Nội dung

- Khái niệm, giải tích vector
- Định luật Coulomb và cường độ điện trường
- Luật Gauss và dịch chuyển điện
- Năng lượng và điện thế
- Vật dẫn, điện môi và điện dung
- Dòng điện không đổi
- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Trường điện từ dừng
- Lực từ, vật liệu từ, điện cảm
- Hệ phương trình Maxwell-Trường điện từ biến thiên

Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

- Ta đã biết thức tính công: Công=Lực x quãng đường
- Một vi phân công chỉ phụ thuộc vào thành phần lực có cùng hướng với quãng đường đi được, tính theo công thức:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

- Công toàn phần được tính bằng tích phân đường trên toàn bộ quãng đường chuyển động *L:*

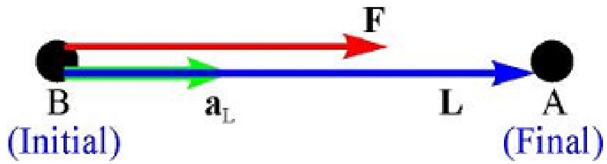
$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

- Công dịch chuyển điện tích Q trên một quãng đường dL dưới tác động của ngoại lực:

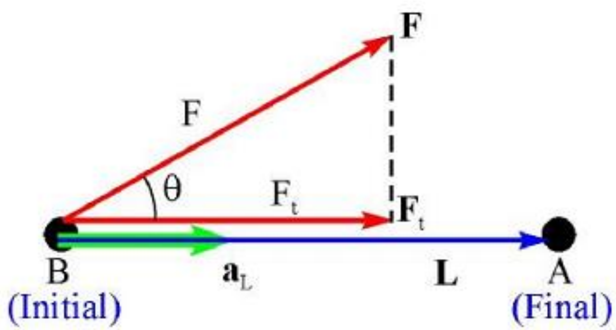
$$dW = \mathbf{F}_{ngoại} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{L} = -Q\mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{L}$$

- Công cần để dịch chuyển điện tích Q trên quãng đường L trong điện trường $\mathbf{E}$:

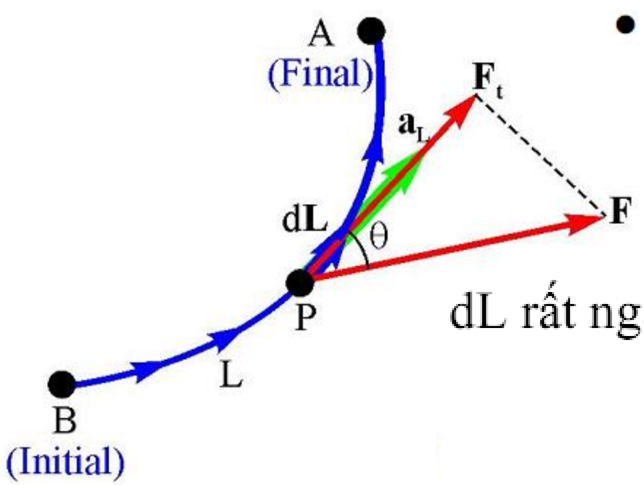
$$W = \int_L dW = -Q\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$



$$W = F_a L$$



$$W = F_t L$$
$$W = FL\cos\theta$$
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{L}$$



dL rất ngắn nên trên đọan dL ta xem như F_a đều

$$dW = F_t dL = F dL\cos\theta = \mathbf{F} \cdot d\mathrm{L} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\mathrm{L}$$

Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

- Từ công thức: $$W = \int_L dW = -Q\int_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$W = -Q\int_{\text{đầu}}^{\text{cuối}} \mathbf{E}.d\mathbf{L}$$

- Nếu dịch chuyển một điện tích dương theo chiều của vector **E**, ta thực hiện một công âm (nhận năng lượng)
- Nếu dịch chuyển một điện tích dương ngược chiều của vector **E**, ta thực hiện một công dương (cần ngoại lực tác động)

- Nếu dịch chuyển điện tích theo một đường kín, thì công thực hiện bằng không

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 0$$ *tính chất thế của trường tĩnh*

Ví dụ 1. Xét điểm P(ρ = 2, ϕ = 400, z =3) trong không gian có vector cường độ điện trường E = $100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$. Tính vi phân công dịch chuyển một điện tích Q = 20C đi một quãng đường 6μm theo các hướng $\mathbf{a}_\rho$; a_ϕ ; $a_{\mathbf{z}}$; E

a. Theo hướng $\mathbf{a}_\rho$

Ta có vi phân công thực hiện được khi di chuyển điện tích một quãng dL:

$dW = -Q\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$

Trong đó: $d\mathbf{L} = d\rho\,\mathbf{a}_\rho = 6\times10^{-6}\,\mathbf{a}_\rho$

$$dW = -Q\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -(20\times10^{-6})(100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z)(6\times10^{-6}\mathbf{a}_\rho)$$

Do:

$\mathbf{a}_\rho\mathbf{a}_\rho = 1$

$\mathbf{a}_\rho\mathbf{a}_\phi = 0$

$\mathbf{a}_\rho\,\mathbf{a}_z = 0$

$$dW = -(20\times10^{-6})(100)(6\times10^{-6}) = -12\times10^{-9}$$

$$dW = -12\text{ nJ}$$

Xét điểm P(ρ = 2, ϕ = 400, z =3) trong không gian có vector cường độ điện trường E = $100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$. Tính vi phân công dịch chuyển một điện tích Q = 20C đi một quãng đường 6μm:

b. Theo hướng $\mathbf{a}_\phi$

$$d\mathbf{L} = 6 \times 10^{-6}\, \mathbf{a}_\phi$$

$$dW = -Q\, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -(20 \times 10^{-6})(100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z)(6 \times 10^{-6}\, \mathbf{a}_\phi)$$

Do:

$\mathbf{a}_\phi \mathbf{a}_\phi = 1$

$\mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_\phi = 0$

$\mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_z = 0$

$$dW = -(20 \times 10^{-6})(-200)(6 \times 10^{-6}) = 24 \times 10^{-9}$$

$$dW = 24 \text{ nJ}$$

Xét điểm P(ρ = 2, ϕ = 400, z =3) trong không gian có vector cường độ điện trường E = $100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$. Tính vi phân công dịch chuyển một điện tích Q = 20C đi một quãng đường 6μm:

c. Theo hướng $\mathbf{a}_z$

$$d\mathbf{L} = 6 \times 10^{-6}\, \mathbf{a}_z$$

$$dW = -Q\, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -(20 \times 10^{-6})(100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z)(6 \times 10^{-6}\, \mathbf{a}_z)$$

Do:

$\mathbf{a}_z \mathbf{a}_z = 1$

$\mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_\phi = 0$

$\mathbf{a}_\rho\, \mathbf{a}_z = 0$

$$dW = -(20 \times 10^{-6})(300)(6 \times 10^{-6}) = -36 \times 10^{-9}$$

$$dW = -36 \text{ nJ}$$

Xét điểm P(ρ = 2, ϕ = 400, z =3) trong không gian có vector cường độ điện trường E = $100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$. Tính vi phân công dịch chuyển một điện tích Q = 20C đi một quãng đường 6μm:

d. Theo hướng **E**

$d\mathbf{L} = 6 \times 10^{-6}\ \mathbf{a}_E$

$$\mathbf{a}_E = \frac{100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z}{[100^2 + 200^2 + 300^2]^{1/2}} = 0.267\,\mathbf{a}_\rho - 0.535\,\mathbf{a}_\phi + 0.802\,\mathbf{a}_z$$

$dW = -Q\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$

$= -(20 \times 10^{-6})(100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z)(6 \times 10^{-6})\ (0.267\,\mathbf{a}_\rho - 0.535\,\mathbf{a}_\phi + 0.802\,\mathbf{a}_z)$

Với:

$\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}_i = 1$

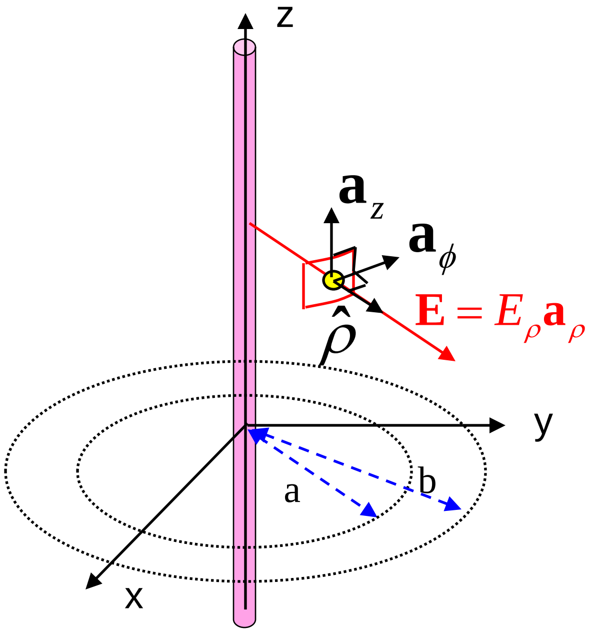
$\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = 0$

$dW = -44.9 \times 10^{-9}$

$dW = -\ 44.9$ nJ

Dịch chuyển trong trường của điện tích dây

- Công dịch chuyển điện tích (trong điện trường của một điện tích dây ρ_L) trên một đường tròn có bán kính ρ không đổi bằng 0



$$\mathbf{E}_{dây} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

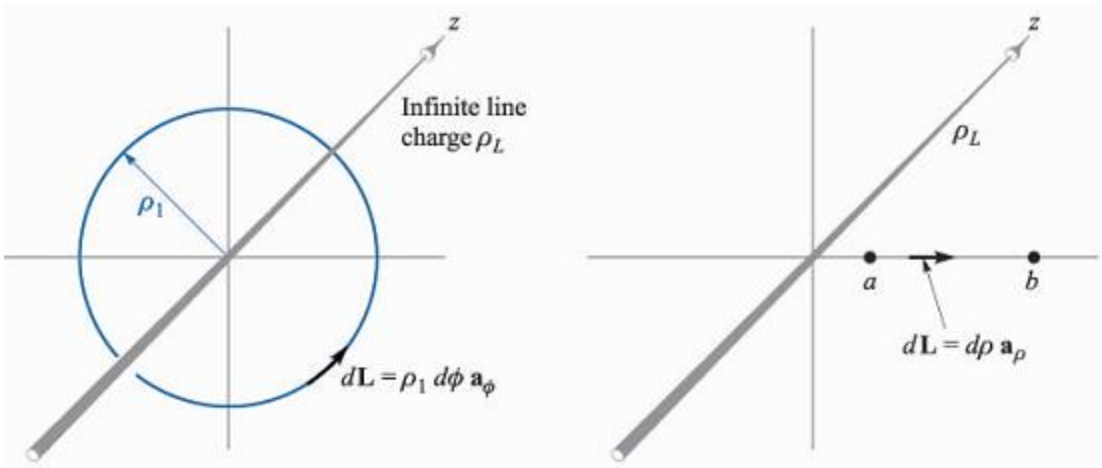
$$W = -Q\int_{cung}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = Q\int_{cung}\left(\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho\right)\left(\mathbf{a}_\phi\,\rho d\phi\right)$$

$$= -Q\int_{cung}\left(\frac{\rho_L d\phi}{2\pi\varepsilon_o}\right)\underbrace{\left(\mathbf{a}_\rho.\mathbf{a}_\phi\right)}_{0}$$

- Công dịch chuyển điện tích dây trên một đường đi từ ρ=b đến ρ=a có góc ϕ không đổi:

$$W = -Q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -Q\int_b^a\left(\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho\right).\left(\mathbf{a}_\rho\,d\rho\right)$$

$$= -Q\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\int_b^a\frac{1}{\rho}d\rho = -Q\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{a}{b}\right]$$



z
Infinite line charge ρ_L
ρ_1
$d\mathbf{L} = \rho_1\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$
z
ρ_L
a
b
$d\mathbf{L} = d\rho\, \mathbf{a}_\rho$

(a) (b)

Dịch chuyển trong trường của điện tích dây

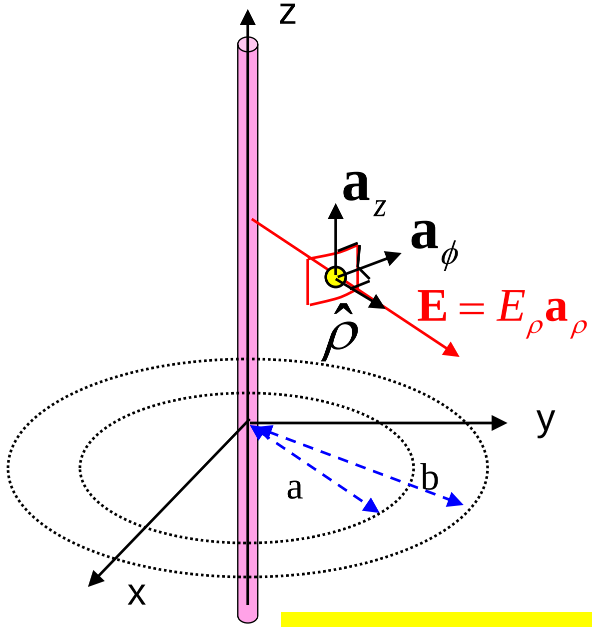
- Công dịch chuyển điện tích trên một đường đi từ ρ=b đến ρ=a có góc ϕ không đổi :

$$W = -Q\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\int_b^a \frac{1}{\rho}d\rho$$

$$= -Q\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{a}{b}\right]$$

$$= -Q\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{\sqrt{x_a^{\,2}+y_a^{\,2}}}{\sqrt{x_b^{\,2}+y_b^{\,2}}}\right]$$

$$= -Q\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{x_a^{\,2}+y_a^{\,2}}{x_b^{\,2}+y_b^{\,2}}\right]$$



$$\mathbf{E}_{dây} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

- Ví dụ 2 : Trong hệ tọa độ trụ, cho cường độ trường ($\mathbf{E}=k/\rho)\mathbf{a}_\rho$

Chứng minh công dịch chuyển một điện tích Q một khoảng từ bán kính ρ_1 đến $2\rho_1$ không phụ thuộc vào ρ

$$dW = -Q\mathbf{E}d\mathbf{L} = -QEd\rho = \frac{-kQ}{\rho}d\rho$$

$$W = -kQ = -9\ln\left[\frac{2}{4}\right] = -kQ\ln 2$$

Hiệu điện thế

- Hiệu điện thế V: công cần thực hiện để dịch chuyển một đơn vị điện tích dương từ điểm B tới điểm A trong điện trường

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

Cận tích phân sẽ quyết định dấu của tích phân đó

V_{AB} là một đại lượng vô hướng

Ví dụ đối với điện tích dây:

$$\mathbf{E}_{dây} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$V_{AB} = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\int_{\rho_B}^{\rho_A}\frac{1}{\rho}d\rho = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{\rho_A}{\rho_B}\right]$$

$$V_{AB} = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{\sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2}}{\sqrt{x_B{}^2 + y_B{}^2}}\right] = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{x_A{}^2 + y_A{}^2}{x_B{}^2 + y_B{}^2}\right]$$

$$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x};\ \int\frac{1}{x}dx = \ln x$$

$$\int_{\rho_B}^{\rho_A}\frac{1}{\rho}d\rho = (\ln\rho)\Big|_{\rho_A}^{\rho_B} = \ln\rho_A - \ln\rho_B = \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right)$$

- Ví dụ 3 : Cho dây dài vô hạn mang điện tích đường ρ_l=(10^{-9}/2) C/m đặt theo trục z. Tính hiệu điện thế giữa hai điểm A(2 m, π/2, 0) và B(4 m, π,5 m).

$$\mathrm{V}_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} d\mathbf{L} = -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \left(\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho} \mathbf{a}_\rho \right) \left(d\rho \mathbf{a}_\rho \right) = -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho} \mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_\rho d\rho$$

$$= -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho} (1) d\rho \quad = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{1}{\rho} d\rho \quad = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} (\ln \rho_A - \ln \rho_B)$$

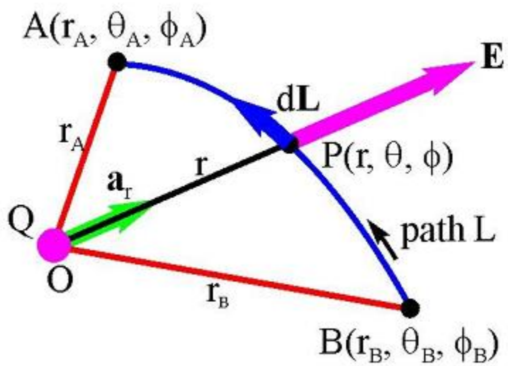
$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \left(\ln \frac{\rho_A}{\rho_B} \right) = -\frac{\left(10^{-9}/2\right)}{2\pi \left(\frac{10^{-9}}{36\pi} \right)} \left(\ln \frac{2}{4} \right) \quad = -9 \ln \left(\frac{2}{4} \right) = 6,24\mathrm{V}$$

$$\int \frac{1}{\rho} d\rho = \ln \rho$$

$$\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{1}{\rho} d\rho = \ln \rho_A - \ln \rho_B = \ln \left(\frac{\rho_A}{\rho_B} \right)$$

Điện trường của một điện tích điểm

Tính hiệu điện thế giữa hai điểm A, B cùng nằm trên một trục xuyên tâm có khoảng cách r_A, r_B đặt trong điện trường của một điện tích điểm Q



- Đã biết điện trường do điện tích điểm Q gây ra tại vị trí cách Q một khoảng *r* :

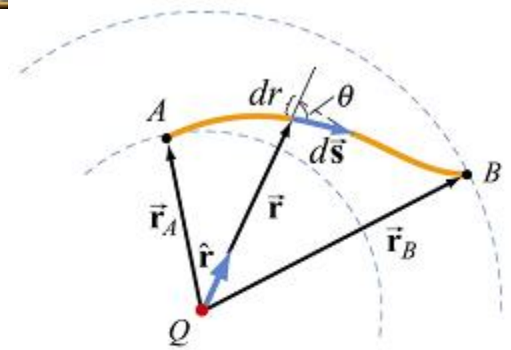
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_{r_B}^{r_A}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r\right).(dr\,\mathbf{a}_r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_B}^{r_A}\left(\frac{1}{r^2}\right).(\mathbf{a}_r\mathbf{a}_r)\,dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_B}^{r_A}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{r^2}\,dr$$

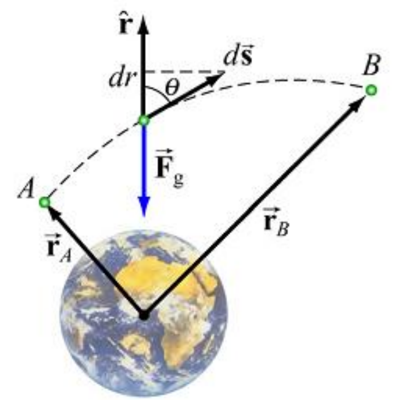
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$



- Liên hệ với công dịch chuyển một khối lượng m (trong vật lý)

$$W_g = \int \vec{\mathbf{F}}_g \cdot d\,\vec{\mathbf{s}} = \int_{r_A}^{r_B}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$= GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$



$$\mathbf{F}_g = G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{a}_r$$

Hằng số hấp dẫn

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

Consider moving a particle of mass m under the

influence of gravity, the work done by gravity in moving *m* from A to B

- Ví dụ 4: Cho điện tích Q=500 pC đặt tại tâm gốc tọa độ. Tìm hiệu điện thế giữa hai điểm A và B cách tâm tương ứng r_A=5 m và r_B=15 m :

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{\left(500.10^{-12}\right)}{4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) = 0,6\,\mathrm{V}$$

- Ví dụ 5: Cho **E**=(-16/r²)$\mathbf{a}_r$ V/m trong hệ tọa độ cầu. Tính hiệu điện thế giữa hai điểm A(2m , π, π/2) và B(4m,0, π).

$$\mathrm{V}_{AB} = -\int_4^2\left(\frac{-16}{r^2}\right)dr$$

$$= 16\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -4\ \mathrm{V}$$

▪ Ví dụ 6 : Tính điện thế tại điểm cách tâm một khoảng r, trong điện trường do điện tích Q gây ra

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

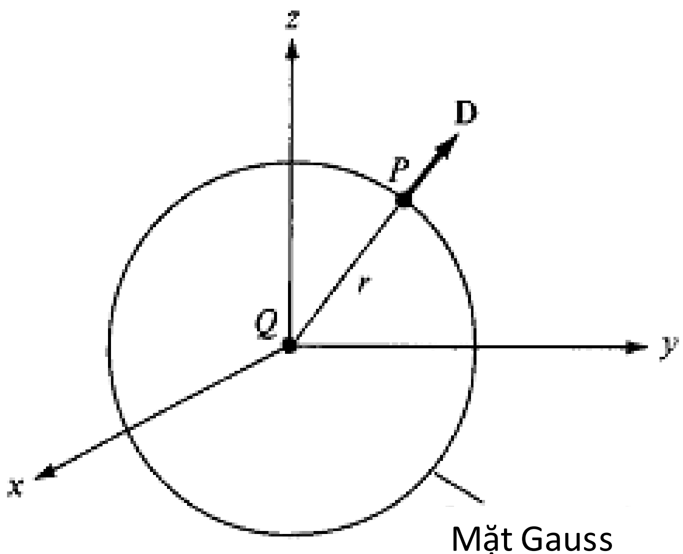
$$d\mathbf{L} = dr\ \mathbf{a}_r$$

$$V_r = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r\right)\cdot(dr\ \mathbf{a}_r)$$

$$= -\int\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + C \quad ; C = \text{constant}$$



Giá trị điện thế phụ thuộc *C* ?

$\rightarrow$ Điện thế chuẩn

Điện thế tham chiếu ("chuẩn")

- Điện thế tại một điểm trong trường tĩnh điện có giá trị bằng công dịch chuyển một đơn vị điện tích dương từ điểm xét ra xa vô cùng
- Đối với trường sinh ra bởi điện tích điểm Q đặt tại gốc tọa độ, điện thế tại một điểm A bằng:

$$V_A = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_{r_A}^{\infty} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \mathbf{a}_r \right) \cdot \left(dr\, \mathbf{a}_r \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r=r_A}^{r=\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r_A} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_A}$$

Điện thế chính là hiệu giữa điện thế của một điểm bất kỳ và điện thế của một "điểm chuẩn" nằm ở xa vô cùng (điện thế bằng 0)

Chọn điện thế chuẩn

- Bên cạnh việc chọn điểm chuẩn ở xa vô cùng, có thể chọn điểm chuẩn ở một vị trí bất kỳ. Thường chọn điện thế chuẩn ở:

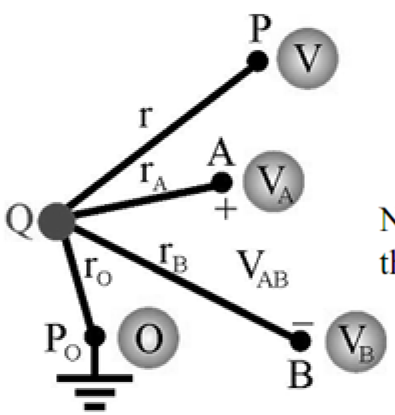
  - Đất

  - Vỏ của thiết bị điện

  - Vô cùng

Ví dụ với điện tích điểm:

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$



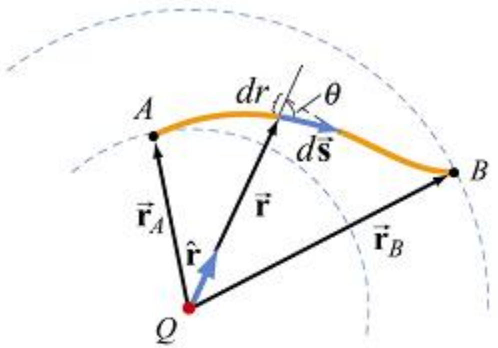
Nếu chọn điểm vô cực làm gốc điện thế ($P_o = \infty$), P bất kỳ, cách Q một khoảng r, thì điện thế V do Q tạo ra tại P là:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}(P_o = \infty)$$

Nếu chọn $P_o(r_o, \theta_o, \phi_o)$ cách Q một khoảng r0 làm gốc điện thế, thì

$$V = V_{PP_o} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right)$$

- Ví dụ 7: Cho điện tích Q=500 pC đặt tại tâm gốc tọa độ. Tìm hiệu điện thế giữa hai điểm A và B cách tâm tương ứng r_A=5 m và r_B=15 m :



- Cách 1:

$$V_{AB}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$=\frac{\left(500.10^{-12}\right)}{4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)=0,6\,\mathrm{V}$$

- Cách 2: Chọn thế chuẩn tại vô cực

$$V_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A}\right)=0,9\,\mathrm{V}$$

$$V_B=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_B}\right)=0,3\,\mathrm{V}$$

$$\rightarrow V_{AB}=V_A-V_B=0,6\,\mathrm{V}$$

Điện thế của một phân bố điện tích

- Xét một điện tích điểm tại vị trí $\mathbf{r}_1$ trong không gian

(không phải gốc tọa độ)

$$V_A(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\right|}$$

- Trong trường hợp có nhiều điện tích điểm

$$V_A(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{N} \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_o \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m\right|}$$

Điện thế với phân bố điện tích

- Điện thế khi điện tích phân bố theo mật độ điện tích:

-Đường $$V(\mathbf{r}) = \int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

-Mặt: $$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

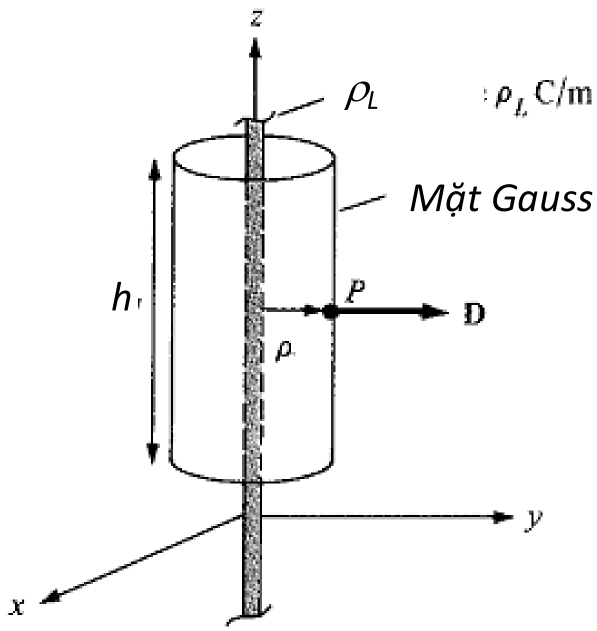
- Đối với một phân bố điện tích khối:

$$V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$V_A(\mathbf{r}) = \lim_{\delta vol\to 0}\sum_{m=1}^{N\to\infty}\frac{\overset{\rho_v(\mathbf{r}_m)\cdot\delta vol}{\delta Q_m}}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|} = \int_V \frac{\overbrace{\rho_v(\mathbf{r}')\cdot dv'}^{\text{Điện tích nguồn}}}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Khoảng cách giữa nguồn và điểm quan sát

- Ví dụ 8: Tính điện thế tại điểm P, cách trụ dây mang điện tích đường ρ_L một khoảng ρ

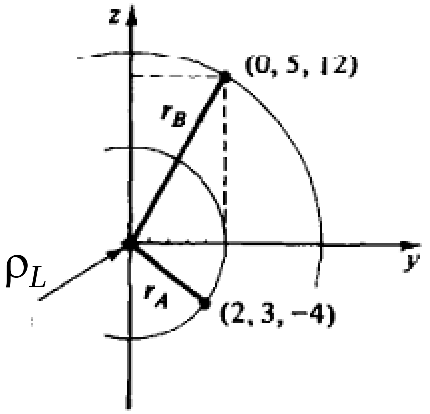


Đã có: $$\mathbf{E}_{dây\,mang\,điện} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$V_\rho = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho + C$$

Tìm C? Cần xác định vị trí điện thế chuẩn

- Ví dụ 9: Cho dây dài vô hạn mang điện tích đường ρ_L=400pC/m đặt theo trục x. Điện thế chuẩn đặt tại điểm B(0,5,12)m. Tính điện thế tại điểm A(2, 3,-4)m.



- Do sợi dây nằm theo trục x, thành phần theo trục x của hai điểm này có thể bỏ qua

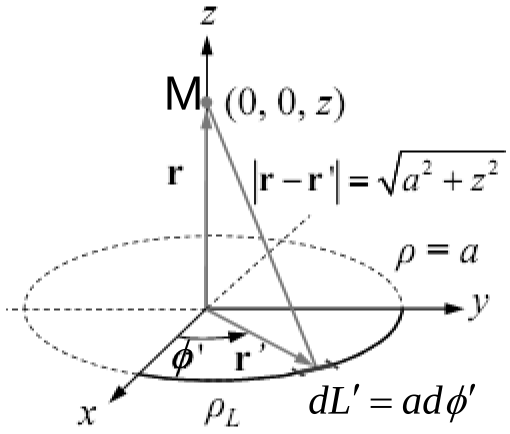
$$\rho_A = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\text{m}$$

$$\rho_B = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\text{m}$$

$$\rightarrow \text{V}_{AB} = -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho} d\rho = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left[\frac{\rho_A}{\rho_B}\right] = 6{,}88\text{V}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

- Ví dụ 10: Cho một điện tích 40 nC phân bố đều trên một vòng tròn bán kính *a*=2m. Tìm điện thế tại điểm M cách mặt phẳng vòng dây một khoảng 5m.



- Điện thế tại điểm M

$$V(\mathbf{r}) = \int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\rho_L(\mathbf{r}') = \rho_L = \frac{40.10^{-9}}{2\pi(2)} = \frac{10^{-8}}{\pi}\,\mathrm{C/m}$$

Với

$$\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_z \qquad \rightarrow |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = R = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}\,\mathrm{m}$$

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho = 2\mathbf{a}_\rho$$

$$dL = ad\phi = 2d\phi$$

$$\rightarrow V_M = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{10^{-8}}{\pi}\frac{2.2\pi}{4\pi\dfrac{10^{-9}}{36\pi}\sqrt{29}} = 66{,}85\mathrm{V}$$

- So sánh kết quả khi điện tích tập trung tại tâm:

$$\mathrm{V} = \int_0^{2\pi} \frac{40.10^{-9}}{4\pi\left(\dfrac{10^{-9}}{36\pi}\right)5} = 72\mathrm{V}$$

$$V_r = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} +$$

- Ví dụ 11: Cho quả cầu bán kính a, điện tích khối ρ_{v0}. Tìm điện trường và thế ở trong và ngoài quả cầu?

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{a}_r$$

$$D.S = q \rightarrow \varepsilon \text{ES=q}$$

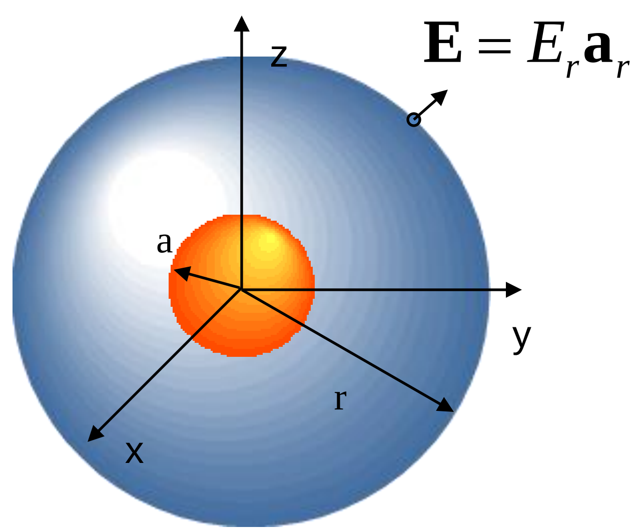
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_{vo}}{3\varepsilon_o} r\,\mathbf{a}_r & r < a \\ \dfrac{\rho_{vo} a^3}{3\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r & r > a \end{cases}$$

- Miền ngoài cầu:

$$r > a; S = 4\pi r^2$$

$$q_2 = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3} \rightarrow \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$$

$$V_2 = \int_r^{\infty} \mathbf{E}_2.d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E_2 dr = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon r}$$



$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_{vo}}{3\varepsilon_o}r\,\mathbf{a}_r & r<a\\[2mm] \dfrac{\rho_{vo}a^3}{3\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r & r>a\end{cases}$$

- Miền trong cầu:

$$r>a;S=4\pi r^2$$

$$q_1=\rho_0\frac{4\pi r^3}{3}\rightarrow \mathbf{E}_1=\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}\mathbf{a}_r$$

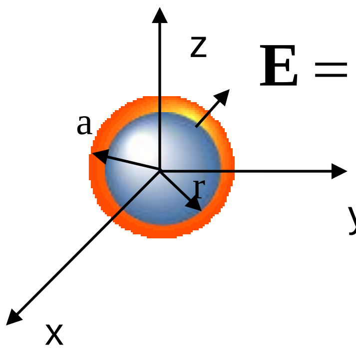
$$\mathbf{E}_2=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$$

$$V_1=\int_r^\infty \mathbf{E}.d\mathbf{r}=\int_r^a E_1dr+\int_a^\infty E_2dr$$

$$=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\left(\left.\frac{-1}{r}\right|_a^\infty\right)+\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_r^a\right)$$

$$=\frac{\rho_0}{6\varepsilon}a^2-\frac{\rho_0}{6\varepsilon}r^2+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon}$$

$$=\frac{\rho_0}{2\varepsilon}a^2-\frac{\rho_0}{6\varepsilon}r^2$$



$$\mathbf{E}=E_r\mathbf{a}_r$$

$$\varepsilon_0=8{,}851\times10^{-12}=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\;F/m$$

- Ví dụ 12 . Cho một trục điện dài *l* (coi là vô hạn), phân bố với mật độ điện tích đường τ (τ =q/l) C/m. Tính **E** và V tại điểm cách trục một khoảng ρ
  - Bài toán có tính đối xứng trục. Dùng luật Gauss:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \tau l \qquad D.S_{xq} = q = \tau l; S_{xq} = 2\pi\rho l$$

  - Xét tại điểm M(ρ,ϕ,z), trường chỉ phụ thuộc ρ $\oint_S D_\rho .dS = \tau l$

Thành phần hai đáy =0 do $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$

$$D_\rho .2\pi\rho l = \tau l \rightarrow D_\rho = \frac{\tau}{2\pi\rho} \rightarrow \mathbf{E}_\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}\mathbf{a}_\rho$$

Chọn điện thế chuẩn tại điểm có bán kính ρ_0

$$V = \int_\rho^{\rho_0} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho} d\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\rho_0 - \ln\rho\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\rho_0}{\rho} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\rho + C$$

- Ví dụ 13: Phân bố điện tích khối

Trong một thể tích trụ tròn bán kính a, chiều dài L, phân bố đều một điện tích có mật độ ρ_v [C/m³] Tìm phân bố E, D, V

- Bài toán có tính đối xứng trục. Dùng luật Gauss:

$$\oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = \sum q \leftrightarrow D_r S_{xq} = \sum q$$

$$\rho \le a: \quad D_\rho .2\pi\rho L = \rho_v\left(\pi\rho^2 L\right) \to D_\rho = \rho_v \frac{\rho}{2} \leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \rho_v \frac{\rho}{2\varepsilon}\mathbf{a}_\rho$$

$$\rho \ge a: \quad D_\rho .2\pi\rho L = \rho_v\left(\pi a^2 L\right) \to D_\rho = \rho_v \frac{a^2}{2\rho} \leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \rho_v \frac{a^2}{2\varepsilon\rho}\mathbf{a}_\rho$$

- Chọn thế tại a bằng 0

- Xét V ở ngoài khối trụ ρ>a:

$$V(\rho) = \int_\rho^a E_\rho d\rho = \int_\rho^a \rho_v \frac{a^2}{2\varepsilon\rho} d\rho = \rho_v \frac{a^2}{2\varepsilon} \ln \rho\Big|_\rho^a = \frac{\rho_v a^2}{2\varepsilon} \ln\frac{a}{\rho}$$

- Xét V ở trong khối trụ ρ<=a:

$$V(\rho) = \int_\rho^a E_\rho d\rho = \int_\rho^a \frac{\rho_v}{2\varepsilon}\rho d\rho = \frac{\rho_v}{4\varepsilon}\left(a^2 - \rho^2\right)$$

Mặt đẳng thế

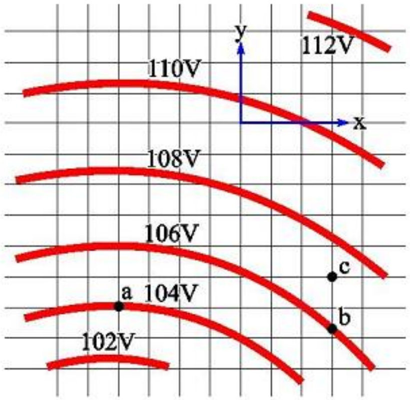
- Mặt đẳng thế là mặt mà nếu điểm đầu và điểm cuối đường đi cùng nằm trên mặt đó, thì hiệu điện thế bằng 0
- Nói cách khác: mặt đẳng thế là mặt mà các điểm trên đó có cùng một giá trị điện thế.

Từ biểu thức: $V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$

Ta thấy một mặt là đẳng thế (V_{AB}=0) nếu:

E.d**L**=0 trên tất cả các đường nằm trên mặt đó, hay

E vuông góc với bề mặt đó



Gradient thế

- Xét hiệu điện thế giữa hai điểm rất gần nhau, có thể viết:

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \delta V \approx -\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{L} = -|\mathbf{E}||\delta\mathbf{L}|\cos\theta$$

-Trong hệ tọa độ Đề-các:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\left(E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y + E_z\mathbf{a}_z\right).\left(dx\,\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z\right)$$

$$= -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

- Ta cũng biết định nghĩa đạo hàm toàn phần của một hàm số V bất kỳ là:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Gradient thế

So sánh giữa: $dV = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$

Với $$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Ta có: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

- Gradient được định nghĩa là tập hợp của các toán tử đạo hàm trên một hàm số vô hướng
- Gradient được hiểu như sau:
  - Độ lớn của nó biểu thị tốc độ biến thiên cực đại của hàm số tại điểm quan sát
  - Hướng của nó biểu thị hướng cần phải đi để đạt được tốc độ thay đổi cực đại đó.

Toán tử Gradient

- Để thuận tiện ta có thể viết:

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z \right) V$$

- Hay có thể định nghĩa toán tử vector "grad" như sau:

$$grad = \nabla = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

- Khi đó ta có:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \right) = -\nabla V$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

- Tức là vector cường độ điện trường **E** chính bằng gradient của điện thế (về độ lớn).

Toán tử Gradient

- Gradient trong các hệ tọa độ:

- Đề-các: $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

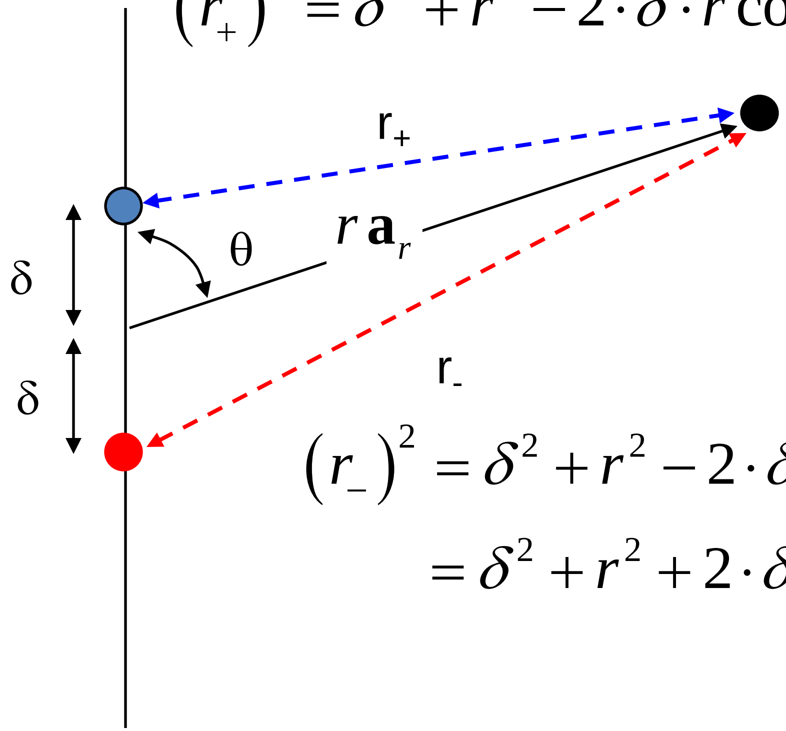
-Trụ: $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

- Cầu: $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

Lưỡng cực điện

- Lưỡng cực (lưỡng cực điện): 2 điện tích điểm có độ lớn bằng nhau, ngược dấu, khoảng cách giữa chúng rất nhỏ so với khoảng cách tới điểm cần xét

$$\left(r_+\right)^2 = \delta^2 + r^2 - 2\cdot\delta\cdot r\cos\theta$$



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{(-q)}{r_-}\right)$$

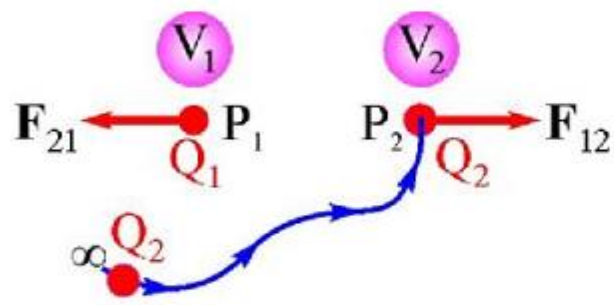
$$\left(r_-\right)^2 = \delta^2 + r^2 - 2\cdot\delta\cdot r\cos\left(\pi-\theta\right)$$

$$= \delta^2 + r^2 + 2\cdot\delta\cdot r\cos\theta$$

Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

Nếu cần di chuyển điện tích dương Q_2 từ xa vô cùng vào không gian có điện trường gây ra bởi điện tích điểm dương Q_1 cố định,

ta cần thực hiện một công.



- Nếu Q_2 được giữ nguyên: Q_2 có một thế năng

- Nếu Q_2 được đặt tự do:

+ Q_2 sẽ dịch chuyển ra xa Q_1

+Q_2 sẽ tích lũy động năng trong quá trình chuyển động.

→Cần xác định thế năng của một hệ điện tích điểm.

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V \rho_V V dv$$

có thể coi là công thức tính thế năng tổng quát cho các vật mang điện tích điểm, đường, mặt.