.34}$$

ta có

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dr} = v\frac{dy}{dx}$$

$$R'' = \frac{dR'}{dr} = v\frac{d}{dr}\left(\frac{dy}{dx}\right) = v\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dr} = v^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Do đó ta nhận được phương trình vi phân sau đối với hàm y(x)

$$v^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{v}{x}v\frac{dy}{dx} + \left(v^2 - \frac{v^2k^2}{x^2}\right)y = 0$$

hay

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{4.35}$$

Phương trình (4.35) được gọi là *phương trình Betsen*. Nó là một phương trình vi phân thông thường hạng hai có hệ số thay đổi. Nghiệm của nó được gọi là *hàm Betsen*. Vì nó đóng vai trò quan trọng trong việc mô tả các quá trình vật lí xảy ra trong các miền hình trụ, vì vậy nó còn có tên là HÀM TRỤ.

2. Hàm Betsen

Ta hãy khai triển các nghiệm riêng của phương trình (4.35) thành chuỗi luỹ thừa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (4.36)$$

Để tìm các hệ số của chuỗi, ta lấy các đạo hàm

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

và

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

Thay vào phương trình (4.35) sau khi nhân với x^2, ta có

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + (x^2 - k^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \qquad (4.37)$$

đối với mọi x. Vậy tất cả các hệ số đứng trước mỗi luỹ thừa của x phải bằng không. Bây giờ ta viết lại chi tiết từng số hạng của vế trái của (4.37).

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n = 2.1.c_2x^2 + 3.2c_3x^3 + \dots + n(n-1)c_n x^n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = 1.c_1x + 2.c_2x^2 + 3.c_3x^3 + ... + nc_nx^n + ...$$

$$(x^2 - k^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (x^2 - k^2)(c_o + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ...) =$$

$$= -k^2c_o - k^2c_1x + (c_o - k^2c_2)x^2 + ... + (c_{n-2} - k^2c_n)x^n + ...$$

Vậy thay vào (4.37) ta có

$$-k^2c_o + (1 - k^2)c_1x + [c_o + (4 - k^2)c_2]x^2 + [c_1 +$$
$$+ (9 - k^2)c_3]x^3 + ... + [c_{n-2} + (n^2 - k^2)c_n]x^n + ...$$

Từ đó ta rút ra

$$-k^2c_o = 0\ ;\ (1 - k^2)c_1 = 0\ ;\ c_{n-2} + (n^2 - k^2)c_n = 0$$
$$n = 2, 3,... \tag{4.38}$$

Ở đây k là một số nguyên không âm.

Nếu k = 0, thì c_o là một số bất kì, còn

$$c_1 = 0$$

và

$$c_{n-2} + n^2c_n = 0 \quad n = 2, 3,...$$

cụ thể là

$$c_2 = -\frac{c_o}{2^2},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_o}{2^2.4^2}$$

Tổng quát

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_o}{2^2.4^2 ... (2m)^2} = (-1)^m \frac{c_o}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$c_{2m+1} = 0$$

$$(m = 0, 1, 2...)$$

Thành thử ta có nghiệm của phương trình Betsen với $k = 0$

$$y = c_o \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = c_o J_o(x) \qquad (4.39)$$

trong đó

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}$$

được gọi là *hàm Betsen loại một hạng không.*

Nếu $k = 1$, thì từ (4.38), ta rút ra $c_o = 0$, c_1 là tuỳ ý và

$$c_{n-2} + (n^2 - 1)c_n = 0 \qquad n = 2, 3...$$

cụ thể là

$$c_2 = 0,\ c_3 = -\frac{c_1}{2.4},\ c_4 = 0,\ c_5 = -\frac{c_3}{4.6} = \frac{c_1}{(2.4)(4.6)}$$

Tổng quát $c_{2m} = 0$

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{c_1}{(2.4)(4.6)\ ...\ [2m(2m+2)]} =$$

$$= (-1)^m \frac{c_1}{2^{2m} m!(m+1)!} \quad (m = 0, 1, 2,...)$$

Thành thử ta có nghiệm của phương trình Betsen với $k = 1$ là

$$y = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2^{2m} m!(m+1)!} = 2c_1 J_1(x) \qquad (4.40)$$

trong đó

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!(m+1)!}$$

được gọi là *hàm Betsen loại 1 hạng 1.*

Nếu k = 2, 3,... thì từ hệ thức (4.38) ta rút ra $c_o = 0$, $c_1 = 0$, ..., $c_{k-1} = 0$, c_k là tuỳ ý, $c_{k+1} = 0$

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)^2 - k^2} = -\frac{c_k}{2.(2k+2)},\ c_{k+3} = 0,$$

$$c_{k+4} = -\frac{c_{k+2}}{(k+4)^2 - k^2} = -\frac{c_{k+2}}{4(2k+4)} = \frac{c_k}{[2(2k+2)][4(2k+4)]}$$

Tổng quát

$$c_{k+2m} = (-1)^m \frac{c_k}{[2(2k+2)][4(2k+4)]\ldots[2m(2k+2m)]} =$$

$$= (-1)^m \frac{c_k}{2^{2m} m!(k+1)(k+2)\ldots(k+m)} =$$

$$= (-1)^m \frac{k!\, c_k}{2^{2m} m!(k+m)!}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Thành thử ta có nghiệm của phương trình Betsen khi k = 2, 3,...

$$y = k!\, c_k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+k}}{2^{2m} m!(m+k)!} = 2^k k!\, c_k J_k(x)$$

trong đó

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+k}}{2^{2m+k} m!(m+k)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{m!(m+k)!} \tag{4.41}$$

được gọi là *hàm Betsen loại 1 hạng k.*

Nếu k = 0, 1, ta lại có các công thức (4.39) và (4.40). Vậy (4.41) xác định hàm Betsen loại 1 tất cả các hạng k = 0, 1, 2,... Ta dễ dàng thấy rằng chuỗi (4.41) là hội tụ và thoả mãn phương trình Betsen (4.35).

Hệ thức (4.41) của hàm Betsen loại 1 hạng k có thể biểu diễn qua hàm Gamma Γ(t)

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \qquad (t > 0)$$

Khi đó hệ thức (4.41) đúng với cả k không nguyên.

Còn với t nguyên

$$\Gamma(t) = (t-1)\,! \,; \qquad \Gamma(1) = 1$$

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+k+1)} \qquad (4.42)$$

Hàm Betsen có nhiều ứng dụng trong các bài toán vật lí và kĩ thuật nên đã được nghiên cứu nhiều và có những bảng chi tiết về các giá trị của chúng.

Đối với các giá trị x lớn, hàm $J_k(x)$ gần với

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

hay chính xác hơn

$$J_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + \varepsilon_1(x)\right] \qquad (4.43)$$

trong đó $\varepsilon_1(x) \to 0$ khi $x \to \infty$

Từ công thức (4.43) ta rút ra là $J_k(x)$ có một tập hợp vô số các nghiệm $\xi_n^{(k)}$, n = 1, 2, 3,... trên nửa trục dương x

$$J_k(\xi_n^{(k)}) = 0$$

Có thể chứng minh được rằng các nghiệm này là đơn giản, nghĩa là $J'_k(\xi_n^{(k)}) \neq 0$ và nếu đánh số chúng theo thứ tự tăng lên : $\xi_n^{(k)} < \xi_2^{(k)} ... < \xi_n^{(k)} < ...$ thì đối với các số n lớn

$$\cos\left(\xi_n^{(k)} - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

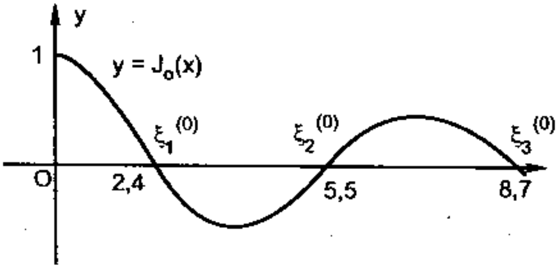
gần bằng không, nghĩa là $\xi_n^{(k)} - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ khác ít với nghiệm dương thứ n theo thứ tự tăng lên của cosin : $n\pi - \frac{\pi}{2}$. Thành thử, đối với các số n lớn $\xi_n^{(k)}$ gần bằng

$$n\pi + \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

hay chính xác hơn

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\xi_n^{(k)} - \left(n\pi + \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} = 0$$

Hình 30 cho ta đồ thị của hàm $J_o(x)$.



Hình 30

Phương trình Betsen phải có hai nghiệm độc lập tuyến tính, trong đó một là J(x). Nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với J(x), đối với các giá trị x lớn gần bằng

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

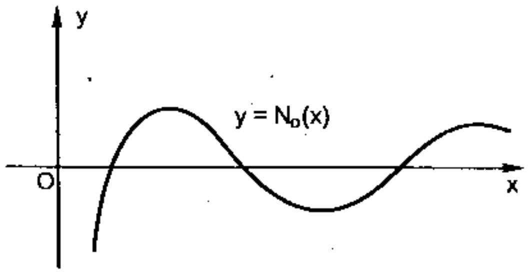
được kí hiệu qua $N_k(x)$ và được gọi là hàm Betsen hạng hai (hay hàm Nơman (Neumann) hạng k) nghĩa là

$$N_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + \varepsilon_2(x)\right] \qquad (4.44)$$

trong đó $\varepsilon_2(x) \to 0$ khi $x \to \infty$

Hình 31 cho ta đồ thị của hàm $N_o(x)$. Đặc tính cơ bản của các hàm Nơman là

$$\lim_{x\to 0}\left|N_k(x)\right| = \infty \qquad (4.45)$$



Hình 31

*3. Dao động của màng tròn

Ta trở lại bài toán dao động của màng tròn gắn chặt ở mép. Dao động của nó tuân theo phương trình (4.27)

$$u''_{tt} - a^2\left[\frac{1}{r}(ru'_r)'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\varphi\varphi}\right] = 0$$

và thoả mãn các điều kiện ban đầu (4.28)

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi),\ u'_t\big|_{t=0} = F(r, \varphi)$$

và điều kiện biên (4.26)

$$u\big|_{r=q} = 0$$

Nghiệm của nó có dạng sóng đứng

$$u = R(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$$

Hàm R(r) có thể biểu diễn qua các hàm Betsen.

Thật thế, vì hàm $R\left(\frac{x}{\nu}\right)$ phải thoả mãn phương trình Betsen nên

$$R\left(\frac{x}{\nu}\right) = c_1 J_k(x) + c_2 N_k(x)$$

Trong đó $J_k(x)$ và $N_k(x)$ là các hàm Betsen loại 1 và 2. Từ đó ta có

$$R(r) = c_1 J_k(\nu r) + c_2 N_k(\nu r)$$

nhưng theo (4.45)

$$\lim_{r \to 0} \left[N_k(\nu r)\right] = \infty$$

mà ở tâm của màng, R(r) vẫn phải hữu hạn cho nên hằng số c_2 phải bằng không, nghĩa là

$$R(r) = c_1 J(\nu r) \qquad (4.46)$$

Mặt khác theo điều kiện biên (4.26) $R(q) = 0$, nên

$$J_k(\nu q) = 0 \qquad (4.47)$$

còn nếu không, ngược lại mà $c_1 = 0$ thì $R(r) \equiv 0$ và $u \equiv 0$. Điều đó có nghĩa là νq phải là một trong các nghiệm của hàm $J_k(x)$, nghĩa là

$$\nu q = \xi_n^{(k)}, \quad n = 1, 2, 3...$$

Vậy hằng số ν xuất hiện khi tách biến không phải là tuỳ ý mà phải có một trong các giá trị

$$\nu = \frac{1}{q}\xi_n^{(k)}, \ n = 1, 2, 3...$$

Do đó, theo công thức (4.46)

$$R(r) = c_1 J_k\left(\frac{\xi_n^{(k)}}{q} r\right) \qquad (4.48)$$

hàm $\Phi(\varphi)$ có dạng

$$\Phi(\varphi) = D_1 \cos k\varphi + D_2 \sin k\varphi$$

còn hàm T(t) thoả mãn phương trình

$$T'' + v^2 a^2 T = 0$$

và có dạng $\qquad T''(t) = A\cos vat + B\sin vat$

Nhân ba hàm R, Φ, T với nhau, ta có

$$u = \left(AC_1 \cos\frac{\xi_n^{(k)} at}{q} + BC_1 \sin\frac{\xi_n^{(k)} at}{q}\right)(D_1 \cos k\varphi +$$

$$+ D_2 \sin k\varphi) J_k\left(\frac{\xi_k^{(n)}}{q} r\right) \qquad (4.49)$$

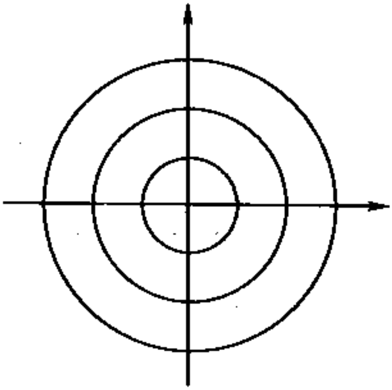
Các đường nút của sóng đứng này, thứ nhất là k đường kính, chia màng thành 2k hình quạt như nhau (dọc theo các bán kính này $D_1\cos k\varphi + D_2 \sin k\varphi = 0$) và thứ hai là (n − 1) vòng tròn đồng tâm (dọc theo các vòng tròn này)

$$J_k\left(\frac{\xi_n^{(k)}}{q} r\right) = 0,$$

nghĩa là $r_1 = q\dfrac{\xi_1^{(k)}}{\xi_n^{(k)}}$,

$$r_2 = q\frac{\xi_2^{(k)}}{\xi_n^{(k)}}, \dots\ r_{n-1} = \frac{\xi_{n-1}^{(k)}}{\xi_n^{(k)}}$$

Hình 32 cho ta các đường nút khi k = 1 và n = 3.



Hình 32

Một trường hợp quan trọng của dao động của màng tròn là có dạng sóng đứng không phụ thuộc vào φ nghĩa là $\Phi(\varphi)$ = hằng số. Dao động như vậy gọi là đối xứng trụ. Các điều kiện ban đầu bây giờ có dạng

$$u\big|_{t=0} = f(r)$$

$$u'_t\big|_{t=0} = F(r) \qquad (4.50)$$

trong trường hợp này phải đặt $k = 0$ và rút ra $\Phi(\varphi) = D_1$.

Do đó, sóng đứng đối xứng trụ có dạng

$$u = \left(AC_1D_1 \cos\frac{\xi_n^{(o)}at}{q} + BC_1D_1 \sin\frac{\xi_n^{(o)}at}{q} \right) J_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q} r \right)$$

Các hàm này chỉ phụ thuộc vào một chỉ số $n = 1, 2, \ldots$ và do đó ta kí hiệu

$$u_n = \left(\alpha_n \cos\frac{\xi_n^{(o)}at}{q} + \beta_n \sin\frac{\xi_n^{(o)}at}{q} \right) J_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q} r \right) \qquad (4.51)$$

Tần số âm cơ bản của màng tròn tương ứng với $n = 1$, nó bằng $\frac{\xi_1^{(o)}a}{q}$, trong đó $\xi_1^{(o)} = 2{,}405$ (H.30).

Vậy trong trường hợp đối xứng trụ, nghiệm sẽ có dạng chồng chập của các sóng đứng (4.51)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos\frac{\xi_n^{(o)}at}{q} + \beta_n \sin\frac{\xi_n^{(o)}at}{q} \right) J_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q} r \right) \qquad (4.52)$$

Các hệ số α_n và β_n được xác định từ các điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q} r \right) = f(r) \qquad 0 \le r < q \qquad (4.53)$$

$$u'_t\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^{(o)}}{q} \beta_n J_o\left(\frac{\xi_n^{(o)} r}{q} \right) = F(r) \qquad 0 \le r < q \qquad (4.54)$$

Ở đây, ta có các hệ thức khai triển của hàm f(r) và F(r) theo các hàm Betsen. Các hệ số khai triển có thể tìm được nhờ tính trực giao của hàm Betsen.

Ta có thể chứng minh được nếu $m \neq n$ thì

$$\int_0^q rJ_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q}\right) J_o\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q} r\right) dr = 0 \qquad (4.55)$$

Thật vậy, ta đã biết hàm $J_o(x)$ thoả mãn phương trình

$$J''_o(x) + \frac{1}{x} J'_o(x) + J_o(x) = 0$$

hay

$$\frac{d^2 J_o(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_o(x)}{dx} + J_o(x) = 0$$

Nếu đưa vào phương trình này λx và μx thay cho x với λ và μ là những hằng số bất kì, ta có

$$\frac{d^2 J_o(\lambda x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_o(\lambda x)}{dx} + \lambda^2 J_o(\lambda x) = 0$$

$$\frac{d^2 J_o(\mu x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_o(\mu x)}{dx} + \mu^2 J_o(\mu x) = 0$$

Nhân phương trình trên với $xJ_o(\mu x)$ và phương trình dưới với $xJ_o(\lambda x)$ rồi trừ cho nhau, ta được

$$x\left[J_o(\lambda x)\frac{d^2 J_o(\mu x)}{dx^2} - J_o(\mu x)\frac{d^2 J_o(\lambda x)}{dx^2}\right] +$$

$$+\left[J_o(\lambda x)\frac{dJ_o(\mu x)}{dx} - J_o(\mu x)\frac{dJ_o(\lambda x)}{dx}\right] +$$

$$+ (\mu^2 - \lambda^2) x J_o(\lambda x) J_o(\mu x) = 0$$

hay $$\frac{d}{dx}\left\{x\left[J_o(\lambda x)\frac{dJ_o(\mu x)}{dx} - J_o(\mu x)\frac{dJ_o(\lambda x)}{dx}\right]\right\} =$$
$$= (\lambda^2 - \mu^2)xJ_o(\lambda x)J_o(\mu x)$$

Từ đó, nếu thay giá trị của x bằng r và tích phân từ r = 0 đến r = q, ta tìm được là

$$q\left[J_o(\lambda q)\frac{dJ_o(\mu r)}{dr}\bigg|_{r=q} - J_o(\mu q)\frac{dJ_o(\lambda r)}{dr}\bigg|_{r=q}\right] =$$
$$= (\lambda^2 - \mu^2)\int_0^q rJ_o(\lambda r)J_o(\mu r)dr \qquad (4.56)$$

Nếu trong đẳng thức này ta lấy $\lambda = \frac{\xi_n^{(o)}}{q}$; $\mu = \frac{\xi_m^{(o)}}{q}$ trong đó $m \neq n$, và chú ý là

$$J_o(\xi_n^{(o)}) = J_o(\xi_m^{(o)}) = 0, \text{ thì ta có}$$

$$\frac{\xi_n^{(o)2} - \xi_m^{(o)2}}{q^2}\int_0^q rJ_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q}r\right)J_o\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q}r\right)dr = 0$$

bởi vì với $m \neq n$, $\xi_n^{(o)} \neq \xi_m^{(o)}$ nên đẳng thức (4.55) đã được chứng minh.

Trong công thức (4.56), nếu ta lấy $\mu = \frac{\xi_m^{(o)}}{q}$, còn λ vẫn để bất kì, thì ta sẽ có

$$\int_0^q rJ_o(\lambda r)J_o(\mu r)dr = q\,\frac{J_o(\lambda q)\frac{dJ_o(\mu r)}{dr}\Big|_{r=q}}{\lambda^2 - \mu^2}$$

Khi $\lambda \to \mu$, do $J_o(\mu q) = 0$, ta có

$$\frac{J_o(\lambda q)}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{J_o(\lambda q) - J_o(\mu q)}{\lambda - \mu}\,\frac{1}{\lambda + \mu} \to \frac{dJ_o(\lambda q)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\mu}\,\frac{1}{2\mu}$$

Vậy $$\int_0^q rJ_o^2(\mu r)dr = \lim_{\lambda\to\mu}\int_0^q rJ_o(\lambda r)J_o(\mu r)dr$$

$$= q\frac{dJ_o(\lambda q)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\mu}\frac{1}{2\mu}\frac{dJ_o(\mu r)}{dr}\bigg|_{r=q} = \frac{q^2}{2}J_o^2(\mu q)$$

Từ đó với m = n ta có

$$\int_0^q rJ_o^2\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q}r\right)dr = \frac{q^2}{2}J'_o\left(\xi_m^{(o)}\right) \qquad (4.57)$$

Bây giờ ta sử dụng các hệ thức (4.55) và (4.57) để tính α_n và β_n.

Nhân hai vế của (4.53) với $rJ_o\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q}r\right)$ và tích phân từ 0 đến q, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_0^q rJ_o\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q}r\right)J_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q}r\right)dr = \int_0^q f(r)rJ_o\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q}r\right)dr$$

Nhờ (4.55) và (4.57), ta có

$$\alpha_n\frac{q^2}{2}J'_o(\xi_m^{(o)}) = \int_0^q f(r)rJ_o\left(\frac{\xi_m^{(o)}}{q}r\right)dr$$

$$\alpha_n = \frac{2}{q^2J_o'^2(\xi_n^{(o)})}\int_0^q f(r)rJ_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q}r\right)dr \qquad (4.58)$$

Tượng tự, ta tính được hệ số β_n

$$\beta_n = \frac{2}{q\xi_n^{(o)}J_o'^2(\xi_n^{(o)})}\int_0^q F(r)rJ_o\left(\frac{\xi_n^{(o)}}{q}r\right)dr \qquad (4.59)$$

Thay α_n và β_n vừa tính được vào (4.52), ta có nghiệm cần tìm u(r, t).

Các hệ thức (4.53) và (4.54) có dạng giống như khai triển Furiê, vì vậy người ta gọi chúng là chuỗi Furiê – Betsen của các hàm f(r) và F(r) còn α_n và β_n được gọi là các hệ số Furiê – Betsen. Trong trường hợp không đối xứng trụ, cách làm cũng tương tự như trên nhưng ta thay chỉ số k = 0 bằng các chỉ số k nguyên, dương khác.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Ở thời điểm ban đầu t = 0, một màng vuông có dạng $u(x, y, 0) = Axy(l - x)(l - y)$, A = const. Màng dao động không có vận tốc ban đầu. Hãy nghiên cứu dao động tự do của màng gắn chặt theo chu tuyến.

Đáp số :

$$u(x, y, t) = \frac{64Al^4}{\pi^5} \sum_{m=n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{2n+1}{l}\pi x \sin\frac{2m+1}{l}\pi y}{(2n+1)^3(2m+1)^3} \times$$

$$\times \cos\sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2}\ \frac{\pi a t}{l}$$

2. Tìm nghiệm của phương trình sau bằng phương pháp tách biến

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = Ax(l - x),\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

và các điều kiện biên

$$u(0,\, t) = 0,\; u(l,\, t) = 0,\; \frac{\partial^2 u(0,\, t)}{\partial x^2} = 0,\; \frac{\partial^2 u(l,\, t)}{\partial x^2} = 0$$

Đáp số : $$u(x,\, t) = \frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\times$$

$$\times\cos\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}$$

3. Chứng minh rằng $J_1(x) = -J'_o(x)$ (vi phân từng số hạng của chuỗi luỹ thừa đối với $J_o(x)$). Dựng đồ thị của $J_1(x)$.

4. Chứng minh rằng

$$\int_0^x \xi J_o(\xi)d\xi = xJ_1(x)$$

$$\int_0^x \xi^3 J_o(\xi)d\xi = 2x^2 J_o(x) + (x^4 - 4x)J_1'(x)$$

Chương V

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

§1. THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Xét một môi trường truyền nhiệt đẳng hướng, $u(x, y, z, t)$ là nhiệt độ của nó tại điểm $p(x, y, z)$ ở thời điểm t. Sự truyền nhiệt tuân theo định luật Furiê : Nhiệt lượng ΔQ đi qua một mảnh mặt kín bất kì ΔS theo phương pháp tuyến $\vec{n}$ trong thời gian Δt tỉ lệ với ΔS, Δt và đạo hàm pháp tuyến $\frac{\partial u}{\partial n}$.

$$\Delta Q = -k(x, y, z)\Delta t\, \Delta S\, \frac{\partial u}{\partial n} \qquad (*)$$

trong đó k là hệ số truyền nhiệt, không phụ thuộc vào hướng của pháp tuyến vì môi trường là đẳng hướng và ta thường coi là hằng số, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của ΔS hướng theo chiều giảm của nhiệt độ.

Bây giờ ta xét một vật thể tuỳ ý V giới hạn bởi một mặt kín trơn S và xét sự biến thiên nhiệt lượng trong thể tích đó từ thời điểm t_1 đến t_2. Từ (*) ta suy ra nhiệt lượng truyền vào trong mặt S từ thời điểm t_1 đến t_2 là

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \oint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n} dS$$

trong đó $\bar{n}$ là vectơ pháp tuyến hướng vào bên trong của mặt S. Áp dụng định lí Ôtxtrôgratxki để chuyển từ tích phân mặt sang tích phân ba lớp và coi k là hằng số, ta có

$$Q_1 = k\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \text{divgrad}u \, dV$$

vì ta có $$\text{divgrad}u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

nên $$Q_1 = k\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \Delta u dV$$

Giả sử trong vùng V có nguồn nhiệt có mật độ là g(x, y, z, t) (nghĩa là nhiệt lượng sinh ra hoặc mất đi trong một đơn vị thể tích sau một đơn vị thời gian), thì từ thời điểm t_1 đến t_2, trong thể tích V xuất hiện một nhiệt lượng là

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V g dV$$

Mặt khác nhiệt lượng cần cho thể tích V thay đổi từ $u(x, y, z, t_1)$ đến $u(x, y, z, t_2)$ là

$$Q_3 = \int_V \left[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)\right] c(x, y, z)\rho(x, y, z) dV$$

trong đó c là nhiệt dung, ρ là mật độ của môi trường.

Tính chính xác đến các đại lượng nhỏ so với ΔV, ta có

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Vậy

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

Nhiệt lượng này phải bằng $Q_1 + Q_2$, vậy

$$Q_3 - Q_1 - Q_2 = 0$$

hay
$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - g\right] dx\,dy\,dz = 0$$

Vì khoảng thời gian là bất kì nên

$$\int_V (c\rho u'_t - k\Delta u - g) dx\,dy\,dz = 0$$

Đồng thời vùng V cũng là tuỳ ý nên ở một điểm bất kì của môi trường, ta phải có đẳng thức

$$c\rho u'_t - k\Delta u - g = 0$$

hay
$$u'_t - a^2(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) = \frac{1}{c\rho} g(x, y, z, t) \qquad (5.1)$$

trong đó $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$.

Phương trình (5.1) gọi là *phương trình truyền nhiệt*, nghiệm $u = u(x, y, z, t)$ của phương trình này mô tả sự phân bố nhiệt độ trong môi trường truyền nhiệt.

Nếu $g \equiv 0$, ta có phương trình truyền nhiệt thuần nhất. Ngược lại, phương trình là không thuần nhất.

§2. BÀI TOÁN CÔSI ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT MỘT CHIỀU TRONG THANH DÀI VÔ HẠN

Ta hãy xét sự phân bố nhiệt độ trong một thanh rất mảnh nằm dọc theo trục x, do đó nhiệt độ ở mỗi tiết diện của thanh có thể coi như là hàm của x và t : u = u(x, t). Giả sử các mặt bên của thanh là cách nhiệt. Khi đó phương trình (5.1) có dạng

$$u'_t - a^2u''_{xx} = \frac{1}{c\rho}g(x, t) \tag{5.2}$$

trong đó $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. Giả sử các hệ số k, c và ρ là các hằng số, chúng quan hệ với một đơn vị dài của thanh. (5.2) là phương trình truyền nhiệt một chiều.

Bây giờ ta mô tả bài toán Côsi : tìm hàm u thoả mãn phương trình

$$u'_t - a^2u''_{xx} = 0 \tag{5.3}$$

và điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=0} = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{5.4}$$

(điều kiện này cho ta sự phân bố nhiệt độ ở thời điểm ban đầu t = 0).

Ta sẽ tìm nghiệm bằng phương pháp Furiê.

Đặt u = X(x) T(t), ta có

$$u'_t = XT', \qquad u''_{xx} = X''T$$

do đó $XT' - a^2X''T = 0$

hay

$$\frac{T'}{T} = a^2\frac{X''}{X}$$

Từ đó ta có

$$\frac{X''}{X} = b = \text{const}\,,\ \frac{T'}{T} = a^2 b$$

nghĩa là

$$T = Ae^{a^2 bt}$$

Vì tại mỗi điểm của thanh, nhiệt độ không thể tăng lên đến vô cùng khi $t \to +\infty$, nên b phải là âm : $b = -\lambda^2$. Do đó

$$T = Ae^{-a^2\lambda^2 t}$$

$$X = B\cos\lambda x + C\sin\lambda x$$

Vậy

$$u = (A.B\cos\lambda x + A.C\sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

Trong đó các hằng số A.B và A.C có thể phụ thuộc vào λ :

$$A.B = M(\lambda)\ ;\ A.C = N(\lambda)$$

Nghiệm của phương trình (5.3) có dạng

$$u_\lambda(x,\ t) = [M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x]\,e^{-a^2\lambda^2 t} \qquad (5.5)$$

Do không có điều kiện biên (thanh vô hạn), λ có thể lấy các giá trị bất kì từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó thay cho tổng, chúng ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tích phân theo λ

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x,\ t)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x]\,e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda \qquad (5.6)$$

Dễ dàng thấy rằng, hàm u cho bởi (5.6) là nghiệm riêng của phương trình (5.3), nếu tích phân suy rộng đó là hội tụ và có thể lấy đạo hàm biểu thức dưới dấu tích phân theo x và t.

$$u'_t = -a^2\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} [M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x] e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda$$

$$u''_{xx} = -\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} [M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x] e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda$$

nghĩa là $u'_t - a^2 u''_{xx} = 0$.

Ta chọn $M(\lambda)$ và $N(\lambda)$, sao cho hàm (5.6) thoả mãn điều kiện ban đầu (5.4)

$$u\big|_{t=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x] d\lambda$$

So sánh với khai triển Furiê của hàm f(x) (xem Phụ lục), ta có

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi \;;\; N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi$$

Thay vào (5.6), ta được :

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\right] e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda \qquad (5.7)$$

Đổi thứ tự tích phân, ta được

$$u(x,\, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda\right] d\xi \qquad (5.8)$$

Để tính tích phân bên trong dấu móc, ta đặt $a^2t = p$, $\xi - x = q$, ta đi đến tích phân

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\lambda^2}\cos q\lambda d\lambda = K(p, q)$$

Lấy đạo hàm hai vế theo q, ta được

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-p\lambda^2}\sin q\lambda d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2p}\frac{\partial}{\partial\lambda}(e^{-p\lambda^2}) \times \sin q\lambda d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2p}e^{-p\lambda^2}\sin q\lambda \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi}\frac{q}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\lambda^2}\cos q\lambda d\lambda$$

$$= \frac{q}{2p}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\lambda^2}\cos q\lambda d\lambda = -\frac{q}{2p}K(p, q)$$

Do đó $$\frac{\partial K}{\partial q} + \frac{q}{2p}K(p, q) = 0$$

Vậy $$K(p, q) = Ce^{-q^2/4p}$$

Trong đó C là hằng số đối với q, C = K(p, 0). Nhưng

$$K(p, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\lambda^2}d\lambda = \frac{1}{2\pi\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha$$

với $\alpha = \sqrt{p}\,\lambda$. Theo công thức tích phân Poátxông (Poisson), ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha = \sqrt{\pi} \qquad (5.9)$$

Do đó $C = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi p}}$ và

$$K(p,\ q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} e^{-q^2/4p}$$

Trở lại biến số cũ và đặt K(p, q) = U(x, t ; ξ), ta có

$$U(x,\ t\ ;\ \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\xi - x) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \qquad (5.10)$$

Thay vào (5.8) ta được

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) U(x,\ t\ ;\ \xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi \qquad (5.11)$$

§3. Ý NGHĨA VẬT LÍ CỦA NGHIỆM CƠ BẢN HÀM ĐENTA (DELTA)

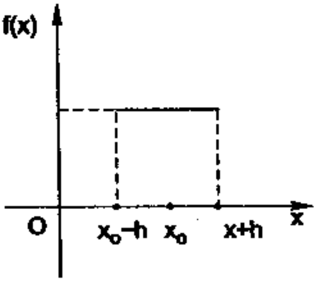
Giả sử phân bố nhiệt độ ban đầu có dạng như hình 33 nghĩa là

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} \text{ nếu } |x - x_o| < h \\ 0 \quad \text{nếu } |x - x_o| > h \end{cases}$$

khi đó phân bố nhiệt độ trong thanh có dạng

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)U(x, t ; \xi)\, d\xi = \frac{1}{2h}\int_{x_o-h}^{x_o+h} U(x, t ; \xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2h}U(x, t ; \overline{\xi})\int_{x_o-h}^{x_o+h} d\xi = U(x, t ; \overline{\xi})$$



Hình 33

Ở đây ta đã áp dụng định lí trung bình tích phân, với $\overline{\xi}$ là một điểm nào đó trong khoảng $x_o - h$ đến $x_o + h$: $x_o - h < \overline{\xi} < x_o + h$ (H.33). Chuyển giới hạn khi $h \to 0$, $\overline{\xi}$ sẽ tiến đến x_o, ta có $u(x, t) = U(x, t ; x_o)$.

Vậy nghiệm (5.10) cho ta phân bố nhiệt ở thời điểm $t > 0$, nếu ở thời điểm $t = 0$ ta có nguồn nhiệt điểm tức thời ở điểm x_o. Phân bố nhiệt như vậy được gọi là phân bố theo hàm đenta, kí hiệu là $\delta(x - x_o)$, được định nghĩa như sau :

a) $\delta(x - x_o) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq x_o \\ +\infty & \text{nếu } x = x_o \end{cases}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_o)dx = 1$ (xem phụ lục IV)

Về mặt vật lí, phân bố nhiệt độ $f(x) = \delta(x - x_o)$ có thể thực hiện như sau : ở thời điểm $t = 0$, ta tăng nhiệt độ ở lân cận x_o lên rất cao.

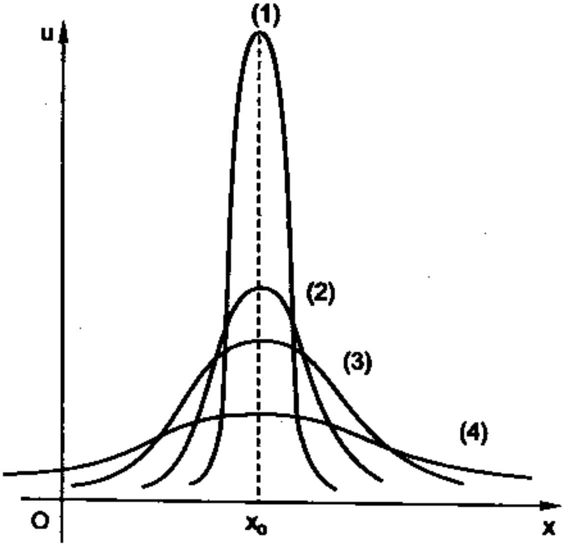
Từ định nghĩa hàm đenta, ta suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x)$$

Hàm $U(x, t ; x_o)$ được gọi là *hàm nguồn*. Đồ thị của nó với giá trị khác nhau của t trên hình 34, các đường cong (1), (2), (3), (4) tương ứng với các thời điểm $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Ta cũng có

$$U(x, t ; x_o)dx = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4a^2t}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1$$

trong đó $\alpha = \dfrac{x - x_o}{2a\sqrt{t}}$.



Hình 34

Điều đó có nghĩa là diện tích nằm dưới các đường cong $y = U(x, t ; x_o)$ bằng 1.

Hình 34 biểu diễn sự cân bằng nhiệt độ trong thanh sau xung lượng nhiệt.

Tương tự như trên, sự truyền nhiệt trong bản mỏng rộng vô hạn đặt trên mặt phẳng x, y thoả mãn phương trình

$$u'_t - a^2(u''_{xx} + u''_{yy}) = 0$$

và điều kiện ban đầu

$$u\Big|_{t=0} = f(x, y)$$

Nghiệm của bài toán Côsi có dạng

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, U(x, t ; \xi)\, U(y, t ; \eta)\, d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta$$

Bài toán tương ứng trong không gian ba chiều là

$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) = 0$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x, y, z)$$

có nghiệm

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, U(x, t ; \xi)\, U(y, t ; \eta)$$

$$U(z, t ; \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}} \times d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Trong phương trình truyền nhiệt, hệ số a chính là vận tốc truyền nhiệt : $a = \sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$, nhiệt độ trong thanh cân bằng càng nhanh nếu hệ số truyền nhiệt trong thanh càng lớn và nhiệt dung c càng nhỏ.

§4. PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT KHÔNG THUẦN NHẤT

Xét sự truyền nhiệt trong thanh mảnh dài vô hạn, có nguồn nhiệt. Phương trình mô tả quá trình này là

$$u'_t - a^2 u''_{xx} = \frac{1}{c\rho} g(x, t) \qquad (5.12)$$

$$u\big|_{t=0} = f(x) \qquad (5.13)$$

Ta biểu diễn hàm $\dfrac{1}{c\rho} g(x, t)$ dưới dạng tích phân Furiê

$$\frac{1}{c\rho} g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[P(\lambda, t)\cos\lambda x + Q(\lambda, t)\sin\lambda x\right] d\lambda \qquad (5.14)$$

trong đó

$$\begin{cases} P(\lambda, t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{c\rho}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t)\cos\lambda\xi d\xi \\ Q(\lambda, t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{c\rho}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t)\sin\lambda\xi d\xi \end{cases} \qquad (5.15)$$

Ta tìm hàm u dưới dạng

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \left[M(\lambda, t)\cos\lambda x + N(\lambda, t)\sin\lambda x\right] d\lambda \tag{5.16}$$

Thay hàm (5.16) vào phương trình (5.12), ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\left[M'_t(\lambda, t) + a^2\lambda^2 M(\lambda, t)\right]\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left[N'_t(\lambda, t) + a^2\lambda^2 N(\lambda, t)\right]\sin\lambda x\right\} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[P(\lambda, t)\cos\lambda x + Q(\lambda, t)\sin\lambda x\right] d\lambda$$

Đẳng thức này phải thoả mãn với tất cả các λ và $t \geq 0$ nên

$$M_t' + a^2\lambda^2 M = P(\lambda, t),\ \ N_t' + a^2\lambda^2 N = Q(\lambda, t) \tag{5.17}$$

Mặt khác (5.16) phải thoả mãn điều kiện ban đầu (5.13) nên

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[M(\lambda, 0)\cos\lambda x + N(\lambda, 0)\sin\lambda x\right] d\lambda$$

nghĩa là

$$M(\lambda, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi$$

$$N(\lambda, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi \tag{5.18}$$

Từ các phương trình vi phân thông thường (5.17) và các điều kiện ban đầu (5.18), ta tìm được

$$M(\lambda, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\int_0^t P(\lambda, s)e^{a^2\lambda^2 s}ds + M(\lambda, 0)\right] =$$

$$= \int_0^t P(\lambda, s)e^{-a^2\lambda^2(t-s)}ds + M(\lambda, 0)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

$$N(\lambda, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\int_0^t Q(\lambda, s)e^{a^2\lambda^2 s}ds + N(\lambda, 0)\right] =$$

$$= \int_0^t Q(\lambda, s)e^{-a^2\lambda^2(t-s)}ds + N(\lambda, 0)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

Thay vào công thức (5.16) và chú ý đến (5.15) ta có

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[M(\lambda, 0)\cos\lambda x + N(\lambda, 0)\sin\lambda x\right]e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^t [P(\lambda, s)\cos\lambda x + Q(\lambda, s)\sin\lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2(t-s)}ds\right\}d\lambda$$

Số hạng thứ nhất tương ứng với nghiệm (5.6) và do đó tương ứng với nghiệm (5.10) của phương trình thuần nhất. Vì vậy, ta có

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)U(x, t\,;\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[P(\lambda, s)\cos\lambda x + Q(\lambda, s)\sin\lambda x]e^{-a^2\lambda^2(t-s)}d\lambda\right\}ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)U(x, t ; \xi)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c\rho}\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, s)\, U(x, t-s ; \xi)d\xi\right] ds \qquad (5.19)$$

trong khi tính toán, ta đã sử dụng công thức (5.10).

Thay đổi thứ tự tích phân trong tích phân thứ hai của (5.19), ta có

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, U(x, t; \xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c\rho}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t)_t * U(x, t; \xi)\, d\xi \qquad (5.20)$$

trong đó $g(\xi, t)_t * U(x, t ; \xi)$ kí hiệu tích chập của các hàm g và U theo t với định nghĩa

$$\int_0^t A(s)\, B(t-s)ds = \int_0^t A(t-s)\, B(s)ds$$

Công thức (5.20) chứng tỏ rằng nghiệm của phương trình không thuần nhất là tổng của nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, U(x, t; \xi)d\xi \qquad (5.21)$$

thoả mãn điều kiện ban đầu (5.13) và nghiệm của phương trình không thuần nhất

$$\frac{1}{c\rho}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t)_t * U(u, t ; \xi)d\xi \qquad (5.22)$$

thoả mãn điều kiện ban đầu không.

Vậy nhiệt độ u là được cộng từ nhiệt độ (5.21) do sự có mặt của nhiệt độ ban đầu f(x), nhưng không có nguồn nhiệt trong thanh và nhiệt độ (5.22) do sự có mặt của nguồn nhiệt g(x, t), nhưng nhiệt độ ban đầu bằng không.

§5. SỰ TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH HỮU HẠN

Ta xét sự phân bố nhiệt trong thanh hữu hạn đặt trên đoạn (O, l) của trục x, nghĩa là ta phải giải phương trình

$$u'_t - a^2 u''_{xx} = \frac{1}{c\rho} g(x, t) \qquad (5.23)$$

và điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=0} = f(x) \quad (0 < x < l) \qquad (5.24)$$

Giả sử các mặt bên của thanh là cách nhiệt còn ở hai đầu $x = 0$ và $x = l$ có sự trao đổi nhiệt với môi trường ngoài.

Gọi h là hệ số truyền nhiệt ngoài thì nhiệt lượng truyền qua một đơn vị diện tích mặt tiếp xúc vào môi trường tại các đầu $x = 0$ và $x = l$ là

$$h_o(u\big|_{x=0} - u_o^*) \text{ và } h_l(u\big|_{x=l} - u_l^*)$$

trong đó u_o^* và u_l^* là nhiệt độ của môi trường ở tại các điểm tiếp xúc với các đầu mút. Nhiệt lượng này phải bằng dòng nhiệt đi qua một đơn vị diện tích của mặt tiếp xúc tương ứng, nghĩa là $-k\frac{\partial u}{\partial n}$. Tại $x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, bởi vì pháp tuyến ngoài ở mút x = 0 hướng theo chiều âm của trục Ox và tương ứng tại $x = l$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Vậy ta có các điều kiện biên là

$$\begin{cases} h_o(u|_{x=0} - u_o^*) = ku'_x|_{x=0} \\ h_l(u|_{x=l} - u_l^*) = -ku'_x|_{x=l} \end{cases} \tag{5.25}$$

Nếu các đầu mút của thanh là cách nhiệt thì hệ số truyền nhiệt ngoài bằng không h = 0. Nếu các đầu mút của thanh luôn luôn được giữ ở nhiệt độ bằng nhiệt độ của môi trường ngoài thì

$$u|_{x=0} = u_o^* \text{ và } u|_{x=l} = u_l^*$$

Điều kiện này có thể nhận được từ điều kiện (5.25) nếu hệ số truyền nhiệt ngoài h tiến đến ∞.

Ta sẽ giải bài toán hỗn hợp này với điều kiện ban đầu (5.24) và các điều kiện biên (5.25) bằng phương pháp tách biến Furiê. Tuy nhiên để đơn giản bài toán, ta coi thanh là cách nhiệt tại đầu x = 0, nghĩa là $h_o = 0$ và kí hiệu $h_l = h$. Vậy các điều kiện biên của bài toán bây giờ có dạng

$$\begin{cases} u'_x|_{x=0} = 0 \\ h(u|_{x=l} - u_l^*) = -ku'_x|_{x=l} \end{cases} \tag{5.26}$$

Trước tiên ta chuyển bài toán thành trường hợp có điều kiện biên đồng nhất. Muốn vậy ta đưa vào hàm mới $u_1(x, t)$

$$u_1(x, t) = u(x, t) - u_l^*$$

Ta có $u'_{lx} = u'_x$, vì u_l^* chỉ là hàm của t và

$$u_1|_{x=l} = u|_{x=l} - u_l^*$$

Vậy ta có điều kiện biên sau đối với hàm u_1

$$\begin{cases} u'_{1x}\big|_{x=0} = 0 \\ hu_{1x}\big|_{x=l} = -ku'_{1x}\big|_{x=l} \end{cases} \tag{5.27}$$

Thay u_1 vào phương trình (5.12), ta có

$$u'_{1t} - a^2u''_{1xx} = \frac{1}{c\rho}g(x, t) + \frac{du_l^*}{dt} = G(x, t) \tag{5.28}$$

còn điều kiện ban đầu (5.13) có dạng

$$u_1\big|_{t=0} = f(x) - u_l^*\big|_{t=0} = f_1(x) \tag{5.29}$$

Bây giờ ta xét phương trình thuần nhất

$$u'_{1t} - a^2u''_{1xx} = 0 \tag{5.30}$$

Giống như trong §2, dùng phương pháp tách biến, ta có

$$u_{1t} = T(t)X(x) = e^{-a^2\lambda^2 t}[M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x]$$

trong đó λ, $M(\lambda)$ và $N(\lambda)$ là các hằng số đối với x và t. Ta cho hàm

$$X(x) = M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x$$

thoả mãn điều kiện biên (5.27). Từ đó rút ra

$$N(\lambda) = 0$$

$$hM(\lambda)\cos\lambda l = k\lambda M(\lambda)\sin\lambda l$$

$$M(\lambda)(h\cos\lambda l - k\lambda\sin\lambda l) = 0$$

Nếu $M(\lambda) = 0$ thì ta sẽ có $X(x) \equiv 0$. Vậy ta phải có

$$h\cos\lambda l - k\lambda\sin\lambda l = 0$$

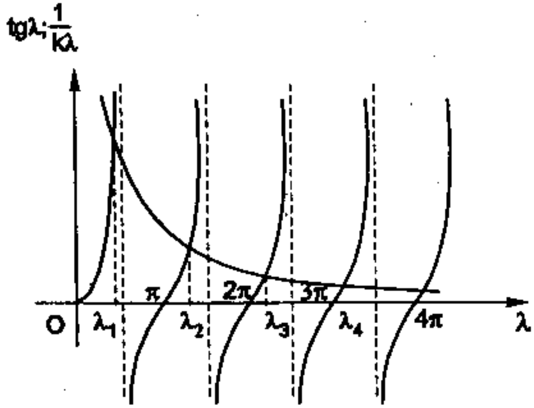
$$\mathrm{tg}\lambda l = \frac{h}{k\lambda} \tag{5.31}$$

điều kiện này chứng tỏ rằng hàm

$$X(x) = M(\lambda)\cos\lambda x$$

thoả mãn các điều kiện biên (5.27) chỉ đối với các giá trị của λ thoả mãn phương trình (5.31). Phương trình siêu việt này có một tập hợp vô số các nghiệm (H.35) và ta chỉ xét các nghiệm dương là đủ vì $\cos(-\lambda)x = \cos\lambda x$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$



Hình 35

Các nghiệm này đều là các nghiệm đơn và đối với các số n lớn, chúng gần bằng $(n-1)\pi$ nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1} - n\pi) = 0$$

Thành thử nếu kí hiệu $M(\lambda_n)$ qua M_n ta có

$$X_n(x) = M_n\cos\lambda_n x$$

hàm này thoả mãn điều kiện biên (5.27). Vậy hàm

$$e^{-a^2\lambda_n^2 t}X_n(x) = e^{-a^2\lambda_n^2 t}M_n\cos(\lambda_n x)$$

cũng thoả mãn điều kiện biên (5.27) và phương trình thuần nhất (5.30).

Bây giờ theo phương pháp tách biến, ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.28) dưới dạng

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \lambda_n (x) \qquad (5.32)$$

Ở đây ta thay hàm $M_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}$ bằng hàm chưa biết $T_n(t)$ (tương tự như khi giải phương trình dao động của dây không thuần nhất). Nếu thay thế hàm (5.32) vào phương trình (5.28) và điều kiện ban đầu (5.29) ta có đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n' + a^2\lambda_n^2 T_n) \cos \lambda_n x = G(x, t) \qquad (5.33)$$

và
$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \lambda_n x = f_1(x) \qquad (5.34)$$

Thành thử ta phải khai triển $f_1(x)$ và $G(x, t)$ thành chuỗi Furiê

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \lambda_n x \qquad (5.35)$$

So sánh với đẳng thức (5.34), ta có

$$T_n(0) = \alpha_n \qquad (5.36)$$

Để xác định α_n, ta nhân hai vế của chuỗi (5.35) với $\cos\lambda_m x$ và tích phân theo x từ 0 đến l, ta được

$$\int_0^l f_1(x) \cos \lambda_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^l \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx \qquad (5.37)$$

Tích phân theo từng phần, ta có

$$\int_0^l \cos\lambda_n x\cos\lambda_m x dx = \frac{1}{\lambda_m}\cos\lambda_n x\sin\lambda_m x\Big|_0^l +$$

$$+\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\int_0^l \sin\lambda_n x\sin\lambda_m x dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_m}\cos\lambda_n l\sin\lambda_m l + \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\left[-\frac{1}{\lambda_m}\sin\lambda_n x\cos\lambda_m x\Big|_0^l +\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\int_0^l \cos\lambda_n x\cos\lambda_m x dx\right] = \frac{1}{\lambda_m}\cos\lambda_n l\sin\lambda_m l -$$

$$-\frac{\lambda_n}{\lambda_m^2}\sin\lambda_n l\cos\lambda_m l + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\int_0^l \cos\lambda_n x\cos\lambda_m x dx$$

Từ đó ta rút ra

$$\left(1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\right)\int_0^l \cos\lambda_n x\cos\lambda_m x dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_m^2}\cos\lambda_n x\cos\lambda_m x \,.\, (\lambda_m tg\lambda_m l - \lambda_n tg\lambda_n l) = 0 \qquad (5.38)$$

Theo phương trình (5.31), ta có

$$\lambda_m tg\lambda_m l = \lambda_n tg\lambda_n l = \frac{h}{k}$$

Do đó, nếu $n \neq m$, nghĩa là $\lambda_n \neq \lambda_m$, thì ta có

$$\int_0^l \cos\lambda_n x\cos\lambda_m x dx = 0 \qquad n \neq m \qquad (5.39)$$

Có nghĩa là các hàm riêng $X_n = \cos\lambda_n x$ của bài toán biên $X'' + \lambda^2 X = 0$ và $X'(0) = 0$, $hX(l) = -kX'(l)$ là trực giao trên khoảng $(0, l)$.

Nếu $\lambda_m = \lambda_n$ thì

$$\int_0^l \cos^2 \lambda_m x dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1 + \cos 2\lambda_m x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2\lambda_m}\sin 2\lambda_m l\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2\lambda_m}\frac{2\mathrm{tg}\lambda_m l}{1 + \mathrm{tg}^2\lambda_m l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{\lambda_m}\frac{\dfrac{h}{k\lambda_m}}{1 + \dfrac{h^2}{k^2\lambda_m^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{hk}{k^2\lambda_m^2 + h^2}\right) \tag{5.40}$$

Thay (5.39), (5.40) vào (5.36), ta có

$$\alpha_n = \frac{2}{l + \dfrac{hk}{k^2\lambda_m^2 + h^2}}\int_0^l f_1(x)\cos\lambda_n x dx \tag{5.41}$$

Bây giờ ta khai triển $G(x, t)$ thành chuỗi theo $\cos\lambda_n x$

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(t)\cos\lambda_n x \tag{5.42}$$

Theo công thức (5.41), ta có

$$\gamma_n(t) = \frac{2}{l + \dfrac{hk}{k^2\lambda_n^2 + h^2}}\int_0^l G(x, t)\cos\lambda_n x dx \tag{5.43}$$

Do đó, đẳng thức (5.33) có dạng

$$T'_n + a^2\lambda_n^2 T_n = \gamma_n(t) \qquad n = 1, 2,... \tag{5.44}$$

Điều kiện ban đầu của phương trình này là (5.36)

$$T_n(0) = \alpha_n$$

với α_n được tính từ (5.41).

Phương trình (5.44) với điều kiện ban đầu (5.36) hoàn toàn xác định hàm $T_n(t)$. Tìm được $T_n(t)$ chúng ta sẽ có nghiệm của phương trình cần tìm (5.32).

Ví dụ 1 : Tìm phân bố nhiệt độ trong một thanh đồng chất có đầu mút x = 0, cách nhiệt. Nhiệt độ môi trường u_l^* tiếp xúc với đầu mút $x = l$ giả sử bằng không. Nhiệt độ ban đầu trong thanh không đổi $f(x) = u_o$ = const và trong thanh không có nguồn nhiệt $g(x, t) = 0$.

Ta phải tìm nghiệm của phương trình thuần nhất

$$u'_t - a^2 u''_{xx} = 0$$

với điều kiện ban đầu $u\big|_{t=0} = u_o$

và điều kiện biên đồng nhất

$$u'_x\big|_{x=0} = 0 \; ; \; hu\big|_{x=l} = -ku'_x\big|_{x=l}$$

Như trên đã trình bày, ta có

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\lambda_n x$$

trong đó

$$T'_n + a^2\lambda_n^2 T_n = 0 \qquad T_n(0) = \alpha_n \tag{5.45}$$

với α_n là hệ số của khai triển u_o theo chuỗi của $\cos\lambda_n x$

$$u_o = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\lambda_n x \qquad 0 < x < l$$

Vậy

$$\alpha_n = \frac{2}{l + \dfrac{hk}{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \int_0^l u_o \cos\lambda_n x dx =$$

$$= \frac{2u_o}{l + \dfrac{hk}{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \frac{\sin\lambda_n l}{\lambda_n} \qquad (5.46)$$

Ta hãy tính $\sin\lambda_n l$. Bởi vì nghiệm λ_n nằm giữa $(n-1)\dfrac{\pi}{l}$ và $\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{l}$ (H.35) nên $\sin\lambda_n l$ dương đối với n lẻ n = 1, 3, 5... và âm đối với n chẵn n = 2, 4, 6,... Do đó

$$\sin\lambda_n l = (-1)^{n-1} \frac{tg\lambda_n l}{\sqrt{1 + tg^2\lambda l}} = (-1)^{n-1} \frac{\dfrac{h}{k\lambda_n}}{\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{k^2\lambda_n^2}}} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{h}{\sqrt{k^2\lambda_n^2 + h^2}}.$$

Từ (5.45), ta tìm được

$$T_n(t) = \alpha_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} = (-1)^{n-1} \frac{2u_o}{l + \dfrac{hk}{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \frac{he^{-a^2\lambda_n^2 t}}{\lambda_n\sqrt{k^2\lambda_n^2 + h^2}}$$

do đó

$$u = u_o \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{l + \dfrac{hk}{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \frac{he^{-a^2\lambda_n^2 t}}{\lambda_n\sqrt{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \cos\lambda_n x$$

Ta thấy rằng, nếu h = 0 thì cả hai đầu của thanh là cách nhiệt và nghiệm của bài toán là $u = u_o$ đối với mọi $t \geq 0$. Về mặt vật lí kết quả này là hiển nhiên. Nhưng về mặt toán học thì cần chú ý là khi $h \to 0$ ta có $\lambda_1 \to 0$ (H.35). Ta phải tính giá trị của các α_n khi $h \to 0$. Ta có $\lim\limits_{h\to 0} \alpha_1 \to u_o$

Còn $$\lim_{h\to 0} \alpha_n \to 0 \qquad n = 2, 3...$$

Ví dụ 2 : Ta hãy xét sự phân bố nhiệt trong một thanh có đầu mút x = 0 cách nhiệt, còn đầu mút $x = l$ luôn luôn giữ ở nhiệt độ bằng 0. Ở thời điểm t = 0, tất cả các điểm của thanh được nâng lên nhiệt độ u_o = const. Không có nguồn nhiệt trong thanh.

Điều kiện ban đầu giống như bài toán trên

$$u\big|_{t=0} = u_o$$

Điều kiện biên

$$u'_x\big|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = 0$$

Do đó trong nghiệm

$$e^{-a^2\lambda^2 t}\left[M(\lambda)\cos\lambda x + N(\lambda)\sin\lambda x\right]$$

ta phải đặt $N(\lambda) = 0$ để thoả mãn điều kiện biên và $\cos\lambda l = 0$ nghĩa là

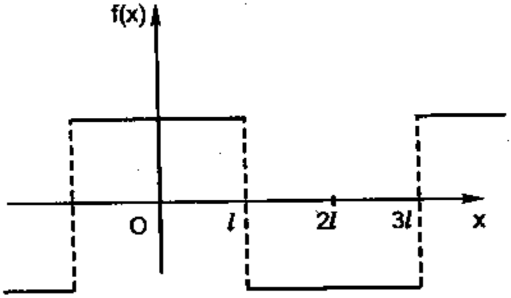
$$\lambda = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \qquad n = 1, 2, 3...$$

Như trong lí thuyết, ta kí hiệu $M(\lambda_n) = M_n$, ta có

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

Từ điều kiện ban đầu $u\big|_{t=0} = u_o$, nghĩa là

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\cos(2n-1)\pi x}{2l} = u_o \qquad (0 < x < l)$$



Hình 36

Để tính M_n, ta khai triển theo côsin một hàm chẵn bằng $-u_o$ trên quãng $(l, 2l)$, bằng u_o trên quãng $(0, l)$ và có chu kì là $4l$, (H.36). Khai triển hàm này trên quãng $(0, l)$ sẽ đảm bảo cho điều kiện ban đầu trên được thoả mãn. Do đó

$$M_n = \frac{u_o}{2l}\int_0^l \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx - \frac{u_o}{2l}\int_l^{2l} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx =$$

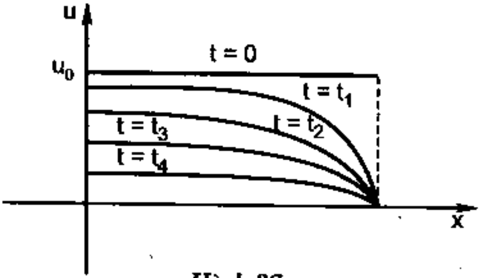
$$= (-1)^{n-1}\frac{4u_o}{(2n-1)\pi}$$

Nghiệm cần tìm có dạng

$$u = u_o \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \times$$

$$\times \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

Đồ thị của hàm này với các giá trị khác nhau liên tiếp $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ biểu diễn trên hình 37. Khi $t \to \infty$ nhiệt độ của tất cả các điểm của thanh tiến đến không.



Hình 37

Ta thấy rằng nghiệm của bài toán này có thể rút ra từ bài toán ở ví dụ 1 bằng cách cho $h \to \infty$. Thực vậy khi $h \to \infty$, $\lambda_n \to \frac{(2n-1)\pi}{2}$

$$\frac{2}{l + \frac{hk}{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \to \frac{2}{l} \frac{h}{\sqrt{k^2\lambda_n^2 + h^2}} \to 1$$

và nghiệm của bài toán ở ví dụ 1, trùng với nghiệm u ở bài toán này.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Tìm phân bố nhiệt độ ở thời điểm $t > 0$ trong một thanh đồng chất, có độ dài l, thành bên cách nhiệt, hai đầu được giữ ở nhiệt độ bằng không, phân bố nhiệt ban đầu có dạng

$$u(x, 0) = \frac{cx(l - x)}{l^2}$$

Đáp số :

$$u(x, t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(2n+1)^2\lambda^2 a^2}{l^2} t}}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

2. Xác định nhiệt độ ở mỗi điểm của một thanh bằng đồng chiều dài l = 100cm, có thành bên cách nhiệt, các đầu mút được giữ ở nhiệt độ bằng 0^o, nhiệt độ ban đầu

$$f(x) = 50^o \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Cho biết : $c = 0{,}094 \text{ kcal.g}^{-1}$

$h = 0{,}9 \text{ kcal.cm}^{-1} S^{+1}$

$\rho = 8{,}9 \text{g.cm}^{-3}$

Đáp số :

$$T(x, t) = 50^o e^{-0{,}004t} \sin \frac{2\pi x}{l}$$

3. Tìm định luật cân bằng nhiệt độ ban đầu

$T(x, 0) = A \sin \frac{x(l - x)}{l}$ trong một thanh, các đầu mút của nó cách nhiệt.

Đáp số : $T(x, t) = \frac{1}{l}\int_0^l T(x, 0)dx +$

$$+ \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}} \cos\frac{\pi n x}{l} \int_0^l T(x, 0) \cos\frac{n\pi x}{l} dx$$

(Thay T(x, 0) vào tiếp tục tính các tích phân).

4. Thiết lập phương trình truyền nhiệt một chiều có kể đến sự trao đổi nhiệt qua mặt bên của một thanh đồng chất

Đáp số : $$u'_t - a^2u''_{xx} - b^2(U - u) = g$$

trong đó $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, b là hệ số truyền nhiệt ngoài, U là nhiệt độ của môi trường ngoài, g là mật độ nguồn nhiệt trong thanh.

5. Tìm phân bố nhiệt độ trong thanh ở thời điểm $t > 0$, nếu hai đầu mút của thanh được giữ ở nhiệt độ bằng không. Ở thời điểm $t = 0$, thanh có nhiệt độ không đổi T_o.

Đáp số :

$$u(x, t) = \frac{4T_o}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}} \times \cos\frac{2n-1}{2l}\pi x$$

Chương VI

PHƯƠNG TRÌNH LAPLAXƠ

Trong chương này ta sẽ xét các quá trình sóng trong không gian, đặc biệt là sự phân bố dừng của chúng. Quá trình đó được mô tả bằng phương trình Laplaxơ. Nghiên cứu nghiệm của phương trình này bằng phương pháp tách biến ta sẽ gặp một số hàm đặc biệt như hàm cầu, đa thức Lơgiăngđrơ...

§1. THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình sóng đồng nhất ba chiều có dạng

$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) = 0$$

Phương trình truyền nhiệt trong một vật thể đồng chất có dạng

$$u'_t - a^2(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) = 0$$

Trong trường hợp khi hàm $u = u(x, y, z)$ không phụ thuộc vào t, nghĩa là $u'_t \equiv 0$ và $u''_{tt} \equiv 0$ ta có phương trình Laplaxơ

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$$

hay

$$\Delta u = 0$$

Phương trình này mô tả các hiện tượng dừng nghĩa là các trạng thái không thay đổi theo thời gian. Chẳng hạn như phân bố dừng của nhiệt độ trong vật thể, hay trường mật độ dừng trong chất khí, đều thoả mãn phương trình $\Delta u = 0$.

Bây giờ ta hãy xét điều kiện biên đối với bài toán truyền nhiệt dừng. Sự phân bố nhiệt dừng bên trong vật thể đồng chất thoả mãn phương trình Laplaxơ

$$\Delta u = 0 \tag{6.1}$$

Giả sử vật thể chiếm vùng V giới hạn bởi mặt kín S.

$$hu(M) + k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = f(M) \tag{6.2}$$

Trong đó h và k là các hằng số, u(M) là giá trị của nhiệt độ của vật thể ở điểm M của mặt giới hạn, còn $\dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S$ là giá trị của đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài ở điểm M.

Vậy ta đi đến bài toán biên sau : Tìm hàm u(x, y, z) liên tục trong miền đóng V + S thoả mãn phương trình (6.1) và điều kiện biên (6.2).

Ta xét các trường hợp riêng quan trọng sau của điều kiện biên.

a) $k = 0,\ u(M) = \dfrac{1}{h}f(M) = f_1(M)$

hay

$$u\big|_\sigma = f_1(M) \tag{6.3}$$

nghĩa là giá trị của nghiệm cần tìm trên mặt giới hạn là đã cho. Bài toán này gọi là bài toán biên thứ nhất hay bài toán Đirichlê (Dirichlet)

b) h = 0

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma} = \frac{1}{k} f(M) = f_2(M) \qquad (6.4)$$

nghĩa là cho giá trị của đạo hàm theo phương pháp tuyến của nghiệm cần tìm trên giới hạn. Bài toán này gọi là bài toán biên thứ hai hay bài toán Nơman (Neumann).

Nếu $h \neq 0$ và $k \neq 0$, ta có bài toán biên thứ ba.

Việc giải bài toán (6.1) với các điều kiện biên trên có vai trò quan trọng trong vật lí (u có thể là nhiệt độ, thế tĩnh điện...)

§2. PHƯƠNG PHÁP GRIN (GREEN) ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN ĐIRICHLÊ

Cho P_o là một điểm bất kì của vùng V đã quy định. Bao quanh nó bằng mặt cầu S_o có bán kính đủ nhỏ ε. Quả cầu này nằm trọn trong vùng V. Kí hiệu V_o là phần của vùng V nằm ngoài mặt cầu S_o, do đó V_o được giới hạn bởi hai mặt S và S_o. Công thức Grin đối với vùng V_o là

$$\int_{V_o} (v\Delta u - u\Delta v)dV = \oint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS +$$

$$+ \oint_{S_o} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \qquad (6.5)$$

Trong công thức này, ta xem u là nghiệm của bài toán Đirichlê, còn v được chọn là hàm Grin G(P) xác định như sau

$$G(P) = \frac{1}{r_{P_oP}} + H(P)$$

trong đó r_{P_oP} là khoảng cách giữa điểm P_o và một điểm biến thiên $P(x, y, z)$, $H(P)$ là một hàm thoả mãn phương trình Laplaxơ trong vùng V và nhận giá trị $-\frac{1}{r_{P_oM}}$ đối với các điểm M của mặt S

$$H(M) = -\frac{1}{r_{P_oM}}$$

Do đó $$G(M) = \frac{1}{r_{P_oM}} + H(M) = 0$$

Ta dễ dàng kiểm nghiệm được rằng hàm $\frac{1}{r_{P_oM}}$ thoả mãn phương trình Laplaxơ đối với tất cả các điểm P khác với P_o nên hàm $v = G(P)$ thoả mãn phương trình Laplaxơ ở tất cả các điểm của vùng V_o. Nghĩa là trong vùng này $\Delta u = 0$ và $\Delta v = 0$. Do đó, công thức (6.5) có dạng

$$\oint_{S_o}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS + \oint_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS = 0 \qquad (6.6)$$

Nhưng bởi vì trên mặt S

$$v = G(P) = 0$$

còn $u = f_1(Q)$, nên

$$\oint_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS = -\oint_{S} f_1(M)\frac{\partial G}{\partial n} dS$$

Vậy theo (6.6)

$$\oint_{S_o}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS=\oint_{S} f_1(M)\frac{\partial G}{\partial n}dS \qquad (6.7)$$

Bây giờ ta tính tích phân trong vế trái của (6.7). Nếu kí hiệu M_o là một điểm bất kì trên mặt cầu S_o, ta có

$$\oint_{S_o}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS=$$

$$=\oint_{S}\left\{\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}+H\right)\frac{\partial u}{\partial n}-u\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n}+\frac{\partial H}{\partial n}\right]\right\}dS=$$

$$=\oint_{S_o}\left[\frac{1}{r_{P_oM_o}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n}\right]dS+\oint_{S}\left[H\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial H}{\partial n}\right]dS=$$

$$=\oint_{S_o}\left[\frac{1}{r_{P_oM_o}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n}\right]dS$$

Vì hàm u và H thoả mãn phương trình Laplaxơ trên toàn miền V, đặc biệt ngoài quả cầu V_o nghĩa là vùng $V-V_o$, nên theo công thức Grin

$$\oint_{S_o}\left(H\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial H}{\partial n}\right)dS=\int_{V-V_o}(H\Delta u-u\Delta H)dV=0$$

Thay thế $r_{P_oM_o}=\varepsilon$, ta có

$$\oint_{S_o}\frac{1}{r_{P_oM_o}}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{S_o}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\right)=4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\right)$$

Trong đó theo định lí trung bình tích phân $\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\right)$ là giá trị trung bình của $\frac{\partial u}{\partial n}$ ở một điểm nào đó của mặt cầu S_o. Do đó

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{S_o} \frac{1}{r_{P_oM_o}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \qquad (6.8)$$

Mặt khác, đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài ở các điểm M_o của quả cầu S_o

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial r_{P_oM_o}} = \frac{1}{r_{P_oM_o}^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Thành thử

$$\oint_{S_o} u \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{S_o} u dS = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 \overline{u} = 4\pi\overline{u}$$

trong đó $\overline{u}$ là giá trị trung bình của u ở một điểm nào đó của mặt cầu S_o. Do đó

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{S_o} u \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n} dS = 4\pi u(P_o) \qquad (6.9)$$

Bởi vì vế phải của (6.7) không phụ thuộc ε nên vế trái của nó cũng không phụ thuộc ε. Do đó, theo (6.8) và (6.9) ta có

$$\oint_{S_o} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{S_o} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{S_o}\frac{1}{r_{P_oM_o}}\frac{\partial u}{\partial n}dS - \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{S_o} u\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{P_oM_o}}\right)}{\partial n}dS = -4\pi u(P_o)$$

Vậy, đẳng thức (6.7) có thể được viết dưới dạng sau

$$4\pi u(P_o) = -\oint_S f_1(M)\frac{\partial G}{\partial n}dS$$

hay

$$u(P_o) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S f_1(M)\frac{\partial G}{\partial n}dS \tag{6.10}$$

Bởi vì P_o là một điểm bất kì trong V, nên công thức này cho nghiệm của bài toán đang xét, nếu biết hàm Grin. Do đó để giải bài toán Đirichlê, trước tiên, ta phải xây dựng hàm Grin G là hàm của 6 biến số (3 toạ độ z, y, x của điểm P và 3 toạ độ x_o, y_o, z_o của điểm P_o) : $G = G(P, P_o)$. Điều đó tương đương với việc giải bài toán Đirichlê đối với hàm H

$$H = 0 \text{ với } H\big|_S = -\frac{1}{r_{P_oM}}$$

Thành thử dùng công thức (6.10) để tính nghiệm không phải là dễ dàng và chỉ trong một số vùng đơn giản ta mới có thể sử dụng được nó.

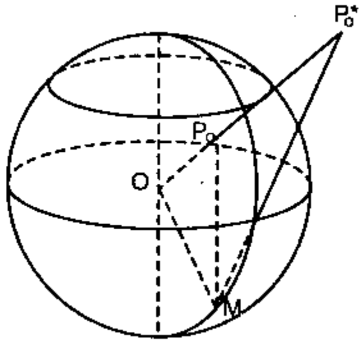
§3. GIẢI BÀI TOÁN ĐIRICHLÊ ĐỐI VỚI QUẢ CẦU

Ta chọn vùng V là quả cầu bán kính q có tâm ở gốc toạ độ và $P_o(x_o, y_o, z_o)$ là một điểm bất kì bên trong nó. Lấy điểm P_o^* nằm trên một tia đi từ gốc toạ độ, qua điểm P_o, sao cho

$r_o r_o^* = q^2$ trong đó $r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}$, r_o^* là khoảng cách từ P_o^* đến tâm quả cầu. Vậy ta có

$$P_o^*\left(\frac{q^2}{r_o^2}x_o, \frac{q^2}{r_o^2}y_o, \frac{q^2}{r_o^2}z_o\right)$$

Hiển nhiên P_o^* nằm ngoài quả cầu (bởi vì $r_o < q$, thành thử $r_o^* = \frac{q^2}{r_o} > q$). Các điểm P_o và P_o^* là đối xứng đối với mặt cầu S, giới hạn quả cầu V. Bây giờ ta chứng minh rằng nếu M là một điểm bất kì trên mặt S,



Hình 38

thì tỉ số các khoảng cách từ M đến P_o và P_o^* là một đại lượng không đổi, không phụ thuộc vào M. Thật vậy, nếu kí hiệu P_oM và P_o^*M qua r_{P_oM} và $r_{P_o^*M}$ (H.38) ta thấy hai tam giác OMP_o và OMP_o^* là đồng dạng bởi vì

$$\frac{q}{r_o} = \frac{r_o^*}{q}$$

Từ đó rút ra

$$\frac{r_{P_o^*M}}{r_{P_oM}} = \frac{q}{r_o} = \text{const} \qquad (6.11)$$

Bây giờ ta dễ dàng chọn hàm Grin cho quả cầu V là hàm

$$G(P) = \frac{1}{r_{P_oP}} - \frac{q}{r_o}\frac{1}{r_{P_o^*P}}$$

Ta chỉ cần kiểm nghiệm lại là

$$H(P) = -\frac{q}{r_o}\frac{1}{r_{P_o^*P}}$$

thoả mãn phương trình Laplaxơ trong quả cầu V và

$$H_{|S} = -\frac{1}{r_{P_oM}}$$

Thật vậy, vì P_o^* nằm ngoài quả cầu V, nghĩa là H(P) được xác định ở tất cả các điểm bên trong V và do đó

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{P_o^*P}}\right) = 0$$

Mặt khác ta cũng có (theo §2)

$$H_{|S} = H(M) = -\frac{q}{r_o}\frac{1}{r_{P_o^*M}} = -\frac{1}{r_{P_oM}}$$

Bây giờ ta tính đạo hàm theo pháp tuyến ngoài $\frac{\partial G}{\partial n}$ trên mặt cầu S. Bởi vì đạo hàm theo pháp tuyến ngoài ở điểm M của mặt cầu S trùng với đạo hàm theo phương bán kính

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=q}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

nên ta chuyển sang toạ độ cầu. Giả sử toạ độ cầu của điểm P là r, θ, φ ; của điểm P_o là r_o, θ_o, φ_o, khi đó P_o^* sẽ có toạ độ cầu là $\frac{q^2}{r_o}$, θ_o, φ_o.

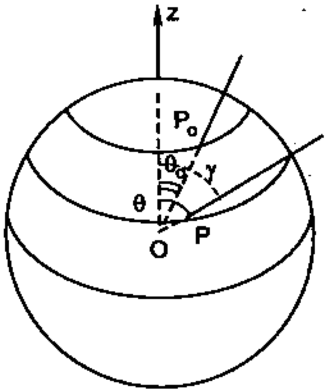
Các vectơ đơn vị theo các phương $\overrightarrow{OP}$ và $\overrightarrow{OP_o}$ là

$$\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

và

$$\sin\theta_o\cos\varphi_o\,\vec{i} + \sin\theta_o\sin\varphi_o\,\vec{j} + \cos\theta_o\,\vec{k}$$

thành thử ta có thể tìm góc γ giữa $\overrightarrow{OP}$ và $\overrightarrow{OP_o}$ qua tích vô hướng của hai vectơ đơn vị trên (H.39).



Hình 39

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \sin\theta\sin\theta_o\cos\varphi\cos\varphi_o + \sin\theta\sin\theta_o\sin\varphi\sin\varphi_o + \cos\theta\cos\theta_o \\ &= \sin\theta\sin\theta_o(\cos\varphi\cos\varphi_o + \sin\varphi\sin\varphi_o) + \cos\theta\cos\theta_o \\ &= \cos\theta\cos\theta_o + \sin\theta\sin\theta_o\cos(\varphi-\varphi_o) \qquad (6.12)\end{aligned}$$

Từ công thức $r_{P_oP} = \sqrt{r^2 + r_o^2 - 2rr_o\cos\gamma}$, ta rút ra

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{P_oP}}\right) = -\frac{r - r_o\cos\gamma}{r_{P_oP}^3}$$

và

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{P_oP}}\right)\bigg|_{r=q} = -\frac{q - r_o\cos\gamma}{q_{P_oP}^3} = -\frac{q - r_o\cos\gamma}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3}$$

Nếu thay thế r_o cho $\frac{q^2}{r_o}$, ta tìm được

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{P_o^*P}}\right)\Bigg|_{r=q} = -\frac{q - \frac{q^2}{r_o}\cos\gamma}{\left(\sqrt{q^2 + \frac{q^4}{r_o^2} - 2q\frac{q^2}{r_o}\cos\gamma}\right)^3} =$$

$$= -\frac{r_o^2}{q^2}\frac{r_o - q\cos\gamma}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3}$$

Theo công thức (6.10), ta nhận được nghiệm sau đây của bài toán Đirichlê đối với quả cầu q có tâm ở gốc toạ độ

$$u(P_o) = \frac{1}{4\pi q}\oint_S \frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3} f_1(M)dS$$

hay

$$u(P_o) = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3} f(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (6.13)$$

Trong đó hàm $f_1(M)$ là hàm của các toạ độ cầu θ và φ trên mặt cầu S giới hạn quả cầu V, kí hiệu là f(θ, φ), $dS = q^2\sin\theta d\theta d\varphi$, còn cosγ được tính bằng biểu thức (6.12).

Công thức (6.13) cho ta nghiệm ở điểm P_o có các toạ độ cầu là r_o, θ_o, φ_o, là nghiệm của bài toán Đirichlê đối với quả cầu. Nó thoả mãn phương trình Laplaxơ bên trong quả cầu và nhận giá trị trên giới hạn f(θ, φ) ; $u\big|_{r=q} = f(\theta, \varphi)$.

Tích phân (6.13) được gọi là tích phân Poatxông đối với quả cầu, còn hàm

$$\frac{1}{4\pi q}\frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3}$$

là nhân Poatxông. Ta nhận xét rằng tích phân nhân Poatxông theo cả quả cầu là bằng đơn vị

$$\frac{1}{4\pi q}\oint_S \frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3}dS$$

$$= \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3}\sin\theta d\theta d\varphi = 1$$

Đó là vì bài toán Đirichlê có nghiệm duy nhất, nghiệm này khi $f(\theta, \varphi) \equiv 1$ phải là hàm $u \equiv 1$.

Ví dụ: Xét phân bố dừng của nhiệt độ trong quả cầu đồng nhất bán kính q với điều kiện là nửa trên được giữ ở nhiệt độ không, nửa dưới ở nhiệt độ 1. Vậy ta phải giải phương trình Laplaxơ với các điều kiện biên

$$f(\theta, \varphi) = \begin{cases} 0 \text{ khi } 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \text{ khi } \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Theo công thức (6.13), ta có

$$u(P_o) = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\gamma}\right)^3}\sin\theta d\theta d\varphi$$

Ta tìm phân bố nhiệt độ trên bán kính với $\theta_o = 0$ và $\theta_o = \pi$.

Khi $\theta_o = 0$, $\cos\gamma = \cos\theta$ và

$$u(P_o) = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{q^2 - r_o^2}{\left(\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\theta}\right)^3}\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{q}{2}\left[-\frac{q^2 - r_o^2}{qr_o\sqrt{q^2 + r_o^2 - 2qr_o\cos\theta}}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2 - r_o^2}{r_o}\left(\frac{1}{\sqrt{q^2 + r_o^2}} - \frac{1}{q + r_o}\right) \qquad (*)$$

còn khi $\theta_o = \pi$, $\cos\gamma = -\cos\theta$ và

$$u(P_o) = \frac{1}{2}\frac{q^2 - r_o^2}{r_o}\left(\frac{1}{q - r_o} - \frac{1}{\sqrt{q^2 + r_o^2}}\right) \qquad (**)$$

Cả hai công thức này khi $r_o \to 0$ cho ta nhiệt độ ở tâm quả cầu.

$$u(P_o)\Big|_{r_o=0} = \frac{1}{2}$$

Ta tìm nhiệt độ của nó ở giữa bán kính thẳng đứng phía trên ($r_o = \frac{1}{2}q$ trong công thức (*)) và phía dưới ($r_o = \frac{1}{2}q$ trong công thức (**)).

$$u(P_o)\Big|_{r_o=\frac{1}{2}q\text{ trên}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$u(P_o)\Big|_{r_o=\frac{1}{2}q\text{ dưới}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$$

§4. GIẢI BÀI TOÁN ĐIRICHLÊ ĐỐI VỚI NỬA KHÔNG GIAN

Xét nửa không gian nằm phía trên mặt phẳng xy, nghĩa là $z > 0$. Tìm hàm $u(x, y, z)$ thoả mãn phương trình Laplaxơ trong nửa không gian này và nhận giá trị giới hạn

$$u\big|_{z=0} = f(x, y)$$

Trong trường hợp này vùng V (nửa không gian) là vô hạn, còn mặt bên S của nó (mặt phẳng) không phải là mặt kín. Ta có thể áp dụng phương pháp Grin vào việc giải bài toán này. Như trước, hàm Grin đối với nửa không gian $z > 0$ là hàm

$$G(P) = \frac{1}{r_{P_oP}} + H(P)$$

Trong đó $P_o(x_o, y_o, z_o)$ là một điểm quy định của nửa không gian $z_o > 0$, $P(x, y, z)$ là một điểm thay đổi của nửa không gian $z > 0$, còn $H(P)$ thoả mãn phương trình Laplaxơ trong nửa không gian và điều kiện

$$H\big|_S = -\frac{1}{r_{P_oM}}$$

Thành thử $G(M) = 0$, trong đó $M(x, y, 0)$ là một điểm của mặt phẳng xy. Khi đó nghiệm được cho bằng công thức

$$u(P_o) = -\frac{1}{4\pi}\int_S f_1(M)\frac{\partial G}{\partial n}dS$$

trong đó S là mặt phẳng xy, $f_1(M) = f(x, y)$ và

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_S = -\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

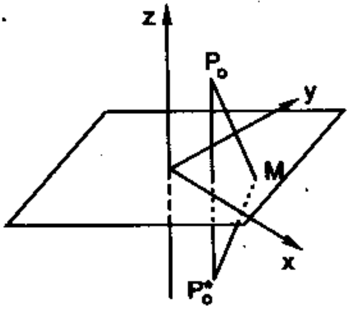
(Bởi vì chiều của pháp tuyến ngoài ở các điểm của mặt S trùng với chiều âm của trục z). Vậy

$$u(x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0} dx\,dy \qquad (6.14)$$

Tất nhiên ta phải giả thiết là các giá trị giới hạn của f(x, y) phải làm sao cho tích phân (6.14) là hội tụ. Ta dễ dàng tìm được hàm Grin đối với nửa không gian

$$G(P) = \frac{1}{r_{P_oP}} - \frac{1}{r_{P_o^*P}}$$

trong đó $P_o^*(x_o, y_o, z_o)$ là điểm đối xứng với điểm P_o qua mặt phẳng (x, y) (H.40).



Hình 40

Thực vậy

$$H(P) = -\frac{1}{r_{P_o^*P}}$$

được xác định trong toàn bộ nửa không gian z > 0 và thoả mãn phương trình Laplaxơ trong đó ΔH = 0 và điều kiện

$$H\big|_S = H(M) = -\frac{1}{r_{P_o^*M}} = -\frac{1}{r_{P_oM}}$$

vì $$r_{P_o^*M} = r_{P_oM}$$

Vậy ta có

$$G(P) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(x-x_o^*)^2 + (y-y_o^*)^2 + (z+z_o^*)^2}}$$

và $$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{2z_o}{\left(\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + z_o^2}\right)^3}$$

Vậy

$u(x_o, y_o, z_o) =$

$$= \frac{z_o}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{\left(\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + z_o^2}\right)^3} dx\, dy \qquad (6.15)$$

nếu tích phân hai lớp này hội tụ.

Ví dụ: Giả sử trên giới hạn của nửa không gian đồng nhất ta giữ nhiệt độ trong vòng tròn $K(x^2 + y^2 < 1)$ không đổi bằng 1 và bằng không ngoài vòng tròn này. Ta tìm phân bố dừng của nhiệt độ trong nửa không gian.

Theo công thức (6.15)

$$u(x_o, y_o, z_o) = \frac{z_o}{2\pi} \iint_K \frac{dx\, dy}{\left(\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + z_o^2}\right)^3}$$

Đặc biệt, trên bán trục dương $z(x_o = 0, y_o = 0)$

$$u(0, 0, z_o) = \frac{z_o}{2\pi} \iint_K \frac{dx\, dy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z_o^2}\right)^3}$$

Nếu chuyển sang toạ độ cực trên mặt phẳng xy : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta có

$$u(0, 0, z_o) = \frac{z_o}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\left(\sqrt{r^2 + z_o^2}\right)^3} = z_o\int_0^1\frac{r\,dr}{\left(\sqrt{r^2 + z_o^2}\right)^3} =$$

$$= -z_o(r^2 + z_o^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 1 - \frac{z_o}{\sqrt{1 + z_o^2}}$$

Thành thử khi cho điểm $P_o(0, 0, z_o)$ tiến đến vô cùng dọc theo nửa trục dương z, nghĩa là khi $z_o \to \infty$ thì $u(0, 0, z) \to 0$ bởi vì $\frac{z_o}{1 + z_o^2} \to 1$.

§5. ĐA THỨC LƠGIĂNGĐRƠ (LEGENDRE) VÀ PHÉP TÁCH BIẾN TRONG TOẠ ĐỘ CẦU

Xét phương trình Laplaxơ

$$\Delta u = 0$$

Ta hãy giải bài toán này trong toạ độ cầu. Khi đó, toán tử Laplaxơ có dạng

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (6.16)$$

Bây giờ ta dùng phương pháp tách biến để nghiên cứu nghiệm của phương trình này đối với quả cầu.

Một nghiệm bất kì của phương trình này $u = u(r, \theta, \varphi)$ phải là hàm tuần hoàn φ có chu kì 2π : $u(r, \theta, \varphi + 2\pi) = u(r, \theta, \varphi)$. Phân tích nghiệm này thành chuỗi Furiê, ta có

$$u = \frac{1}{2}\alpha_o(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n(r, \theta)\cos n\varphi + \beta_n(r, \theta)\sin n\varphi]$$

Thay vào phương trình (6.16), ta tìm được

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \alpha_o}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\alpha_o}{\partial\theta}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \alpha_n}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta}\right) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\alpha_n\right]\cos n\varphi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \beta_n}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\beta_n}{\partial\theta}\right) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\beta_n\right]\sin n\varphi = 0$$

Từ đó ta thấy các hệ số α_n và β_n cũng thoả mãn phương trình

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \frac{n^2}{\sin\theta}v = 0 \qquad (6.17)$$

(khi $n = 0$, ta có phương trình đối với α_o).

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình này bằng phương pháp tách biến $v = R(r)Q(\theta)$. Khi đó phương trình (6.17) sẽ có dạng

$$Q\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + R\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}RQ = 0$$

hay $$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{Q}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) + \frac{n^2}{\sin^2\theta}$$

Vì vế trái chỉ phụ thuộc r, vế phải chỉ phụ thuộc θ nên ta dẫn đến hai phương trình

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\lambda$$

$$\frac{1}{Q}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-\frac{n^2}{\sin^2\theta}=-\lambda \qquad (6.18)$$

trong đó λ là hằng số.

Bây giờ ta đưa vào biến số độc lập với $x = \cos\theta$.

Vì $0 \leq \theta \leq \pi$ nên $-1 \leq x \leq 1$, $y = Q(\theta)$, nên y là một hàm nào đó của x. Ta viết lại phương trình thứ hai (6.18) dưới dạng

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dQ}{d\theta}+\frac{d^2Q}{d\theta^2}+\left(\lambda-\frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)Q=0 \qquad (6.19)$$

Ta nhận xét là

$$\frac{dQ}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\frac{dy}{dx}$$

và
$$\frac{d^2Q}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)=-\cos\theta\frac{dy}{dx}-\sin\theta\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{d\theta}=$$

$$=-x\frac{dy}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2y}{dx^2}$$

Thay biểu thức này vào phương trình (6.19), ta có phương trình cần tìm

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left(\lambda-\frac{n^2}{1-x^2}\right)y=0 \qquad (6.20)$$

Khi $n = 0$ phương trình này có dạng đơn giản hơn

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\lambda y=0 \qquad (6.21)$$

và được gọi là *phương trình Lơgiăngđrơ.*

Ta tìm nghiệm của phương trình này dưới dạng chuỗi luỹ thừa

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{6.22}$$

Ta có

$$2x\frac{dy}{dx} = 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k = 2c_1 x + 2\sum_{k=2}^{\infty} kc_k x^k$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = (1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k]x^k$$

Thay các biểu thức này vào phương trình (6.21), ta có

$$2c_2 + \lambda c_0 + [6c_3 + (\lambda - 2)c_1]x +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{(k+2)(k+1)c_{k+2} - [k(k+1) - \lambda]c_k\}x_k = 0$$

từ đó ta tìm được các phương trình cho các hệ số

$$2c_2 + \lambda c_o = 0,\ 6c_3 + (\lambda - 2)c_1 = 0 \tag{6.23}$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - [k(k+1) - \lambda]c_k = 0 \text{ với } k \geq 2$$

Do đó

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)}c_k \tag{6.24}$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng nếu

$$\lambda = m(m+1)$$

trong đó m là một số nguyên dương, thì $c_{m+2} = 0$. Từ hệ thức (6.24) ta cũng suy ra $c_{m+4} = c_{m+6} = ... = 0$. Vậy nếu m là số chẵn thì các hệ số với chỉ số chẵn bắt đầu từ c_{m+2} đều bằng không, còn nếu m là số lẻ thì các hệ số với chỉ số lẻ bắt đầu từ c_{m+2} đều bằng không. Do đó nếu m chẵn, ta đặt $c_1 = 0$, thì từ (6.24), các hệ số với chỉ số lẻ đều bằng không. Vậy nghiệm (6.22) của phương trình (6.21) khi đó có dạng

$$y = c_o + c_2x^2 + c_4x^4 + ... + c_mx^m$$

trong đó c_o là tuỳ ý, $c_2 = -\frac{m(m+1)}{2}c_o$, còn các hệ số sau tính theo công thức (6.24).

Trong trường hợp m lẻ, ta đặt $c_o = 0$ thì từ đẳng thức thứ nhất của (6.23) ta rút ra $c_2 = 0$. Khi đó nhờ (6.24), các hệ số có chỉ số chẵn đều bằng không và nghiệm (6.22) trở thành đa thức

$$y = c_1x + c_3x^3 + ... + c_mx^m$$

trong đó c_1 tùy ý, $c_3 = -\frac{m(m+1)-2}{6}c_1$, các hệ số sau tính theo (6.24).

Vậy khi λ = m(m + 1) phương trình Lơgiăngđrơ (6.21) có nghiệm là đa thức bậc m (m = 0, 1, 2...). Các đa thức này hoặc chỉ chứa các số hạng bậc chẵn nếu m chẵn, hoặc chỉ có các số hạng bậc lẻ nếu m lẻ. Ta sẽ chọn hệ số c_o hoặc c_1 sao cho các đa thức ấy có giá trị bằng 1 khi x = 1. Các đa thức xác định như vậy gọi là *đa thức Lơgiăngđrơ* kí hiệu là $P_m(x)$. Thành thử đa thức Lơgiăngđrơ $P_m(x)$ là một đa thức bậc m, thoả mãn phương trình (6.21) với $\lambda = m(m+1)$ và tiến đến 1 khi $x = 1$, nghĩa là $P_m(1) = 1$.

Bây giờ ta tính đa thức Lơgiăngđrơ $P_m(x)$ với m = 0, 1, 2, 3. Với $m = 0$ thì $P_o(x) = 1$ $(c_o = 1)$. Với $m = 1$ thì $P_1(x) = x$ $(c_1 = 1)$. Với $m = 2$ thì $P_2(x) = c_o + c_2x^2$, trong đó $c_2 = -3c_o$. Vậy $P_2(x) = c_o - 3c_ox^2$. Nhưng $P_2(1) = c_o - 3c_o = 1$, do đó $c_o = -\frac{1}{2}$. Vậy $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Với $m = 3$, ta có $P_3(x) = c_1x + c_3x^3$, trong đó $c_3 = -\frac{5}{3}c_1$. Vậy $P_3(x) = c_1 - \frac{5}{3}c_1x^3$. Nhưng $P_3(1) = c_1 - \frac{5}{3}c_1 = 1$, vậy $c_1 = -\frac{3}{2}$. Do đó, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Cũng có thể chứng minh được rằng các đa thức Lơgiăngđrơ có thể tính theo công thức Rôđrigơ (Rodrigue)

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2 - 1)^m \qquad (6.25)$$

Theo công thức này ta có

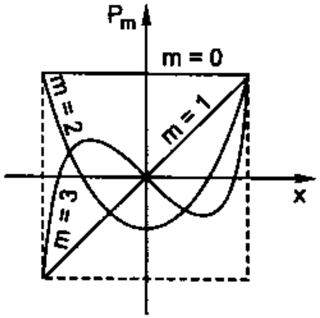
$$P_o(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$



Hình 41

Trên hình 41 ta có đồ thị của P_o, P_1, P_2, P_3.

Người ta chứng minh được rằng phương trình (6.21) không có nghiệm hữu hạn trên đoạn $[-1, 1]$ nếu $\lambda \neq m(m+1)$ còn nếu $\lambda = m(m+1)$ thì những nghiệm hữu hạn trên đoạn $[-1, 1]$ là $cP_m(x)$, trong đó c là hằng số.

Ta thấy phương trình Lơgiăngđrơ (6.21) là trường hợp đặc biệt của phương trình (6.20) khi $n = 0$. Bây giờ ta nghiên cứu nghiệm của phương trình này. Ta đưa vào biến số mới z sao cho

$$y = (1-x^2)^{n/2}z$$

Khi đó

$$y' = (1-x^2)^{\frac{n}{2}}z' - nx(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}z$$

$$y'' = (1-x^2)^{\frac{n}{2}}z'' - nx(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}z' - n(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}z +$$

$$+ n(n-2)x^2(1-x^2)^{\frac{n}{2}-2}z$$

Vậy

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right]y =$$

$$= (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\{(1-x^2)z'' - 2(n+1)xz' + [m(m+1) - n(n+1)]z\}$$

Do đó, hàm z thoả mãn phương trình

$$(1-x^2)z'' - 2(n+1)xz' + [m(m+1) - n(n+1)]z = 0 \quad (6.26)$$

Bởi vì đa thức Lơgiăngđrơ thoả mãn phương trình (6.21) với $\lambda = m(m+1)$ nên

$$(1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (6.27)$$

Bây giờ ta lấy vi phân phương trình này theo z n lần và sử dụng quy tắc Lepnit (Leipnitz) để tìm đạo hàm của tích hai hàm, ta có

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)P''_m(x) =$$

$$= (1-x^2)\frac{d^{n+2}P_m}{dx^{n+2}} - 2nx\frac{d^{n+1}P_m}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^nP_m}{dx^n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}xP'_m(x) = x\frac{d^{n+1}P_m}{dx^{n+1}} + n\frac{d^nP_m}{dx^n}$$

thay vào (6.27), ta được

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}P_m}{dx^{n+2}} - 2(n+1)x\frac{d^{n+1}P_m}{dx^{n+1}} + [m(m+1) - n(n+1)]\frac{d^nP_m}{dx^n} = 0$$

Từ đó ta thấy hàm $x = \frac{d^nP_m}{dx^n}$ thoả mãn phương trình (6.26) nghĩa là hàm

$$y = (1-x^2)^{\frac{n}{2}}z = (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dx^n}P_m(x) \equiv P_m^{(n)}(x)$$

thoả mãn phương trình (6.20) với $\lambda = m(m+1)$.

Hàm $$P_m^{(n)}(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dx^n}P_m(x) \quad (6.28)$$

gọi là *hàm Lơgiăngđrơ liên đới.*

Vậy phương trình (6.20) có nghiệm hữu hạn trên đoạn $[-1, 1]$ chỉ khi $\lambda = m(m+1)$ và có dạng $cP_m^{(n)}(x)$ với c là hằng số.

Bởi vì $P_m(x)$ là đa thức bậc m nên với $n > m$ thì $P_m^{(n)}(x) \equiv 0$. Còn khi $n = 0$ thì $P_m^{(0)}(x) = P_m(x)$.

§6. HÀM CẦU

Bây giờ ta xét phương trình thứ nhất của (6.18) là kết quả của việc tách biến đối với quả cầu có tâm ở gốc toạ độ. Như trong §5, hằng số λ có giá trị $\lambda = m(m+1)$ với $m = 0, 1, 2,...$ Khi đó phương trình này có dạng

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = m(m+1)R$$

hay
$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - m(m+1)R = 0$$

Các hàm r^m và r^{-r-1} là nghiệm của phương trình này. Nhờ sự giới hạn của hàm bên trong quả cầu, ta chỉ sử dụng nghiệm thứ nhất, nghĩa là $R = r^m$.

Thành thử các hệ số của chuỗi Furiê

$$u = \frac{1}{2}\alpha_o(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n(r, \theta)\cos n\varphi + \beta_n(r, \theta)\sin n\varphi] \quad (6.29)$$

bây giờ là

$$R(r)Q(\theta) = r^m P_m^{(n)}(x) = r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)$$

Nó thoả mãn phương trình (6.17).

Ta đưa vào các hệ số không đổi $\alpha_{n,m}$ và $\beta_{n,m}$, ta có thể viết

$$\alpha_o(\mathbf{r}, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{o,m} r^m P_m^{(0)}(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{o,m} r^m P_m(\cos\theta)$$

$$\alpha_n(r, \theta) = \sum_{m=n}^{\infty} \alpha_{n,m} r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)$$

$$\beta_n(r, \theta) = \sum_{m=n}^{\infty} \beta_{n,m} r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)$$

Tổng lấy từ n đến ∞ và $P_m^{(n)}(\cos\theta) = 0$ khi $m < n$. Thay các hệ số này vào (6.29) ta nhận được nghiệm của phương trình Laplaxơ dưới dạng

$$u = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{o,m} r^m P_m(\cos\theta) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=n}^{\infty} \alpha_{n,m} r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)\right]\cos n\varphi + \right.$$

$$\left. +\left[\sum_{m=n}^{\infty} \beta_{n,m} r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)\right]\sin n\varphi\right\}$$

Thay đổi thứ tự của tổng trong số hạng thứ hai, ta có

$$u = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{0,m} r^m P_m(\cos\theta) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_{n,m} r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)\cos n\varphi + \beta_{n,m} r^m P_m^{(n)}(\cos\theta)\sin n\varphi\right\}$$

hay $$u = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{o,n} r^m Y_m^{(0)}(\theta, \varphi) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}[\alpha_{n,m} r^m Y_m^{(-n)}(\theta, \varphi) + \beta_{n,m} r^m Y_m^{(n)}(\theta, \varphi)]\right\} \quad (6.30)$$

Trong đó, ta đưa ra các kí hiệu

$$\begin{cases} Y_m^{(0)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} P_m(\cos\theta) \\ Y_m^{(-n)}(\theta, \varphi) = P_m^{(n)}(\cos\theta)\cos n\varphi \\ Y_m^{(n)}(\theta, \varphi) = P_m^{(n)}(\cos\theta)\sin n\varphi \end{cases} \quad (6.31a)$$

gọi là các *hàm cầu Lơgiăngđrơ.* Đối với mỗi hạng m = 0, 1, 2,... có 2m + 1 hàm cầu Lơgiăngđrơ. Các hàm cầu Lơgiăngđrơ có chỉ số trên 0, −1, −2,... −m thì hàm Lơgiăngđrơ liên đới được nhân với cosin, còn các hàm cầu Lơgiăngđrơ liên đới có các chỉ số trên 1, 2,..., m, nhân với sin.

Tập hợp tuyến tính bất kì của chúng được gọi là *hàm cầu* $Y_m(\theta, \varphi)$.

$$Y_m(\theta, \varphi) = \alpha_{o,m} Y_m^{(0)}(\theta, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_{n,m} Y_m^{(-n)}(\theta, \varphi) + \beta_{n,m} Y_m^{(n)}(\theta,\varphi)]$$

còn hàm $r^m Y_m(\theta, \varphi)$ được gọi là *hàm cầu Laplaxơ.*

Với m = 0, 1, 2,... bất kì, hàm cầu Laplaxơ là nghiệm của phương trình Laplaxơ.

Hàm $r^{-m-1} Y_m(\theta, \varphi)$ cũng là nghiệm của phương trình Laplaxơ, nhưng hàm này không giới hạn trong quả cầu.

Cuối cùng ta có thể viết nghiệm của phương trình Laplaxơ dưới dạng

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} r^m Y_m(\theta, \varphi) \quad (6.31b)$$

Nếu nghiệm (6.31b) thoả mãn điều kiện biên (bài toán Đirichlê)

$$u\Big|_{r=q} = f(\theta, \varphi)$$

nghĩa là có đẳng thức

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} q^m Y(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{o,m} Y_m^{(0)}(\theta, \varphi) q^m +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,m} Y_m^{(-n)}(\theta, \varphi) + \beta_{n,m} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi)\right] q^m \qquad (6.32)$$

thì ta có thể xác định các hệ số qua điều kiện biên này nhờ tính chất trực giao của hàm cầu σ có bán kính bất kì, có tâm ở gốc toạ độ.

§7. TÍNH CHẤT TRỰC GIAO CỦA HÀM CẦU

Ta sẽ chứng minh hệ thức

$$\oint_\sigma Y_m^{(\pm n)}(\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(\pm n_1)}(\theta, \varphi) dS = 0 \qquad (6.33)$$

nếu $m \neq m_1$, hay nếu $m = m_1$ nhưng các chỉ số trên khác nhau.

Thật vậy, nếu σ là mặt cầu bán kính q, thì $dS = q^2 \sin\theta d\varphi d\theta$ và hệ thức (6.33) trở thành

$$\oint_\sigma Y_m^{(\pm n)}(\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(\pm n_1)}(\theta, \varphi) dS =$$

$$= q^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_m^{(n)}(\cos\theta) P_{m_1}^{(n_1)}(\cos\theta) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \cos n\varphi & \cos n_1\varphi \\ \sin n\varphi & \sin n_1\varphi \end{Bmatrix} \sin\theta d\theta d\varphi = 0 \qquad (6.34)$$

trong đó $\begin{Bmatrix} \cos n\varphi & \cos n_1\varphi \\ \sin n\varphi & \sin n_1\varphi \end{Bmatrix}$ kí hiệu một trong 4 tích sau : $\cos n\varphi \cos n_1\varphi$; $\cos n\varphi \sin n_1\varphi$; $\sin n\varphi \cos n_1\varphi$; $\sin n\varphi \sin n_1\varphi$. Nếu các chỉ số trên là khác nhau thì ta có đẳng thức (6.34) vì

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos n\varphi & \cos n_1\varphi \\ \sin n\varphi & \sin n_1\varphi \end{Bmatrix} = 0$$

Còn nếu các chỉ số trên bằng nhau thì biểu thức dưới dấu tích phân (6.33) chỉ chứa tích $Y_m^{(n)} Y_{m_1}^{(n)}$ nghĩa là tích phân (6.34) chứa

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \pi$$

Vậy tích phân (6.34) có dạng

$$\pi q^2 \int_0^{\pi} P_m^{(n)}(\cos\theta) P_{m_1}^{(n)}(\cos\theta) \sin\theta d\theta =$$

$$= \pi q^2 \int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x) P_{m_1}^{(n)}(x) dx \tag{6.35}$$

Ta sẽ chứng minh được là hàm Lơgiăngđrơ liên đới có tính trực giao sau

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x) P_{m_1}^{(n)}(x) dx = 0 \tag{6.36}$$

Thật vậy, các hàm $P_m^{(n)}(x)$ và $P_{m_1}^{(n)}(x)$ thoả mãn phương trình

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dP_m^{(n)}}{dx}\right] + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{1 - x^2}\right] P_m^{(n)} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{m_1}^{(n)}}{dx}\right]+\left[m_1(m_1+1)-\frac{n^2}{1-x^2}\right]P_{m_1}^{(n)}=0$$

Nhân phương trình thứ nhất với $P_{m_1}^{(n)}(x)$ và phương trình thứ hai với $P_m^{(n)}(x)$ và trừ cho nhau, ta được

$$[m(m+1)-m_1(m_1+1)]\,P_m^{(n)}P_{m_1}^{(n)}=$$

$$=P_m^{(n)}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{m_1}^{(n)}}{dx}\right]-P_{m_1}^{(n)}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m^{(n)}}{dx}\right]$$

Lấy tích phân hai vế theo dx từ −1 đến 1, ta được

$$[m(m+1)-m_1(m_1+1)]\int_{-1}^{1}P_m^{(n)}P_{m_1}^{(n)}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}P_m^{(n)}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{m_1}^{(n)}}{dx}\right]dx-\int_{-1}^{1}P_{m_1}^{(n)}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m^{(n)}}{dx}\right]dx$$

Tính tích phân từng phần, vế trái sẽ dẫn đến

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dP_{m_1}^{(n)}}{dx}\frac{dP_m^{(n)}}{dx}dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dP_m^{(n)}}{dx}\frac{dP_{m_1}^{(n)}}{dx}dx=0$$

Vì $m\neq m_1$, nên ta rút ra biểu thức (6.36), và do đó cũng rút ra đẳng thức (6.34) và cuối cùng là đẳng thức (6.33).

Bây giờ ta hãy tính các hệ số $\alpha_{n,m}$ và $\beta_{n,m}$ nhờ tính chất trực giao trên.

Nhân hai vế của khai triển (6.32) với $Y_{m_1}^{(\pm n_1)}(\theta, \varphi)$ và tích phân theo mặt cầu σ có tâm ở gốc toạ độ, ta có

$$\begin{cases} - \text{Với } n_1 = 0 \\ \oint_\sigma (\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(0)}(\theta, \varphi) dS_1 = \alpha_{o,m} \oint_\sigma Y_{m_1}^{(0)^2}(\theta, \varphi) dS_1 q^{m_1} \\ - \text{Với } n_1 \neq 0 \\ \oint_\sigma f(\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(n_1)}(\theta, \varphi) dS_1 = \beta_{n_1,m_1} \oint_\sigma Y_{m_1}^{(n_1)^2}(\theta, \varphi) dS_1 q^{m_1} \\ \oint_\sigma f(\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(-n_1)}(\theta, \varphi) dS_1 = \alpha_{n_1,m_1} \oint_\sigma Y_{m_1}^{(-n_1)^2}(\theta, \varphi) dS_1 q^{m_1} \end{cases} \tag{6.37}$$

Thay các biểu thức (6.31) của $Y_m^{(\pm n)}(\theta, \varphi)$ vào vế phải của (6.37) và tích phân từng phần liên tiếp, ta thu được kết quả sau nếu lấy bán kính quả cầu là 1.

$$\oint_\sigma Y_{m_1}^{(\pm n_1)^2}(\theta, \varphi) dS_1 = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2m_1 + 1} \dfrac{(m_1 \pm n_1)!}{(m_1 \mp n_1)!} & \text{nếu } n_1 \neq 0 \\ 2\pi \dfrac{2}{2m_1 + 1} & \text{nếu } n_1 = 0 \end{cases} \tag{6.38}$$

Các dấu được lấy phù hợp trên hoặc dưới ở cả hai vế.

Cuối cùng, ta có các hệ số sau nhờ (6.37) và (6.38)

$$\begin{cases} \alpha_{o,m} = \dfrac{2m+1}{4\pi} \dfrac{1}{q^m} \oint_\sigma f(\theta, \varphi) Y_m^{(0)}(\theta, \varphi) dS_1 \\ \alpha_{n,m} = \dfrac{2m+1}{2\pi} \dfrac{(m+n)!}{(m-n)!} \dfrac{1}{q^m} \oint_\sigma f(\theta, \varphi) Y_m^{(-n)}(\theta, \varphi) dS_1 \\ \beta_{n,m} = \dfrac{2m+1}{2\pi} \dfrac{(m-n)!}{(m+n)!} \dfrac{1}{q^m} \oint_\sigma f(\theta, \varphi) Y_m^{(n)}(\theta, \varphi) dS_1 \end{cases} \tag{6.39}$$

*§8. HÀM BETSEN HẠNG BÁN NGUYÊN

Ta hãy xét dao động của quả cầu có biên gắn chặt, nghĩa là ta tìm nghiệm của phương trình

$$u''_{tt} - a^2\Delta u = 0 \tag{6.40}$$

bên trong quả cầu bán kính q có tâm ở gốc toạ độ. Nghiệm của phương trình này tiến đến không trên quả cầu. Trong toạ độ cầu $u = u(r, \theta, \varphi)$ và điều kiện biên có dạng

$$u\Big|_{r=q} = 0 \tag{6.41}$$

Một nghiệm bất kì của (6.40), thoả mãn điều kiện biên (6.41) mô tả dao động riêng của quả cầu (chẳng hạn dao động âm trong thể tích cầu...). Trong hệ toạ độ cầu, phương trình (6.40) có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

Nếu đặt $u = T(t)\,R(r)Y_m(\theta, \varphi)$, ta có

$$T''RY_m - \frac{a^2}{r^2}\left[(r^2R')'TY_m + TR\Delta_{\theta,\varphi}Y_m\right] = 0 \tag{6.42}$$

trong đó

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y_m = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{Y_m}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_m}{\partial\varphi^2}$$

Theo §2, Chương VI, hàm cầu $r^m Y_m(\theta, \varphi)$ với $m = 0, 1, 2, \ldots$ là nghiệm của phương trình Laplaxơ

$$\Delta[r^m Y_m(\theta, \varphi)] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r^m Y_m)\right] + r^{-2}\Delta_{\theta,\varphi}Y_m = 0$$

Từ đó ta rút ra

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_m = -\frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}(r^m Y_m)\right] = -m(m+1)Y_m$$

Do đó, phương trình (6.42) có dạng

$$T'' R Y_m - \frac{a^2}{r^2}\left[(r^2 R')' T Y_m - m(m+1) T R Y_m\right] = 0$$

hay
$$\frac{T''}{T} = \frac{a^2}{r^2}\left[\frac{(r^2 R')'}{R} - m(m+1)\right]$$

Cả hai vế của phương trình này phải là hằng số, ta kí hiệu là $-a^2\lambda^2$. Khi đó

$$T = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t \tag{6.43}$$

và
$$\frac{a^2}{r^2}\left[r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} - m(m+1)\right] = -a^2\lambda^2$$

nghĩa là

$$R'' + \frac{2}{R}R' + \left(\lambda^2 - \frac{m(m+1)}{r^2}\right)R = 0 \tag{6.44}$$

Đặt $r = \frac{x}{\lambda}$, $R(r) = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}$.

ta có
$$R' = \frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dr} = \lambda\left[\frac{y'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{y(x)}{2x\sqrt{x}}\right]$$

$$R'' = \lambda^2\left[\frac{y''(x)}{\sqrt{x}} - \frac{y'(x)}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{4}\frac{y(x)}{x^2\sqrt{x}}\right]$$

Thay vào phương trình (6.44), ta có

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{m(m+1) + \frac{1}{4}}{x^2}\right)y = 0$$

hay $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left[1-\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y=0$$

Đó chính là phương trình Betsen hạng $m+\frac{1}{2}$, tức là hạng bán nguyên.

Nghiệm của nó là $y=C_1J_{m+\frac{1}{2}}(x)+C_2N_{m+\frac{1}{2}}(x)$

Thay trở lại $x=\lambda r,\ y=\sqrt{\lambda r}\,R(r)$, ta có

$$\sqrt{\lambda r}\,R(r)=C_1J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)+C_2N_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

hay

$$R(r)=C_1\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{\lambda r}}+C_2\frac{N_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{\lambda r}}$$

Bởi vì R(r) phải hữu hạn ở tâm quả cầu $r = 0$ mà hàm Betsen hạng hai $N_v(x)$ lại không hữu hạn ở lân cận của $x = 0$, do đó phải đặt $C_2 = 0$.

Đặt $\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}=C$, với C là hằng số bất kì, cuối cùng ta có

$$R(r)=C\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{r}} \tag{6.45}$$

Để hàm này thoả mãn điều kiện biên (6.41), ta phải đặt

$$J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda q)=0 \tag{6.46}$$

Từ đó ta tìm được các giá trị riêng λ.

Hàm Betsen hạng bán nguyên $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ với $m = 0, 1, 2,...$ là một hàm sơ cấp nó có dạng

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,[M(x)\cos x + N(x)\sin x]$$

trong đó M(x) và N(x) là các đa thức của $\frac{1}{x}$.

Chẳng hạn khi $m = 0$, sử dụng khai triển (4.41), ta có

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}$$

Với hàm $\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = \left(m+\frac{1}{2}\right)!$

Nhưng theo tính chất của hàm Γ, ta có

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \text{ (xem Phụ lục II)}$$

nên

$$\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= ... = \left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)...\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=$$

$$=\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots3.1}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}=\frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}m!}\sqrt{\pi}$$

trong đó ta đã thay $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Do đó

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\frac{2^{2m+1}}{\sqrt{\pi}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

Tương tự, ta có thể tính được

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\frac{1}{x}\sin x+\cos x\right]$$

Dễ dàng ta thấy

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=-x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)\right]$$

Tổng quát, ta có thể chứng minh rằng

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x)=-x^{m-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}J_{m-\frac{1}{2}}(x)\right] \text{ với}$$

$$m = 1, 2, 3\ldots$$

Nếu kí hiệu $\xi_n^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}$ là nghiệm của hàm Betsen $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$, thì từ điều kiện (6.46), ta có

$$\lambda q = \xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}, \; k = 1, 2, \ldots$$

nghĩa là
$$\lambda = \lambda_{k,m} = \frac{\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{q}$$

là giá trị riêng của bài toán đang xét. Hàm riêng của nó là (bỏ thừa số C)

$$R = R_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{q} r\right)$$

bởi vì $x = \lambda r$, còn $R = \dfrac{y(x)}{\sqrt{x}}$. Nhờ đẳng thức (6.43), ta có

$$T = T_{k,m} = A_{k,m} \cos \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} t}{q} + B_{k,m} \sin \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} t}{q}$$

và các dao động riêng được biểu diễn bằng nghiệm sau của phương trình dao động (6.40)

$$u_{k,m} = T_{k,m} R_{k,m} Y_m(\theta, \varphi) =$$

$$= \left(A_{k,m} \cos \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} t}{q} + B_{k,m} \sin \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} t}{q}\right) \times$$

$$\times \; J_{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} r}{q}\right) Y_m(\theta, \varphi)$$

Trong đó hàm cầu $Y_m(\theta, \varphi)$ được xác định theo công thức (6.31a). Đối với mỗi m = 0, 1, 2,... tồn tại 2m + 1 dao động riêng

$$u_{k,m,n} = \left(A_{k,m} \cos \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} t}{q} + B_{k,m} \sin \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} t}{q} \right) \times$$

$$\times J_{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} r}{q} \right) Y_m^{(n)}(\theta, \varphi) \; ; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm m)$$

có tần số

$$\omega_{k,m} = \frac{a\xi_k^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{q}$$

Đặc biệt khi m = 0, ta có dao động riêng duy nhất đối với mỗi k = 1, 2,... có tần số

$$\omega_{k,0} = \frac{a\xi_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{q} = \frac{ak\pi}{q}$$

(bởi vì $\xi_k^{\left(\frac{1}{2}\right)} = k\pi$ là nghiệm của hàm $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$)

và

$$u_{k,0,0} = \left(A_{k,0} \cos \frac{ak\pi t}{q} + B_{k,0} \sin \frac{ak\pi t}{q} \right) \sin \frac{k\pi r}{q} \qquad (6.47)$$

(k = 1, 2, 3,...) mô tả dao động xuyên tâm của quả cầu.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

1. Tìm nghiệm của phương trình Laplaxơ thoả mãn điều kiện biên

$$u(0, y) = 0 \qquad u(a, y) = 0 \ (y \geq 0)$$
$$u(x, 0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right), \ u(x, +\infty) = 0$$

trong đó A là hằng số trong miền $(0 \leq x \leq a)$

$$0 \leq x \leq a$$
$$0 \leq y \leq +\infty$$

Đáp số : $u(x, y) = \dfrac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$

2. Chứng minh rằng hàm Grin là đối xứng, nghĩa là

$$G(M, M_o) = G(M_o, M)$$

Hướng dẫn : Bao các điểm M_o và M bằng các mặt cầu Σ_{M_o} và Σ_M có tâm tại M_o và M, bán kính ε, nằm hoàn toàn trong vùng V. Áp dụng công thức Grin cho hàm $G(M, M_o)$, $G(M_o, M)$ rồi chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$.

3. Tìm nghiệm của bài toán Đirichlê đối với phương trình trong miền tròn tâm O bán kính a, biết giá trị trên biên của nghiệm là

$$u\big|_{\mathscr{L}} = A + B\sin\varphi$$

trong đó A và B là các hằng số.

Đáp số : $u(r, \varphi) = A + \dfrac{B}{a}r\sin\varphi$

4. Tìm hàm Grin của bài toán Đirichlê đối với miền nửa hình tròn.

Đáp số : $G(M, M_o) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\ln\dfrac{1}{r} - \ln\dfrac{R}{\rho_o r_1} - \ln\dfrac{1}{r'} + \ln\dfrac{R}{\rho_o r'_1}\right)$;

trong đó $r = M_oM$, $r_1 = M_1M$, $r' = M'_oM$, $r'_1 = M'_1M$, $\rho_o = OM_o$, O là tâm hình tròn, M'_o là điểm đối xứng với M_o qua đường kính, M'_1 là điểm đối xứng với M_1 qua đường kính.

5. Tính đa thức Lơgiăngđrơ $P_4(x)$, $P_5(x)$ và $P_6(x)$. Vẽ các đồ thị đó.

6. Chứng minh công thức Rôđrigơ

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

7. Chứng minh rằng

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]$$

8. Chứng minh rằng

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n}dx$$

9. Chứng minh rằng

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \;;\; J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

10. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^x \xi J_o(\xi)d\xi = xJ_1(x)$

$$\int_0^x \xi^3 J_o(\xi)d\xi = 2x^2 J_o(x) + (x^3 - 4x)J_1(x)$$

11. Chứng minh hệ thức khai triển

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^n$$

(kiểm nghiệm trên bốn số hạng đầu tiên).

Chương VII

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH GẦN ĐÚNG VI TÍCH PHÂN

§1. CÔNG THỨC NỘI SUY NIUTƠN (NEWTON)

Phương pháp tính gần đúng vi phân một hàm có thể xây dựng dựa trên phép nội suy Niutơn hoặc Stơcling (Stirling). Do đó trong phần này trước tiên ta trình bày về phép nội suy Niutơn.

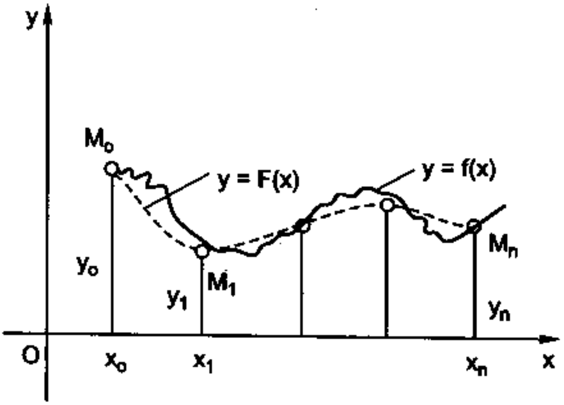
Trên khoảng [a, b] đã đặc biệt hoá (n + 1) điểm $x_0, x_1, ..., x_n$ (gọi là các điểm nội suy) và các giá trị của hàm f(x) tại các điểm này là

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, ..., f(x_n) = y_n \quad (7.1)$$

Đòi hỏi xây dựng một hàm F(x) (hàm nội suy) thuộc lớp hàm đã biết và giả thiết có cùng giá trị với hàm f(x) tại các điểm nội suy

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, ... F(x_n) = y_n \quad (7.2)$$

Về mặt hình học, điều này có nghĩa là cần tìm đường cong y = F(x) đi qua các điểm M_i (x_i, y_i) (i = 0, 1, 2,...) đã cho như trên hình 42.



Hình 42

Giả sử hàm y = f(x) đã cho các giá trị $y_i = f(x_i)$ với $x_i = x_0 + ih$ (i = 0, 1, 2,..., n), và h là khoảng cách. Cần tìm đa thức $P_n(x)$ có bậc không lớn hơn n và giả thiết tại các điểm x_i ta có

$$P_n(x_i) = y_i \ (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{7.3}$$

Điều kiện (7.3) tương đương với

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, \ m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

trong đó $\Delta P_n(x_0) = P_n(x_0 + \Delta x) - P_n(x_0)$

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta(\Delta P_n) = \Delta[P_n(x_0 + \Delta x) - P_n(x_0)]$$

$$= P_n(x_0 + 2\Delta x_0) - 2P_n(x_0 + \Delta x) + P_n(x_0)$$

....

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta(\Delta^{m-1} P_n)$$

Đại lượng $\Delta^m P_n$ gọi là sai phân hữu hạn bậc m của đa thức $P_n(x_0)$.

Theo Niutơn, đa thức cần tìm có dạng

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ a_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + ...$$

$$+ a_n (x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_{n-1}) \quad (7.4)$$

Dùng luỹ thừa suy rộng, ta viết lại biểu thức (7.4)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0)^{[1]} + a_2 (x - x_0)^{[2]} + ...$$

$$... + a_n (x - x_0)^{[n]} \quad (7.5)$$

Để xác định các hệ số a_i ($i = 0, 1, 2,..., n$), ta đặt $x = x_0$ vào (7.5), thu được hệ số a_0

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0$$

Muốn tìm hệ số a_1, ta đặt $x = x_0$ vào biểu thức sai phân bậc một ΔP_n

$$\Delta P_n (x) = a_1 h + 2a_2 (x - x_0)^{[1]} h + 3a_3 (x - x_0)^{[2]} h + ...$$

$$... + na_n (x - x_0)^{[n-1]} h$$

Dễ dàng suy ra $\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h$, do đó $a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{1!h}$.

Tương tự, để xác định hệ số a_2, đặt $x = x_0$ vào biểu thức sai phân bậc hai

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!\, h^2 a_2 + 2.3\, h^2 a_3 (x - x_0)^{[1]} + ...$$

$$... + (n - 1)\, nh^2 a_n (x - x_0)^{[n-2]}$$

ta được

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!\, h^2 a_2$$

suy ra $a_2 = \dfrac{\Delta^l y_0}{2!h^2}$

Tiếp tục quá trình này, ta được

$$a_l = \frac{\Delta^l y_0}{l!h^l} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

trong đó $0! = 1$ và $\Delta^0 y = y$.

Thay các giá trị tìm được của hệ số a_l vào biểu thức (7.5), ta được đa thức nội suy Niutơn

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]} \qquad (7.6)$$

Dễ dàng thấy rằng đa thức (7.6) thoả mãn hoàn toàn các yêu cầu đòi hỏi của bài toán. Hơn nữa, bậc của đa thức $P_n(x)$ không quá n, ta có

$$P_n(x_0) = y_0$$

và

$$P_n(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 1}{k!}\Delta^k y_0$$

$$= (1 + \Delta)^k y_0 = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Chú ý rằng khi $h \to 0$, công thức (7.6) trở thành đa thức Taylo (Taylor) đối với hàm y.

Thực vậy, vì

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k y_0}{h^k}=\left(\frac{d^k y_0}{dx^k}\right)_{x=x_0}=y^{(k)}(x_0)$$

Ngoài ra, rõ ràng là

$$\lim_{h\to 0}(x-x_0)^{[n]}=(x-x_0)^n$$

nên khi $h \to 0$, công thức (7.6) có dạng đa thức Taylo

$$P_n(x)=y(x_0)+y'(x_0)\,(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

Đặt biến mới $q=\dfrac{x-x_0}{h}$, ta có

$$\frac{(x-x_0)^{[l]}}{h^l}=\frac{(x-x_0)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-h)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-2h)}{h}\ldots$$

$$\ldots\frac{\left[x-x_0-(l-1)h\right]}{h}=q(q-1)\,(q-2)\ldots(q-l+1)$$

$(l = 1, 2,\ldots, n)$

Thay biểu thức này vào (7.6) ta được công thức nội suy Niutơn thứ nhất

$$P_n(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0+\ldots$$

$$\ldots+\frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (7.7)$$

Với $n = 1$, ta có công thức nội suy tuyến tính

$$P_1(x)=y_0+q\Delta y_0 \qquad (7.8)$$

Với n = 2, ta có công thức nội suy parabol

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 \tag{7.9}$$

§2. CÔNG THỨC NỘI SUY STƠCLING

Giả sử ta có 2n + 1 điểm cách đều

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, ..., x_{-1}, x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$$

với $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ $(i = -n, -(n-1), ..., n-1)$ và giá trị hàm $y = f(x)$ tại các điểm này đã biết

$$y_i = f(x_i), (i = 0, \pm 1, ..., \pm n)$$

Cần tìm đa thức P(x) có bậc không lớn hơn 2n sao cho

$$P(x_i) = y_i \text{ với } i = 0, \pm 1, ..., \pm n$$

Từ điều kiện này suy ra

$$\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i \tag{7.10}$$

Ta sẽ tìm đa thức dưới dạng

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$+ a_5(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) ... +$$

$$+ a_{2n}(x - x_{-(n-1)}) ...$$

$$... (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_{n-1})(x - x_n) \tag{7.11}$$

Đưa vào luỹ thừa suy rộng, ta được

$$P(x) = a_0 + a_1 (x - x_0)^{[1]} + a_2 (x - x_0)^{[2]} + a_3 (x - x_{-1})^{[3]} +$$

$$+ a_4 (x - x_{-1})^{[4]} + ... + a_{2n-1} (x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} +$$

$$+ a_{2n} (x - x_{-(n-1)})^{[2n]} \qquad (7.12)$$

Áp dụng kĩ thuật tính các hệ số a_i ($i = 0, 1, 2, ..., 2n$) tương tự khi rút ra công thức nội suy Niutơn, ta được

$$a_0 = y_0,\ a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h},\ a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2},\ a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3},$$

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}, ..., a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}},\ a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}$$

Hơn nữa, đặt biến $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ và thực hiện biến đổi công thức (7.12), ta thu được công thức nội suy Gauxơ thứ nhất

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + ...$$

$$... + \frac{(q+n-1)...(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+ \frac{(q+n-1)...(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (7.13)$$

hay $P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$

$$+\frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+\frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (7.14)$$

trong đó $x = x_0 + qh$ và $q^{[m]} = q(q-1)\ldots[q-(m-1)]$.

Công thức nội suy Gauxơ thứ nhất chứa các sai phân giữa

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

Tương tự, ta có thể thu được công thức nội suy Gauxơ thứ hai chứa các sai phân giữa :

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

Công thức nội suy Gauxơ thứ hai có dạng

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$

$$+ \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} +$$

$$+ \frac{(q+n)(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (7.15)$$

hay gọn hơn

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$

$$+\frac{(q+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} +$$

$$+\frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (7.16)$$

Lấy trung bình số học các công thức nội suy Gauxơ (7.13) và (7.15), ta được công thức Stơcling

$$P(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots$$

$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (7.17)$$

trong đó $q = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Dễ dàng thấy rằng $P(x_i) = y_i$ với $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$.

§3. CÔNG THỨC VI PHÂN GẦN ĐÚNG TRÊN CƠ SỞ NỘI SUY NIUTƠN

Cho hàm y(x) có các giá trị $y_i = f(x_i)$ tại các điểm cách đều x_i (i = 0, 1, 2, ..., n) trên khoảng [a, b], ta thay hàm y bởi đa thức nội suy Niutơn được xây dựng đối với tập hợp các điểm $x_0, x_1, ..., x_k$ $(k \le n)$. Ta có

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-q)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + $$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + ... \qquad (7.18)$$

trong đó $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ và $h = x_{i+1} - x_i$ (i = 0, 1, ...).

Nhân các nhị thức với nhau, ta được

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + $$

$$+ \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + ... \qquad (7.19)$$

Vì $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq}\dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dy}{dq}$, suy ra

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + ...\right] \qquad (7.20)$$

Tương tự, vì $y''(x) = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d(y')}{dq}.\frac{dq}{dx}$, nên từ (7.20) suy ra

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + ...\right] \quad (7.21)$$

Các đạo hàm bậc tuỳ ý của hàm y(x) có thể được tính tương tự như trên.

Đặt $x = x_0$, $q = 0$ vào (7.20) và (7.21), ta được

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - ...\right) \quad (7.22)$$

và $$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + ...) \quad (7.23)$$

Nếu $p_k(x)$ là đa thức nội suy Niutơn chứa các sai phân Δy_0, $\Delta^2 y_0$, ..., $\Delta^k y_0$ vă

$R_k(x) = y(x) - p_k(x)$ là sai số tương ứng, thì sai số khi xác định đạo hàm được tính bởi công thức

$$R'_k(x) = y'(x) - p'_k(x)$$

Ví dụ : Tìm y'(50) của hàm $y = \log_{10}x$ được lập ở bảng 1.

Bảng 1 : Giá trị của hàm $y = \log_{10}x$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	–36	5
55	1,7404	378	–31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

Dùng hàng đầu tiên của bảng 1 (bậc của số thập phân không được chỉ rõ trong bảng 1, chúng được xác định bởi bậc số thập phân của giá trị hàm là 10^{-4}) và (7.22), trong gần đúng sai phân bậc ba ta được

$$y'(50) = \frac{1}{5}(0{,}0414 + 0{,}0018 + 0{,}0002) = 0{,}0087$$

Để đánh giá độ chính xác của giá trị này, ta lưu ý rằng

$$y'_x = \frac{d}{dx}\log_{10} x = \frac{M}{x} = \frac{0{,}43429}{x}$$

do đó $y'(50) = \dfrac{0{,}43429}{50} = 0{,}0087$

Như vậy, các kết quả chính xác đến vị trí thập phân thứ tư.

§4. CÔNG THỨC VI PHÂN GẦN ĐÚNG TRÊN CƠ SỞ CÔNG THỨC STƠCLING

Các công thức tính số đạo hàm tại điểm $x = x_0$ của hàm y được dẫn ra trong mục §3 bất lợi vì chúng chỉ áp dụng cho các giá trị một phía của hàm $x > x_0$. Công thức đạo hàm đối xứng, tính các giá trị của hàm y đã cho cả với $x > x_0$ và $x < x_0$ sẽ đảm bảo độ chính xác tương đối cao hơn. Ta sẽ dùng công thức nội suy Stơcling làm cơ sở rút ra các công thức đạo hàm này.

Cho tập hợp các điểm cách đều... ; x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3,... với $x_{i+1} - x_i = h$ và $y_i = f(x_i)$ là các giá trị tương ứng của hàm đã cho y = f(x). Đặt $q = \frac{x - x_0}{h}$ và thay hàm y gần đúng bằng đa thức nội suy Stơcling

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \dots \qquad (7.24)$$

trong đó để ngắn gọn ta đưa vào kí hiệu

$$\Delta y_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}$$

$$\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} = \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$$

$$\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} = \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}$$

Từ công thức (7.24) và lưu ý rằng $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$, ta được

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-\frac{1}{2}} + q\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{2q^3-q}{12}\Delta^4 y_{-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5q^4 - 15q^2 + 4}{120}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{3q^5 - 10q^3 + 4q}{360}\Delta^6 y_{-3} + \dots\right) \quad (7.25)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{6q^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{2q^3-3q}{12}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{15q^4 - 30q^2 + 4}{360}\Delta^6 y_{-2} + \ldots\right) \qquad (7.26)$$

Trường hợp riêng, q = 0, ta có

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{30}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \ldots\right) \qquad (7.27)$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right) \qquad (7.28)$$

Ví dụ : Tìm y'(1) và y''(1) của hàm y = y(x) cho trong bảng 2.

Bảng 2 : Các giá trị của hàm y = y(x).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,96	0,7825361	– 86029	–1326	25	1
0,98	0,7739332	– 87355	–1301	26	
1,00	0,7651977	– 88656	–1275		
1,02	0,7563321	– 89931			
1,04	0,7473390				

Lập các sai phân của hàm y (bảng 2) và dùng các số hạng gạch dưới và công thức (7.27), ta được

$$y'(1) = \frac{1}{0{,}02}\left(-\frac{87355 + 88656}{2}.10^{-7} - \frac{1}{6}.\frac{25+26}{2}.10^{-7} + \frac{1}{30}.1.10^{-7}\right)$$

$$= -0{,}4400485$$

Lưu ý rằng hàm được lập bảng là hàm Betsen bậc không $y = J_0(x)$.

Để kiểm tra độ chính xác của kết quả tìm được y'(1), ta so sánh với kết quả sau

$$J'_0(1) = -J_1(x)\Big|_{x=1} = -0,4400506$$

Tương tự, ta cũng tìm được

$$y''(1) = \frac{1}{0,02^2}\left(-1301.10^{-7} - \frac{1}{12}.1.10^{-7}\right) = -0,325250$$

Kết quả này phù hợp tốt với giá trị chính xác dựa trên quan hệ của các hàm Betsen

$$y''(1) = J''_0(1) = J_1(1) - J_0(1)$$
$$= 0,4400506 - 0,7651977 = -0,325147$$

§5. CÁC CÔNG THỨC CẦU PHƯƠNG NIUTƠN – COTE

Nếu hàm f(x) liên tục trên khoảng [a, b] và nguyên hàm F(x) của nó đã biết thì tích phân xác định của hàm này bằng

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (7.29)$$

trong đó $F'(x) = f(x)$.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp nguyên hàm F(x) không thể tìm được, do đó các phương pháp tính số gần đúng tích phân xác định trở nên vô cùng quan trọng. Thay cho hàm f(x) là một hàm nội suy hay gần đúng $\varphi(x)$ và đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (7.30)$$

Hàm $\varphi(x)$ được tìm sao cho tích phân $\int_a^b \varphi(x)dx$ có thể tính được trực tiếp.

Tính số tích phân đơn gọi là phép cầu phương. Trước tiên ta trình bày các công thức cầu phương Niutơn – Cote dựa trên công thức nội suy Lagơrăng (Lagrange).

Công thức nội suy Lagơrăng áp dụng cho các điểm tuỳ ý x_0, $x_1, x_2, ..., x_n$ không nhất thiết cách đều trên khoảng [a, b]. Ta tìm đa thức Lagơrăng $L_n(x)$ có bậc không lớn hơn n, có cùng giá trị với hàm f(x) tại các điểm $x_0, x_1, ..., x_n$

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

trong đó giá trị của hàm y = f(x) đã cho tại các điểm đó là

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ ...,\ y_n = f(x_n)$$

Đa thức $L_n(x)$ được tìm dưới dạng

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x) y_i \qquad (7.31)$$

trong đó đa thức $P_i(x)$ thoả mãn điều kiện sau

$$P_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases} \qquad (7.32)$$

Vì đa thức ước có bằng không tại n điểm $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...,$ x_n nên nó có dạng

$$P_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n) \quad (7.33)$$

với c_i là hệ số không đổi. Đặt $x = x_i$ vào (7.33) và lưu ý rằng $P_i(x_i) = 1$, ta được

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad (7.34)$$

Kết hợp (7.31), (7.33) và (7.34), ta tìm được công thức nội suy Lagơrăng

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad (7.35)$$

Dễ thấy rằng bậc của đa thức $L_n(x)$ không lớn hơn n và nhờ điều kiện (7.32) ta có

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x_j)y_i = p_j(x_j)y_j = y_j \; (j = 0, 1, ..., n)$$

Để tính tích phân $\int_a^b y dx$, $y = f(x)$, ta chọn khoảng $h = \frac{b-a}{n}$ chia khoảng [a, b] thành các điểm cách đều $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ $(i = 1, 2, ..., n - 1)$, $x_n = b$, và cho $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$.

Thay hàm y bởi đa thức nội suy Lagơrăng $L_n(x)$, ta được công thức cầu phương gần đúng

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i \quad (7.36)$$

trong đó A_i là các hệ số không đổi xác định.

Kí hiệu $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ và $q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n)$ (7.37)

ta viết lại (7.35) dưới dạng

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i \qquad (7.38)$$

Lại thay hàm y trong (7.36) bởi đa thức $L_n(x)$ trong (7.38), ta được

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\, dx$$

Theo (7.37) $dq = \dfrac{dx}{h}$, nên đổi biến tích phân cho kết quả

$$A_i = h\, \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Do $h = \dfrac{b-a}{n}$, thông thường ta đặt $A_i = (b-a)H_i$ trong đó

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\, dq \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \qquad (7.39)$$

là hằng số có tên hệ số Cote.

Như vậy, công thức cầu phương (7.36) trở thành dạng

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_i y_i \qquad (7.40)$$

trong đó $h = \dfrac{b-a}{n}$ và $y_i = f(a + ih)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Dễ thấy các quan hệ sau được nghiệm đúng

$$\sum_{i=0}^{n} H_i = 1, \; H_i = H_{n-i} \tag{7.41}$$

§6. CÔNG THỨC HÌNH THANG VÀ SỐ HẠNG DƯ

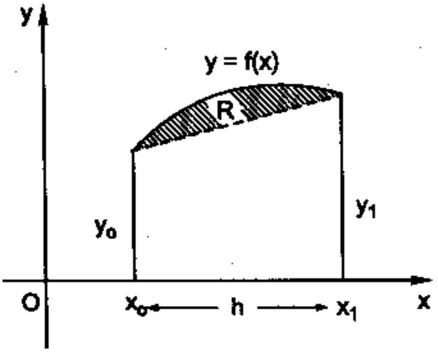
1. Công thức hình thang và số hạng dư

Áp dụng công thức (7.39) cho n = 1, ta có

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2} \; ; \text{ do đó } \int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \tag{7.42}$$

Đó là công thức hình thang dùng tính gần đúng tích phân xác định (H. 43).



Hình 43

Phần dư của công thức cầu phương (7.42) là

$$R = \int_{x_0}^{x_1} ydx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Xem R = R(h) như một hàm của khoảng h, do đó ta có thể đặt

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} ydx - \frac{h}{2}\left[y(x_0) + y(x_0 + h)\right]$$

Lấy đạo hàm công thức này theo h đến bậc hai, ta được

$$R'(h) = y(x_0 + h) - \frac{1}{2}\left[y(x_0) + y(x_0 + h)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h)$$

$$= \frac{1}{2}\left[y(x_0 + h) - y(x_0)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h)$$

và $$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{1}{2}y'(x_0) - \frac{h}{2}y''(x_0 + h)$$

$$= \frac{h}{2}y''(x_0 + h)$$

Chú ý rằng R(0) = 0, R'(0) = 0.

Từ đó lấy tích phân theo h và dùng định lí giá trị trung bình, ta rút ra liên tiếp

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h ty''(x_0 + t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}y''(\xi_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}y''(\xi_1)$$

trong đó $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ và

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2 y''(\xi_1)dt$$

$$= -\frac{1}{4}y''(\xi)\int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi)$$

với $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Như vậy cuối cùng ta có biểu thức xác định số hạng dư

$$R = -\frac{h^3}{12}y''(\xi) \text{ trong đó } \xi \in (x_0, x_1).$$

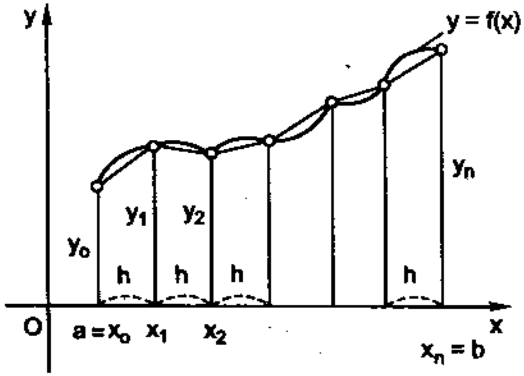
2. Công thức hình thang tổng quát

Để tính tích phân $\int_a^b ydx$, ta chia khoảng lấy tích phân [a, b] thành n phần bằng nhau $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ và áp dụng quy tắc hình thang (7.42). Đặt $h = \frac{b-a}{n}$ và kí hiệu $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, ta có

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

hay $$\int_a^b ydx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (7.43)$$

Về mặt hình học, công thức (7.43) nhận được bằng cách thay đồ thị của hàm lấy tích phân y = f(x) bởi một đường thuộc đa giác (H. 44).



Hình 44

Phần dư (sai số) của công thức cầu phương (7.43) bằng

$$R = \int_{x_0}^{x_n} y dx - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} y dx - \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)\right] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} y''(\xi_i) \qquad (7.44)$$

trong đó $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Xét trung bình số học

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y''(\xi) \qquad (7.45)$$

Rõ ràng μ nằm giữa giá trị nhỏ nhất m_2 và giá trị lớn nhất M_2 của đạo hàm bậc hai y" trên khoảng [a, b] : $m_2 \le \mu \le M_2$.

Vì y" liên tục trên khoảng [a, b], do đó tồn tại một điểm $\xi \in [a, b]$ sao cho $\mu = f''(\xi)$

Từ các công thức (7.44) và (7.45) ta có

$$R = -\frac{nh^3}{12}y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12}\ y''(\xi)$$

trong đó $\xi \in [a, b]$.

§7. CÔNG THỨC SIMPSON VÀ SỐ HẠNG DƯ

1. Công thức Simpson và số hạng dư

Nếu trong công thức (7.39) đặt n = 2, ta có

$$H_0 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{6}$$

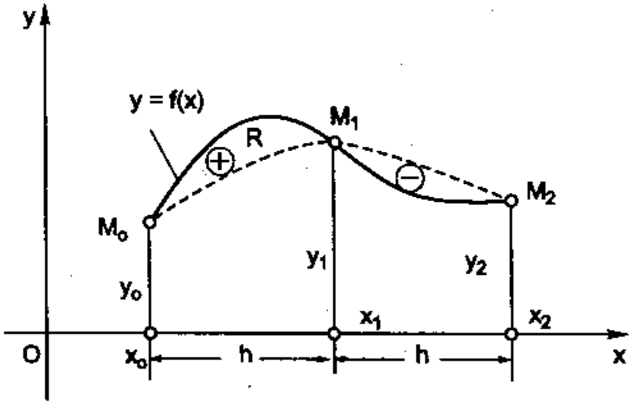
$$H_1 = -\frac{1}{2}.\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)dq = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{6}$$

Do $x_2 - x_0 = 2h$, nên ta có công thức Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (7.46)$$

Về mặt hình học, công thức này nhận được bằng cách thay đường cong đã cho $y = f(x)$ bởi parabol $y = L_2(x)$ đi qua ba điểm $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ (H. 45).



Hình 45

Phần dư của công thức Simpson có dạng

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{7.47}$$

Cố định điểm giữa x_1 và xem R như một hàm của khoảng h ($h \geq 0$), ta có

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y\,dx - \frac{h}{3}\left[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)\right]$$

Do đó, dễ dàng tính được các đạo hàm của R theo h

$$R'(h) = y(x_1 + h) + y(x_1 - h) - \frac{1}{3}[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)] -$$

$$- \frac{h}{3}\left[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)\right]$$

$$= \frac{2}{3}[y(x_1 - h) + y(x_1 + h)] - \frac{4}{3}y(x_1) - \frac{h}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)]$$

$$R''(h) = \frac{2}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] -$$

$$-\frac{1}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)]$$

$$= \frac{1}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)]$$

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}\left[y'''(x_1 + h) - y'''(x_1 - h)\right] = -\frac{2h^2}{3}y^{IV}(\xi_3)$$

trong đó $\xi_3 \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

Hơn nữa, ta có

$$R(0) = 0, R'(0) = 0, R''(0) = 0.$$

Tích phân R''' (h) và dùng định lí giá trị trung bình, ta tìm được

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 y^{IV}(\xi_3)dt$$

$$= -\frac{2}{3}y^{IV}(\xi_2)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9}h^3 y^{IV}(\xi_2)$$

trong đó $\xi_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

Từ đó suy ra

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 y^{IV}(\xi_2)dt$$

$$= -\frac{2}{9}y^{IV}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18}h^4 y^{IV}(\xi_1)$$

trong đó $\xi_1 \in (x_1 - h), (x_1 + h)$ và

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{IV}(\xi_1)dt$$

$$= -\frac{1}{18} y^{IV}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi)$$

trong đó $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

Như vậy, số hạng dư của công thức Simpson bằng

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi),\ \xi \in (x_0, x_2) \qquad (7.48)$$

2. Công thức Simpson tổng quát

Đặt $n = 2m$ là một số chẵn và $y_1 = f(x_i)$, $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$, là các giá trị của hàm $y = f(x)$ tại các điểm cách đều $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ với khoảng

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

Áp dụng công thức Simpson (7.46) cho mỗi khoảng đôi $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{2m-2}, x_{2m}]$ với độ rộng 2h (H. 46), ta được

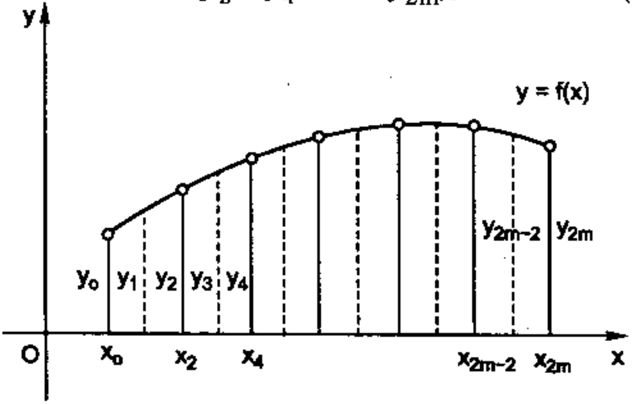
$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

Do đó, ta có công thức Simpson tổng quát

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) +$$

$$+ 2 (y_2 + y_4 + ... + y_{2m})] \qquad (7.49)$$



Hình 46

Sử dụng kí hiệu

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}$$

$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m}$$

ta có thể viết (7.49) dưới dạng đơn giản hơn

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2\right] \qquad (7.50)$$

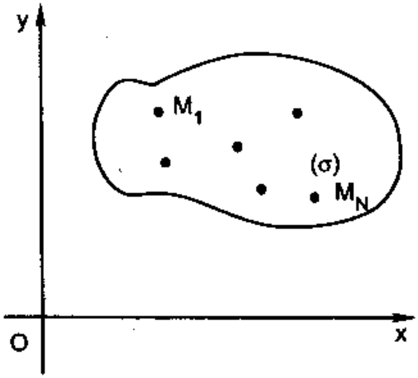
§8. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN HAI LỚP

1. Công thức chung tích phân hai lớp gần đúng

Giả sử hàm z = f(x, y) xác định và liên tục trên miền giới nội σ (H. 47). Trong miền này ta chọn một tập các điểm

(điểm mạng) M_i (x_i, y_i) (i = 1, 2,..., N). Để tính gần đúng tích phân hai lớp $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy$, ta đặt

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i, y_i) \qquad (7.51)$$



Hình 47

Để tìm các hệ số A_i ta đòi hỏi công thức (7.51) nghiệm đúng đối với tất cả các đa thức có bậc không lớn hơn n sau

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l \le n} c_{kl} x^k y^l \qquad (7.52)$$

Do đó cần và đủ là công thức (7.51) chính xác đối với tích các luỹ thừa

$$x^k y^l \;\; (k, l = 0, 1, 2, ..., n \,;\, k + l \le n)$$

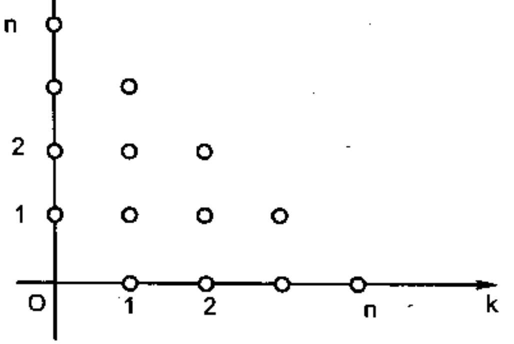
Đặt $f(x, y) = x^k y^l$ vào (7.51), ta có

$$I_{kl} = \iint\limits_{(\sigma)} x^k y^l dxdy = \sum_{i=1}^{N} A_i x_i^k y_i^l \qquad (7.53)$$

$$(k, l = 0, 1, 2, ..., n \,;\, k + l \le n)$$

Nói chung, các hệ số A_i của (7.51) có thể được xác định từ hệ phương trình tuyến tính (7.53). Muốn hệ (7.53) xác định, cần thiết rằng số N chưa biết phải bằng số các phương trình, do vậy khi tạo ra một "mạng dạng các số mũ" (H. 48), ta được

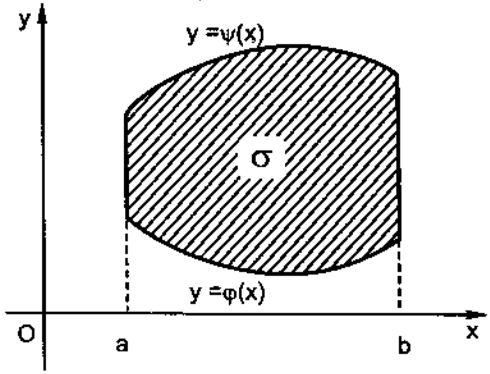
$$N = (n + 1) + n + ... + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$



Hình 48

Một vấn đề khó khăn và còn bỏ ngỏ là lựa chọn đặc biệt nhất các điểm mạng đối với miền (σ) đã cho.

Ta có thể chỉ ra kĩ thuật tổng quát đầy đủ khác để tính một tích phân hai lớp. Giả sử miền lấy tích phân bị giới nội bởi các đường cong đơn giá liên tục : $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $(\varphi(x) \leq \psi(x))$ và hai đường thẳng đứng $x = a$, $x = b$ (H. 49).



Hình 49

Dùng các quy tắc quen thuộc, viết các cận lấy tích phân hai lớp ta được

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

Giả sử $$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \tag{7.54}$$

do đó $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx \tag{7.55}$$

Áp dụng một trong các công thức cầu phương cho tích phân đơn ở vế phải của (7.55), ta được

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} C_i F(x_i) \tag{7.56}$$

trong đó $x_i \in [a, b]$ ($i = 1, 2, ..., n$) và C_i là các hệ số không đổi nào đó. Các giá trị $F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x,y)dy$ có thể tìm được nhờ công thức cầu phương nào đó, chẳng hạn

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j),$$

trong đó B_{ij} là các hằng số.

Từ công thức (7.56) suy ra

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} C_i B_{ij} f(x_i, y_j) \qquad (7.57)$$

với C_i, B_{ij} là các hằng số đã biết.

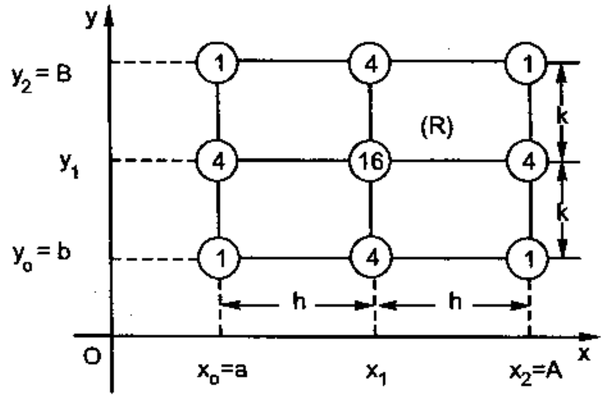
2. Công thức tích phân hai lớp gần đúng Simpson

Cho miền lấy tích phân hình chữ nhật : $R\{a \le x \le A, b \le y \le B\}$, (H. 50), có các cạnh song song với các trục toạ độ. Chia đôi mỗi khoảng [a, A] và [b, B] bởi các điểm tương ứng

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h = A$$

và $$y_0 = b, y_1 = b + k, y_2 = b + 2k = B$$

trong đó : $h = \dfrac{A-a}{2},\ k = \dfrac{B-b}{2}.$



Hình 50

Do đó, ta nhận được tất cả 9 điểm (x_i, y_j) (i, j = 0, 1, 2, ..., 9). Ta có

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy \qquad (7.58)$$

Tính tích phân trong cùng bằng công thức cầu phương Simpson

$$\iint_{(R)} f(x,y)dxdy = \int_a^A \frac{k}{3}\left[f(x,y_0) + 4f(x,y_1) + f(x,y_2)\right]dx$$

$$= \frac{k}{3}\left[\int_a^A f(x,y_0)dx + 4\int_a^A f(x,y_1)dx + \int_a^A f(x,y_2)dx\right]$$

Lại áp dụng công thức Simpson cho mỗi tích phân, cho kết quả

$$\iint_{(R)} f(x,y)\,dxdy = \frac{hk}{9}\{[f(x_0,y_0) + 4f(x_1,y_0) + f(x_2,y_0)] +$$

$$+ 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] +$$

$$+ [f(x_0,y_2) + 4f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2)]\}$$

hay

$$\iint_{(R)} f(x,y)\,dxdy = \frac{hk}{9}\{[f(x_0,y_0) + f(x_2,y_0) + f(x_0,y_2) + f(x_2,y_2)] +$$

$$+4[f(x_1,y_0) + f(x_0,y_1) + f(x_2,y_1) + f(x_1,y_2)] +$$

$$+16f(x_1,y_1)\} \qquad (7.59)$$

(7.59) gọi là công thức tích phân hai lớp gần đúng Simpson.

Như vậy

$$\iint_{(R)} f(x,y)dxdy = \frac{hk}{9}(\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2) \qquad (7.60)$$

trong đó σ_0 là tổng các giá trị của hàm lấy tích phân f(x, y) tại các đỉnh của hình chữ nhật R, σ_1 là tổng các giá trị của hàm f(x, y) tại các điểm giữa của các cạnh hình chữ nhật R, còn $\sigma_2 = f(x_1, y_1)$ là giá trị của hàm f(x, y) tại tâm của R.

BÀI TẬP CHƯƠNG VII

1. Dùng công thức Niutơn - Cote đánh giá tích phân sau

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

2. Dùng công thức Simpson, tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

với số điểm chia cách đều n = 10.

3. Áp dụng công thức Simpson (7.59), đánh giá tích phân hai lớp

$$I = \int_4^{4,4}\int_2^{2,6} \frac{dxdy}{xy}$$

Chương VIII

CÁC PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG TRONG CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

Phương trình Sơrơđingơ (Schrödinger) không phụ thuộc thời gian đối với một số mô hình thế năng một chiều đơn giản như hố thế vuông góc có bề cao hữu hạn hoặc vô hạn, hàng rào thế và bài toán dao động tử điều hoà,... có thể giải chính xác. Ta sẽ sử dụng các kết quả này để nghiên cứu Hamintôniên (Hamiltonian) của hệ lượng tử bao gồm các số hạng tương tác không thể giải một cách chính xác. Các số hạng tương tác này gọi là nhiễu loạn gây bởi trường ngoài (ví dụ trường điện từ) hay do tương tác của chính hệ lượng tử gây ra.

Có hai loại nhiễu loạn không phụ thuộc thời gian và phụ thuộc thời gian. Đối với nhiễu loạn không phụ thuộc thời gian, Hamintôniên được xét có các vectơ riêng của các trạng thái dừng ứng với phổ gián đoạn. Nhiễu loạn phụ thuộc thời gian ứng với các trạng thái liên tục.

Ngoài lí thuyết nhiễu loạn, trong chương này chúng ta sẽ trình bày phương pháp gần đúng khác gọi là phương pháp biến phân.

§1. LÍ THUYẾT NHIỄU LOẠN ĐỐI VỚI CÁC TRẠNG THÁI DỪNG KHÔNG SUY BIẾN

Giả sử Hamintôniên của hệ lượng tử có thể viết dưới dạng

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda\widehat{H}_1 \qquad (8.1)$$

Trong đó $\widehat{H}_0$ là phần chính của $\widehat{H}$ với các trị riêng $E_n^{(0)}$ và vectơ riêng $|\varphi_n\rangle$ không suy biến đã được biết chính xác

$$\widehat{H}_0|\varphi_n\rangle = E_n^{(0)}|\varphi_n\rangle \tag{8.2}$$

Còn yếu tố nhiễu loạn $\widehat{H}_1$ nhỏ so với $\widehat{H}_0$. Thông số nhiễu loạn λ giả thiết có giá trị nằm giữa 0 và 1. Khi $\lambda = 0$, Hamintôniên $\widehat{H} = \widehat{H}_0$ trở thành không nhiễu loạn và khi $\lambda \to 1$, ứng với Hamintôniên của hệ đang khảo sát.

Kí hiệu các vectơ riêng của $\widehat{H}$ là $|\psi_n\rangle$ ứng với các trị riêng E_n, ta có

$$(\widehat{H}_0 + \lambda\widehat{H}_1)|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \tag{8.3}$$

Khai triển $|\psi_n\rangle$ theo các vectơ trạng thái $|\varphi_n>$ và giả thiết có sự tương ứng giữa các trạng thái $|\psi_n\rangle$ và $|\varphi_n\rangle$, nghĩa là khi $\lambda \to 0$ ta có sự tương ứng sau

$$|\psi_n\rangle \to |\varphi_n\rangle \text{ và } E_n \to E_n^{(0)}$$

$$|\psi_n\rangle = |\varphi_n\rangle + \sum_{k\neq n} c_{nk}(\lambda)|\varphi_k\rangle \tag{8.4}$$

Từ điều kiện $\lambda \to 0$ ta có $|\psi_n> \to |\varphi_n>$, dẫn đến $c_{nk}(0) = 0$. Các hệ số khai triển C_{nk} và trị riêng E_n cũng được khai triển chuỗi theo λ.

$$C_{nk}(\lambda) = \lambda C_{nk}^{(1)} + \lambda^2 C_{nk}^{(2)} + \lambda^3 C_{nk}^{(3)} + \ldots \tag{8.5}$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots \tag{8.6}$$

Thay các khai triển này vào phương trình Sorođingơ (8.3), ta được

$$(\widehat{H}_0+\lambda\widehat{H}_1)\left[\left|\varphi_n\right\rangle+\sum_{k\neq n}\lambda C_{nk}^{(1)}\left|\varphi_k\right\rangle+\sum_{k\neq n}\lambda^2 C_{nk}^{(2)}\left|\varphi_k\right\rangle+...\right]$$

$$=\left(E_n^{(0)}+\lambda E_n^{(1)}+\lambda^2 E_n^{(2)}+...\right)$$

$$\left[\left|\varphi_n\right\rangle+\sum_{k\neq n}\lambda C_{nk}^{(1)}\left|\varphi_k\right\rangle+\sum_{k\neq n}\lambda^2 C_{nk}^{(2)}\left|\varphi_k\right\rangle+...\right] \qquad (8.7)$$

Để phương trình (8.7) thoả mãn với λ bất kì, các hệ số mỗi bậc của λ ở cả hai vế của phương trình phải bằng nhau.

Trong gần đúng bậc một, chỉ giữ lại các số hạng tỉ lệ với λ, phương trình (8.7) có dạng

$$\widehat{H}_0\sum_{k\neq n}C_{nk}^{(1)}\left|\varphi_k\right\rangle+\widehat{H}_1\left|\varphi_n\right\rangle=E_n^{(0)}\sum_{k\neq n}C_{nk}^{(1)}\left|\varphi_k\right\rangle+E_n^{(1)}\left|\varphi_n\right\rangle \quad (8.8)$$

Vì $\widehat{H}_0\left|\varphi_k\right\rangle=E_k^{(0)}\left|\varphi_k\right\rangle$ nên phương trình (8.8) được viết lại

$$E_n^{(1)}\left|\varphi_n\right\rangle=\widehat{H}_1\left|\varphi_n\right\rangle+\sum_{k\neq n}\left(E_k^{(0)}-E_n^{(0)}\right)C_{nk}^{(1)}\left|\varphi_k\right\rangle \qquad (8.9)$$

Nhân trái hai vế của (8.9) với vectơ bra $<\varphi_n|$ và sử dụng điều kiện trực giao của các vectơ trạng thái không nhiễu loạn $<\varphi_n|\varphi_k>=\delta_{nk}$, ta tìm được phần bổ chính bậc một của năng lượng

$$E_n^{(1)}=\left\langle\varphi_n\left|\widehat{H}_1\right|\varphi_n\right\rangle \qquad (8.10)$$

Tương tự, nhân trái hai vế của phương trình (8.9) với vectơ bra $<\varphi_m|$ $(m\neq n)$ và sử dụng điều kiện trực giao của các vectơ trạng thái không nhiễu loạn, ta được

$$\left\langle\varphi_m\left|\widehat{H}_1\right|\varphi_n\right\rangle+\left(E_m^{(0)}-E_n^{(0)}\right)C_{nm}^{(1)}=0$$

Kết quả này cho biểu thức xác định hệ số khai triển $C_{nk}^{(1)}$ trong gần đúng bậc một

$$C_{nk}^{(1)} = \frac{\left\langle \varphi_k \middle| \widehat{H}_1 \middle| \varphi_n \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \tag{8.11}$$

Do đó, trạng thái nhiễu loạn trong gần đúng bậc một có dạng

$$\left|\psi_n\right\rangle = \left|\varphi_n\right\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\left\langle \varphi_k \middle| \widehat{H}_1 \middle| \varphi_n \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \left|\varphi_k\right\rangle \tag{8.12}$$

Bỏ qua các số hạng chứa các luỹ thừa của λ từ bậc ba trở lên trong phương trình (8.7), ta được

$$\widehat{H}_0 \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} \left|\varphi_k\right\rangle + \widehat{H}_1 \sum_{k \neq n} E_n^{(1)} \left|\varphi_k\right\rangle$$

$$= E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} \left|\varphi_k\right\rangle + E_n^{(1)} \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} \left|\varphi_k\right\rangle + E_n^{(2)} \left|\varphi_n\right\rangle \tag{8.13}$$

Nhân trái hai vế của (8.13) với bra $\left\langle \varphi_n \right|$, ta thu được biểu thức phần bổ chính bậc hai của năng lượng

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \left\langle \varphi_n \middle| \widehat{H}_1 \middle| \varphi_K \right\rangle C_{nk}^{(1)}$$

Thay thế $C_{nk}^{(1)}$ từ phương trình (8.11), ta được kết quả

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{\left|\left\langle \varphi_k \middle| \widehat{H}_1 \middle| \varphi_n \right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \tag{8.14}$$

Ở đây, ta đã sử dụng $\left\langle \varphi_n \middle| \widehat{H}_1 \middle| \varphi_k \right\rangle = \left\langle \varphi_k \middle| \widehat{H}_1 \middle| \varphi_n \right\rangle^*$.

Để cho phép gần đúng có nghĩa thì số hạng bổ chính phải nhỏ

$$\left|\lambda C_{nk}^{(1)}\right| = \left|\frac{\left\langle \varphi_k \left| \lambda \widehat{H}_1 \right| \varphi_n \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}\right| \ll 1$$

Từ đó suy ra

$$\left|\left\langle \varphi_k \left| \lambda \widehat{H}_1 \right| \varphi_n \right\rangle\right| \ll \left|E_n^{(0)} - E_k^{(0)}\right| \ ; n \neq k \tag{8.15}$$

Điều đó có nghĩa là các yếu tố ma trận của toán tử nhiễu loạn phải có giá trị nhỏ hơn khoảng cách giữa các mức năng lượng bất kì của các trạng thái không nhiễu loạn. Hơn nữa trong gần đúng bậc một, phần bổ chính của các mức năng lượng bằng trị trung bình của năng lượng nhiễu loạn trong trạng thái không bị nhiễu loạn (8.10).

Ví dụ : Hiệu ứng Stac (Stark) trong nguyên tử hiđrô.

Hiện tượng tách vạch quang phổ của nguyên tử dưới tác dụng của điện trường được phát hiện bằng thực nghiệm năm 1913 và mang tên người phát hiện ra nó : Stac. Ta biết rằng Hamintôniên không nhiễu loạn của nguyên tử hiđrô có dạng

$$\widehat{H}_0 = \frac{\widehat{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \tag{8.16}$$

với các hàm riêng tương ứng là

$$\varphi_{nlm}(\vec{r}) = \left\langle \vec{r} \middle| \varphi_{nlm} \right\rangle$$

Khi đặt nguyên tử trong điện trường ngoài có cường độ ε dọc theo trục z, thế năng của êlectron đóng vai trò thế nhiễu loạn bằng

$$\widehat{H}_1 = e\vec{\varepsilon}.\vec{r} = e\varepsilon z \tag{8.17}$$

Vì tất cả các trạng thái φ_{nlm} với $n \geq 2$ đều bị suy biến nên lí thuyết nhiễu loạn không suy biến trình bày trong mục này chỉ áp dụng cho trạng thái cơ bản n = 1. Phần bổ chính bậc một của năng lượng được tìm thấy bằng

$$E_{100}^{(1)} = e\varepsilon\left\langle\varphi_{100}\left|z\right|\varphi_{100}\right\rangle = e\varepsilon\int\left|\varphi_{100}\right|^2 zd^3r$$

Tương tự, phần bổ chính bậc hai đối với năng lượng là

$$E_{100}^{(2)} = e^2\varepsilon^2 \sum_{nlm\neq 100} \frac{\left|\left\langle\varphi_{nlm}\left|z\right|\varphi_{100}\right\rangle\right|^2}{E_{100}^{(0)} - E_{nlm}^{(0)}} \tag{8.18}$$

Yếu tố ma trận của phương trình (8.18) có dạng

$$\left\langle\varphi_{nlm}\left|z\right|\varphi_{100}\right\rangle = \int d^3r\,R_{nl}(r)\,Y_{lm}^*(\theta,\varphi)r\cos\theta R_{10}Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$= \int r^2 drR_{nl}(r)rR_{10}(r)\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} Y_{10}(\theta,\varphi)\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\delta_{1l}\delta_{m0}\int r^2 drR_{nl}(r)rR_{10}(r) \tag{8.19}$$

trong đó ta đã sử dụng các hệ thức sau

$$\cos\theta - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{10} \text{ và } Y_{00} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Từ (8.19) suy ra yếu tố ma trận $\left\langle\varphi_{nlm}\left|z\right|\varphi_{100}\right\rangle$ sẽ khác không nếu số lượng tử từ m của các trạng thái có đóng góp vào sự thay đổi năng lượng của một trạng thái phải như nhau. Điều đó có nghĩa là nhiễu loạn hoạt động với quy tắc lọc lựa

$$\Delta m = 0 \tag{8.20}$$

Quy tắc lọc lựa (8.20) là hệ quả của giao hoán giữa toán tử tương tác nhiễu loạn với toán tử hình chiếu momen xung lượng trên trục z

$$\left[\hat{H}_1, \hat{L}_z\right] = 0 \tag{8.21}$$

§2. NHIỄU LOẠN SUY BIẾN

Xét toán tử Hamintôniên $\widehat{H}_0$ không nhiễu loạn bị suy biến bậc s

$$\widehat{H}_0\left|\varphi_{nk}\right\rangle = E_n^{(0)}\left|\varphi_{nk}\right\rangle,\ k = 1, 2, \ldots, s \tag{8.22}$$

Ứng với một trị riêng $E_n^{(0)}$, trạng thái của hệ không nhiễu loạn được mô tả bởi các vectơ trạng thái trực giao

$$\left|\varphi_{n1}\right\rangle, \left|\varphi_{n2}\right\rangle, \ldots, \left|\varphi_{ns}\right\rangle$$

Giả sử Hamintôniên nhiễu loạn $\widehat{H}$ của hệ có dạng

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1$$

và các vectơ riêng của $\widehat{H}$ được xác định từ phương trình Sơrođingơ

$$\widehat{H}\left|\psi_n\right\rangle = \left(\widehat{H}_0 + \widehat{H}_1\right)\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\psi_n\right\rangle \tag{8.23}$$

Khai triển $\left|\psi_n\right\rangle$ theo các vectơ riêng của toán tử $\widehat{H}_0$

$$\left|\psi_n\right\rangle = \sum_{k=1}^{s} c_k\left|\varphi_{nk}\right\rangle \tag{8.24}$$

và thay (8.24) vào (8.23), ta được

$$\sum_{k=1}^{s} c_k\left(\widehat{H}_0\left|\varphi_{nk}\right\rangle + \widehat{H}_1\left|\varphi_{nk}\right\rangle\right) = E_n\sum_{k=1}^{s} c_k\left|\varphi_{nk}\right\rangle \tag{8.25}$$

Nhân hai vế của phương trình (8.25) với vectơ bra $\left\langle\varphi_{nl}\right|$

$$\sum_{k=1}^{s} c_k E_n^{(0)}\left\langle\varphi_{nl}\middle|\varphi_{nk}\right\rangle + \sum_{k=1}^{s} c_k\left\langle\varphi_{nl}\middle|\widehat{H}_1\middle|\varphi_{nk}\right\rangle$$

$$= E_n\sum_{k=1}^{s} c_k\left\langle\varphi_{nl}\middle|\varphi_{nk}\right\rangle \tag{8.26}$$

và kí hiệu yếu tố ma trận $H_{lk} = \langle\varphi_{nl}|\widehat{H}_1|\varphi_{nk}\rangle$, đồng thời đặt $\varepsilon_n = E_n - E_n^{(0)}$, khi đó phương trình (8.26) biến đổi thành

$$\sum_{k=1}^{s}(H_{lk} - \varepsilon_n\delta_{lk})c_k = 0 \qquad (8.27)$$

Muốn cho hệ phương trình trên (s phương trình đối với c_k) có nghiệm c_k khác không thì định thức của hệ (8.27) phải bằng không

$$\begin{vmatrix} (H_{11} - \varepsilon_n) & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1s} \\ H_{21} & (H_{22} - \varepsilon_n) & H_{23} & \cdots & H_{2s} \\ \vdots & & & & \\ H_{s1} & H_{s2} & H_{s3} & \cdots & (H_{ss} - \varepsilon_n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.28)$$

Đây là phương trình đại số bậc s đối với ε_n. Giải phương trình này ta được s nghiệm nói chung khác nhau là :

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, ..., \varepsilon_{ns}$$

Như vậy, khi có nhiễu loạn một mức suy biến $E_n^{(0)}$ sẽ tách thành một dãy các mức gần nhau

$$E_{nj} = E_n^{(0)} + \varepsilon_{nj},\ j = 1, 2, ..., s$$

Thay một giá trị ε_{nj} vào hệ phương trình (8.27) ta tìm được một giá trị của c_k. Thành thử vectơ trạng thái của hệ nhiễu loạn bây giờ có dạng

$$|\psi_{nj}\rangle = \sum_{k=1}^{s} c_k(\varepsilon_{nj})|\varphi_{nk}\rangle \qquad (8.29)$$

§3. CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA LÍ THUYẾT NHIỄU LOẠN

Để ví dụ về phương pháp nhiễu loạn trong gần đúng bậc bất kì, ta xét phương trình Sơrơđingơ mô tả chuyển động một chiều của hạt trong trường thế $\lambda V(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda V(x)\psi = E\psi$$

trong đó E là năng lượng của hạt. Đặt $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, $U = \frac{2m}{\hbar^2}V$

ta nhận được

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[k^2 - \lambda U\right]\psi = 0 \qquad (8.30)$$

Giả sử rằng chuyển động của hạt bị giới hạn trong miền $0 \le x \le L$ bởi rào thế có bề cao vô hạn (không đưa vào U) tại $x = 0$ và $x = L$. Do đó hàm sóng ψ phải thoả mãn điều kiện biên

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Nghiệm chính xác của phương trình Sơrơđingơ

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_n + k_n^2\varphi_n = 0 \qquad (8.31)$$

mô tả chuyển động tự do của hạt trong hố thế có bề cao vô hạn, thoả mãn điều kiện biên trên có dạng

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, 3,... \qquad (8.32)$$

$$k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\ ;\ \langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \int_0^L \varphi_n^*\varphi_m dx = \delta_{nm}$$

Để tích phân phương trình (8.30), ta biểu diễn nghiệm hình thức của (8.30) dưới dạng

$$\psi(x) = -\lambda\int_0^L G_k(x|x_0)U(x_0)\psi(x_0)dx_0 \qquad (8.33)$$

Hàm $G_k(x|x_0)$ gọi là hàm Grin (Green) của phương trình vi phân (8.30), nó thoả mãn phương trình vi phân sau

$$\frac{d^2G_k}{dx^2}(x|x_0) + k^2G_k(x|x_0) = -\delta(x - x_0) \qquad (8.34)$$

Hàm Grin G_k có thể biểu diễn qua các hàm φ_n dưới dạng

$$G_k(x|x_0) = \sum_p \frac{\varphi_p(x)\,\varphi_p^*(x_0)}{k_p^2 - k^2} \qquad (8.35)$$

Đặt chuỗi (8.35) vào phương trình tích phân (8.33), ta được

$$\psi(x) = \lambda\sum_p \frac{\int_0^L \varphi_p(x_0)U(x_0)\psi(x_0)dx_0}{k^2 - k_p^2}\varphi_p(x) \qquad (8.36)$$

Khi $\lambda \to 0$, Hamintôniên trở thành không nhiễu loạn, ta có sự tương ứng sau

$$\psi_n \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \varphi_n$$

Do vậy chuỗi (8.36) được viết lại dưới dạng

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) + \lambda\sum_{p\neq n} \frac{\int_0^L \varphi_p(x_0)U(x_0)\psi(x_0)}{k^2 - k_p^2}\varphi_p(x) \quad (8.37)$$

Để hệ số của φ_n trong công thức (8.36) bằng đơn vị, từ (8.36) và (8.37) suy ra

$$k^2 = k_n^2 + \lambda \int_0^L \varphi_n(x_0)U(x_0)\psi(x_0)dx_0 \qquad (8.38)$$

Thực vậy, ta có thể kiểm tra tính đúng đắn của công thức (8.38) bằng cách nhân cả hai vế của phương trình (8.30) với hàm sóng φ_n và tích phân từ 0 đến L

$$\int_0^L \varphi_n \frac{d^2\psi}{dx^2} dx + k^2 \int_0^L \psi\varphi_n dx - \lambda \int_0^L \varphi_n U\psi dx = 0 \qquad (8.39)$$

Số hạng đầu tiên được tính nhờ tích phân từng phần bằng

$$\int_0^L \varphi_n \frac{d^2\psi}{dx^2} dx = -k_n^2 \int_0^L \psi\varphi_n dx \qquad (8.40)$$

Từ (8.37) và điều kiện trực chuẩn của các hàm sóng φ_n (8.32) suy ra $\int \psi\varphi_n dx = 1$. Do đó, kết hợp (8.39) và (8.40) ta được công thức (8.38).

Ta có thể áp dụng phương pháp gần đúng liên tiếp đối với phương trình (8.37), sau đó đặt kết quả nhận được vào (8.38) để tìm các gần đúng liên tiếp của đại lượng k^2. Gần đúng bậc không đối với hàm sóng ψ_n bằng : $\psi_n^{(0)} = \varphi_n$.

Khi đặt kết quả này vào vế phải của phương trình (8.37) ta được gần đúng bậc một

$$\psi_n^{(1)} = \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2} \varphi_p \qquad (8.41)$$

trong đó $U_{pn} = \int_0^L \varphi_p(x_0)U(x_0)\varphi_n(x_0)dx_0$ (8.42)

Đặt $\psi_n^{(1)}$ vào vế phải của (8.37), ta được biểu thức hàm sóng trong gần đúng bậc hai

$$\psi_n^{(2)} = \varphi_n(x) + \lambda\sum_{p\neq n}\frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2}\varphi_p +$$

$$+\lambda^2\sum_{p,q\neq n}\frac{U_{pq}U_{qn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)}\varphi_p \tag{8.43}$$

Tổng quát, gần đúng bậc a

$$\psi_n^{(a)} = \varphi_n + \lambda\sum_{p\neq n}\frac{\int_0^L \varphi_p U\psi_n^{(a-1)}dx_0}{k^2 - k_p^2}\varphi_p(x)$$

có dạng

$$\psi_n^{(a)} = \varphi_n + \lambda\sum_{p\neq n}\frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2}\varphi_p + \dots$$

$$\dots + \lambda^a\sum_{pq\dots\neq n}\frac{U_{pq}U_{qr}\dots U_{zn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)\dots(k^2 - k_z^2)}\varphi_p \tag{8.44}$$

Trong các công thức trên chứa đại lượng k^2 chưa biết. Đặt (8.44) vào (8.38) ta xác định được k^2 dưới dạng

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2\sum_{p\neq n}\frac{U_{np}U_{pn}}{k^2 - k_p^2} + \dots +$$

$$+ \lambda^{a+1}\sum_{pq\dots\neq n}\frac{U_{np}U_{pq}U_{qr}\dots U_{zn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)(k^2 - k_r^2)\dots(k^2 - k_z^2)} \tag{8.45}$$

Giải phương trình (8.45) bằng phương pháp gần đúng liên tiếp, ta được

$$(k^2)^{(1)} = k_n^2 + \lambda U_{nn}$$

$$(k^2)^{(2)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p\neq n} \frac{U_{np}U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2}$$

$$(k^2)^{(3)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p\neq n} \frac{U_{np}U_{pn}}{k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2} + $$

$$+ \lambda^3 \sum_{p\neq n} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)}$$

$$(k^2)^{(4)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p\neq n} \frac{U_{np}U_{pn}}{k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum\limits_{q\neq n} \dfrac{U_{nq}U_{qn}}{k_n^2 - k_q^2} - k_p^2}$$

$$+ \lambda^3 \sum_{pq\neq n} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qn}}{(k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2)(k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_q^2)} +$$

$$+ \lambda^4 \sum_{pqr\neq n} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qr}U_{rn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2)}$$

Tổng quát, gần đúng bậc a đối với đại lượng k^2 có dạng

$$(k^2)^{(a)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p\neq n} \frac{U_{np}U_{pn}}{(k^2)^{(a-2)} - k_p^2} +$$

$$+ \lambda^3 \sum_{pq\neq n} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qn}}{\left[(k^2)^{(a-3)} - k_p^2\right]\left[(k^2)^{(a-3)} - k_q^2\right]} + \ldots +$$

$$+ \lambda^a \sum_{pq\ldots\neq n} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qr}U_{rs}\ldots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)\ldots(k_n^2 - k_z^2)} \qquad (8.46)$$

Như vậy, hàm sóng trong gần đúng liên tiếp được xác định bằng các công thức sau

$$\psi_n^{(1)} = \varphi_n^{(x)} + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2} \varphi_p(x)$$

$$\psi_n^{(2)} = \varphi_n^{(x)} + \lambda \sum \frac{U_{pn}}{k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2} \varphi_p(x) +$$

$$+ \lambda^2 \sum_{pq \neq m} \frac{U_{pq} U_{qn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)} \varphi_p(x)$$

$$\psi_n^{(a)} = \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{(k^2)^{(a-1)} - k_p^2} \varphi_p(x) +$$

$$+ \lambda^2 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{pq} U_{qn}}{(k^2)^{(a-1)} - k_p^2} \varphi_p(x) + \ldots +$$

$$+ \lambda^a \sum_{pq \ldots \neq n} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rs} \ldots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2) \ldots (k_n^2 - k_z^2)} \varphi_p(x) \quad (8.47)$$

Nói chung, các gần đúng bậc càng cao đối với hàm sóng và k^2 càng có dạng phức tạp hơn. Lưu ý rằng các biểu thức (8.46) và (8.47) không phải là khai triển chuỗi theo λ. Tính hội tụ của chuỗi (8.46) và (8.47) tất nhiên tồn tại đối với các bài toán áp dụng thực tế. Người ta cũng có thể chỉ ra được các điều kiện áp dụng tốt lí thuyết nhiễu loạn như đã trình bày trong mục §1.

§4. CÔNG THỨC NHIỄU LOẠN CỦA FINBEC (FEENBERG)

Xét chuyển động của một hạt trong không gian ba chiều dưới tác dụng của thế năng $\widehat{U}_0 + \lambda\widehat{U}$. Hàm sóng $\Psi = \langle r|\Psi\rangle$ hay vectơ $|\Psi\rangle$ mô tả trạng thái của hạt thoả mãn phương trình

$$\nabla|\Psi\rangle + (k^2 - \widehat{U}_0 - \lambda\widehat{U})|\Psi \geq 0 \qquad (8.48)$$

trong đó bài toán không nhiễu loạn ($\lambda = 0$) với nghiệm chính xác $|\varphi_n >$ và các trị riêng k_n có lời giải từ phương trình

$$\nabla^2|\varphi_n > + (k_n^0 - \widehat{U}_0)|\varphi_n > = 0 \qquad (8.49)$$

Nếu ta xét bài toán hai hạt thì phương trình Sơrơđingơ trong trường hợp này có dạng

$$\nabla_1^2|\Psi\rangle + \nabla_2^2|\Psi\rangle + (k^2 - \widehat{U}_0 - \lambda\widehat{U})|\Psi\rangle = 0 \qquad (8.50)$$

Ở đây Ψ là hàm sóng của sáu biến số x_1, y_1, z_1 và x_2, y_2, z_2 (ba toạ độ đối với mỗi hạt). Các phương trình (8.48) và (8.50) có thể viết lại dưới dạng chung

$$\widehat{\mathscr{L}}|\Psi\rangle + k^2|\Psi\rangle = \lambda\widehat{U}|\Psi\rangle \qquad (8.51)$$

trong đó toán tử $\widehat{\mathscr{L}} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ trong phương trình (8.30), $\widehat{\mathscr{L}} = \nabla^2 - \widehat{U}_0$ trong phương trình (8.48) và $\widehat{\mathscr{L}} = \nabla_1^2 + \nabla_2^2 - \widehat{U}_0$ trong phương trình (8.50). Bài toán không nhiễu loạn

$$\widehat{\mathscr{L}}|\varphi_n\rangle + k_n^2|\varphi_n\rangle = 0 \qquad (8.52)$$

Nếu $\widehat{\mathscr{L}}$ là toán tử ecmite thì các vectơ riêng $|\varphi_n\rangle$ lập thành một cơ sở trực chuẩn đầy đủ

$$\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \int \varphi_n^* \varphi_m dV = \delta_{nm} \tag{8.53}$$

$$\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = 1$$

Khai triển $|\Psi\rangle$ thành chuỗi theo cơ sở $\{|\varphi_n\rangle\}$

$$|\Psi\rangle = \sum_p C_p |\varphi_p\rangle \ ; \ C_p = \langle\varphi_p|\Psi\rangle$$

Đặt chuỗi này vào phương trình (8.51) và sử dụng (8.52) ta được

$$\sum_p C_p(k^2 - k_p^2)|\varphi_p\rangle = \lambda \sum_p C_p \widehat{U}|\varphi_p\rangle$$

Suy ra

$$(k^2 - k_q^2)C_q = \lambda \sum_p C_p \langle\varphi_q|\widehat{U}|\varphi_p\rangle = \lambda \sum_p C_p U_{qp}$$

hay

$$\sum_p \left[(k^2 - k_q^2)\delta_{qp} - \lambda U_{qp}\right] C_p = 0 \tag{8.54}$$

trong đó U_{qp} là yếu tố ma trận của toán tử nhiễu loạn $\widehat{U}$ trong cơ sở $\{|\varphi_n\rangle\}$.

$$U_{qp} = \langle\varphi_q|\widehat{U}|\varphi_p\rangle = \int \varphi_q^* \widehat{U} \varphi_p dV$$

Hệ các phương trình đối với các hệ số khai triển C_p chỉ có nghiệm không tầm thường $C_p \neq 0$, nếu định thức của phương trình đặc trưng của (8.54) bằng không, nghĩa là

$$\det\left[(k^2 - k_q^2)\delta_{qp} - \lambda U_{qp}\right] = 0 \tag{8.55}$$

$$\text{hay}\begin{bmatrix} k^2-k_0^2-\lambda U_{00} & -\lambda U_{01} & -\lambda U_{02} & \cdots \\ -\lambda U_{10} & k^2-k_1^2-\lambda U_{11} & -\lambda U_{12} & \cdots \\ -\lambda U_{20} & -\lambda U_{21} & k^2-k_2^2-\lambda U_{22} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \\ . & . & . & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{bmatrix}=0$$

Giải phương trình này cho phép ta xác định được giá trị của k^2.

Để đơn giản ta giả thiết rằng, các yếu tố ma trận U_{ab} chỉ khác không với $a \le 2$, $b \le 2$. Khi đó công thức nhiễu loạn (8.46) có dạng đơn giản

$$k^2 = k_0^2 + \lambda U_{00} + \lambda^2 \left\{ \frac{U_{01}U_{10}}{k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11} - \dfrac{\lambda^2 U_{21}U_{12}}{k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_{02}U_{20}}{k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22} - \dfrac{\lambda^2 U_{21}U_{12}}{k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11}}} \right\} +$$

$$+ \lambda^3 \frac{U_{02}U_{21}U_{10} + U_{20}U_{01}U_{12}}{(k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11})(k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22}) - \lambda^2 U_{12}U_{21}}$$

Khai triển thành chuỗi theo λ mẫu số của biểu thức này, ta được

$$k^2 = k_0^2 + \lambda U_{00} + \lambda^2 \left[\frac{U_{01}U_{10}}{k^2 - k_1^2} + \frac{U_{02}U_{20}}{k^2 - k_2^2} \right] + \lambda^3 \left[\frac{U_{01}U_{11}U_{10}}{(k^2 - k_1^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_{01}U_{12}U_{20} + U_{02}U_{21}U_{10}}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)} + \frac{U_{02}U_{22}U_{20}}{(k^2 - k_2^2)^2} \right] + \ldots$$

Số hạng đầu tiên và tiếp theo trong ngoặc chứa λ^3 xuất hiện là do khai triển thành chuỗi của

$$\frac{1}{k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11}} \text{ và } \frac{1}{k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22}}$$

Xét hệ phương trình (8.54) xác định các hệ số khai triển chưa biết C_p. Giả thiết rằng ta xét nghiệm nếu không có nhiễu loạn thì $|\Psi\rangle \to |\varphi_n\rangle$, nghĩa là $C_n = 1$. Khi đó ta có

$$(k^2 - k_p^2 - \lambda U_{qq})C_p = \lambda U_{pn} + \lambda \sum_{q \neq np} C_q U_{pq} \tag{8.56}$$

(Kí hiệu $q \neq np$ ngụ ý khi lấy tổng thì chỉ số q không thể nhận các giá trị n và p). Trong phương trình (8.56) nếu ta đổi các chỉ số $p \leftrightarrow q$, ta được

$$(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})C_q = \lambda U_{qn} + \lambda C_p U_{qp} + \lambda \sum_{r \neq npq} C_r U_{qr} \tag{8.57}$$

Tương tự, đối với C_r ta có

$$(k^2 - k_r^2 - \lambda U_{rr})C_r =$$

$$= \lambda U_{rn} + \lambda C_p U_{rp} + \lambda C_q U_{rq} + \lambda \sum_{s \neq npqr} C_s U_{rs} \tag{8.58}$$

Để xác định được hệ số khai triển C_p (8.56), ta cần xác định được C_q. Hệ số C_q muốn xác định từ phương trình (8.57) thì ta cần biết C_r được xác định từ (8.58),... Như vậy ta chỉ có thể xác định một cách gần đúng, chẳng hạn bằng cách sau : Từ phương trình (8.57), ta chỉ giữ lại hai số hạng đầu tiên ở vế phải

$$(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})C_q = \lambda U_{qn} + \lambda C_p U_{qp}$$

Đặt kết quả này vào (8.56), ta được công thức tính C_p chính xác đến bậc hai

$$\left[k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} - \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{qp} U_{pq}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}}\right] C_p =$$

$$= \lambda U_{pn} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq} U_{qn}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}} \qquad (8.59)$$

Nếu đặt q = n trong phương trình (8.54) và cho $C_n = 1$ thì ta nhận được phương trình xác định k^2

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda \sum_{p \neq n} C_p U_{np} \qquad (8.60)$$

Thay giá trị C_p từ (8.59) vào (8.60), ta được k^2 với độ chính xác đến bậc ba

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} - \lambda^2 \sum\limits_{q \neq pn} \dfrac{U_{pq} U_{qp}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}}} +$$

$$+ \lambda^3 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq pn}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{\left[k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} - \lambda^2 \sum\limits_{r \neq pn} \dfrac{U_{pr} U_{rp}}{k^2 - k_r^2 - \lambda U_{rr}}\right][k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}]} \qquad (8.61)$$

Đối với định thức (8.55) bậc cao hơn (trước đây ta chỉ xét a ≤ 2, b ≤ 2), ta cần phải khai triển chính xác định thức đến bậc ba, chứa $k^2 - k_n^2 - \lambda U_{nn}$.

Đặt $$(x^2)_{np} = k_p^2 + \lambda U_{pp} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq} U_{qp}}{k^2 - (x^2)_{npq}} +$$

$$+ \lambda^3 \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rp}}{[k^2 - (x^2)_{npq}][k^2 - (x^2)_{npqr}]} + \ldots$$

$$(x^2)_{npq} = k_q^2 + \lambda U_{qq} + \lambda^2 \sum_{r \neq npq} \frac{U_{qr}U_{rq}}{k^2 - (x^2)npq} +$$

$$+\lambda^3 \sum_{\substack{r \neq npq \\ s \neq npqn}} \frac{U_{qr}U_{rs}U_{sq}}{[k^2 - (x^2)_{npqn}][k^2 - (x^2)_{npqrs}]} + \ldots \quad (8.62)$$

Mỗi x với chỉ số dài thêm dần có số các số hạng trong mỗi chuỗi giảm dần, nhân với các bậc khác nhau của λ ; tất cả các yếu tố ma trận bị suy giảm và nếu chỉ có một số hữu hạn các trạng thái thì các chuỗi cuối cùng dẫn đến không vì tất cả các yếu tố ma trận được đánh giá bằng không. Do đó biểu thức tổng quát của C_p có thể biểu diễn qua các hằng số $(x^2)_{np}$,...

$$C_p = \lambda \frac{U_{pn}}{k^2 - (x^2)_{np}} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq}U_{qn}}{[k^2 - (x^2)_{np}][k^2 - (x^2)_{npq}]} +$$

$$+\lambda^3 \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{U_{pq}U_{qr}U_{rn}}{[k^2 - (x^2)_{np}][k^2 - (x^2)_{npq}][k^2 - (x^2)_{npqr}]} + \ldots$$

Đặt kết quả này vào phương trình (8.60), ta được

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np}U_{pn}}{k^2 - (x^2)_{np}}$$

$$+\lambda^3 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq pn}} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qn}}{[k^2 - (x^2)_{np}][k^2 - (x^2)_{npq}]} +$$

$$+\lambda^4 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq pn \\ r \neq pqn}} \frac{U_{np}U_{pq}U_{qr}U_{rn}}{[k^2 - (x^2)_{np}][k^2 - (x^2)_{npq}][k^2 - (x^2)_{npqr}]} + \ldots \quad (8.63)$$

Để giải phương trình (8.63) đối với k^2, ta cần phải áp dụng phương pháp gần đúng liên tiếp. Gần đúng bậc a được cho bởi công thức sau

$$(k^2)^{(a)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{\left[(k^2)^{(a-2)} - (x^2)_{np}^{(a-2)}\right]} +$$

$$+ \lambda^3 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{\left[(k^2)^{(a-3)} - (x^2)_{np}^{(a-3)}\right]\left[(k^2)^{(a-3)} - (x^2)_{npq}^{(a-3)}\right]} + \dots +$$

$$+ \lambda^a \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np \\ r \neq npq \\ \dots \\ z \neq npq\dots}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rs} \dots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2)\dots(k_n^2 - k_z^2)} \quad (8.64)$$

Ở đây $(x^2)_{np\dots}^{(a-2)}$ là đại lượng $(x^2)_{np\dots}$ trong gần đúng bậc (a – 2) với sai số tỉ lệ với λ^{a-1}. Sử dụng công thức (8.64) cho phép tìm được giá trị của k^2 trong gần đúng bậc mong muốn. Ví dụ như dễ dàng tính được $(k^2)^{(2)}$.

$$(k^2)^{(2)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2} \quad (8.65)$$

Sau đó từ (8.64) và (8.62), (8.65) ta nhận được $(k^2)^{(3)}$,...

§5. CÔNG THỨC NHIỄU LOẠN FREĐGONMA (FREDGOLMA)

Xét phương trình trị riêng

$$(\widehat{A} - E)|e\rangle = \lambda \widehat{B}|e\rangle \quad (8.66)$$

trong đó E là trị riêng, $\hat{A}$ và $\hat{B}$ là toán tử ecmite. Bài toán không nhiễu loạn tương ứng toán tử $\hat{A}$ với các trị riêng ε_n và các vectơ riêng $|f_n\rangle$ có dạng

$$\hat{A}|f_n\rangle = \varepsilon_n|f_n\rangle \tag{8.67}$$

số hạng nhiễu loạn được biểu diễn bởi toán tử $\lambda\hat{B}$. Phương trình (8.66) có thể viết lại dưới dạng

$$|e\rangle = \lambda(\hat{A} - E)^{-1}\hat{B}|e\rangle \tag{8.68}$$

Trạng thái riêng $|e_n\rangle$ không nhiễu loạn ứng với trị riêng E_n thoả mãn điều kiện tương ứng

$$|e_n\rangle \xrightarrow[\lambda \to 0]{} |f_n\rangle$$

Để mô tả sự tách vectơ $|f_n\rangle$ khỏi phần vế phải của phương trình (8.68), ta sẽ sử dụng khái niệm toán tử chiếu $\hat{B}_n$. Toán tử chiếu $\hat{B}_n$ được xác định sao cho nó tách ra phần vectơ bất kì tỉ lệ với $|f_n\rangle$. Như vậy, toán tử chiếu có các tính chất sau

$$\hat{B}_n|f_n\rangle = |f_n\rangle \;;\; \hat{B}_n|f_m\rangle = 0 \text{ khi } m \neq n$$

Có thể biểu diễn $\hat{B}_n$ dưới dạng cụ thể hơn : $\hat{B}_n = |f_n\rangle\langle f_n|$. Do đó, nếu khai triển $|e\rangle = \sum\limits_p \alpha_p|f_p\rangle$ thì

$$\hat{B}_n|e\rangle = \sum_p \alpha_p\hat{B}_n|f_p\rangle = \sum_p \alpha_p|f_n\rangle\delta_{np} = \alpha_n|f_n\rangle$$

Nhờ đó phương trình (8.68) có thể viết dưới dạng

$$|e_n\rangle = |f_n\rangle + \lambda(1 - \hat{B}_n)(\hat{A} - E_n)^{-1}\hat{B}|e_n\rangle \tag{8.69}$$

Đưa vào kí hiệu

$$\widehat{\mathcal{A}} = (1 - \widehat{B}_n)(\widehat{A} - E_n)^{-1}\widehat{B} \tag{8.70}$$

Bây giờ phương trình (8.68) trở thành phương trình không thuần nhất đối với $\left|e_n\right\rangle$.

$$\left|e_n\right\rangle = \left|f_n\right\rangle + \lambda\widehat{\mathcal{A}}\left|e_n\right\rangle \tag{8.71}$$

Nghiệm hình thức của phương trình này là

$$\left|e_n\right\rangle = \frac{1}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}\left|f_n\right\rangle = \left|f_n\right\rangle + \frac{\lambda\widehat{\mathcal{A}}}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}\left|f_n\right\rangle \tag{8.72}$$

Công thức nhiễu loạn lặp đối với vectơ $\left|e_n\right\rangle$ nhận được bằng cách khai triển $1/(1-\lambda\widehat{\mathcal{A}})$ thành chuỗi theo λ

$$\left|e_n\right\rangle = \left|f_n\right\rangle + \lambda\widehat{\mathcal{A}}\left|f_n\right\rangle + \lambda^2(\widehat{\mathcal{A}}^2\left|f_n\right\rangle) + \ldots \tag{8.73}$$

Chuỗi này đồng nhất với chuỗi (8.44), vì vậy nếu ta đặt vào khai triển của toán tử $\widehat{\mathcal{A}}$ theo các vectơ riêng $\left|f_n\right\rangle$

$$\widehat{\mathcal{A}} = \sum_p \left|f_p\right\rangle\left\langle f_p\right|\widehat{\mathcal{A}}\sum_q \left|f_q\right\rangle\left\langle f_q\right| = \sum_{pq}\left|f_p\right\rangle\left\langle f_q\right|\left\langle f_p\right|\widehat{\mathcal{A}}\left|f_q\right\rangle$$

với tích vô hướng (bracket)

$$\left\langle f_p\right|\widehat{\mathcal{A}}\left|f_q\right\rangle = \left\langle f_p\right|(1-\widehat{B}_n)(\widehat{A}-E_n)^{-1}\widehat{B}\left|f_q\right\rangle = \frac{\left\langle f_p\right|\widehat{B}\left|f_q\right\rangle}{\varepsilon_p - E_n},\ p \neq n$$

thì khai triển này có dạng

$$\widehat{\mathcal{A}} = \sum_{pq\neq n}\frac{B_{pq}}{\varepsilon_p - E_n}\left|fp\right\rangle\left\langle f_q\right| \tag{8.74}$$

trong đó $B_{pq} = \langle f_p | \hat{B} | f_q \rangle$. Từ đó suy ra

$$\hat{\mathcal{A}}|f_n\rangle = \sum_{pq \neq n} \frac{B_{pq}}{\varepsilon_p - E_n} |f_p\rangle\langle f_q|f_n\rangle$$

$$= \sum_{pq \neq n} \frac{B_{pq}}{\varepsilon_p - E_n} |f_p\rangle \delta_{qn} = \sum_{p \neq n} \frac{B_{pn}}{\varepsilon_p - E_n} |f_p\rangle \qquad (8.75)$$

Kết quả này dĩ nhiên trùng với số hạng gần đúng bậc một của lí thuyết nhiễu loạn (8.41). Tương tự, ta có

$$\hat{\mathcal{A}}^2|f_n\rangle = \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathcal{A}}|f_n\rangle = \hat{\mathcal{A}} \sum_{q \neq n} \frac{B_{qn}}{\varepsilon_q - E_n} |f_q\rangle$$

$$= \sum_{q \neq n} \frac{B_{qn}}{(\varepsilon_q - E_n)} \sum_{p \neq q} \frac{B_{pq}}{(\varepsilon_p - E_n)} |f_p\rangle$$

$$= \sum_{pq \neq n} \frac{B_{pq} B_{qn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)} |f_p\rangle \qquad (8.76)$$

Biểu thức (8.76) trùng với số hạng gần đúng bậc hai (8.43). Viết lại nghiệm hình thức (8.72) dưới dạng

$$|e_n\rangle = \frac{\chi(\lambda)/(1 - \lambda\hat{\mathcal{A}})}{\chi(\lambda)} |f_n\rangle \qquad (8.77)$$

trong đó χ (λ) là hàm được lựa chọn như sau. Hàm $\chi(\lambda)$ cần phải là một hàm hoàn toàn của λ, không có các điểm kì dị trong toàn bộ mặt phẳng phức λ. Điểm không của nó cần phải trùng với các cực trị của hàm $1/(1 - \lambda\hat{\mathcal{A}})$ (nghĩa là $\lambda = \lambda_r$) và có cùng bậc. Vì $\chi(\lambda)/(1 - \lambda\hat{\mathcal{A}})$ cũng như $\chi(\lambda)$ là hàm chỉ của biến λ, do đó có thể khai triển thành chuỗi theo λ.

Đưa vào kí hiệu

$$\widehat{\mathcal{A}} = (1 - \widehat{B}_n)(\widehat{A} - E_n)^{-1}\widehat{B} \tag{8.70}$$

Bây giờ phương trình (8.68) trở thành phương trình không thuần nhất đối với $|e_n\rangle$.

$$|e_n\rangle = |f_n\rangle + \lambda\widehat{\mathcal{A}}|e_n\rangle \tag{8.71}$$

Nghiệm hình thức của phương trình này là

$$|e_n\rangle = \frac{1}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}|f_n\rangle = |f_n\rangle + \frac{\lambda\widehat{\mathcal{A}}}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}|f_n\rangle \tag{8.72}$$

Công thức nhiễu loạn lặp đối với vectơ $|e_n\rangle$ nhận được bằng cách khai triển $1/(1-\lambda\widehat{\mathcal{A}})$ thành chuỗi theo λ

$$|e_n\rangle = |f_n\rangle + \lambda\widehat{\mathcal{A}}|f_n\rangle + \lambda^2(\widehat{\mathcal{A}}^2|f_n\rangle) + \ldots \tag{8.73}$$

Chuỗi này đồng nhất với chuỗi (8.44), vì vậy nếu ta đặt vào khai triển của toán tử $\widehat{\mathcal{A}}$ theo các vectơ riêng $|f_n\rangle$

$$\widehat{\mathcal{A}} = \sum_p |f_p\rangle\langle f_p|\widehat{\mathcal{A}}\sum_q |f_q\rangle\langle f_q| = \sum_{pq} |f_p\rangle\langle f_q|\langle f_p|\widehat{\mathcal{A}}|f_q\rangle$$

với tích vô hướng (bracket)

$$\langle f_p|\widehat{\mathcal{A}}|f_q\rangle = \langle f_p|(1-\widehat{B}_n)(\widehat{A}-E_n)^{-1}\widehat{B}|f_q\rangle = \frac{\langle f_p|\widehat{B}|f_q\rangle}{\varepsilon_p - E_n},\ p \neq n$$

thì khai triển này có dạng

$$\widehat{\mathcal{A}} = \sum_{pq\neq n} \frac{B_{pq}}{\varepsilon_p - E_n}|fp\rangle\langle f_q| \tag{8.74}$$

Đạo hàm $\ln\chi(\lambda)$ bằng $\chi'(\lambda)/\chi(\lambda)$. Rõ ràng hàm này có các cực điểm của hàm $\chi(\lambda)$, nghĩa là khi $\lambda = \lambda_r$. Như vậy, để tìm hàm $\chi(\lambda)$, cần thiết đồng nhất hàm $\chi'(\lambda)/\chi(\lambda)$ có các cực điểm tương ứng tại các điểm $\lambda = \lambda_r$. Ta sẽ lựa chọn đơn giản nhất từ rất nhiều hàm như thế dưới dạng

$$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = S_p\left[\frac{-\widehat{\mathcal{A}}}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}\right] = \sum_r \frac{1}{\lambda-\lambda_r} \qquad (8.78)$$

Ở đây spur (S_p) là vết của ma trận. Đẳng thức thứ hai trong (8.78) được rút ra từ các yếu tố chéo của ma trận $\mathcal{A}$ bằng $1/\lambda_n$.

Tích phân hai vế của phương trình (8.78) theo λ từ $\lambda = 0$ đến $\lambda = \lambda$, và giả thiết $\lambda = 0$ không có mặt trong tập hợp các cực điểm $\{\lambda_r\}$, có nghĩa là bài toán không nhiễu loạn không suy biến. Khi đó ta có

$$\chi(\lambda) = \exp\left[-\int_0^{\lambda} S_p\left(\frac{\mathcal{A}}{1-\lambda\mathcal{A}}\right)d\lambda\right] \qquad (8.79)$$

Khai triển $\chi(\lambda)$ thành chuỗi theo λ

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n, a_0 = 1$$

Suy ra $\dfrac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \dfrac{\sum na_n\lambda^{n-1}}{\sum a_n\lambda^n}$

Đặt $x_p = S_p\mathcal{A}^p$ (8.80)

Từ (8.78) và (8.80), suy ra $\dfrac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = -\sum x_{p+1}\lambda^p$

hay $\sum na_n\lambda^{n-1} = -(\sum x_{p+1}\lambda^p)(\sum a_s\lambda^s)$

Đồng nhất các hệ số cùng bậc λ ở hai vế của phương trình, ta được hệ thức sau

$$(n+1)a_{n+1} + \sum_{s=1}^{n} a_s x_{n+1-s} = -x_{n+1} \qquad (8.81)$$

Nghiệm của hệ các phương trình tuyến tính không thuần nhất đối với a_s (8. 81) có dạng

$$a_n = -\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & 3 & \dots & 0 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & x_1 & x_n \end{vmatrix} \qquad (8.82)$$

Bốn nghiệm đầu tiên là

$$a_1 = -x_1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}(2x_3 - 3x_1x_2 + x_1^3)$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}(6x_4 - 8x_1x_3 + 6x_2x_1^2 - 3x_2^2 - x_1^4) \qquad (8.83)$$

Tương tự, ta khai triển $\chi(\lambda)/(1 - \lambda\widehat{\mathcal{A}})$ thành chuỗi theo λ

$$\frac{\chi(\lambda)}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n, b_0 = 1 \qquad (8.84)$$

Ta có

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\frac{\chi(\lambda)}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}} = \frac{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\chi(\lambda)}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}\right)}{\frac{\chi(\lambda)}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}} = \frac{\sum_n nb_n\lambda^{n-1}}{\sum b_n\lambda^n}$$

$$= \frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} + \frac{\widehat{\mathcal{A}}}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}} \qquad (8.85)$$

Thay (8.78) vào (8.85) ta được

$$-S_p\left(\frac{\widehat{\mathcal{A}}}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}}\right) + \frac{\widehat{\mathcal{A}}}{1-\lambda\widehat{\mathcal{A}}} = \frac{\sum_n nb_n\lambda^{n-1}}{\sum b_n\lambda^n}$$

So sánh với phương trình xác định a_n, ta thấy rằng chỉ khác ở chỗ mỗi số hạng được thay đổi $x_p - \mathcal{A}^p$. Do đó nghiệm b_n có dạng

$$b_n = -\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 - \mathcal{A} \\ x_1 - \mathcal{A} & 2 & \dots & 0 & x_2 - \mathcal{A}^2 \\ x_2 - \mathcal{A}^2 & x_1 - \mathcal{A} & \dots & 0 & x_3 - \mathcal{A}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} - \mathcal{A}^{n-1} & x_{n-2} - \mathcal{A}^{n-2} & \dots & x_1 - \mathcal{A} & x_n - \mathcal{A}^n \end{vmatrix}$$

Nếu đặt $b_n = b_n(x, \mathcal{A})$ thì trong trường hợp $\mathcal{A} = 0$, ta có $b_n(x, 0) = a_n$. Ba hệ số b_n đầu tiên có dạng

$$b_1 = \mathcal{A} + a_1$$

$$b_2 = \mathcal{A}^2 - \mathcal{A}x_1 + a_2$$

$$b_3 = \mathcal{A}^3 - \mathcal{A}^2 x_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2)\ \mathcal{A} + a_3$$

....

$$b_n = \mathcal{A}^n + a_1\mathcal{A}^{n-1} + a_2\mathcal{A}^{n-2} + \ldots \qquad (8.86)$$

Sau khi xác định được các hệ số a_n, b_n theo (8.83), (8.86), ta có thể nhận được biểu thức Frеđgonma đối với $|e_n\rangle$

$$|e_n\rangle = |f_n\rangle + \frac{\sum\limits_{p=1}^{\infty} C_p\lambda^p}{\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p\lambda^p}|f_n\rangle, \ C_p = b_p - a_p \qquad (8.87)$$

Do đó gần đúng bậc ba đối với $|e_n\rangle$ có dạng

$$|e_n\rangle = |f_n\rangle + \lambda\mathcal{A}\frac{1+\lambda(\mathcal{A}-x_1)+\lambda^2\left[\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}x_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2)\right]}{1-\lambda x_1 - \frac{1}{2}\lambda^2(x_3 - x_1^2) - \frac{1}{6}\lambda^3(2x_3 - 3x_1x_2 + x_1^3)}|f_n\rangle$$

$$(8.88)$$

Nhân hai vế của phương trình (8.66) với vectơ bra $\langle f_n|$ và chú ý tới (8.67), ta được

$$\langle f_n|(\widehat{A} - E)|e\rangle = \lambda\langle f_n|\widehat{B}|e\rangle$$

$$\varepsilon_n\langle f_n|e\rangle - E\langle f_n|e\rangle = \lambda\langle f_n|\widehat{B}|e\rangle$$

Từ đó suy ra trị riêng E_n bằng

$$E_n = \varepsilon_n - \lambda\langle f_n|\widehat{B}|e_n\rangle \qquad (8.89)$$

Nếu thay (8.88) vào công thức (8.89), ta được công thức xác định trị riêng E chính xác đến bậc năm.

Để tính (8.88) ta cần tìm các yếu tố ma trận

$$\left\langle f_p \middle| \widehat{\mathcal{A}}^a \middle| f_n \right\rangle = \mathcal{A}_{pn}^a \text{ đối với } a \le 4.$$

Lưu ý rằng $\widehat{\mathcal{A}} = (1 - \widehat{B}_n)(\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}$ (8.70), và từ (8.75), 8.76), ta có

$$\mathcal{A}_{pn} = \left\langle f_p \middle| (1 - \widehat{B}_n)(\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B} \middle| f_n \right\rangle = \frac{B_{pn}}{\varepsilon_p - E_n}, \; p \neq n$$

$$A_{pn}^2 = \left\langle f_p \middle| \widehat{\mathcal{A}}^2 \middle| f_n \right\rangle = \sum_{sq \neq n} \frac{B_{sq}B_{qn}}{(\varepsilon_s - E_n)(\varepsilon_q - E_n)} \left\langle f_p \middle| f_s \right\rangle$$

$$= \sum_{q \neq n} \frac{B_{pq}B_{qn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)}, \; p \neq n$$

Tương tự, ta tính được

$$\mathcal{A}_{pn}^3 = \sum_{qr \neq n} \frac{B_{pq}B_{qr}B_{rn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)(\varepsilon_r - E_n)}, \; p \neq n$$

$$\mathcal{A}_{pn}^4 = \sum_{qrs \neq n} \frac{B_{pq}B_{qr}B_{rs}B_{sn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)(\varepsilon_r - E_n)(\varepsilon_s - E_n)}, p \neq n \quad (8.90)$$

Do toán tử $(1 - \widehat{B}_n)$, các yếu tố ma trận $\mathcal{A}_{nn}^a$ bằng không, mặc dù rằng $\mathcal{A}_{pp}^a \neq 0, p \neq n$. Suy ra, x_a được biểu diễn bằng công thức sau

$$x_a = S_p \mathcal{A}^a = \sum_{p \neq n} \mathcal{A}_{pp}^a$$

do đó

$$x_1 = \sum_{p\neq n} \frac{B_{pp}}{(\varepsilon_p - E_n)}, \quad x_2 = \sum_{pq\neq n} \frac{B_{pq}B_{qp}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)} \qquad (8.91)$$

Như vậy ta có thể viết

$$\left|e_n\right\rangle = \left|f_n\right\rangle + \sum_{p\neq n}\left|f_p\right\rangle\Big\{\lambda\mathcal{A}_{pn} + \lambda^2\left[\mathcal{A}_{pn}^2 - x_1\mathcal{A}_{pn}\right] +$$

$$+\lambda^3\left[\mathcal{A}_{pn}^3 - x_1\mathcal{A}_{pn}^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2)\mathcal{A}_{pn}\right]\Big\}\times$$

$$\times\left\{1 - \lambda x_1 - \frac{1}{2}\lambda^2(x_2 - x_1^2) - \frac{1}{6}\lambda^3(2x_3 - 3x_1x_2 + x_1^3\right\}^{-1} \qquad (8.92)$$

Do đó trị riêng E_n được xác định bằng biểu thức (8.89) trong gần đúng bậc ba có dạng

$$E_n = \varepsilon_n - \lambda B_{nn} - \lambda^2 \sum_{p\neq n} B_{np}\Big\{\mathcal{A}_{pn} + \lambda\left[\mathcal{A}_{pn}^2 - x_1\mathcal{A}_{pn}\right] +$$

$$+\lambda^2\left[A_{pn}^3 - x_1A_{pn}^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2)A_{pn}\right]\Big\}$$

$$\left\{1 - \lambda x_1 - \frac{1}{2}\lambda^2(x_2 - x_1^2) - \frac{1}{6}\lambda^3(2x_3 - 3x_1x_2 + x_1^3)\right\}^{-1} \qquad (8.93)$$

Chú ý rằng các công thức (8.92) và (8.93) chỉ có thể áp dụng cho trường hợp một chiều, vì x_1 trở nên vô hạn đối với bài toán bất kì có số lớn các phép đo.

§6. PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN LẶP

Các phương pháp trình bày trong các mục trước đây đều dẫn đến phương trình trị riêng mà nhờ sử dụng phương pháp gần đúng liên tiếp đã thu được công thức nhiễu loạn cho phép biểu diễn trị riêng qua tham số tương tác λ. Thực tế sự phụ thuộc như thế hiếm khi có biểu thức rõ ràng, vì người ta thường nhận được biểu thức rất cồng kềnh.

Hiển nhiên sẽ là thuận tiện nhất nếu nhận được biểu thức tường minh E như một hàm của λ. Tuy nhiên trong mục này ta có thể tìm hàm ngược biểu diễn sự phụ thuộc hàm số của λ vào E.

Xét (8.66) như phương trình trị riêng λ. Phương trình tích phân tương ứng có dạng (8.68)

$$|e\rangle = \lambda(\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}|e\rangle$$

Cách thức giải phương trình này khác với phương pháp nhiễu loạn lặp trước đây ở chỗ ta không tách ra vectơ riêng đặc biệt không nhiễu loạn. Giả thiết các toán tử $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là ecmite. Khi đó tồn tại trị riêng λ_0 tương ứng với cường độ tương tác mà năng lượng E là đại lượng riêng.

Gọi $|e^{(0)}\rangle$ là gần đúng bậc không đối với $|e\rangle$ mà nhờ nó ta lựa chọn một trong các trạng thái không nhiễu loạn $|f_n\rangle$ để E gần với ε_n. Gần đúng bậc một $|e^{(1)}\rangle$ đối với $|e\rangle$ nhận được nếu ta đặt $|e^{(0)}\rangle$ vào vế phải của phương trình tích phân trên thay cho $|e\rangle$.

$$|e^{(1)}\rangle = (\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}|e^{(0)}\rangle$$

Lưu ý rằng, thừa số λ có thể bỏ đi trong phương trình này vì ta chỉ quan tâm đến dạng của $|e\rangle$. Sự chuẩn hoá không có ý nghĩa vì khi nhân một hằng số tuỳ ý với nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất thì ta được nghiệm của phương trình đó. Khả năng này loại bỏ λ trong quá trình tích phân cho phép tìm sự phụ thuộc hàm số tường minh của λ vào E. Sau khi thực hiện quá trình tích phần nhờ hệ thức liên hệ giữa gần đúng bậc (n − 1) và bậc n

$$\left|e^{(n)}\right\rangle = (\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}\left|e^{(n-1)}\right\rangle \tag{8.94}$$

ta được

$$\left|e^{(n)}\right\rangle = \left[(\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}\right]^{n}\left|e^{(0)}\right\rangle \tag{8.95}$$

Gần đúng tương ứng đối với λ_0 nhận được từ phương trình ban đầu (8.66)

$$\lambda_0 = \frac{\left\langle e\right|(\widehat{A} - E)\left|e\right\rangle}{\left\langle e\right|\widehat{B}\left|e\right\rangle} \tag{8.96}$$

hay từ phương trình tích phân (8.68)

$$\lambda_0 = \frac{\left\langle e\right|\widehat{B}\left|e\right\rangle}{\left\langle e\right|\widehat{B}(\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}\left|e\right\rangle} \tag{8.97}$$

Đặt $\left|e^{(n)}\right\rangle$ vào (8.96) thay cho $\left|e\right\rangle$, ta được gần đúng bậc n đối với λ_0

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{\left\langle e^{(n)}\right|(\widehat{A} - E)\left|e^{(n)}\right\rangle}{\left\langle e^{(n)}\right|\widehat{B}\left|e^{(n)}\right\rangle}$$

Hay từ (8.94) ta có

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{\left\langle e^{(n)}\right|\widehat{B}\left|e^{(n-1)}\right\rangle}{\left\langle e^{(n)}\right|\widehat{B}\left|e^{(n)}\right\rangle} \tag{8.98}$$

Nếu đặt $\left|e^{(n)}\right\rangle$ vào (8.97) thay cho $|e\rangle$, ta được gần đúng bậc $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (ý nghĩa của kí hiệu này sẽ được sáng tỏ dưới đây)

$$\lambda_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left\langle e^{(n)}\middle|\hat{B}\middle|e^{(n)}\right\rangle}{\left\langle e^{(n)}\middle|\hat{B}\middle|e^{(n+1)}\right\rangle} \tag{8.99}$$

Hiển nhiên, khi đưa vào kí hiệu

$$[n, m] = \left\langle e^{(n)}\middle|\hat{B}\middle|e^{(m)}\right\rangle$$

thì các biểu thức (8.98) và (8.99) có thể viết dưới dạng

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{[n, n-1]}{[n, n]},\ \lambda_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{[n, n]}{[n, n+1]} \tag{8.100}$$

Các yếu tố [n, m] có tính chất sau

$$[n, m] = [m, n] = [n + p, m - p]$$

Nếu quá trình xem xét trên đây dẫn đến mục đích mà ta mong muốn là do vế phải của các đẳng thức (8.98), (8.99) chỉ phụ thuộc vào E thì sự phụ thuộc chính xác của λ vào E là kết quả đạt được.

Nếu các toán tử $(\hat{A} - E)$ và $\hat{B}$ là xác định dương thì

$$\lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \geq \lambda_0^{(n+1)} \ldots \geq \lambda_0 > 0 \tag{8.101}$$

Nói cách khác, các gần đúng liên tiếp tạo thành tích liên tục đơn điệu trùng với λ_0 ở bên phải.

Nếu toán tử $\hat{B}$ xác định dương, còn $(\hat{A} - E)$ không xác định dương thì các trị riêng λ_n không nhất thiết dương. Trong trường hợp đó tính đúng đắn của bất đẳng thức là kém nhất. Như vậy là

$$\left|\lambda_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right| \geq \left|\lambda_0^{(n)}\right|, \left|\lambda_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right| \geq \left|\lambda_0^{\left(n+\frac{3}{2}\right)}\right| \ldots \geq \left|\lambda_0\right| \qquad (8.102)$$

Do đó chỉ có gần đúng bán nguyên xấp xỉ $\left|\lambda_0\right|$ ở bên phải. Các gần đúng nguyên có thể lớn hơn hay nhỏ hơn $\left|\lambda_0\right|$.

Giả sử rằng gần đúng bậc không $\left|e^{(0)}\right\rangle$ có thể nhận là $\left|f_m\right\rangle$, dễ dàng thu được biểu thức cần thiết để tính các đại lượng $\lambda_0^{(n)}$ và $\lambda_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. Từ (8.95) ta có

$$\left|e^{(n)}\right\rangle = \left[(\widehat{A} - E)^{-1}\widehat{B}\right]^n \left|f_m\right\rangle$$

cũng như gần đúng bậc một và bậc hai có dạng

$$\left|e^{(1)}\right\rangle = \sum_p \frac{B_{pm}}{\varepsilon_p - E}\left|f_p\right\rangle$$

$$\left|e^{(2)}\right\rangle = \sum_{pq} \frac{B_{pq}B_{qm}}{(\varepsilon_p - E)(\varepsilon_q - E)}\left|f_p\right\rangle \qquad (8.103)$$

Nhờ các biểu thức đối với $\left|e^{(n)}\right\rangle$ có thể tính các gần đúng khác nhau (8.98), (8.99). Kết hợp (8.100) và (8.103), ta có

$$[0, 0] = B_{mm}$$

$$[0, 1] = \sum_p \frac{B_{mp}B_{pm}}{\varepsilon_p - E}$$

$$[1, 1] = \sum_{pq} \frac{B_{mq}B_{qp}B_{pm}}{(\varepsilon_q - E)(\varepsilon_p - E)}$$

$$[1, 2] = \sum_{pqr} \frac{B_{mr}B_{rq}B_{qp}B_{pm}}{(\varepsilon_r - E)(\varepsilon_q - E)(\varepsilon_p - E)} \qquad (8.104)$$

Do đó ta có thể tìm được $\lambda_0^{(n)}$ và $\lambda_0^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}$ theo công thức (8.100)

$$\lambda_0^{(1/2)} = \frac{B_{mm}}{\sum_p \frac{B_{mp}B_{pm}}{\varepsilon_p - E}}$$

$$\lambda_0^{(1)} = \frac{\sum_p \frac{B_{mp}B_{pm}}{\varepsilon_p - E}}{\sum_{pq} \frac{B_{mq}B_{qp}B_{pm}}{(\varepsilon_q - E)(\varepsilon_p - E)}};\ldots \quad (8.105)$$

§7. PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN

Trong trường hợp lí thuyết nhiễu loạn không thuận lợi khi áp dụng giải bài toán cơ học lượng tử, người ta còn sử dụng phương pháp gần đúng khác gọi là phương pháp biến phân.

Phương pháp biến phân xuất phát từ nhận xét đơn giản rằng, năng lượng trung bình của một hệ luôn lớn hơn hoặc bằng năng lượng trạng thái cơ bản của hệ lượng tử. Việc tính năng lượng trạng thái cơ bản dẫn đến việc chọn các "hàm thử" chứa một số thông số chưa biết nào đó. Sau đó tìm cực tiểu của năng lượng trung bình cho phép ta xác định được các thông số, nghĩa là xác định được năng lượng trạng thái cơ bản của hệ.

Khai triển vectơ trạng thái của hệ lượng tử $|\psi\rangle$ theo các vectơ riêng $|u_n\rangle$ của toán tử Hamintôniên $\hat{H}$

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n |u_n\rangle \quad (8.106)$$

Trị trung bình của năng lượng của hệ ở trạng thái đã cho có dạng

$$\langle\widehat{H}\rangle = \frac{\langle\Psi|\widehat{H}|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\sum\limits_n |a_n|^2 E_n}{\sum\limits_n |a_n|^2} \qquad (8.107)$$

Gọi E_0 là năng lượng trạng thái cơ bản của hệ lượng tử, từ (8.107) ta có bất đẳng thức sau

$$\langle\widehat{H}\rangle \geq \frac{E_0 \sum\limits_n |a_n|^2}{\sum\limits_n |a_n|^2} = E_0 \qquad (8.108)$$

Nếu chọn vectơ trạng thái $|\psi\rangle$ là một hàm của các thông số chưa biết nào đó $\lambda_1, \lambda_2, ...$, sao cho gần trùng với vectơ trạng thái cơ bản của hệ

$$\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, ...,) \qquad (8.109)$$

và thực hiện cực tiểu hoá năng lượng trung bình

$$\frac{\partial\langle\widehat{H}\rangle}{\partial\lambda_i} = 0 \qquad (8.110)$$

cho phép xác định các thông số λ_{0i}. Bằng cách đó ta sẽ tính được giá trị năng lượng

$$E = \frac{\langle\Psi(\lambda_{01}, \lambda_{02}, ...)|\widehat{H}|\Psi(\lambda_{01}, \lambda_{02}, ...)\rangle}{\langle\Psi(\lambda_{01}, \lambda_{02}, ...)|\Psi(\lambda_{01}, \lambda_{02}, ...)\rangle}$$

gần với giá trị năng lượng trạng thái cơ bản E_0 của hệ.

Xét ví dụ cụ thể về dao động tử phi điều hoà, áp dụng phương pháp biến phân đối với dao động tử phi điều hoà có Hamintôniên

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + cx^4 \tag{8.111}$$

Ta chọn hàm thử đã chuẩn hoá dưới dạng

$$\Psi = \lambda^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{\lambda^2x^2}{2}\right)$$

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \tag{8.112}$$

Tương ứng, năng lượng trung bình của dao động tử phi điều hoà bằng

$$\langle\widehat{H}\rangle = \langle\Psi|\widehat{H}|\Psi\rangle = \lambda\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{\lambda^2x^2}{2}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + cx^4\right)e^{-\frac{\lambda^2x^2}{2}}$$

$$= \lambda\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\lambda^4x^2 - \lambda^2) + cx^4\right]e^{-\lambda^2x^2} \tag{8.113}$$

Ta sẽ cực tiểu hoá (8.113) theo λ.

Sử dụng công thức

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^{2n}e^{-\lambda^2x^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\ ;\ n = 0 \\ \dfrac{1.3.5...(2n-1)\pi^{\frac{1}{2}}}{2^n\lambda^{2n+1}}\ ;\ n = 1, 2, 3... \end{cases}$$

ta tính được tích phân (8.113)

$$\langle\widehat{H}\rangle = \frac{\hbar^2\lambda^2}{4m} + \frac{3c}{4\lambda^4} \tag{8.114}$$

Từ điều kiện cực tiểu hoá năng lượng trung bình $\frac{\partial\langle\widehat{H}\rangle}{\partial\lambda}=0$,

rút ra giá trị tương ứng của λ

$$\lambda=\left(\frac{6mc}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$$

Thay giá trị này vào phương trình (8.114), ta được giá trị năng lượng trạng thái cơ bản của dao động tử phi điều hoà

$$\langle\widehat{H}\rangle=1{,}082\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}} \qquad (8.115)$$

Phương pháp tính năng lượng trạng thái cơ bản của một hệ lượng tử nói trên phụ thuộc vào việc chọn hàm thử. Ngoài ra, ta cũng có thể tính năng lượng của trạng thái kích thích thứ nhất E_1 hoặc thứ hai E_2,...

Thực vậy, nếu kí hiệu $|\psi_0\rangle$ là vectơ trạng thái cơ bản của hệ thì việc tính E_1 đòi hỏi giải bài toán biến phân

$$E_1=\min\left\langle\Psi_1\middle|\widehat{H}\middle|\Psi_1\right\rangle \qquad (8.116)$$

với điều kiện bổ sung $\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle=1$ và $\langle\Psi_1|\Psi_0\rangle=0$

Tương tự, việc tính mức năng lượng kích thích E_2 dẫn đến giải bài toán

$$E_2=\min\left\langle\Psi_2\middle|\widehat{H}\middle|\Psi_2\right\rangle \qquad (8.117)$$

với các điều kiện

$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle=1\ ;\ \langle\psi_2|\psi_1\rangle=\langle\psi_1|\psi_0\rangle=0$$

Trong các biểu thức (8.116), (8.117) nói trên $|\psi_1>$ và $|\psi_2>$ là các vectơ trạng thái kích thích ứng với các mức năng lượng E_1 và E_2 của hệ lượng tử.

§8. LÍ THUYẾT TÁN XẠ LƯỢNG TỬ

Khi nghiên cứu sự tán xạ của một hạt (ví dụ êlectron, mêzôn,...) bay gần vào hạt khác, ta thấy độ lệch khỏi đường đi ban đầu của hạt phụ thuộc vào khoảng cách giữa các hạt và sự tương tác giữa chúng. Ta biết những gì về bản chất tương tác cơ bản trong thế giới vi mô ? Giải phương trình Sơrơđingơ đối với nguyên tử hiđrô nhận được một tập vô hạn các mức năng lượng đã chứng tỏ rằng tương tác Culông (Coulomb) là tương tác chủ yếu giữa một êlectron và một phôtôn ở khoảng cách cỡ angstrom. Tuy nhiên, đối với bài toán hai hạt trong vật lí hạt nhân, có một trạng thái liên kết đơn, ta cần áp dụng kĩ thuật tán xạ để hiểu về bản chất của lực hạt nhân. Tán xạ đóng vai trò chính giúp ta hiểu biết về vật lí hạt nhân và các hạt cơ bản. Sau khi trình bày nội dung của tiết diện hiệu dụng tán xạ ta sẽ sử dụng gần đúng Bo (Born) và khai triển sóng riêng phần để tính tiết diện hiệu dụng trong cơ học lượng tử. Đó là hai phép gần đúng hỗ trợ cho nhau : gần đúng Bo áp dụng tốt nhất ở năng lượng cao và khai triển sóng riêng phần hữu ích nhất ở năng lượng thấp.

1. Hàm sóng tiệm cận và tiết diện hiệu dụng vi phân

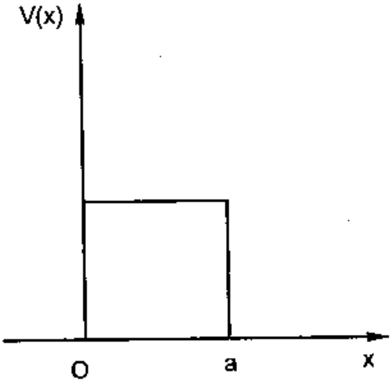
Xét tán xạ một chiều bởi hàng rào thế có dạng như hình vẽ 51. Ngoài khoảng a (bề rộng hàng rào thế), ta có thể biểu diễn hàm sóng như một sóng phẳng

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ikx} & x > a \end{cases} \qquad (8.118)$$

trong đó $k = \sqrt{\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}}$

Sự phụ thuộc thời gian của hàm riêng của toán tử năng lượng đặc trưng bởi số hạng $e^{-iEt/\hbar}$

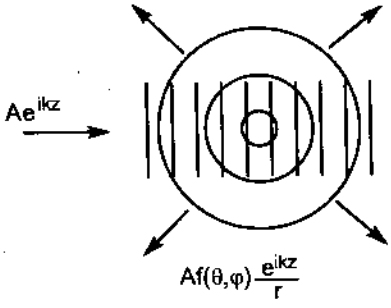
$$\psi(x,t) = \psi(x)\, e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$



Hình 51. Hàng rào thế bề rộng a trong một thí nghiệm tán xạ một chiều.

Đó là một trạng thái dừng. Tuy nhiên, chồng chất các trạng thái riêng này với nhau ta có thể tạo ra một bó sóng phụ thuộc thời gian giống như bó sóng tới hàng rào thế, có một biên độ đối với bó sóng phản xạ và một biên độ đối với bó sóng truyền qua. Nghiên cứu các trạng thái dừng xác định các biên độ này tương tự như làm thí nghiệm tán xạ với sóng nước trong một hồ nhỏ có nguồn sóng không phải là do ném đá xuống hồ mà bởi một nguồn sóng điều hoà liên tục tác dụng lên xuống mặt nước với tần số không đổi.

Trong trường hợp ba chiều, hàm sóng tương tự (8.118) có dạng như thế nào ? Ta xét sóng tới lan truyền dọc theo trục z, bia đặt tại gốc toạ độ. Ra xa khỏi bia tán xạ, hàm sóng tiệm cận bao gồm sóng tới này cùng với sóng đi khỏi tạo ra do tương tác với hàng rào thế (H. 52).



Hình 52. Sơ đồ tóm tắt của một thí nghiệm tán xạ ba chiều chỉ ra sóng phẳng tới và sóng cầu đi khỏi (tán xạ).

$$\psi \xrightarrow[r\to\infty]{} Ae^{ikz} + (\text{sóng đi khỏi}) \qquad (8.119)$$

Số hạng thứ nhất ở vế phải của công thức (8.118) mô tả chuyển động của các hạt tới, số hạng thứ hai tương ứng các hạt bị tán xạ.

Ngoài khoảng (0 ; a), sóng cầu đi khỏi phải là một nghiệm của phương trình Sơrơđingơ với V = 0. Do đó, ta xuất phát từ phương trình vi phân đối với hàm bán kính u = Rr với V = 0

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}u = Eu \tag{8.120}$$

Với r lớn ta có thể bỏ qua số hạng vô cùng bé bậc cao hơn, phương trình (8.120) trở thành:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} = Eu \tag{8.121}$$

Phương trình này có hai nghiệm

$$u = e^{ikr} \text{ và } u = e^{-ikr} \tag{8.122}$$

trong đó $$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} \tag{8.123}$$

Nếu gắn sự phụ thuộc thời gian $e^{-iEt/\hbar}$ cho mỗi nghiệm này, ta thấy rằng chỉ có e^{ikr} tương ứng với sóng đi khỏi vì khi thời gian tăng thì r cũng phải tăng để giữ cho pha không đổi. Vì rằng $R = \frac{u}{r}$, nên hàm sóng tiệm cận (8.119) có dạng

$$\psi \xrightarrow[r\to\infty]{} Ae^{ikz} + af(\theta,\varphi)\,e = \frac{ikr}{r} = \psi_{\text{tới}} + \psi_{\text{tán xạ}} \tag{8.124}$$

trong đó hàm f(θ,φ) là biên độ tán xạ phụ thuộc góc. Biên độ f(θ,φ) phụ thuộc góc vì không có lí do gì để ta kì vọng rằng sóng tán xạ đi khỏi có cùng biên độ theo hướng θ = 0 cũng như các hướng khác. Hơn nữa, về nguyên tắc hàm cầu xuất hiện trong biểu thức hàm riêng của toán tử năng lượng $<\vec{r}|nlm> = R(r)$ $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ có thể là lí do thêm vào để tạo ra một sự phụ thuộc góc nào đó.

Trong cơ học lượng tử, mật độ các dòng hạt tán xạ và dòng hạt tới bằng mật độ các dòng xác suất tương ứng. Trong phần này ta chỉ giới hạn tán xạ đàn tính là tán xạ mà trạng thái của hạt tán xạ và hạt bị tán xạ không thay đổi. Dòng hạt tới tuân theo phương trình Sơrođingơ trong không gian toạ độ

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.125}$$

Xuất phát từ biểu thức mật độ xác suất

$$\left|<\vec{r}|\psi>\right|^2 = \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) \tag{8.126}$$

đạo hàm theo thời gian mật độ xác suất này và sử dụng (8.125), ta thu được phương trình liên tục

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \vec{\nabla}\vec{J} = 0 \tag{8.127}$$

với
$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2\mu i}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \tag{8.128}$$

Thứ nguyên của dòng xác suất $\vec{J}$ là xác suất tính cho một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian. Phương trình (8.127) biểu diễn bảo toàn xác suất địa phương vì hệ quả của nó là

$$\frac{d}{dt}\int d^3r\psi^*\psi = -\int d^3r\vec{\nabla}\vec{J} = -\oint dS\vec{n}\vec{J} \tag{8.129}$$

Ở đây ta đã sử dụng định lí Gauxơ biến đổi tích phân theo thể tích thành tích phân mặt bao quanh thể tích đó. Vì $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt S nên $J_n = \vec{n}\vec{J}$ là hình chiếu của $\vec{J}$ trên pháp tuyến $\vec{n}$. Vế trái của (8.129) là độ biến thiên xác suất quy về đơn vị thời gian, còn vế phải là xác suất để hạt đi vào thể tích V qua mặt S bao quanh cũng quy về đơn vị thời gian. Như vậy, công thức (8.129) biểu thị sự bằng nhau của hai đại lượng đó, nghĩa là biểu thị định luật bảo toàn xác suất.

Kết hợp (8.118) và (8.128), ta thấy rằng mật độ dòng xác suất một chiều đối với hàm sóng (8.118) có dạng

$$J = \frac{\hbar k}{\mu}(|A|^2 - |B|^2) \qquad x < 0$$

$$J = \frac{\hbar k}{\mu}|C|^2 \qquad x > a \tag{8.130}$$

Do đó, hệ số phản xạ R và hệ số truyền qua T được tính bởi công thức

$$R = \frac{J_{px}}{J_t} = \frac{\frac{\hbar k}{\mu}|B|^2}{\frac{\hbar k}{\mu}|A|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

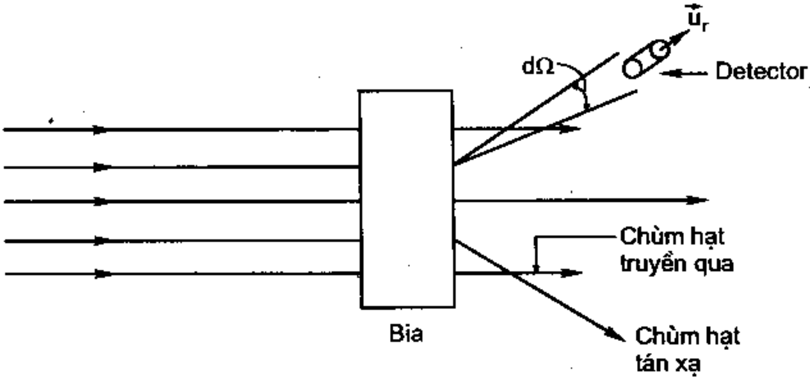
$$T = \frac{J_{tq}}{J_t} = \frac{\frac{\hbar k}{\mu}|C|^2}{\frac{\hbar k}{\mu}|A|^2} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \tag{8.131}$$

Trường hợp một chiều, bảo toàn xác suất đòi hỏi rằng

$$R + T = 1$$

Trường hợp tán xạ ba chiều có nhiều hơn sự phản xạ và truyền qua. Sự tán xạ của một dòng hạt được đặc trưng bởi tiết diện tán xạ hiệu dụng vi phân. Đại lượng này được xác định như tỉ số của số hạt bị tán xạ trong một đơn vị thời gian vào góc khối dΩ với số hạt tới một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega}.d\Omega = \frac{\text{Số hạt bị tán xạ vào } d\Omega \text{ trong một giây}}{\text{Số hạt tới một đơn vị diện tích trong một giây.}} \quad (8.132)$$



Hình 53. Thí nghiệm tán xạ ba chiều.
Máy quan sát hạt đối diện góc khối dΩ.

Lưu ý rằng, thứ nguyên của tiết diện hiệu dụng là diện tích. Bán kính hạt có độ lớn cỡ 10^{-12} cm, nên tiết diện tán xạ hạt nhân được đo bằng 1 bar = 10^{-24} cm^2. Tiết diện tán xạ toàn phần là tích phân của tiết diện hiệu dụng lấy trên tất cả góc khối

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (8.133)$$

Để xác định dòng xác suất chảy vào máy quan sát hạt đặt đối diện góc khối dΩ, ta tính

$$\vec{J}_{tx} = \frac{\hbar}{2\mu i}(\psi_{tx}^* \vec{\nabla}\psi_{tx} - \psi_{tx}\vec{\nabla}\psi_{tx}^*)$$

với hàm sóng tán xạ ψ_{tx} có dạng tiệm cận

$$\psi_{tx} \xrightarrow[r\to\infty]{} Af(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

Do đó, dòng xác suất tán xạ xác định bởi

$$\vec{J}_{tx} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\hbar k}{\mu r^2}|A|^2 |f(\theta, \varphi)|^2 \vec{u}_r \qquad (8.134)$$

trong đó $\vec{u}_r$ là vectơ đơn vị theo phương bán kính, chứng tỏ dòng xác suất này định hướng theo phương bán kính. Dòng xác suất (tính trong một đơn vị thời gian) qua góc khối $d\Omega$ được xác định bằng tích vô hướng của vectơ dòng xác suất tán xạ (xác suất tính trong một đơn vị thời gian trên một đơn vị diện tích) với diện tích $\vec{u}_r r^2 d\Omega$

$$\vec{J}_{tx}.\vec{u}_r r^2 d\Omega = \frac{hk}{m}|A|^2 |f|^2 dW \qquad (8.135)$$

Vì dòng xác suất tới định hướng dọc theo phương trục z bằng

$$J_t = \frac{\hbar k}{\mu}|A|^2$$

nên tiết diện hiệu dụng vi phân theo định nghĩa (8.132) là

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega}.d\Omega = \frac{\vec{J}_{tx}.\vec{u}_r r^2 d\Omega}{J_t} = |f(\theta,\varphi)|^2 d\Omega \qquad (8.136)$$

Do đó, ta có

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2 \qquad (8.137)$$

Kết quả này cho phép ta tính tiết diện hiệu dụng hoàn toàn bằng độ lớn của biên độ tán xạ. Biên độ tán xạ được tìm nhờ giải phương trình Sơrođingơ cho hạt chuyển động trong trường của tâm tán xạ và xét nghiệm có dạng tiệm cận (8.134).

2. Gần đúng Bo

Gần đúng Bo được áp dụng khi tính toán biên độ tán xạ của chùm hạt tới có năng lượng lớn so với độ lớn của thế năng. Trước tiên, ta biểu diễn phương trình trị riêng của toán tử năng lượng trong không gian toạ độ

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (8.138)$$

dưới dạng

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \qquad (8.139)$$

với $k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$

Sóng phẳng tới Ae^{ikz} là một nghiệm của phương trình

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (8.140)$$

Để thuận tiện ta biểu diễn nghiệm hình thức của phương trình (8.139) dưới dạng

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{ikz} + \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}')\frac{2\mu}{\hbar^2}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \qquad (8.141)$$

Hàm $G(\vec{r},\vec{r}')$ gọi là hàm Grin (Green) của phương trình vi phân (8.139), nó thoả mãn phương trình vi phân

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r},\vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \qquad (8.142)$$

Có thể kiểm tra lại rằng, hàm sóng $\psi(\vec{r})$ (8.141) là một nghiệm của phương trình (8.139) bằng cách áp dụng toán tử vi phân $(\nabla^2 + k^2)$ cho biểu thức (8.141). Trong phương trình (8.142), hàm đenta trong không gian ba chiều được biểu diễn qua tích các hàm đenta một chiều

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

Ta tìm biểu thức tường minh của hàm Grin $G(\vec{r},\vec{r}')$. Lưu ý rằng hàm $G(\vec{r},\vec{r}')$ chỉ phụ thuộc vào sự khác nhau giữa các vectơ $\vec{r}$ và $\vec{r}'$. Trước hết, đặt $\vec{r}' = 0$, thay vào (8.142) và xác định nghiệm của phương trình

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, 0) = \delta^3(\vec{r}) \tag{8.143}$$

Do tính đối xứng cầu của phương trình vi phân này nên ta sẽ sử dụng hệ toạ độ cầu. Chú ý rằng ngoại trừ điểm gốc toạ độ thì hàm Grin là một nghiệm của phương trình (8.140). Ta đã biết đó là một nghiệm của phương trình Sơrơđingơ đối với hạt tự do và nghiệm đó có dạng một sóng đi khỏi

$$G(\vec{r}, 0) = C\frac{e^{ikr}}{r} \tag{8.144}$$

với C là một hằng số. Dễ dàng chứng minh rằng

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{e^{ikr}}{r} &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}e^{ikr})\frac{1}{r} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\frac{1}{r})e^{ikr}\\ &= \frac{1}{r}\nabla^2 e^{ikr} + 2\vec{\nabla}e^{ikr}.\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) + e^{ikr}\nabla^2\frac{1}{r} \qquad (8.145)\\ &= \frac{1}{r}\left(-k^2 + \frac{2ik}{r}\right)e^{ikr} - 2ik\frac{e^{ikr}}{r^2} - 4\pi\delta^3(\vec{r})e^{ikr}\\ &= -k^2\frac{e^{ikr}}{r} - 4\pi\delta^3(\vec{r})e^{ikr}\end{aligned}$$

trong đó để đánh giá tác dụng của toán tử ∇^2 lên hàm e^{ikr}, ta đã sử dụng biểu thức của ∇^2 trong toạ độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{\theta,\varphi} \tag{8.146}$$

Do đó, tác dụng toán tử vi phân $(\nabla^2 + k^2)$ lên hàm Grin (8.144), ta được

$$(\nabla^2 + k^2)\ C\frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi C\delta^3(\vec{r}) \tag{8.147}$$

hay là
$$(\nabla^2 + k^2)\ \frac{-e^{ikr}}{4\pi r} = \delta^3(\vec{r}) \tag{8.148}$$

So sánh (8.143) và (8.148), suy ra dạng của hàm Grin

$$G(\vec{r},0) = \frac{-e^{ikr}}{4\pi r} \tag{8.149}$$

Do vậy, ta có

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{-e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{8.150}$$

và nghiệm hình thức của phương trình (8.139) bây giờ có dạng

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{ikz} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r'\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \tag{8.151}$$

Tích phân theo d^3r' trong (8.151) được lấy ở vùng $V(\vec{r}') \neq 0$. Nếu R là kích thước của vùng $V(\vec{r}') \neq 0$ thì ta xét tích phân trên ở khoảng cách đủ lớn $\vec{r}$ sao cho $|\vec{r}| \gg R$. Khi lấy tích phân ta coi $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$. Khai triển $|\vec{r} - \vec{r}'|$ thành chuỗi

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = (r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2)^{1/2}$$

$$= r\left(1 - 2\vec{u}_r\frac{\vec{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[r\to\infty]{} r\left(1 - \vec{u}_r\frac{\vec{r}'}{r}\right) \tag{8.152}$$

Do đó, ta có thể thay thế (8.152) vào công thức (8.151)

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{r}\left(1 + \vec{u}_r\frac{\vec{r}'}{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{r} \tag{8.153}$$

và chỉ cần giữ lại hai số hạng đầu tiên trong khai triển (8.152) đối với hàm sau

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikr\left(1-\vec{u}_r.\frac{\vec{r}'}{r}\right)} = e^{ikr}e^{-i\vec{k}_f\vec{r}'} \qquad (8.154)$$

trong đó $\vec{k}_f = k\vec{u}_r$ là vectơ sóng theo hướng bán kính và nó đặc trưng cho hướng truyền của sóng tán xạ đi khỏi.

Thay (8.154), (8.153) vào (8.151), ta tìm được

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} Ae^{ikz} - \frac{\mu e^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int d^3r' e^{-i\vec{k}_f\vec{r}'}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (8.155)$$

Để giải phương trình tích phân (8.155) ta sử dụng gần đúng Bo. Cơ sở của gần đúng này là giả thiết rằng, thế năng tương tác của hạt bị tán xạ với tâm lực là nhỏ nên có thể coi nó là nhiễu loạn nhỏ. Như vậy, chuyển động ban đầu của hạt biến đổi rất ít và có thể thay hàm sóng $\psi(\vec{r}')$ trong dấu tích phân bởi hàm sóng tới $Ae^{ikz'}$. Lúc đó ta nhận được

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} Ae^{ikz} - \frac{\mu Ae^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int d^3r' e^{-i\vec{k}_f\vec{r}'}V(\vec{r}')e^{ikz'} \quad (8.156)$$

So sánh phương trình này với biểu thức hàm sóng tiệm cận tổng quát (8.124), ta tìm được biên độ tán xạ trong gần đúng Bo

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' e^{-i\vec{k}_f\vec{r}'}V(\vec{r}')e^{ikz'} \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' e^{-i\vec{k}_f\vec{r}'}V(\vec{r}')e^{i\vec{k}_i\vec{r}'} \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' V(\vec{r}')e^{i\vec{q}\vec{r}'} \qquad (8.157) \end{aligned}$$

trong đó vectơ sóng có độ lớn k hướng theo trục z (hướng của sóng tới) và

$$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f \qquad (8.158)$$

Công thức (8.157) dựa trên lời giải gần đúng của phương trình Sơrođingơ (8.155)

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \psi_{\text{tới}} + \psi_{\text{tán xạ}}$$

đồng thời đòi hỏi $\left|\dfrac{\psi_{\text{tán xạ}}}{\psi_{\text{tới}}}\right| \ll 1$ trong vùng nguy hiểm ở gần tâm tán xạ ($r \approx 0$). So sánh (8.124) với (8.151), ta được

$$\psi_{\text{tán xạ}}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \qquad (8.159)$$

Vì $\psi_{\text{tới}}(0) = A$, nên ta có

$$\left|\frac{\psi_{\text{tán xạ}}(0)}{\psi_{\text{tới}}(0)}\right| = \left|-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \frac{e^{ikr'}}{r'}V(\vec{r}')e^{ikz'}\right| \qquad (8.160)$$

trong đó ta đã thay thế hàm sóng chính xác $\psi(\vec{r}')$ ở vế phải phương trình (8.159) bởi hàm sóng tới. Nếu thế năng có đối xứng cầu $V(\vec{r}') = V(r')$, tích phân theo góc phương trình (8.160) ta tìm được điều kiện áp dụng gần đúng Bo

$$\left|\frac{\psi_{\text{tán xạ}}(0)}{\psi_{\text{tới}}(0)}\right| = \left|\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' r' e^{ikr'} V(\vec{r}') e^{ikr'\cos\theta'}\right|$$

$$= \left|\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\int_0^\infty dr' e^{ikr'} V(\vec{r}') \sin kr'\right| \ll 1 \qquad (8.161)$$

Trường hợp hạt có năng lượng lớn ($k \to \infty$), các hàm mũ và sin trong (8.161) dao động mạnh và tích phân bị ngắt với $r \geq \dfrac{1}{k}$.

Trong trường hợp này, điều kiện (8.161) trở thành

$$\left|\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\int_0^{1/k} dr' V(\vec{r}')kr'\right| \approx \frac{\mu V_0}{\hbar^2 k}\int_0^{1/k} dr' kr' \approx \frac{\mu V_0}{\hbar^2 k^2} \ll 1 \qquad (8.162)$$

hay $\frac{V_0}{E} \ll 1$.

3. Khai triển sóng riêng phần

Nói chung, gần đúng Bo áp dụng tốt khi tính toán tiết diện hiệu dụng vi phân của các hạt tán xạ có năng lượng lớn. Để bổ trợ cho gần đúng Bo và áp dụng hiệu quả nhất đối với các hạt tán xạ có năng lượng thấp, người ta còn sử dụng khai triển sóng riêng phần.

Xét tán xạ trong thí nghiệm của Rudơpho (Rutherford), nếu thế năng có đối xứng cầu thì biên độ tán xạ chỉ là một hàm của biến θ

$$f(\theta,\varphi) = f(\theta) \qquad (8.163)$$

Ta biểu diễn biên độ tán xạ f(θ) như là chồng chất các sóng riêng phần

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(k)P_l(\cos\theta) \qquad (8.164)$$

trong đó

$$P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{l0}(\theta) \qquad (8.165)$$

là một đa thức Lơgiăngđrơ. Các hệ số $a_l(k)$ nói chung phụ thuộc vào giá trị năng lượng và được kí hiệu bởi chỉ số của sóng riêng phần của hạt ứng với momen quỹ đạo *l*.

Ta biểu diễn sóng phẳng tới dưới dạng

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)J_l(kr)P_l(\cos\theta) \qquad (8.166)$$

Biểu thức tiệm cận của các hàm Betsen có dạng

$$J_l(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr} \tag{8.167}$$

Do đó thay thế (8.167) vào (8.166), ta được

$$e^{ikz} \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin\left(kr - \frac{lp}{2}\right)}{kr} P_l(\cos\theta) \tag{8.168}$$

Hàm sóng của hạt chuyển động trong trường thế xuyên tâm V(r) có dạng

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l R_l(r) Y_{10}(\theta) \tag{8.169}$$

trong đó $R_l(r)Y_{l0}(\theta)$ là nghiệm của phương trình Sơrođingơ

$$(\Delta + k^2)\,\psi = V(r)\,\psi \tag{8.170}$$

với $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Nghiệm của phương trình (8.170) không phụ thuộc góc phương vị φ vì sóng phẳng tới (8.168) không phụ thuộc φ.

Đặt $R_l(r) = \frac{\chi_1(r)}{r}$ (8.171)

và thay (8.171) vào (8.170), ta được phương trình sau khi $r \to \infty$

$$\ddot{\chi}_l(r) + k^2 \chi_1(r) = 0 \tag{8.172}$$

Để thu được phương trình (8.172) ta đã bỏ qua các số hạng vô cùng bé bậc cao hơn là V(r) và $\frac{1}{r}$.

Nghiệm của phương trình (8.172) có dạng

$$\chi_l(r) = A\sin(kr + \alpha_l) \tag{8.173}$$

Đặt

$$\alpha_l = -\frac{l\pi}{2} + \delta_l \tag{8.174}$$

và chuẩn hoá hàm $R_l(r)$ sao cho $A = \dfrac{1}{k}$, ta tìm được dạng tiệm cận của hàm $R_l(r)$

$$R_l(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) \tag{8.175}$$

Thay (8.175) vào (8.169), ta có thể biểu diễn hàm sóng $\psi(\vec{r})$ bao gồm cả sóng tới và sóng cầu đi khỏi (8.169) dưới dạng

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right)}{kr} P_l(\cos\theta) \tag{8.176}$$

hay

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right)}}{2ikr} P_l(\cos\theta) \tag{8.177}$$

Viết lại (8.168) dưới dạng

$$e^{ikz} \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1) \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}}{2ikr} P_l(\cos\theta) \tag{8.178}$$

Từ (8.124)

$$\psi(\vec{r}) - e^{ikz} \xrightarrow[r\to\infty]{} f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{8.179}$$

và các biểu thức (8.177), (8.178) ta suy ra

$$C_l = (2l+1)\, e^{\frac{il\pi}{2}}\, e^{i\delta_l} \tag{8.180}$$

Với kết quả này, ta tìm được biên độ tán xạ

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{e^{i\delta_l}}{k}\sin\delta_l P_l(\cos\theta) \tag{8.181}$$

So sánh (8.164) và (8.181), ta được

$$a_l(k) = \frac{e^{i\delta_l}}{k}\sin\delta_l \tag{8.182}$$

Biểu thức (8.181) cho thấy có thể tính biên độ tán xạ qua độ dịch pha δ_l đối với mỗi sóng riêng phần. Biết được biên độ tán xạ có thể xác định tiết diện tán xạ toàn phần bằng cách lấy tích phân sau

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega |f(\theta)|^2 \tag{8.183}$$

Chú ý tới tính trực giao của các hàm cầu Y_{lm} và (8.165)

$$\int d\Omega Y^*_{lm}(\theta, \varphi)Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

tích phân theo góc khối (8.183), ta được

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{8.184}$$

So sánh kết quả này với biểu thức của biên độ tán xạ (8.181), suy ra

$$\sigma = \left(\frac{4\pi}{k}\right)\mathrm{Im}\, f(0) \tag{8.185}$$

trong đó ta đã sử dụng $P_l(1) = 1$.

Cuối cùng, ta có thể biểu diễn tiết diện tán xạ toàn phần qua tiết diện hiệu dụng riêng phần σ_l

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \tag{8.186}$$

với
$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{8.187}$$

Lưu ý rằng, giá trị cực đại của tiết diện hiệu dụng riêng phần σ_l (tương ứng với sóng riêng phần đóng góp vào σ) khi độ dịch pha $\delta_l = \frac{\pi}{2}$.

Để chuỗi (8.184) hội tụ thì thế năng V(r) ở vô cực phải giảm nhanh hơn $\frac{1}{r^n}$ $(n > 2)$, sao cho nghiệm của phương trình (8.170) có dạng (8.173). Phương pháp sóng riêng phần rất hiệu dụng nếu chỉ có một số ít các số hạng đầu của chuỗi (8.184) đóng vai trò chính để chuỗi có hội tụ nhanh. Ở vùng năng lượng nhỏ (tán xạ của các hạt chậm) chỉ có một số ít các số hạng của (8.184) có đóng góp đáng kể. Ở vùng có năng lượng cao, cần xét đến nhiều số hạng của chuỗi (8.184) hơn.

4. Ví dụ về tán xạ áp dụng gần đúng Bo

Ta hãy đánh giá biên độ tán xạ của hạt chuyển động trong trường thế Yukaoa (Yukawa)

$$V(r) = g\frac{e^{-m_0 r}}{r} \tag{8.188}$$

Với giá trị lựa chọn thích hợp của g và m_0, thế này biểu diễn tương tác giữa các hạt nuclôn mà ta gọi là một nơtron và một prôtôn. Nếu ta chọn $g = z_1 z_2 e^2$ và $m_0 = 0$ thì (8.188) chính là thế Culông giữa một hạt đạn điện tích z_1e và một bia điện tích z_2e như trong tán xạ của Rudơpho.

Thay (8.188) vào biểu thức biên độ tán xạ (8.157) trong gần đúng Bo, ta được

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \frac{e^{-m_0 r'}}{r'} e^{i\vec{q}\vec{r}'} \qquad (8.189)$$

Vì $\vec{q}, \vec{r} = qz' = qr'\cos\theta'$, do đó

$$f = -\frac{\mu g}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' r' e^{-m_0 r'} e^{iqr'\cos\theta'}$$

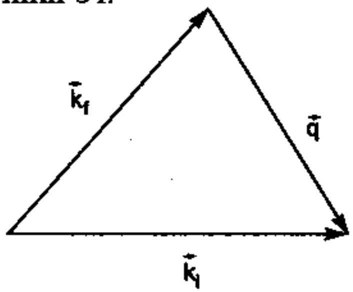
$$= \frac{\mu g i}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr' e^{-m_0 r'}(e^{iqr'} - e^{-iqr'}) = \frac{-2\mu g}{\hbar^2(m_0^2 + q^2)} \qquad (8.190)$$

Chú ý đến (8.158), ta có

$$q^2 = (\vec{k}_i - \vec{k}_f)^2 = (k^2 - 2\vec{k}_i\vec{k}_f + k^2)$$

$$= 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad (8.191)$$

do vậy biên độ tán xạ chỉ là hàm của góc θ, f = f (θ). Góc θ được xác định như trên hình 54.



Hình 54. Vectơ sóng tới $\vec{k}_i$, vectơ sóng tán xạ $\vec{k}_f$ và vectơ sóng $\vec{q}$.

Do đó ta có

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2 g^2}{\hbar^4\left[m_0^2 + 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^2} \tag{8.192}$$

Xét trường hợp tán xạ Culông. ở năng lượng và góc tán xạ sao cho $4k^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \gg m_0^2$, công thức tiết diện hiệu dụng vi phân biến đổi thành

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2(z_1 z_2 e^2)^2}{\hbar^4 4k^4\sin^4\frac{\theta}{2}} = \frac{(z_1 z_2 e^2)^2}{16E^2\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{8.193}$$

Đó là công thức tán xạ Rudơpho nổi tiếng. Như vậy là tiết diện hiệu dụng vi phân (8.193) nhận được từ một lời giải chính xác trong cơ học lượng tử hoàn toàn phù hợp với nghiên cứu cổ điển về tán xạ Culông.

PHỤ LỤC I

TÍCH PHÂN POATXÔNG (POISSON)

Ta hãy tính tích phân dạng

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \qquad (I.1)$$

Muốn vậy, ta xét

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dxdy$$

Chuyển tích phân hai lớp trong mặt phẳng xy sang các tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta có

$$I^2 = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-ar^2} rdr\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} rdr = \frac{\pi}{a}$$

do đó $$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (I.2)$$

Từ tích phân Poatxông, có thể tính được các tích phân dạng

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx \qquad (I.3)$$

bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp I theo a

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = -\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^4 dx = \frac{\partial^2 I}{\partial a^2} = \frac{1.3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

cuối cùng, ta có

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = (-1)^n \frac{\partial^n I}{\partial a^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} \quad \text{(I.4)}$$

PHỤ LỤC II

HÀM GAMMA (Γ)

Hàm Gamma được định nghĩa bằng đẳng thức tích phân sau đây

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \qquad (\alpha > 0) \qquad \text{(II.1)}$$

Tính tích phân từng phần, ta có

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx = -\int_0^{\infty} x^{\alpha} d(e^{-x}) = -x^{\alpha} e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx =$$

$$= \alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

hay $$\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha) \tag{II.2}$$

Khi $\alpha = 1$ và $\alpha = \dfrac{1}{2}$, hàm $\Gamma(\alpha)$ có giá trị

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{II.3}$$

Từ đó ta xác định được giá trị của hàm $\Gamma(\alpha)$ đối với các α nguyên và bán nguyên

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{II.4}$$

trong đó n = 1, 2, ...

Đối với các giá trị khác của α, hàm $\Gamma(\alpha)$ có thể tìm trong các bảng riêng.

PHỤ LỤC III

TÍCH PHÂN FURIÊ

Đầu tiên ta hãy xét chuỗi Furiê của hàm $f_l(x)$ có chu kì $2l$

$$f_l(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{III.1}$$

trong đó

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_l(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi,\ k = 0,\ 1,\ 2...$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_l(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi,\ k = 1, 2, 3...$$

Thay các hệ số này vào chuỗi (III.1), ta có

$$f_l(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f_l(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f_l(\xi)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]d\xi =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f_l(\xi)d\xi + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f_l(\xi)\cos\frac{k\pi(\xi - x)}{l}d\xi \qquad \text{(III.2)}$$

Bây giờ ta đưa vào hàm phụ

$$\varphi_l(\lambda) = \int_{-l}^{l} f_l(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi \qquad \text{(III.3)}$$

trong đó biến số phụ $\lambda : -\infty < \lambda < \infty$. Hàm $\varphi_l(\lambda)$ là hàm chẵn vì $\varphi_l(-\lambda) = \varphi_l(\lambda)$. Nếu đặt $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$; k = 1, 2, 3... thì công thức (III.2) có thể được viết dưới dạng

$$f_l(x) = \frac{1}{2_l}\varphi_l(0) + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_l(\lambda) \qquad \text{(III.4)}$$

Để (III.4) có dạng tổng tích phân, ta đặt $\lambda_o = 0$, $\lambda_k - \lambda_{k-1} = \frac{\pi}{l} = \Delta\lambda_k$; k = 1, 2, 3... Khi đó (III.4) có dạng

$$f_l(x) = \frac{1}{2l}\varphi_l(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_l(\lambda_k)\Delta\lambda_k \qquad \text{(III.5)}$$

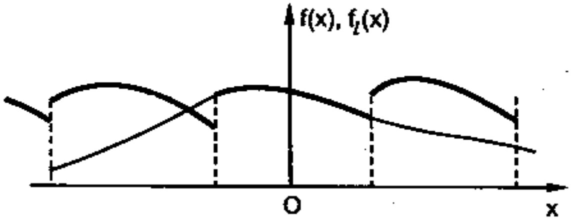
Công thức này đúng với mọi x ($-\infty < x < \infty$). Bây giờ ta cho hàm liên tục f(x), xác định trên toàn bộ trục x và không tuần hoàn. Cho $f_l(x) = f(x)$ trên đoạn $-l < x < l$, và giả sử $f_l(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l$, trên toàn bộ trục x (h.55). Đường đậm là hàm $f_l(x)$, đường mỏng là hàm f(x). Trên đoạn $(-l, l)$, ta có

$$f(x) = \frac{1}{2l}\varphi_l(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_l(\lambda_k)\Delta\lambda_k \;\; ; -l < x < l \qquad \text{(III.6)}$$

Cho l tiến đến ∞, ta có

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\varphi_l(0) + \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_l(\lambda_k)\Delta\lambda_k \qquad \text{(III.7)}$$

$$-\infty < x < \infty$$



Hình 55

Ta giả thiết là

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|d\xi < \infty \qquad \text{(III.8)}$$

ta có $$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\varphi_l(0) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi = 0$$

và $$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_l(\lambda_k)\Delta\lambda_k = \int_0^{\infty}\varphi(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)d\lambda \qquad \text{(III.9)}$$

trong đó $$\varphi(\lambda) = \lim_{l\to\infty}\varphi_l(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi$$

Thành thử đẳng thức (III–7) có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\right]d\lambda$$

$$-\infty < x < \infty$$

hay $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)(\cos\lambda\xi\cos\lambda x + \sin\lambda\xi\sin\lambda x)d\xi\right]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\cos\lambda x + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\sin\lambda x\right]d\lambda \quad \text{(III.10)}$$

Vậy nếu hàm f(x) liên tục trên toàn bộ trục x, mà có thể phân tích nó thành chuỗi Furiê trên quãng $(-l, l)$ thỏa mãn điều kiện (III.8), thì nó có thể viết dưới dạng

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \qquad \text{(III.11)}$$

trong đó

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\,,\ \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \quad \text{(III.12)}$$

Tích phân (III.11) có các hệ số (III.12) được gọi là tích phân Furiê của hàm f(x).

Ta còn có thể viết nó dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\right]d\lambda \qquad \text{(III.13)}$$

hay dưới dạng phức

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda(\xi - x)}d\xi\right]d\lambda \qquad \text{(III.14)}$$

bởi vì khi khai triển hàm mũ theo công thức Ơle (Euler), tích phân $\sin\lambda(\xi - x)$ sẽ bằng không.

PHỤ LỤC IV

HÀM ĐENTA

Trong vật lí học cổ điển và lượng tử hiện đại, ta thường gặp các chất điểm có khối lượng, các điện tích điểm, các lưỡng cực...

Vì vậy, để vẫn giữ nguyên các khái niệm về mật độ của chúng, năm 1926 Đirăc đã đưa ra hàm đenta.

Hàm đenta $\delta(x - x_o)$ bằng không ở tất cả các điểm trừ điểm $x = x_o$, tại đó nó tiến đến vô tận sao cho tích phân hàm này theo toàn miền là hữu hạn và bằng đơn vị.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_o)dx = 1 \qquad \text{(IV.1)}$$

Khi đó hàm δ sẽ liên hệ chẳng hạn với mật độ điện tích ρ của một nguồn điểm đặt tại gốc toạ độ bằng hệ thức đơn giản

$$\rho(x) = e\delta(x)$$

Đối với đoạn [ab], thay cho (IV.1), ta có

$$\int_a^b \delta(x - x_o)dx = \begin{cases} 1 \text{ với } a < x_o < b \\ 0 \text{ với } x_o < a, x_o > b \end{cases} \quad \text{(IV.2)}$$

Đối với một hàm f(x) liên tục trong miền đang xét, ta có hệ thức

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_o)dx = \begin{cases} f(x_o) \text{ với } a < x_o < b \\ 0 \text{ với } x_o < a, x_o > b \end{cases} \quad \text{(IV.3)}$$

Thực vậy, áp dụng định lí trung bình tích phân, ta có

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x_o + \alpha\varepsilon) \int_{x_o-\varepsilon}^{x_o+\varepsilon} \delta(x - x_o)dx$$

trong đó $|\alpha| \le 1$, $\varepsilon > 0$

Sử dụng (IV.2) và cho $\varepsilon \to 0$, ta được (IV.3).

Từ định nghĩa, ta dễ dàng rút ra các tính chất sau của hàm đenta.

1. $\delta(\alpha x) = \dfrac{1}{|\alpha|}\delta(x)$

2. $\delta(-x) = \delta(x)$ (hàm đenta là hàm chẵn).

3. $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ (đạo hàm của hàm đenta là một hàm lẻ).

4. $\delta[\varphi(x)] = \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{k} \delta(x - x_s)}{|\varphi'(x_s)|}$

trong đó x_s là các nghiệm đơn của phương trình

$$\varphi(x) = 0$$

5. $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$ (khai triển Furiê của hàm δ).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tikhonov A.N., Samarski A. A.
Uravneniia matematicheskoi phiziki
Moskva – 1953

2. Levin B.I.
Metodư matematicheskoi phiziki
Moskva – 1960

3. Nguyễn Đình Trí, Nguyễn Trọng Thái
Phương trình vật lí – toán
Hà Nội – 1971

4. Courant R., Hilbert D.
Methods of mathematical physics
London – 1953

5. Mors PH. M., Pheshbakh G.
Metodư teoreticheskoi phiziki
Moskva 1958

6. Kochin N. E.
Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniia
Moskva – 1960

7. Borisenko A.I, Tarapov I.E.
Vektornưi analizi nachala tenzornogo ischisleniia
Kharkov – 1978

8. Nisiurkeev
Sbornik zadach po metodam matematicheskoi phiziki
Moskva – 1964

MỤC LỤC

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH SÓNG MỘT CHIỀU

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA MÀNG

Chương V

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Chương VI

PHƯƠNG TRÌNH LAPLAXƠ

Chương VII

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH GẦN ĐÚNG VI TÍCH PHÂN

Chương VIII

CÁC PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG TRONG CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội
NGUYỄN XUÂN HOÀ

Biên tập nội dung :
NGUYỄN VĂN THUẬN
Trình bày bìa và minh hoạ :
HOÀNG MẠNH DỨA
Sửa bản in :
PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI)
Sắp chữ :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI)

PHƯƠNG PHÁP TOÁN LÝ

Mã số : 7K674T7 – DAI

In 1.000 cuốn (QĐ 78), khổ 14,5 x 20,5. In tại Nhà in Hà Nam.

Địa chỉ : Số 29, QL 1A, P. Quang Trung, TX. Phủ Lý, Hà Nam.

Số ĐKKH xuất bản : 11 – 2007/CXB/35 – 2119/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

8 934980 786338

Giá : 26.500 đ