TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

GIẢI TÍCH I

(lưu hành nội bộ)

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - TÍCH PHÂN - HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

Hà Nội- 2009

MỤC LỤC

Mục lục

CHƯƠNG 1

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ (13LT+13BT)

§1. SƠ LƯỢC VỀ CÁC YẾU TỐ LÔGIC; CÁC TẬP SỐ: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

1. Phần Lôgic không dạy trực tiếp (phần này Đại số đã dạy) mà chỉ nhắc lại những phép suy luận cơ bản thông qua bài giảng các nội dung khác nếu thấy cần thiết.

2. Giới thiệu các tập số; cần nói rõ tập $\mathbb{Q}$ tuy đã rộng hơn $\mathbb{Z}$ nhưng vẫn chưa lấp đầy trục số còn tập $\mathbb{R}$ đã lấp đầy trục số và chứa tất cả các giới hạn của các dãy số hội tụ, ta có bao hàm thức
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

§2. TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ TÍNH CHẤT

Nhắc lại định nghĩa và nêu các tính chất sau

- $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, |x+y| \leq |x| + |y|;$
- $|x-y| \geq \left||x| - |y|\right|, \quad |x| \geq A \Longleftrightarrow x \geq A$ hoặc $x \leq -A$
- $|x| \leq B \Longleftrightarrow -B \leq x \leq B.$

§3. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ, TẬP XÁC ĐỊNH, TẬP GIÁ TRỊ VÀ CÁC KHÁI NIỆM: HÀM CHẴN, HÀM LẺ, HÀM TUẦN HOÀN, HÀM HỢP, HÀM NGƯỢC

1. Định nghĩa hàm số:
   Nhắc lại định nghĩa ở phổ thông. Chú ý nếu viết dưới dạng ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ thì tập xác định đã rõ chính là X còn biểu thức của f (dưới dạng biểu thức giải tích) là chưa rõ, có thể không tìm được biểu thức ấy. Còn nếu hàm số được cho dưới dạng biểu thức giải tích thì cần phải xác định rõ miền xác định của hàm số. Trong chương trình chỉ tập trung vào cách cho hàm số dạng một hay nhiều biểu thức giải tích.
   Một số hàm Dirichlet, dấu, phần nguyên có thể nêu dưới dạng ví dụ hay thể hiện qua các phần dạy khác.
   Tập giá trị của hàm số:

2. Hàm số đơn điệu

3. Hàm số bị chặn (chặn trên, chặn dưới, bị chặn).

4. Hàm chẵn, hàm lẻ (tính chất của đồ thị và kết quả $f(x) =$ hàm chẵn + hàm lẻ).

5. Hàm tuần hoàn:
   Nêu qua định nghĩa, ví dụ là các hàm số lượng giác.
   Trong phạm vi chương trình chủ yếu là xem có số $T \neq 0 (T > 0)$ nào đó thỏa mãn $f(x+T) = f(x)$ mà không đi sâu vào việc tìm chu kỳ (số $T > 0$ bé nhất).

6. Hàm hợp: định nghĩa và ví dụ.

7. Hàm ngược:

   (a) Định nghĩa

   (b) Mối quan hệ giữa đồ thị của hai hàm

   (c) Định lý về điều kiện đủ để tồn tại hàm ngược, (tăng hay giảm)

   (d) Trên cơ sở định lý trên xây dựng các hàm số lượng giác ngược và vẽ đồ thị của chúng. Ở phổ thông học sinh đã biết $y = a^x, y = \log_a x$ là các hàm ngược của nhau

8. Hàm số sơ cấp

(a) Nêu các hàm số sơ cấp cơ bản:

$$y = x^\alpha,\ \ y = a^x,\ \ y = \log_a x,\ \ y = \sin x,\ \ y = \cos x, y = \operatorname{tg} x,\ \ y = \operatorname{cotg} x$$
$$y = \arcsin x,\ \ y = \arccos x,\ \ y = \operatorname{arctg} x,\ \ y = \operatorname{arccotg} x.$$

(b) Định nghĩa hàm số sơ cấp:
Nêu ví dụ về 3 lớp hàm sơ cấp: đa thức, phân thức hữu tỷ, hyperbolic.

3.1 Bài tập

Bài tập 1.1. Tìm TXĐ của hàm số

a) $y = \sqrt[4]{\lg(\tan x)}$ b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ d) $y = \arccos(2 \sin x)$

Lời giải.

a. TXĐ $= \{\pi/4 + k\pi \le x \le \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ b. TXĐ $= \{-1/3 \le x \le 1\}$

c. TXĐ $= \{x \ge 0, x \notin \mathbb{Z}\}$ d. TXĐ $= \{-\dfrac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

■

Bài tập 1.2. Tìm miền giá trị của hàm số
a. $y = \lg(1 - 2\cos x)$ b. $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

Lời giải. a. MGT = $\{-\infty \le y \le \lg 3\}$ b. MGT = $\{-\pi/2 \le y \le \pi/2\}$ ■

Bài tập 1.3. Tìm $f(x)$ biết
a. $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ b. $f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = x^2.$

Lời giải. a. ĐS : $f(x) = x^2 - 2$ với $|x| \ge 2$. b. ĐS: $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2 \forall x \ne 1.$ ■

Bài tập 1.4. Tìm hàm ngược của hàm số (trên miền mà hàm số có hàm ngược)

a. $y = 2x + 3.$ b. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ c. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Lời giải. a) ĐS : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

b) ĐS : $y = y = \dfrac{1-x}{1+x}$

c) Ta có $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ nên hàm số đã cho không là một đơn ánh. Ta phải xét trên 2 miền:

Trên miền $x \geq 0$, từ $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Ta có song ánh:

$$\begin{aligned} [0, +\infty) &\to [1, +\infty) \\ x &\mapsto y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) &\leftarrow y \end{aligned}$$

Vậy hàm ngược trên miền $x \geq 0$ là $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$.

Trên miền $x \leq 0$, tương tự ta có hàm ngược là $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), x \leq 1$. ■

Bài tập 1.5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a. $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$

b. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 - x^2})$

c. $f(x) = \sin x + \cos x$

Lời giải. a. ĐS: hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b. ĐS: hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c. ĐS: hàm số đã cho không chẵn, không lẻ. ■

Bài tập 1.6. Chứng minh rằng bất kì hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Lời giải. Với mỗi $f(x)$ bất kì ta luôn có

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{g(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{h(x)}$$

trong đó $g(x)$ là một hàm số chẵn, còn $h(x)$ là một hàm số lẻ. ■

Bài tập 1.7. Xét tính tuần hoàn và chu kì của hàm số sau (nếu có)

a. $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

b. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

c. $f(x) = \sin^2 x$

d. $f(x) = \sin(x^2)$

Lời giải. a) Giả sử $T > 0$ là một chu kì của hàm số đã cho. Khi đó

$$\begin{aligned}
& f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & A\cos\lambda(x+T) + B\sin\lambda(x+T) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & A[\cos\lambda x - \cos\lambda(x+T)] + B[\sin\lambda x - \sin\lambda(x+T)] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & 2\sin\frac{-\lambda T}{2}[A\sin(\lambda x + \frac{\lambda T}{2}) + B\cos(\lambda x + \frac{\lambda T}{2})] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & \sin\frac{\lambda T}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow T = \left|\frac{2k\pi}{\lambda}\right|.$$

Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|\lambda|}$.

b. Theo câu a) thì hàm số $\sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π, hàm số $\sin 3x$ tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{3}$. Vậy $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$

c. $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

d. Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T > 0$.Khi đó

$$\sin(x+T)^2 = \sin(x^2) \forall x.$$

1. Cho $x = 0 \Rightarrow T = \sqrt{k\pi}, k \in \mathbb{Z}, k > 0$.
2. Cho $x = \sqrt{\pi} \Rightarrow k$ là số chính phương. Giả sử $k = l^2, l \in Z, l > 0$.
3. Cho $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ta suy ra điều mâu thuẫn.

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn. ■

Bài tập 1.8. Cho $f(x) = ax + b, f(0) = -2, f(3) = -5$. Tìm $f(x)$.

Lời giải. ĐS: $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$. ■

Bài tập 1.9. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c, f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5$. Tìm $f(x)$.

Lời giải. ĐS: $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$. ∎

Bài tập 1.10. Cho $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}), a > 0$. Chứng minh rằng :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Bài tập 1.11. Giả sử $f(x) + f(y) = f(z)$. Xác định z nếu:

a. $f(x) = ax, a \neq 0$.
b. $f(x) = \arctan x$
c. $f(x) = \frac{1}{x}$
d. $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$

Lời giải.

a. ĐS: $z = x + y$
b. ĐS: $z = \frac{x+y}{1-xy}$
c. ĐS: $z = \frac{xy}{x+y}$
d. ĐS: $z = \frac{x+y}{1+xy}$ ∎

§4. DÃY SỐ

Định nghĩa dãy số, các khái niệm về dãy đơn điệu, bị chặn, giới hạn và các phép toán. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn (tiêu chuẩn kẹp, tiêu chuẩn đơn điệu, tiêu chuẩn Cauchy).

1. Nhắc lại định nghĩa dãy số và các khái niệm về dãy bị chặn, đơn điệu
2. Định nghĩa giới hạn dãy số và nêu một ví dụ. Các khái niệm về dãy số hội tụ, phân kỳ. Nêu tính chất giới hạn nếu có là duy nhất, mọi dãy hội tụ đều bị chặn.
3. Các phép toán
4. Ý tưởng về giới hạn ∞
5. Các tiêu chuẩn hội tụ
   (a) Đơn điệu bị chặn, ví dụ mô tả số e.
   (b) Tiêu chuẩn kẹp
   (c) Định nghĩa dãy Cauchy, tiêu chuẩn Cauchy. Nêu ví dụ dãy (a_n):

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ phân kỳ.}$$

4.1 Bài tập

Bài tập 1.12. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a. $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ b. $x_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ c. $x_n = n + \sqrt[3]{1 - n^3}$

d. $x_n = \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$ e. $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

Lời giải. a. ĐS: $\frac{1}{2}$ b. ĐS: $\frac{a}{2}$ c. ĐS: 0 d. ĐS: phân kì e. ĐS: 0 ■

Bài tập 1.13. Xét dãy số $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, x_0 = 1$.

a. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Bài tập 1.14. Xét $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.Chứng minh rằng $\{u_n\}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$1 + (1 + \frac{1}{n}) + \ldots + (1 + \frac{1}{n}) \geq (n+1) \sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \geq (1 + \frac{1}{n})^n$$

Hơn nữa ta có

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \frac{1}{n^k}$$

$$k! = 1.2 \ldots k \geq 2^{k-1} \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow C_n^k . \frac{1}{n^k} = \frac{n.(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} . \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

Bài tập 1.15. Cho $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.Chứng minh rằng $\{s_n\}$ tăng và bị chặn.

Lời giải. **Chú ý :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = e$. ■

Bài tập 1.16. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + a + \ldots + a^n}{1 + b + \ldots + b^n}; |a| < 1, |b| < 1$.

Lời giải.
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.\frac{1-b}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}$$

Bài tập 1.17. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n dấu căn).

Lời giải. Đặt $u_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ ta có $u_{n+1}^2=2+u_n$. Trước hết chứng minh $\{u_n\}$ là một dãy số tăng và bị chặn, $0\le u_n\le 2$. Theo tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn, $\{u_n\}$ là một dãy số hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a, 0<a<2$ thì từ phương trình $u_{n+1}^2=2+u_n$, cho $n\to\infty$ ta có
$$a^2=a+2$$
Vậy $a=2$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}=2$ ■

Bài tập 1.18. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2-1})\sin n$.

Lời giải. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2-1})\sin n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n+\sqrt{n^2-1}}=0$ (theo tiêu chuẩn kẹp) ■

Bài tập 1.19. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}[\cos(\ln n)-\cos(\ln(n+1))]$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{aligned}\cos(\ln n)-\cos(\ln(n+1))&=-2\sin\left(\frac{\ln n+\ln(n+1)}{2}\right).\sin\left(\frac{\ln n-\ln(n+1)}{2}\right)\\&=-2\sin\frac{\ln n(n+1)}{2}\sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}\end{aligned}$$ ■

nên
$$0\le|\cos(\ln n)-\cos(\ln(n+1))|\le 2\left|\sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}\right|$$
Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}=0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp
$$\lim_{n\to+\infty}[\cos(\ln n)-\cos(\ln(n+1))]=0$$

Bài tập 1.20. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$.

Lời giải.
$$2^n=(1+1)^n>\frac{n(n-1)}{2}\Rightarrow 0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}.$$
Dùng nguyên lý kẹp ta có điều phải chứng minh. ■

Bài tập 1.21. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Lời giải. Ta có

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}.\frac{2}{2}.\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n} < 2.\frac{2}{n}\ \forall n \geq 2$$

Bài tập 1.22. Tính

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{n}{2^n})$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{n}{3^n})$

Lời giải. **Gợi ý :**

a. Tính $S_n - \dfrac{1}{2}S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

b. Tính $S_n - \dfrac{1}{3}S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$. ∎

Bài tập 1.23. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.

Lời giải. Đặt $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1+\alpha_n)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n^2 < \dfrac{2}{n-1}$. Áp dụng nguyên lý giới hạn kẹp ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

1. Nếu $a = 1$, xong.
2. Nếu $a > 1, 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}\ \forall n > a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
3. Nếu $a < 1$, đặt $a' = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a'} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. ∎

Bài tập 1.24. Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh rằng dãy số $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ phân kì.

Bài tập 1.25. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} = a$.

Bài tập 1.26. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, a_n > 0 \forall n$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} = a$.

§5. GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Định nghĩa giới hạn hàm số

   (a) Nêu các định nghĩa: $\lim f(x)$ trong quá trình

   $$x \to x_o,\ \ x \to x_o^+, x \to x_o^-, x \to \infty$$

   (b) Tính duy nhất của giới hạn

2. Các phép toán

3. Giới hạn của hàm hợp:
   Nếu có $\lim\limits_{x\to x_o} u(x) = u_o$, $\lim\limits_{u\to u_o} f(u) = f(u_o)$ và có hàm hợp $f(u(x))$ thì $\lim\limits_{x\to x_o} f(u(x)) = f(u_o)$.
   Áp dụng $\lim\limits_{x\to x_o} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_o} B(x)\ln A(x)}$.

4. Giới hạn vô cùng

Bài tập 1.27. Tính

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\mathrm{TQ: P_n(x_0) = Q_m(x_0) = 0.} \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{x_0}} \frac{\mathrm{P_n(x)}}{\mathrm{Q_m(x)}} = \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{x_0}} \frac{\mathrm{(x-x_0).P_{n-1}(x)}}{\mathrm{(x-x_0).Q_{m-1}(x)}} = \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{x_0}} \frac{\mathrm{P_{n-1}(x)}}{\mathrm{Q_{m-1}(x)}}.$$

Lời giải. a. ĐS : $\dfrac{49}{24}$ b. ĐS: $\dfrac{n(n-1)}{2}.a^{n-2}$ ■

Bài tập 1.28. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ ĐS : $\sim \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)\ (\infty - \infty)$

Lời giải. a.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

b.

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 - 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} + x^2} = \frac{1}{3}$$

§6. VÔ CÙNG LỚN, VÔ CÙNG BÉ

6.1 Vô cùng bé (VCB)

1. Định nghĩa; nêu mối liên hệ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow f(x) = \ell + \alpha(x);$$

trong đó $\alpha(x)$ – VCB trong quá trình $x \to a$. Phân biệt với khái niệm rất bé.

2. Một số tính chất:

   (a) Tổng hai VCB (đối với một VCB người ta không quan tâm đến dấu của nó).

   (b) Tích của VCB với một đại lượng bị chặn.

   (c) Tích các VCB.

3. So sánh các VCB trong cùng một quá trình

   (a) VCB cùng bậc, VCB tương đương
   Nêu các công thức thay tương đương hay dùng trong quá trình $x \to 0$

$$\begin{aligned}
&x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x\\
&\sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(a + x)\\
&\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \ln \sqrt[m]{1+\alpha x} = \frac{1}{m}\ln(1+\alpha x) \sim \frac{\alpha x}{m}\\
&1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

   (b) Vô cùng bé bậc cao

      i. Định nghĩa

      ii. Hiệu hai VCB tương đương

      iii. Tích hai VCB

4. Qui tắc ngắt bỏ các VCB và qui tắc thay tương đương

   (a) Nếu $\alpha \sim \overline{\alpha}$, $\beta \sim \overline{\beta}$ thì

$$\lim \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \lim \frac{\alpha}{\beta}; \quad \lim(\overline{\alpha}.\gamma) = \lim(\alpha.\gamma)$$

   (b) Nếu $\alpha_1 = o(\alpha)$, $\beta_1 = o(\beta)$ thì $\lim \frac{\alpha + \alpha_1}{\beta + \beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$

5. Ứng dụng khử một số dạng vô định
   Chú ý: Học sinh hay nhầm
   - Thay tương đương khi có hiệu hai VCB
   - Nếu f là một hàm, $\alpha \sim \overline{\alpha} \not\Longrightarrow f(\alpha) \sim f(\overline{\alpha})$.

6.2 Vô cùng lớn (VCL)

1. Định nghĩa
2. Mối liên hệ giữa VCB và VCL. Từ đó suy ra các kết quả tương tự như đối với các VCB.
3. Qui tắc thay tương đương và ngắt bỏ VCL.
4. Ứng dụng khử dạng $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.
   Chú ý: Còn tồn đọng một số dạng vô định, ví dụ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3};\quad \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x};\ldots$$

6.3 Bài tập

Bài tập 1.29. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Lời giải. a.

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

Vì $\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\sim\dfrac{\alpha}{m}x$, $\sqrt[n]{1+\beta x}-1\sim\dfrac{\beta}{n}x$, nên

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$$

b.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}.\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\right)=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$$

Bài tập 1.30. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Lời giải. a. ĐS : $\cos a$ b. ĐS : 0 c. ĐS : $\dfrac{-1}{12}$ d. ĐS : 14 ■

Bài tập 1.31. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\ (1^\infty)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x)]$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}),x>0$

Lời giải. a) Đây không phải là dạng vô định, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1.$

b) Áp dụng công thức $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}A(x)^{B(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}B(x)\ln A(x)}.}$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\quad \text{(L'Hospital)}$$

nên

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

c) ĐS: 0.

d)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}),x>0\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}.\frac{1}{n(n+1)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\\
&=\ln x
\end{aligned}$$

■

Bài tập 1.32. Khi $x \to 0$ cặp VCB sau có tương đương không ?

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ và } \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

Lời giải. ĐS : $\beta(x) = o(\alpha(x))$ ∎

Bài tập 1.33. Tìm giới hạn

Áp dụng $\boxed{\lim_{x \to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} B(x) \ln A(x)}}$.

a. $\lim_{x \to 0^+} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ (1^∞)

b. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ (1^∞)

c. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (1^∞)

d. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$ (1^∞)

Thay tương đương :

e. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

f. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

g. $\lim_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Lời giải.

a. ĐS: e^{-2} b. ĐS: 1 c. ĐS: 1 d. ĐS: e

e. ĐS: $\alpha - \beta$ f. ĐS: 1 g. ĐS: $a^a(\ln a - 1)$ ∎

§7. Hàm số liên tục

1. Định nghĩa: Cho $f(x)$ xác định trong một lân cận nào đó của x_o (xác định cả tại x_o) nếu có $\lim_{x \to x_o} = f(x_o)$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_o) > 0 : \forall x, |x - x_o| < \delta \text{ ta có } |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon).$$

2. Liên tục một phía và mối quan hệ với liên tục.

3. Các khái niệm hàm liên tục trên một khoảng, một đoạn. Hình ảnh hình học.

4. Các phép toán số học đối với các hàm số cùng liên tục (tại x_o, bên phải x_o, bên trái x_o).

5. Sự liên tục của hàm ngược

Định lý 1.1. *(Sự liên tục của hàm ngược)*
Nếu X là một khoảng, $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) liên tục trên X. Khi đó có hàm ngược $y = g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) và liên tục trên $f(X)$.

Ví dụ: Các hàm số lượng giác ngược là liên tục trên tập xác định của chúng.

6. Sự liên tục của hàm hợp
   Suy ra kết quả: X-khoảng, đoạn, nửa đoạn.
   Mọi hàm số sơ cấp xác định trên X thì liên tục trên X.

7. Các định lý về hàm liên tục

Định lý 1.2. *Nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) mà giá trị $f(x_o), x_o \in (a, b)$ dương (hay âm) thì tồn tại một lân cận $U(x_o)$ sao cho $\forall x \in U(x_o)$, $f(x)$ cũng dương hay âm. Hình ảnh hình học.*

Định lý 1.3. *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó. Hình ảnh hình học.*

Định lý 1.4. *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó đạt được GTLN, NN trên đoạn này. Hình ảnh hình học.*

* Liên tục đều, hình ảnh hình học của liên tục đều.

Định lý 1.5. *(Định lý Cantor)*
Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó liên tục đều trên đó (thay $[a, b]$ bằng khoảng (a, b) thì định lý không còn đúng). Mô tả hình học.

Định lý 1.6. *(Định lý Cauchy)*
Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists \alpha \in (a, b)$ để $f(\alpha) = 0$.

Nêu một ví dụ, nêu ứng dụng dùng để thu hẹp khoảng nghiệm của phương trình. Hình ảnh hình học.

Hệ quả 1.1. *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, $A = f(a) \neq B = f(b)$ thì nó nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B.*

Hệ quả 1.2. *Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, m, M lần lượt là các GTNN, LN của hàm số trên đoạn này thì $[m; M]$ là tập giá trị của hàm số.*

8. Điểm gián đoạn của hàm số

(a) Định nghĩa: Nếu hàm số không liên tục tại điểm x_o thì ta nói nó gián đoạn tại x_o; x_o gọi là điểm gián đoạn của hàm số. Hình ảnh hình học (đồ thị không liền nét tại điểm gián đoạn).
Như vậy nếu x_o là điểm gián đoạn của $f(x)$ thì hoặc $x_o \notin$ MXĐ hoặc $x_o \in$ MXĐ nhưng không xảy ra $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$, $x \to x_o$ theo nghĩa (cả hai phía hay một phía). Ở đây ta quan tâm đến X như là một khoảng, nửa khoảng hay một đoạn. Do $x_o \notin$ MXĐ của $f(x)$ nên có thể có rất nhiều điểm gián đoạn, ta chỉ quan tâm đến những điểm gián đoạn thuộc tập xác định hay là những điểm đầu mút của khoảng xác định.

(b) Phân loại điểm gián đoạn
Giả sử x_o là điểm gián đoạn của $f(x)$

i. Điểm gián đoạn loại 1:
Nếu $\exists \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = f(x_o^+)$ và $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = f(x_o^-)$ thì x_o được gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số $f(x)$. Giá trị $|f(x_o^+) - f(x_o^-)|$ gọi là bước nhảy của hàm số.
Đặc biệt: nếu $f(x_o^+) = f(x_o^-)$ thì x_o được gọi là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số. Khi đó nếu hàm số chưa xác định tại x_o thì ta có thể bổ sung thêm giá trị của hàm số tại x_o để hàm số liên tục tại điểm x_o. Còn nếu hàm số xác định tại điểm x_o thì ta có thể thay đổi giá trị của hàm số tại điểm này để hàm số liên tục tại x_o.

ii. Điểm gián đoạn loại 2:
Nếu x_o không là điểm gián đoạn loại 1 thì ta nói nó là điểm gián đoạn loại 2.

(c) Chú ý: Với quan điểm xem điểm gián đoạn bỏ được là trường hợp đặc biệt của điểm gián đoạn loại 1 với x_o là điểm gián đoạn (đầu mút của khoảng hay đoạn) của $f(x)$, mà có $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ hữu hạn thì ta cũng xem x_o là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số.

(d) Các ví dụ.

7.1 Bài tập

Bài tập 1.34. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a/

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

ĐS : $a = \frac{1}{2}$

b/

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ a\cos x + b\sin x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

ĐS : $a = 1$

Bài tập 1.35. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a. $y = \dfrac{8}{1 - 2^{\operatorname{cotg} x}}$ b. $y = \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ c. $y = \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

Gợi ý & Đáp số.

a. ĐS: Loại I b. ĐS: Loại II c. ĐS: bỏ được

Bài tập 1.36. Xét sự liên tục của các hàm số sau

a/

$$f(x) = \begin{cases} x\sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

ĐS : liên tục.

b/

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

ĐS : liên tục.

c/

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{nếu x vô tỉ} \\ 0 & \text{nếu x hữu tỉ} \end{cases}$$

ĐS : gián đoạn.

Bài tập 1.37. Chứng minh rằng nếu f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) = g(x)$ với mọi x là số hữu tỉ trong $[a, b]$ thì $f(x) = g(x) \forall x \in [a, b]$.

Bài tập 1.38. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x - 1$ có ít nhất một nghiệm trong $(1, 2)$.

Bài tập 1.39. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

Bài tập 1.40. Chứng minh rằng nếu $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

Bài tập 1.41. Chứng minh rằng mọi đa thức bậc lẻ với hệ số thực đều có ít nhất một nghiệm thực.

§8. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Định nghĩa đạo hàm
   (a) Nêu lại định nghĩa đạo hàm, ý nghĩa hình học, cơ học
   (b) Đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm trái, phải, mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục.
2. Các phép toán
3. Đạo hàm của hàm hợp: có chứng minh $[f(u(x))]' = f'_u.u'_x$.
   Ý tưởng chứng minh: ta có

$$u(x_o + \Delta x) = u(x_o) + u'(x_o)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$f[u(x_o + \Delta x)] - f[u(x_o)] = f\left[u_o + \underbrace{u'(x_o)\Delta x + o(\Delta x)}_{\delta_y}\right] - f(x_o) = f'_u(u_o).\delta_y + o(\delta_y)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[u(x_o + \Delta x)] - f[u(x_o)]}{\Delta x}$$

4. Đạo hàm của hàm ngược:
   Dùng 1 trong 2 định lý sau (có chứng minh)

Định lý 1.7. *Nếu $x = \varphi(y)$ có đạo hàm tại y_o và $\varphi'(y_o) \neq 0$, có hàm ngược $y = f(x)$ và hàm ngược này liên tục tại $x_o = \varphi(y_o)$, suy ra nó có đạo hàm tại điểm x_o và $f'(x_o) = \dfrac{1}{\varphi'(y_o)}$.*

Định lý 1.8. *Nếu $x = \varphi(y)$ có đạo hàm và y_o và $\varphi'(y_o) \neq 0$, biến thiên đơn điệu trong lân cận điểm y_o thì nó sẽ tồn tại hàm ngược $y = f(x)$ và hàm này cũng có đạo hàm tại điểm x_o, $f'(x_o) = \dfrac{1}{\varphi'(y_o)}$.*
Từ đó xây dựng công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược.

5. Bảng đạo hàm cơ bản
   Nêu ý tưởng tính đạo của các hàm số sơ cấp và các hàm số cho dưới dạng nhiều biểu thức giải tích.

6. Vi phân của hàm số

   (a) Định nghĩa

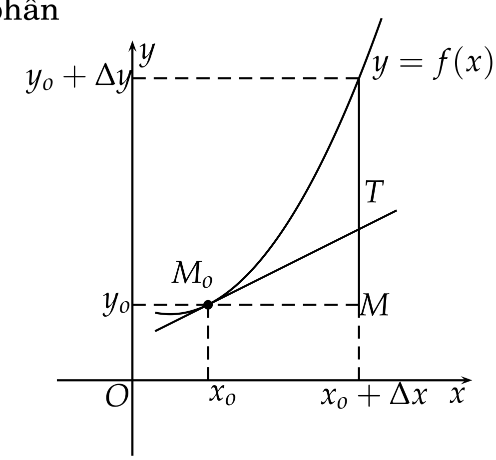
      i. Nêu định nghĩa $\Delta f = A.\Delta x + o(\Delta x)$
      ii. Nêu ý nghĩa: biểu thức $df(x_o) = A.\Delta x$ là tuyến tính với Δx nên tính nó đơn giản.

   (b) Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân, từ đó suy ra $df(x_o) = f'(x_o).\Delta x$.
   Lập luận suy ra $\Delta x = dx \Longrightarrow df(x_o) = f'(x_o)dx$.

   (c) Tính bất biến của dạng thức vi phân (cấp 1)
   Ví dụ: Tính $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$.

   (d) Ý nghĩa hình học của vi phân

$df(x_o) = \overline{MT}$



   (e) Ứng dụng tính gần đúng, nêu một ví dụ.

   (f) Qui tắc lấy vi phân

7. Đạo hàm và vi phân cấp cao:

   (a) Đạo hàm cấp cao:

      - Định nghĩa, ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2;

- Các phép toán (Công thức Leibniz chỉ nói phương pháp chứng minh).

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n.u^{(n-k)}.v^{(k)}$$

- Các ví dụ về đạo hàm cấp cao của các hàm:

$$y = x^\alpha,\ \ y = \frac{1}{x+a},\ \ y = \sin(ax+b),$$
$$y = \cos(ax+b),\ \ y = e^{ax},\ \ y = \left(x^2+1\right)e^x,\ \ y = e^x \sin x.$$

Đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản:

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
- $[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).(1+x)^{\alpha-n}$
- $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)}.\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$
- $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(a^x)^{(n)} = a^x.(\ln a)^n$
- $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}.\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

(b) Vi phân cấp cao:

- Định nghĩa
- Biểu thức của vi phân cấp cao
- Các phép toán
- Dạng thức của vi phân cấp cao không còn đúng đối với hàm hợp.

8.1 Bài tập

Bài tập 1.42. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi } x<1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{khi } x>2 \end{cases}$$

Bài tập 1.43. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n.\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

a. liên tục tại $x = 0$ b. khả vi tại $x = 0$ c. có đạo hàm liên tục tại $x = 0$

Gợi ý & Đáp số.

a. ĐS: $n > 0$ b. ĐS: $n > 1$ c. ĐS: $n > 2$

Bài tập 1.44. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|.\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

Lời giải.

$$f'_+(a) = \varphi(a) \neq f'_-(a) = -\varphi(a)$$

Bài tập 1.45. Tìm vi phân của hàm số

a. $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}(a \neq 0)$ b. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}(a \neq 0)$

c. $y = \dfrac{1}{2a}.\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|(a \neq 0)$ d. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$

Gợi ý & Đáp số.

a. $dy = \dfrac{dx}{a^2 + x^2}$ b. $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.(\operatorname{sign} a)$

c. $dy = \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$ d. $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$

Bài tập 1.46. Tìm

a. $I = \dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$ b. $J = \dfrac{d}{d(x^2)}(\dfrac{\sin x}{x})$ c. $K = \dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

Gợi ý & Đáp số.

a. $I = -3x^6 - 4x^3 + 1$ b. $J = \dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right)$ c. $K = -\operatorname{cotg} x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 1.47. Tính gần đúng giá trị của biểu thức

a. $\lg 11$ b. $\sqrt[7]{\dfrac{2 - 0,02}{2 + 0,02}}$

Lời giải. a) Xét $f(x) = \lg x, x_0 = 10, \triangle x = 1$, ta có $\lg 11 \approx \lg 10 + \dfrac{1}{10\ln 10} = 1,043$

b) $\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}} = \sqrt[7]{\dfrac{4}{2+0,02} - 1}$. Xét $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{4}{x} - 1}, x_0 = 2, \triangle x = 0,02$
Ta có

$$f(x+\triangle x) = \sqrt[7]{\frac{4}{2} - 1} + 0,02.\frac{1}{7}.(\frac{4}{2} - 1)^{\frac{-6}{7}}.\frac{-4}{2^2} = 1 - 0,02.\frac{1}{7} = ...$$

Bài tập 1.48. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

b. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

c. $y = x^2.e^x$, tính $y^{(10)}$

d. $y = x^2.\sin x$, tính $y^{(50)}$

Gợi ý & Đáp số

a. $y^{(8)} = \dfrac{8!}{(1-x)^9}, x \neq 1$

b. $y^{(100)} = \dfrac{197!}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}(399 - x), x < 1$

c. $y^{(10)} = 2^{10}e^{2x}(x^2 + 10x + \dfrac{45}{2})$

d. $y^{(50)} = -x^2 \sin x + 100x\cos x + 2450 \sin x$

Bài tập 1.49. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

b. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

c. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

d. $y = e^{ax}.\sin(bx+c)$

Lời giải. a. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{2}n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

b. $y^{(n)} = n!\left[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} - \dfrac{1}{(2-x)^{n+1}}\right]$

c. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}(1.4\ldots(3n-5))\dfrac{3n+2x}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}, n \geq 2, x \neq 1$

d Tính y' rồi dự đoán và chứng minh bằng quy nạp

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi), \text{ ở đó, } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bài tập 1.50. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

1. $y = \dfrac{1}{a+bx}$;
2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$;
3. $y = \dfrac{1}{x^2-a^2}$;
4. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
5. $y = \sin^2 x$
6. $y = \sin^3 x$
7. $y = \sin ax.\sin bx$;
8. $y = \sin^2 ax.\cos bx$
9. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$
10. $y = x\cos ax$
11. $y = x^2\cos ax$
12. $y = x^2 \sin ax$
13. $y = \ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$

Lời giải. 1/ $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!b^n}{(a+bx)^{n+1}}$

2/ $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.(2n-1)!!b^n}{2^n\sqrt[n]{a+bx}}$

3/ $y = \dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}(\dfrac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})$ nên $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{2a}\left[\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{n+1}\right]$

4/ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{1}{c}\left(b - \frac{ad}{c}\right)\dfrac{1}{x+\frac{d}{c}}$ nên $y^{(n)} = \dfrac{1}{c}\left(b - \dfrac{ad}{c}\right)\dfrac{(-1)^n.n!}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n+1}}$

5/ $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ nên $y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$

6/ $y = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ nên $y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}3^n\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$

7/ $y = \sin ax.\sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$ nên

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] - \frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

8/ $y = \sin^2 ax.\cos bx = \dfrac{\cos bx}{2} - \frac{1}{4}[\cos(2a+b)x + \cos(2a-b)x]$ nên

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}b^n\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}(2a+b)^n\cos\left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right] - \frac{1}{4}(2a-b)^n\cos\left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

9/ $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ nên $y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$

10/ $y^{(n)} = a^n x\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + na^{n-1}\cos\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

11/ $y^{(n)} = a^n x^2\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2na^{n-1}x\sin\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$

12/ $y^{(n)} = a^n x^2\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2na^{n-1}x\cos\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)a^{n-2}\cos\left(ax + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$

13/ $y^{(n)} = \dfrac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}.\left[(a+bx)^n + (-1)^n(a-bx)^n\right]$ ■

§9. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

9.1 Các định lý về hàm khả vi

1. Cực trị của hàm số: Nên dùng định nghĩa sau:

   Định nghĩa 1.1. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b), ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm $x_o \in (a,b)$ nếu $\exists U(x_o) \subset (a,b)$ sao cho $f(x) - f(x_o)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_o) \setminus \{x_o\}$.*

   - Nếu $f(x) - f(x_o) < 0$ thì ta nói hàm số đạt cực tiểu tại x_o.
   - Nếu $f(x) - f(x_o) > 0$ thì ta nói hàm số đạt cực đại tại x_o.

2. Định lý Fermat (có chứng minh)

   Định lý 1.9. *Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b), nếu hàm số đạt cực trị tại điểm $x_o \in (a,b)$ và có đạo hàm tại x_o thì $f^{'}(x_o) = 0$.*

   Có chứng minh và mô tả hình học, chú ý giả thiết liên tục ở đây là do định nghĩa cực trị.

3. Định lý Rolle: có chứng minh và mô tả hình ảnh hình học

4. Định lý Lagrange: Có chứng minh và mô tả hình ảnh hình học

5. Định lý Cauchy
   Chú ý:

   (a) Định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange, định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy. Các giả thiết trong các định lý này là cần thiết.

   (b) Nêu dạng khác của định lý Lagrange:

   $$\Delta f = f^{'}(x_o + \theta \Delta x), \quad \theta \in (0,1).$$

   (c) Nên tìm một ví dụ hấp dẫn về định lý Lagrange.

9.2 Qui tắc L'Hospital

Qui ước nói một quá trình nào đó là hiểu

$$x \to x_o, \quad x \to x_o^+, \quad x \to x_o^-, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty, \quad x \to \infty.$$

1. *Qui tắc 1* $\left(\text{khử dạng } \dfrac{0}{0}\right)$.
   Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB trong cùng một quá trình nào đó và trong chính quá trình ấy ta có $\lim \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$ hữu hạn hay vô hạn thì trong quá trình ấy ta có $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. Ý tưởng chứng minh:

   (a) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trong lân cận điểm x_o, $g^{'}(x_o) \neq 0, \forall x \neq x_o$, $f(x_o) = g(x_o) = 0$.
   Với $x \neq x_o$ ta có
   $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_o)}{g(x) - g(x_o)} \overset{(Cauchy)}{=} \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)},$$
   c nằm giữa x và x_o.
   Khi $x \to x_o$ thì $c \to x_o$. Do $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$, suy ra
   $$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_o} \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} = A.$$

   (b) Nếu chỉ có $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$ mà các hàm số chưa chắc đã xác định tại x_o. Ta xây dựng
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x = x_o \\ f(x), & x \neq x_o \end{cases}; \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x = x_o \\ g(x), & x \neq x_o \end{cases}.$$

   (c) Nếu $x \to \infty$, đặt $y = \dfrac{1}{x}$.

2. *Qui tắc 2* $\left(\text{khử dạng } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$.
   (Thay VCB bằng VCL trong qui tắc 1.)

3. *Ví dụ*

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\arcsin^3 x}$;
   (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$;
   (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x$;
   (d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^x}{x}$;
   (e) $\cdots$

Chú ý

- Hai qui tắc trên chỉ là điều kiện đủ để tìm $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

  Có thể nêu ví dụ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$

- Trong quá trình tìm giới hạn có dạng vô định, nên kết hợp cả thay tương đương với dùng qui tắc L'Hospital. Có thể dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần.

Bài tập 1.51. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn và không thể có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Lời giải. Xét n chẵn, giả sử phương trình có 3 nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3$, khi đó tồn tại $c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3)$ sao cho $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Tức là phương trình $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ có 2 nghiệm thực, điều này mâu thuẫn do n chẵn.
Xét n lẻ, giả sử phương trình có 4 nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, khi đó theo định lý Rolle, phương trình $x^{n-1} + \frac{p}{n} = 0$ có 3 nghiệm thực, trong khi theo trên ta vừa chứng minh thì nó không thể có quá 2 nghiệm thực do $n-1$ chẵn. ■

Bài tập 1.52. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được với các hàm số $f(x) = x^2, g(x) = x^3, -1 \leq x \leq 1$

Bài tập 1.53. Chứng minh các bất đẳng thức

a. $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ b. $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}, 0 \leq b \leq a$

Lời giải. a. Xét hàm số $f(t) = \sin t$, thoả mãn điều kiện của định lý Lagrange trong khoảng $[x, y]$ bất kì. Khi đó $\exists c \in [x, y]$ sao cho

$$\sin x - \sin y = f'(c).(x-y) = \cos c.(x-y) \Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

b. Xét hàm số $f(x) = \ln x$, thoả mãn điều kiện của định lý Lagrange trong khoảng $[b, a]$ nên

$$\ln a - \ln b = f'(c)(a-b) \Rightarrow \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b-a) \Rightarrow \ln \frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}$$

Vậy

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \text{ do } b < c < a.$$

Bài tập 1.54. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\ (\infty-\infty)$

b. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\ (\infty-\infty)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to1}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\ln(2-x)\ (\infty.0)$

f. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}\ (0^0)$

h. $\lim\limits_{x\to0}(1-a\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{x\sin x}}\ (1^\infty)$

i. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}x}\ (0^0)$

k. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\ (1^\infty)$

Gợi ý & Đáp số.

a. nhân liên hợp, ĐS: $\dfrac{1}{2}$

b. quy đồng, L'Hospital, ĐS: $\dfrac{1}{2}$

c. Dùng khai triển Taylor, ĐS: ∞

d. khai triển Taylor hoặc L'Hospital, ĐS: $\dfrac{1}{3}$

e. L'Hospital, ĐS: $\dfrac{2}{\pi}$

f. L'Hospital, ĐS: $-\infty$

g. Ad $\lim A(x)^{B(x)}=e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, ĐS: 1

h. Ad $\lim A(x)^{B(x)}=e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, ĐS: e^{-a}

i. Ad $\lim A(x)^{B(x)}=e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, ĐS: 1

k. Ad $\lim A(x)^{B(x)}=e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, ĐS: 1

Bài tập 1.55. Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(x+\dfrac{1}{x})]$

b. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cotg}x\right)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

c. $\lim\limits_{x\to0}x^{-5}[\sin(\sin x)-x.\sqrt[3]{1-x^2}]$

d. $\lim\limits_{x\to0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}}-\dfrac{e^x}{x}]$

e. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

f. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}$

h. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos^2x}{x\sin2x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x)^x$

l. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\sin x-x}$

m. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$

n. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

o. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

p. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, a\neq0, b\neq0$

Gợi ý & Đáp số.

a. ĐS: $\frac{1}{2}$

b. Ad khai triển Taylor, ĐS: $\frac{1}{3}$

c. ĐS: $\frac{7}{45}$

d. Ad khai triển Taylor, ĐS: $-\frac{3}{2}$

e. Ad khai triển Taylor, ĐS: $-\frac{1}{12}$

f. Khai triển Taylor, hoặc L'Hospital, ĐS: $\frac{1}{2}$

g. Khai triển Taylor, hoặc L'Hospital, ĐS: 0

h. L'Hospital, ĐS: 2

i. L'Hospital, ĐS: $\frac{1}{2}$

j. quy đồng, ad L'Hospital, ĐS: $\frac{1}{2}$

k. ĐS: $e^{-\frac{2}{\pi}}$

l. L'Hospital, ĐS: ∞

m. L'Hospital, ĐS: $\frac{1}{2}$

n. L'Hospital, ĐS: $\frac{1}{3}$

o. Nhân liên hợp, ĐS: $\frac{4}{3}$

p. L'Hospital, thay tương đương, ĐS: $\frac{a^2}{b^2}$

Bài tập 1.56. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ tồn tại và bằng 1 nhưng không tính được bằng quy tắc L'Hospital.

Lời giải.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$$

Nếu áp dụng quy tắc L'Hospital một cách hình thức thì ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1-\sin x}$$

Tuy nhiên giới hạn ở vế phải không tồn tại, có thể kiểm tra bằng cách chọn 2 dãy $x_k = 2k\pi$ và $y_k = \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ ∎

Bài tập 1.57. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x\to 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} = \frac{x^3 - \sin^3 x(1+ax+bx^2)}{x^3\sin^3 x}$$

Lời giải. Tại lân cận của $x=0$, ta có thể viết

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

do đó

$$MS = x^3[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)]^3 = x^6 + o(x^6)$$

và

$$TS = x^3 - \sin^3 x(1 + ax + bx^2) = x^3 - [x^3 + ax^4 + (b - \frac{1}{2})x^5 + cx^6 + o(x^6)]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{ax^4 + (b - \frac{1}{2})x^5 + cx^6 + o(x^6)}{x^6 + o(x^6)}$$

Do đó để tồn tại giới hạn hữu hạn của $f(x)$ khi $x \to 0$, ta phải có $a = 0, b = \frac{1}{2}$ ■

Bài tập 1.58. Cho f là một hàm số thực, khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b), chứng minh rằng $\forall x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c)$$

Lời giải. Lấy $x_0 \in (a, b)$ bất kì.

$$\text{Đặt } \varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}.\lambda$$

Trong đó λ được xác định bởi điều kiện :

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) - \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}.\lambda = 0$$

Khi đó ta có $\varphi(x_0) = \varphi(a) = \varphi(b) = 0$
Ta có hàm φ liên tục, khả vi trên $[a, x_0]$, đo đó φ thoả mãn các điều kiện trong định lý Rolle, suy ra tồn tại $c_1 \in (a, x_0)$ sao cho $\varphi'(c_1) = 0$. Tương tự như thế, tồn tại $c_2 \in (x_0, b)$ sao cho $\varphi'(c_2) = 0$. Mặt khác,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \lambda(x - \frac{a + b}{2})$$

Theo giả thiết, f có đạo hàm cấp 2, do đó φ cũng có đạo hàm cấp 2, và $\varphi''(c_1) = \varphi''(c_2) = 0$, nên theo định lý Rolle ta có tồn tại $c \in (c_1, c_2)$ sao cho $\varphi''(c) = f''(c) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = f''(c)$, và ta có :

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c)$$

§10. CÁC LƯỢC ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

10.1 Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Mục này học sinh đã được nghiên cứu tương đối kĩ trong chương trình phổ thông nên chỉ nhấn mạnh cho sinh viên những điểm cần chú ý trong quá trình khảo sát hàm số và khảo sát một số hàm số khác với chương trình phổ thông như hàm số có chứa căn thức, ...

Sơ đồ khảo sát

1. Tìm MXĐ của hàm số, nhận xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số (nếu có).
2. Xác định chiều biến thiên: tìm các khoảng tăng, giảm của hàm số.
3. Tìm cực trị (nếu có).
4. Xét tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có).
5. Tìm các tiệm cận của hàm số (nếu có).
6. Lập bảng biến thiên.
7. Tìm một số điểm đặc biệt mà hàm số đi qua (ví dụ như giao điểm với các trục toạ độ, ...) và vẽ đồ thị của hàm số.

10.2 Khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số

Giả sử cần khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1. Tìm MXĐ, nhận xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của các hàm số $x(t), y(t)$ (nếu có).
2. Xác định chiều biến thiên của các hàm số $x(t), y(t)$ theo biến t bằng cách xét dấu các đạo hàm của nó.
3. Tìm các tiệm cận của đường cong
   (a) Tiệm cận đứng: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = x_0$ thì $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của đường cong.
   (b) Tiệm cận ngang: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = y_0$ thì $y = y_0$ là một tiệm cận ngang của đường cong.
   (c) Tiệm cận xiên: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận xiên. Nếu
   $$a = \lim_{t\to t_0(\infty)} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t\to t_0(\infty)} [y(t) - ax(t)]$$
   thì $y = ax + b$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
4. Để vẽ đường cong được chính xác hơn, ta xác định tiếp tuyến của đường cong tại các điểm đặc biệt. Hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm bằng
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Ngoài ra có thể khảo sát tính lồi lõm và điểm uốn (nếu cần thiết) bằng cách tính các đạo hàm cấp hai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{y_{tt}''x'_t - y'_t x_t''}{x_t'^3}$$

5. Xác định một số điểm đặc biệt mà đồ thị hàm số đi qua và vẽ đồ thị hàm số.

10.3 Khảo sát và vẽ đường cong trong hệ toạ độ cực

10.4 Bài tập

Bài tập 1.59. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a. $y = x^3 + x$ ĐS : hàm số tăng với mọi x

b. $y = \operatorname{arctg} x - x$ ĐS : hàm số giảm với mọi x

Bài tập 1.60. Chứng minh các bất đẳng thức

a. $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

Lời giải. a. Xét hàm số $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) \Rightarrow f'(x) = 2 \operatorname{arctg} x$.

- Nếu $x \geq 0, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$
- Nếu $x \leq 0, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0$ ■

b. Tương tự, xét $g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x), h(x) = \ln(1 + x) - x$

$$g'(x) = -\frac{x^2}{1+x} < 0, h'(x) = -\frac{x}{1+x} < 0 \Rightarrow g(x) \leq g(0) = 0, h(x) \leq h(0) = 0.$$

Bài tập 1.61. Tìm cực trị của hàm số

a. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1} = 3 + \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

b. $y = x - \ln(1 + x)$

c. $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

Lời giải. a)

$$y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2 + x + 1)^2}, y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}, y_{\max} = y(0) = 4$$

b)

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{1+x}, y_{\min} = y(0) = 0$$

c)

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{\frac{4}{3}-x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}$$

- Xét $x_1 = \frac{4}{3}$, ta có $y_{\min} = y(\frac{4}{3}) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$
- Xét $x_2 = 1, y'$ không đổi dấu, hàm số không đạt cực trị tại $x_2 = 1$
- Xét $x_3 = 2$, ta có $y_{\max} = y(2) = 0$ ■

Bài tập 1.62. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a. $e^x > 1 + x \quad \forall x \neq 0$

b. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \forall x > 0$

c. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Bài tập 1.63. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

Bài tập 1.64. Tính các giới hạn sau

[a.] $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(x+\frac{1}{x})]$

[b.] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$

[c.] $\lim\limits_{x\to 0} x^{-5}[\sin(\sin x) - x.\sqrt[3]{1-x^2}]$

[d.] $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}} - \frac{e^x}{x}]$

CHƯƠNG 2

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN MỘT BIẾN SỐ

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1 Nguyên hàm của hàm số

Chương này trình bày về phép tính tích phân, đây là phép toán ngược của phép tính đạo hàm (vi phân) của hàm số. Nếu ta cho trước một hàm số $f(x)$ thì có tồn tại hay không một hàm số $F(x)$ có đạo hàm bằng $f(x)$? Nếu tồn tại, hãy tìm tất cả các hàm số $F(x)$ như vậy.

Định nghĩa 2.2. *Hàm số $F(x)$ được gọi là một* nguyên hàm *của hàm số $f(x)$ trên một tập D nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in D$ hay $dF(x) = f(x)dx$.*

Định lý sau đây nói rằng nguyên hàm của một hàm số cho trước không phải là duy nhất, nếu biết một nguyên hàm thì ta có thể miêu tả được tất cả các nguyên hàm khác của hàm số đó.

Định lý 2.10. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng D, thì:*

- *Hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với C là một hằng số bất kỳ.*
- *Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều viết được dưới dạng $F(x) + C$, trong đó C là một hằng số.*

Như vậy biểu thức $F(x) + C$ biểu diễn tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$, mỗi hằng số C tương ứng cho ta một nguyên hàm.

Định nghĩa 2.3. *Tích phân bất định của một hàm số $f(x)$ là họ các nguyên hàm $F(x)+C$, với $x \in D$, trong đó C là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và C là một hằng số bất kỳ. Tích phân bất định của $f(x)dx$ được ký hiệu là $\int f(x)dx$. Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là biểu thức dưới dấu tích phân và hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số dưới dấu tích phân.*

Vậy $\int f(x)dx = F(x)+C$, với $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$.

Các tính chất của tích phân bất định

- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ hay $d\int f(x)dx = f(x)dx$
- $\int F'(x)dx = F(x)+C$ hay $\int dF(x) = F(x)+C$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ (a là hằng số khác 0)
- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

  Hai tính chất cuối cùng là tính chất tuyến tính của tích phân bất định, ta có thể viết chung
  $$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$
  trong đó α, β là các hằng số không đồng thời bằng 0.

Các công thức tích phân dạng đơn giản

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C$$

1.2 Các phương pháp tính tích phân bất định

1. **Phương pháp khai triển**
   Để tính một tích phân bất kỳ, ta cần sử dụng các phương pháp thích hợp để đưa về các tích phân đã có trong bảng các công thức tích phân đơn giản ở trên. Một phương pháp đơn giản là phương pháp khai triển. Phương pháp này dựa trên tính chất tuyến tính của tích phân bất định:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

   Ta phân tích hàm số dưới dấu tích phân thành tổng (hiệu) của các hàm số đơn giản mà đã biết được nguyên hàm của chúng, các hằng số được đưa ra bên ngoài dấu tích phân.

   Ví dụ 1.1. • $\int (2x\sqrt{x} - 3x^2)dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^2dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^3 + C$

   • $\int \left(2\sin x + x^3 - \frac{1}{x}\right)dx = 2\int \sin x dx + \int x^3 dx - \int \frac{dx}{x} = -2\cos x + \frac{x^4}{4} - \ln|x| + C$

   • $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + \mathrm{arctg} x + C$

2. **Phương pháp biến đổi biểu thức vi phân**
   Nhận xét: nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$, trong đó $u = u(x)$ là một hàm số khả vi liên tục. Ta có thể kiểm tra lại bằng cách đạo hàm hai vế theo x. Sử dụng tính chất này, ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân $g(x)dx$ về dạng

$$g(x)dx = f(u(x))u'(x)dx,$$

   trong đó $f(x)$ là một hàm số mà ta dễ dàng tìm được nguyên hàm $F(x)$. Khi đó tích phân cần tính trở thành

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du = F(u(x)) + C$$

   Trong trường hợp đơn giản $u(x) = ax + b$ thì $du = adx$, do đó nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ ta suy ra

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

   Ví dụ 1.2. *(a)* $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

   (b) $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

(c) $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

(d) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\mathrm{tg}^2 x) d(\mathrm{tg}x) = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}x + C$

(e) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \sqrt{1+3x^2}d(1+3x^2) = \frac{1}{9}\left(\sqrt{1+3x^2}\right)^3 + C$

(f)

$$I = \int \frac{\arccos x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\arcsin x d(\arcsin x)$$

nên

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}\arcsin^2 x - \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C$$

3. **Phương pháp đổi biến**

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$, trong đó $f(x)$là một hàm số liên tục. Để tính tích phân này, ta tìm cách chuyển sang tính tích phân khác của một hàm số khác bằng một phép đổi biến $x = \varphi(t)$, sao cho biểu thức dưới dấu tích phân đối với biến t có thể tìm được nguyên hàm một cách đơn giản hơn.

Phép đổi biến thứ nhất:

Đặt $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là một hàm số đơn điệu, và có đạo hàm liên tục. Khi đó ta có

$$I = \int f(x)dx = \int f\left[\phi(t)\right]\phi'(t)dt$$

Giả sử hàm số $g(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$ có nguyên hàm là hàm $G(t)$, và $t = h(x)$ là hàm số ngược của hàm số $x = \varphi(t)$, ta có

$$\int g(t)dt = G(t) + C \Rightarrow I = G\left[h(x)\right] + C$$

Phép đổi biến thứ hai:

Đặt $t = \psi(x)$, trong đó $\psi(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục, và ta viết được hàm $f(x) = g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)$. Khi đó ta có

$$I = \int f(x)dx = \int g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)dx$$

Giả sử hàm số $g(t)$ có nguyên hàm là hàm số $G(t)$, ta có

$$I = G\left[\psi(x)\right] + C$$

Chú ý: Khi tính tích phân bất định bằng phương pháp đổi biến số, sau khi tìm được nguyên hàm theo biến số mới, phải đổi lại thành hàm số của biến số cũ.

Ví dụ 1.3. *(a) Tính tích phân* $I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$

Đặt $x = 2\sin^2 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, ta tính được*

$$dx = 4\sin t\cos t dt, \sqrt{\frac{x}{2-x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 t}{2(1-\sin^2 t)}} = \text{tg}t$$

Suy ra

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx = 4\int \sin^2 t dt = 2t - \sin 2t + C$$

Đổi lại biến x*, với* $t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$*, ta thu được*

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2} + C$$

(b) Tính tích phân $I_2 = \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

Đặt $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$*, ta có*

$$I_2 = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = t - \ln|t+1| + C$$

Đổi lại biến x*, ta được* $I_2 = e^x - \ln(e^x+1) + C$.

(c) Tính tích phân $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4^x}}$

Đặt $t = 2^{-x} \Rightarrow dt = -2^{-x}\ln 2 dx$*, tích phân trở thành*

$$I_3 = \int \frac{-dt}{t\ln 2\sqrt{1+t^{-2}}} = -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{\ln 2}\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C$$

Đổi lại biến x*, ta có:*

$$I_3 = -\frac{1}{\ln 2}\ln(2^{-x} + \sqrt{4^{-x}+1}) + C$$

4. **Phương pháp tích phân từng phần**

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục. Theo quy tắc lấy vi phân

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow uv = \int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

Suy ra

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$. Ta cần biểu diễn

$$f(x)dx = [g(x)h(x)]\,dx = g(x)\,[h(x)dx] = udv$$

và áp dụng công thức tích phân từng phần với các hàm số $u = g(x), v = \int h(x)dx$. Ta thường sử dụng phương pháp này khi biểu thức dưới dấu tích phân chứa một trong các hàm số sau đây: $\ln x, a^x$, hàm số lượng giác, hàm số lượng giác ngược. Cụ thể:

- Trong các tích phân $\int x^n e^{kx}dx; \int x^n \sin kxdx; \int x^n \cos kxdx$, n nguyên dương, ta thường chọn $u = x^n$.
- Trong các tích phân $\int x^\alpha \ln^n xdx$, $\alpha \neq -1$ và n nguyên dương, ta thường chọn $u = \ln^n x$.
- Trong tích phân $\int x^n \text{arctg} kxdx; \int x^n \arcsin kxdx$, n nguyên dương, ta thường chọn $u = \text{arctg} kx$ hoặc $u = \arcsin kx$; $dv = x^n dx$.

Ví dụ 1.4. *Tính các tích phân bất định*

(a) $I_1 = \int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

(b) $I_2 = \int x^2 \sin xdx$

Đặt $u = x^2, dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$*, ta được*

$$I_2 = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx$$

Đặt $u = x, dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$*, ta được*

$$I_2 = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin xdx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

(c) $I_3 = \int \dfrac{xe^x dx}{(x+1)^2}$

Đặt $u = xe^x; dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}; du = (x+1)e^x dx$*, ta được*

$$I_3 = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

(d) $I_4 = \int \dfrac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$

Đặt $\sqrt{1+e^x} = t \Rightarrow \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}} = 2dt$*, ta có* $I_4 = 2\int [\ln(t-1) + \ln(t+1)]\,dt = 2(t-1)\ln(t-1) + 2(t+1)\ln(t+1) - 4t + C$ ***Đổi lại biến*** x ***ta có***

$$\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}} = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} + 4\ln\left(1 + \sqrt{1+e^x}\right) - 2x + C$$

(e) $I_5 = \int \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Đặt $u = \arcsin x; dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; v = -\sqrt{1-x^2}$*, ta được*

$$I_5 = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

(f) $I_6 = \int e^x \cos 2x dx$

Đặt $u = \cos 2x; dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x; du = -2\sin 2x dx$***, ta được***

$$I_6 = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx$$

Đặt $u = \sin 2x; dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x; du = 2\cos 2x dx$***, ta được***

$$I_6 = e^x \cos 2x + 2\left(e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx\right) = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4I_6 + 5C$$

Vậy $I_6 = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C.$

Trong các mục sau đây chúng ta sẽ xét tích phân bất định của một số dạng hàm cơ bản: hàm phân thức hữu tỷ, hàm lượng giác, hàm chứa căn thức; và trình bày một số phương pháp giải chung đối với tích phân các hàm này.

1.3 Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

Định nghĩa 2.4. Một hàm phân thức hữu tỷ *là một hàm số có dạng* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$*, trong đó* $P(x), Q(x)$ *là các đa thức của* x*. Một phân thức hữu tỷ có bậc của đa thức ở tử số nhỏ hơn bậc của đa thức ở mẫu số là một* phân thức hữu tỷ thực sự.

Bằng phép chia đa thức, chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta luôn đưa được một hàm phân thức hữu tỷ về dạng

$$f(x) = H(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

trong đó $H(x)$ là đa thức thương, $r(x)$ là phần dư trong phép chia. Khi đó $\frac{r(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỷ thực sự. Nguyên hàm của đa thức được tìm bởi công thức tích phân cơ bản. Ta sẽ xét việc tìm nguyên hàm của phân thức hữu tỷ còn lại $\frac{r(x)}{Q(x)}$ trong hai trường hợp đặc biệt: mẫu số của phân thức là đa thức bậc nhất hoặc đa thức bậc hai. Trong những trường hợp mẫu số phức tạp hơn, chúng ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để đưa về hai trường hợp trên.

Phương pháp hệ số bất định

Giả sử chúng ta muốn phân tích một phân thức hữu tỷ thực sự $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng (hiệu) của các phân thức hữu tỷ thực sự có mẫu số là đa thức bậc nhất hoặc bậc hai. Trước hết ta phân tích đa thức ở mẫu số $Q(x)$ thành tích của các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai vô nghiệm

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{a_1} ... (x-\alpha_m)^{a_m}(x^2 + p_1 x + q_1)^{b_1} ... (x^2 + p_n x + q_n)^{b_n}$$

trong đó α_i, p_j, q_j là các hằng số, a_i, b_j là các số nguyên dương, $1 \le i \le m; 1 \le j \le n$.

- Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện đơn thức $(x-\alpha)^a$, a là số nguyên dương thì trong phân tích của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$, trong đó A_i là hằng số và $1 \le i \le a$.

- Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện biểu thức $(x^2+px+q)^b$, b là số nguyên dương thì trong phân tích của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j}$, trong đó B_j, C_j là các hằng số và $1 \le j \le b$.

Sau khi viết được phân tích của $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ta tìm các hằng số A_i, B_j, C_j bằng cách quy đồng mẫu số ở hai vế, rồi đồng nhất hệ số của $x^n, n \in \mathbb{R}$ ở hai vế. Như vậy việc dùng phương pháp hệ số bất định dẫn chúng ta tới việc tính bốn loại tích phân hữu tỷ cơ bản sau:

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-a} \qquad \text{II. } \int \frac{Adx}{(x-a)^k}$$
$$\text{III. } \int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} \qquad \text{IV. } \int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m}$$

trong đó

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$

3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}dt \quad \left(a=\sqrt{q-p^2/4},\ \text{đổi biến } t = x+p/2\right)\\
&= \int \frac{Mtdt}{t^2+a^2} + \int \frac{(N-Mp/2)dt}{t^2+a^2}\\
&= \ln(t^2+a^2) + (N-Mp/2)\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C\\
&= \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m} &= \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^m}dt \quad \left(a=\sqrt{q-p^2/4},\ \text{đổi biến } t = x+p/2\right)\\
&= \int \frac{Mtdt}{(t^2+a^2)^m} + \int \frac{(N-Mp/2)dt}{(t^2+a^2)^m}
\end{aligned}$$

Tích phân thứ nhất: $\int \frac{Mtdt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{M}{2(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + C$
Tích phân thứ hai có thể tính theo phương pháp tích phân từng phần như ở ví dụ trong phần trước

Ví dụ 1.5. *Tính các tích phân bất định*

a. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2+2)(x-1)} dx$
Ta có

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2+2)(x-1)} = x + \frac{1}{(x^2+2)(x-1)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Quy đồng mẫu số ở hai vế

$$3 = (A+B)x^2 + (C-B+2)x - C$$

Đồng nhất hệ số của x^2, x *và hệ số tự do, ta được* $\begin{cases} A+B=0 \\ C-B+2=0 \\ -C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$

Suy ra

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{(x^2+2)(x-1)} = x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2}$$

Vậy tích phân bằng

$$I = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

b. $I_2 = \displaystyle\int \frac{2x^4 + 10x^3 + 17x^2 + 16x + 5}{(x+1)^2(x^2+2x+3)} dx$
Ta viết

$$\frac{2x^4 + 10x^3 + 17x^2 + 16x + 5}{(x+1)^2(x^2+2x+3)} = 2 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{x^2+2x+3}$$

Suy ra

$$I = 2x + 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

1.4 Tích phân hàm lượng giác

1. **Phương pháp chung**
Xét tích phân $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó hàm dưới dấu tích phân là một biểu thức hữu tỷ đối với $\sin x, \cos x$. Ta có thể sử dụng phép đổi biến tổng quát $t = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

tích phân đang xét được đưa về tích phân của hàm số của biến t.

Ví dụ 1.6. *Tính tích phân* $\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx$
Ta viết

$$\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\int \frac{d(1 + \sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x} + 2\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, *suy ra*

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{dt}{1 + t} = \ln|1 + t| + C$$

Thay lại biến cũ, ta được

$$\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\ln|1 + \sin x + \cos x| + \ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

2. **Tích phân dạng** $\int \sin^m x \cos^n x dx$**, trong đó** m, n **là các số nguyên**

- Nếu m là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu n là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu m, n là các số nguyên dương chẵn, ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

rồi đưa về tích phân dạng $\int \sin^k 2x \cos^l 2x dx$.

Ví dụ 1.7. *Tính các tích phân bất định*

- $I_1 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$
Đặt $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ *ta có*

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1 - t^2)t^2(-dt) = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

- $I_2 = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$
Sử dụng công thức hạ bậc ta có

$$I_2 = \int \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$$

$$\Rightarrow I_2 = \tfrac{1}{8}\left(x - \tfrac{\sin 2x}{2} - \int \tfrac{1 + \cos 4x}{2} dx + \tfrac{1}{2}\int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x)\right)$$

Vậy

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + C$$

Đối với tích phân I_2 sau khi sử dụng công thức hạ bậc lần thứ nhất ta cũng có thể tiếp tục hạ bậc của biểu thức lượng giác dưới dấu tích phân bởi công thức

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}; \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

Áp dụng vào tích phân I_2 , ta có:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{8}\int\left(1 - \cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{3\cos 2x + \cos 6x}{4}\right)dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 6x}{24}\right) + C \end{aligned}$$

3. **Tích phân $\int R(\sin x, \cos x)dx$ có dạng đặc biệt**

- Đặt $t = \cos x$ nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
- Đặt $t = \sin x$ nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
- Đặt $t = \operatorname{tg} x$ nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Ví dụ 1.8. *Tính tích phân* $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$
Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$*, ta có*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{-dt}{(1-t^2)t^4} &= \int\left[\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right]dt \\ &= -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \end{aligned}$$

nên

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = -\frac{1}{3\cos x^3} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

1.5 Tích phân các biểu thức vô tỷ

Xét tích phân có dạng $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 \pm x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$, trong đó $R(u, v)$ là các hàm số hữu tỷ.

- Đặt $x = \alpha \operatorname{tg} t$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})dx$.
- Đặt $x = \alpha \sin t$ hoặc $x = a \cos t$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$.
- Đặt $x = \frac{\alpha}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{\alpha}{\sin t}$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$.

Nói chung việc tính tích phân của các biểu thức vô tỷ thông thường được đưa về việc tính bốn loại tích phân cơ bản sau

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
- $\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C$

Ví dụ 1.9. *Tính các tích phân sau*

1. $\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$

   Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \cos t$, *thì*

$$\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(\arcsin x) + C$$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

   Đặt $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, *ta có*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C$$

Tính các tích phân có dạng $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$

Đặt $\dfrac{ax+b}{cx+d} = tk$, với k là bội chung nhỏ nhất của các chỉ số căn, đưa về dạng hữu tỉ với t. (R là hàm hữu tỉ)

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.5. *Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và bị chặn trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n khoảng nhỏ $[x_i, x_{i+1}]$ bởi phân hoạch $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Trong mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta chọn điểm $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ và thành lập biểu thức*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i \text{ với } \triangle x_i = x_{i+1} - x_i \tag{2.1}$$

Biểu thức S_n được gọi là tổng tích phân. Gọi $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \triangle x_i$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và không phụ thuộc vào cách chọn điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Trong trường hợp đó ta nói hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

Remark 2.1. *Trong định nghĩa trên ta đã xét hàm số $f(x)$ trong khoảng đóng $[a,b]$ tức là đã giả thiết $a < b$. Bây giờ nếu $b < a$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$ và khi $a = b$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = 0$.*

2.2 Các tiêu chuẩn khả tích

Định lý 2.11. *Điều kiện cần và đủ để hàm số bị chặn $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ là $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$, trong đó:*

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} M_i \triangle x_i, s = \sum_{i=1}^{n+1} m_i \triangle x_i$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

Áp dụng định lý 2.11 chúng ta có thể chứng minh được các định lý sau:

Định lý 2.12. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.*

Định lý 2.13. *Nếu $f(x)$ bị chặn trên $[a,b]$ và có một số điểm gián đoạn trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.*

Định lý 2.14. *Nếu $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.*

2.3 Các tính chất của tích phân xác định

Trong các phần tiếp theo sau đây, nếu không có chú thích gì thì khi viết $\int_a^b f(x)dx$ ta hiểu là $f(x)$ được giả thiết là khả tích trên $[a,b]$.

- *Tính chất 1.*
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- *Tính chất 2.*
Cho 3 khoảng đóng $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$, nếu $f(x)$ khả tích trên khoảng có độ dài lớn nhất thì cũng khả tích trên 2 đoạn còn lại, và
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- *Tính chất 3.* Giả thiết $a < b$. Khi đó:
  (i) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
  (ii) Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
  (iii) Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $|f(x)|$ khả tích trên $[a,b]$ và:
  $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
  (iv) Nếu $m \leq f(x) \leq M, forallx \in [a,b]$ thì
  $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
  .

- *Tính chất 4.*(Định lý trung bình thứ nhất)
Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, khi đó tồn tại μ sao cho:
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), m \leq \mu \leq M.$$
Đặc biệt, nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho:
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

- *Tính chất 5.*(Định lý trung bình thứ hai)
  Giả thiết

  (i) $f(x)$ và $f(x)g(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

  (ii) $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$.

  (iii) $g(x)$ không đổi dấu trên $[a,b]$.

  Khi đó
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, m \leq \mu \leq M.$$
  Đặc biệt nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho:
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

2.4 Tích phân với cận trên thay đổi (hàm tích phân)

Giả sử $f(x)$ là một hàm khả tích trên $[a,b]$, khi đó với mỗi $x \in [a,b]$ thì f cũng khả tích trên $[a,x]$. Ta xác định hàm số $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Định lý 2.15. (1) *Nếu* $f(t)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *thì* $F(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$.

(2) *Nếu* f *liên tục tại* $x_0 \in [a,b]$ *thì* $F(x)$ *có đạo hàm tại* x_0 *và* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Định lý 2.16 (Công thức Newton-Leibniz). *Nếu* $f(x)$ *liên tục trong khoảng đóng* $[a,b]$ *và* $F(x)$ *là một nguyên hàm của* $f(x)$ *thì*
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2.5 Các phương pháp tính tích phân xác định

1. **Sử dụng công thức tích phân từng phần.**
   Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trong $[a,b]$. Khi đó:
$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

2. **Sử dụng các phép đổi biến số.**

Định lý 2.17 (Đổi biến $x := \varphi(t)$). *Xét* $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ *với* $f(x)$ *liên tục trong* $[a,b]$. *Thực hiện phép đổi biến* $x = \varphi(t)$ *thoả mãn 3 điều kiện sau:*

(1) $\varphi(t)$ *có đạo hàm liên tục trong* $[a,b]$.

(2) $\varphi(a) = \alpha; \varphi(b) = \beta$.

(3) *Khi* t *biến thiên trong* $[\alpha,\beta]$ *từ* α *đến* β *thì* $x = \varphi(t)$ *biến thiên liên tục từ* a *đến* b.

Khi đó ta có công thức:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Định lý 2.18 (Đổi biến $t := \varphi(x)$). *Giả sử tích phân cần tính có dạng* $I = \int\limits_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx$. *Trong đó* $\varphi(x)$ *biến thiên đơn điệu ngặt và có đạo hàm liên tục trên* $[a,b]$. *Khi đó:*

$$\int\limits_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

3. **Sử dụng các phép truy hồi, quy nạp.**

2.6 Hệ thống bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm tích phân.

Chúng ta có các công thức sau:

$$\boxed{\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)} \tag{2.2}$$

$$\boxed{\left(\int\limits_a^{g(x)} f(t)dt\right)'_x = f(g(x)).g'(x)} \tag{2.3}$$

Công thức 2.2 chúng ta đã biết trong Định lý 2.15, còn công thức 2.3 được suy ra từ công thức đạo hàm của hàm hợp.

Bài tập 2.1. *Tính các đạo hàm:*

$$a)\frac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt \qquad b)\frac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt \qquad c)\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+x^4}}$$

Lời giải:

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int\limits_x^y e^{t^2}dt = -\dfrac{d}{dx}\int\limits_y^x e^{t^2}dt = -e^{x^2}$(do y là hằng số)

b) $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int\limits_x^y e^{t^2}dt = e^{y^2}$(do x là hằng số)

c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{d}{dx}\int\limits_a^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{-2x}{\sqrt{1+x^8}} + \frac{3x^2}{\sqrt{1+12x^2}}$

Dạng 2. Tính giới hạn của hàm số dựa vào công thức L'Hospital và đạo hàm của hàm tích phân.

Bài tập 2.2. *Tìm giới hạn:*

$$a)A = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt} \qquad b)B = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x(\operatorname{arctg} t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

Lời giải:

a) Nhận xét: $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt = \lim\limits_{x\to 0^+}\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt = 0$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt\right)'}{\left(\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}.\cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}.\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 \Rightarrow A = 1$$

b) Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = \infty$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow B = \frac{\pi^2}{4}$$

Dạng 3. Sử dụng công thức tổng tích phân để tính giới hạn của một số dãy số đặc biệt.

Xuất phát từ công thức tính tổng tích phân 2.1

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i \text{ với } \triangle x_i = x_{i+1} - x_i$$

Nếu chúng ta chia đoạn $[a,b]$ thành n khoảng có độ dài bằng nhau bởi phân hoạch $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, trong đó $x_i = a + (b-a)\frac{i}{n}$ thì:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \text{ với } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Khi đó nếu hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$, và chọn $\xi_i = x_i$ ta được công thức:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}.i\right)\right] = \int\limits_a^b f(x)dx} \quad (2.4)$$

Còn nếu chọn $\xi_i = x_{i+1}$ ta được công thức:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}.i\right)\right] = \int\limits_a^b f(x)dx} \quad (2.5)$$

Bài tập 2.3. *Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn:*

a/ $A = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$

b/ $B = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

Lời giải:

a/ Viết

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\frac{\beta}{n}}+\frac{1}{\alpha+\frac{2\beta}{n}}+\cdots+\frac{1}{\alpha+\frac{(n-1)\beta}{n}}\right]$$

Áp dụng công thức 2.4 với $a=0,b=1,f(x)=\frac{1}{\alpha+\beta x}$ ta được:

$$A=\int_0^1\frac{1}{\alpha+\beta x}dx=\frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

Nếu áp dụng công thức 2.5 với $a=0,b=1,f(x)=\frac{1}{\alpha+\beta x}$ ta được:

$$A'=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+\cdots+\frac{1}{n\alpha+n\beta}\right]=A=\frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

b/ Áp dụng công thức 2.5 với $a=0,b=1,f(x)=\sqrt{1+x}$ ta được:

$$B=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Nếu áp dụng công thức 2.4 với $a=0,b=1,f(x)=\sqrt{1+x}$ ta được:

$$B'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}\right)=B=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Bài tập 2.4. *Tính* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right)$

Dạng 3. Tính tích phân xác định (xem mục 2.5)

Bài tập 2.5. *Tính các tích phân:*

$$a.\int_1^e|\ln x|(x+1)dx \qquad d.\int_0^2\frac{\sin^2x\cos x}{(1+\text{tg}^2x)^2}dx$$

$$b.\int_1^e(x\ln x)^2dx \qquad e.\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$$

$$c.\int_0^1(x^3-2x+5)e^{-\frac{x}{2}}dx \qquad f.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^nx\cos nx\,dx$$

Lời giải:

a/ Các câu a, b, c dễ, giải bằng phương pháp tích phân từng phần. Đáp số như sau:

$$I_a = \frac{e^2+5}{4}, \quad I_b = \frac{5e^3-2}{27}, \quad I_c = 98 - \frac{144}{\sqrt{e}}$$

d/

$$\begin{aligned}
I_d &= \int_0^2 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2} dx \\
&= \int_0^2 \sin^2 x . \cos x . \cos^4 x dx \\
&= \int_0^2 \sin^2 x .(1-\sin^2 x) d(\sin x) \\
&= \frac{\sin^3(2)}{3} - \frac{2\sin^5(2)}{5} + \frac{\sin^7(2)}{7}
\end{aligned}$$

e/

$$\begin{aligned}
I_e &= \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} dx \\
&= x \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3 - \int_0^3 x . \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} . \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} . \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
&= \pi - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \\
&= \pi - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1} .2tdt \text{ (đặt } \sqrt{x} = t) \\
&= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\
&= \pi - \left[(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

f/

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d \sin nx \\
&= \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx.n. \cos^{n-1} x. \sin x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx. \cos^{n-1} x. \sin x dx
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
2I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx. \cos^{n-1} x. \sin x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n-1) x dx \\
&= I_{n-1}
\end{aligned}$$

Vậy theo phép truy hồi ta có $I_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n . I_0 = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Bài tập 2.6. *Tính* $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \qquad J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

Dạng 4. Chứng minh các đẳng thức tích phân

Bài tập 2.7. *Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì:*

$$a/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx, \quad b/ \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

Lời giải. Đây là bài tập dễ, câu a) đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, còn câu b) đặt $t = \pi - x$. ■

Bài tập 2.8. *Áp dụng kết quả của bài tập 2.7 hãy chứng minh*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$$

Bài tập 2.9. *Giả sử* $f(x)$ *liên tục trên* $[-a,a](a>0)$*, hãy chứng minh*

$$I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ trên } [-a,a]\\ 2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn trên } [-a,a]\end{cases}$$

Bài tập 2.10. *Cho* $f(x)$ *liên tục, chẵn trên* $[-a,a]$*, chứng minh*

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)dx}{1+b^x}=\int\limits_{0}^{a}f(x)dx \text{ với } 0\le b\ne 1$$

Áp dụng tính

$$I_1=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)(e^x+1)}dx,\quad I_2=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^x\cos 2x}{2002^x+2^x}dx,\quad I_3=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\,|\sin x\,|}{1+2^x}dx$$

Bài tập 2.11. *Chứng minh* $\int\limits_{a}^{b}x^m(a+b-x)^ndx=\int\limits_{a}^{b}x^n(a+b-x)^mdx$

Áp dụng tính $I_n=\int\limits_{0}^{1}x^2(1-x)^ndx$ *và chứng minh*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k.\frac{1}{k+3}=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$$

Dạng 5. Chứng minh các bất đẳng thức tích phân

Bài tập 2.12. *Cho* $f(x),g(x)$ *là hai hàm số khả tích trên* $[a,b]$*. Khi đó* $f^2(x),g^2(x)$ *cũng khả tích trên* $[a,b]$*. Chứng minh bất đẳng thức sau* $(a<b)$

$$\left(\int\limits_{a}^{b}f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int\limits_{a}^{b}f^2(x)dx\right).\left(\int\limits_{a}^{b}g^2(x)dx\right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

Lời giải. Xét 2 trường hợp:

TH1. Nếu $\int\limits_{a}^{b}f^2(x)dx=\int\limits_{a}^{b}g^2(x)dx=0$ thì:

$$0\le\left|\int\limits_{a}^{b}f(x)g(x)dx\right|\le\int\limits_{a}^{b}|f(x)g(x)|dx\le\int\limits_{a}^{b}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=0$$

Khi đó ta có dấu $''=''$ xảy ra.

TH2. Nếu ít nhất một trong hai tích phân $\int\limits_a^b f^2(x)dx, \int\limits_a^b g^2(x)dx$ khác 0, không mất tính tổng quát ta giả sử $\int\limits_a^b f^2(x)dx \neq 0$

Khi đó $[\alpha f(x)+g(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b [\alpha f(x)+g(x)]^2 \geq 0$. Suy ra

$$\Big(\int\limits_a^b f^2(x)dx\Big).\alpha^2 + \Big(2\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big).\alpha + \int\limits_a^b g^2(x)dx \geq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Biểu thức ở vế trái là tam thức bậc 2 đối với α nên 2.6 đúng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\triangle' = \Big(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 - \Big(\int\limits_a^b f^2(x)dx\Big).\Big(\int\limits_a^b g^2(x)dx\Big) \leq 0.$$

Ta có điều phải chứng minh. ■

§3. Các ứng dụng của tích phân xác định

3.1 Tính diện tích hình phẳng

1. Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ Descartes (tính diện tích "hình thang cong")

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \\ y = g(x) \\ f, g \in C[a,b] \end{cases} \text{ thì } \boxed{S = \int\limits_a^b |\, f(x) - g(x) \,|\, dx} \tag{2.7}$$

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x = \varphi(y) \\ x = \psi(y) \\ \varphi, \psi \in [c,d] \end{cases} \text{ thì } \boxed{S = \int\limits_c^d |\, \varphi(y) - \psi(y) \,|\, dy} \tag{2.8}$$

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} a \le x \le b \\ y = 0 \\ \begin{cases} x = \varphi t \\ y = \psi t \end{cases} \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mid \psi(t)\varphi'(t) \mid dt} \qquad (2.9)$$

Trong đó giả thiết rằng phương trình $\varphi(t) = a, \psi(t) = b$ có nghiệm duy nhất là t_1, t_2 và $\varphi, \psi, \varphi' \in C[t_1, t_2]$.

Bài tập 2.13. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:*

a/ Đường parabol $y = x^2 + 4$ *và đường thẳng* $x - y + 4 = 0$.

b/ Parabol bậc ba $y = x^3$ *và các đường* $y = x, y = 2x$.

c/ Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ *và parabol* $y^2 = x$

d/ Đường $y^2 = x^2 - x^4$

Lời giải:

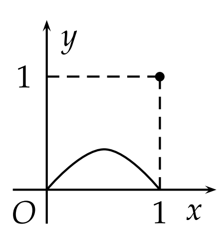
Các câu a), b), c) có thể vẽ hình và tính toán dễ dàng như sau:

a. $S = \int\limits_0^1 [(x+4) - (x^2+4)]dx = \frac{1}{6}$

b. $S = \int\limits_0^1 (2x - x^2)dx + \int\limits_2^{\sqrt{2}} (2x - x^3)dx = \frac{3}{4}$

c. $S = 2\int\limits_0^2 (\sqrt{4x - x^2}) - \sqrt{2x})dx = 2\pi - \frac{16}{3}$

Riêng câu d) nếu khảo sát để vẽ đồ thị đường cong $\mathcal{C} : y^2 = x^2 - x^4$ thì không đủ thời gian nên ta có thể lý luận như sau: Trước hết ta có điều kiện $0 \le x \le 1$, và nhận xét rằng nếu $M(x,y) \in \mathcal{C}$ thì $M'(\pm x, \pm y) \in \mathcal{C}$. Do đó $S = 4S(D)$, trong đó D là miền giới hạn bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ y = \sqrt{x^2 - x^4} \end{cases}$. Do miền D nằm hoàn toàn trong hình vuông $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, hơn nữa hàm số $y = \sqrt{x^2 - x^4}$ liên tục, $y(0) = y(1) = 0$ nên đồ thị của nó trong $[0,1]$ phải có hình dáng như hình vẽ dưới đây:



Áp dụng công thức 2.7 ta có $S(D) = \int\limits_0^1 \sqrt{x^2 - x^4} dx = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{4}{3}$

2. Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ cực (tính diện tích của miền có dạng hình quạt)

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi} \begin{cases} \varphi = \alpha \\ \varphi = \beta \\ r = r(\varphi) \\ r(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi} \tag{2.10}$$

Bài tập 2.14. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường hình tim* $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

Lời giải:
Khảo sát và vẽ đồ thị của đường cong trong toạ độ cực và nhận xét tính đối xứng của hình vẽ ta có:

$$S = 4S(D) = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)d\varphi = a^2$$

3.2 Tính độ dài đường cong phẳng

Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình $y = f(x)$

$$AB \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \\ f \in C^1[a, b] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}} \tag{2.11}$$

Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình tham số:

$$AB \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \le t \le \beta \\ x(t), y(t) \in C^1[a, b] \\ x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \forall t \in [\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 dt}} \tag{2.12}$$

Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình trong toạ độ cực:

$$AB \begin{cases} r = r(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \\ r(\varphi) \in C^1[\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi} \tag{2.13}$$

Bài tập 2.15. *Tính độ dài đường cong*

a/ $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ *khi* x *biến thiên từ* 1 *đến* 2.

b/ $\begin{cases} x = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}) \\ y = a \sin t \end{cases}$ *khi* t *biến thiên từ* $\frac{\pi}{3}$ *đến* $\frac{\pi}{2}$

Lời giải:

a/ Ta có

$$1 + y'^2(x) = 1 + \left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} \right)^2 = \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \right)^2$$

Nên áp dụng công thức 2.11 ta được:

$$s = \int\limits_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx \overset{(t=e^{2x})}{=} \int\limits_{e^2}^{e^4} \frac{t+1}{2t(t-1)} = \ln \frac{e^2+1}{e^2}$$

b/ Áp dụng công thức 2.12 ta có

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2 . \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \Rightarrow s = a \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} dt = a \ln \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

3.3 Tính thể tích vật thể

Trường hợp vật thể được giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b$. Giả thiết ta biết rằng diện tích S của thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳn $x = x_0$ là $S(x_0)$, và $S(x)$ là hàm số xác định, khả tích trên $[a, b]$. Khi đó

$$\boxed{V = \int\limits_a^b S(x) dx} \qquad (2.14)$$

Bài tập 2.16. *Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ* $x^2 + y^2 = a^2$ *và* $y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$.

Lời giải: Do tính đối xứng nên $V = 8V'$ trong đó $V' = V \cap \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Một điểm $M(x, 0, 0) \in Ox$, qua M ta dựng thiết diện của V' vuông góc với Ox thì được một hình vuông có cạnh là $\sqrt{a^2 - x^2}$, do đó $S(x) = a^2 - x^2$. Áp dụng công thức 2.14 ta được

$$V = 8 \int\limits_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3$$

Bài tập 2.17. *Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloit $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x = a$.*

Lời giải: Sau khi vẽ hình và áp dụng công thức 2.14 ta có:

$$V = \int_0^a S(x)dx \text{ mà } S(x) = \int_0^2 (4 - y^2)dy = \frac{16}{3} \text{ nên } V = \frac{16}{3}a$$

Trường hợp vật thể là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $\begin{cases} a \le x \le b \\ y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ quanh trục Ox, trong đó $f \in C[a, b]$ thì

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx} \tag{2.15}$$

Tương tự, nêú vật thể là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $\begin{cases} c \le y \le d \\ x = 0 \\ x = \varphi(y) \end{cases}$ quanh trục Oy, trong đó $\varphi \in C[c, d]$ thì

$$\boxed{V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy} \tag{2.16}$$

Bài tập 2.18. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.*
a/ quanh trục Ox một vòng *b/ quanh trục Oy một vòng.*

Lời giải:
a/ Áp dụng công thức 2.15 ta được:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)dx =$$

b/ Áp dụng công thức 2.16 ta được:

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2 dy =$$

3.4 Tính diện tích mặt tròn xoay

Cho hình thang cong giới hạn bởi $\begin{cases} a \le x \le b \\ y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ với $f \in C^1[a,b]$. Quay hình thang cong này quanh trục Ox thì ta được một vật thể tròn xoay. Khi đó diện tích xung quanh của vật thể được tính theo công thức:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_a^b | f(x) | \sqrt{1 + f'^2(x)} dx} \tag{2.17}$$

Tương tự nếu quay hình thang cong $\begin{cases} c \le y \le d \\ x = 0 \\ x = \varphi(y) \end{cases}$ với $\varphi \in C^1[c,d]$, quanh trục Oy thì:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_c^d | \varphi(y) | \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy} \tag{2.18}$$

Bài tập 2.19. *Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau*

a/ $y = \operatorname{tg} x, 0 < x \le \frac{\pi}{4}$ *quanh trục* Ox.

b/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *quanh trục* $Oy (a > b)$

c/ $9y^2 = x(3 - x)^2, 0 \le x \le 3$ *quanh trục* Ox.

Lời giải:

a/ Áp dụng công thức 2.17 ta có:

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + (1 + \operatorname{tg}^2 x)} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 t\sqrt{1 + (1 + t^2)^2} . \frac{dt}{1 + t^2} \quad (\text{đặt } t = \operatorname{tg} x)$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (1 + t^2)^2}}{1 + t^2} . d(t^2 + 1)$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + s^2}}{s} ds \quad (\text{đặt } s = 1 + t^2)$$

$$= \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \Big(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\Big) du$$

$$= \pi . \left\{ \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2} - 1} - \ln \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right] \right\}$$

b/ Nhận xét tính đối xứng của miền và áp dụng công thức 2.18 ta có:

$$S = 2.2\pi \int_0^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} . \sqrt{1 + \Big(\frac{a}{b} . \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}} \Big)^2} dy$$

$$= 4\pi \frac{a}{b} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2) y^2} dy$$

$$= 4\pi \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^b \sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2}} dy$$

$$= 4\pi \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^b \sqrt{y^2 + \beta} dy (\text{ đặt } \beta = \frac{b^4}{a^2 - b^2})$$

$$= 4\pi \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - b^2} . \frac{1}{2} \left[y\sqrt{y^2 + \beta} + \beta \ln | \, y + \sqrt{y^2 + \beta} \, | \right] \Big|_0^b$$

$$\left(\int \sqrt{y^2 + \beta} dy = \frac{1}{2} \left[y\sqrt{y^2 + \beta} + \beta \ln | \, y + \sqrt{y^2 + \beta} \, | \right] \right)$$

c/ Trước hết

$$9y^2 = x(3-x)^2 \Rightarrow 18yy' = 3(3-x)(1-x) \Rightarrow y' = \frac{(3-x)(1-x)}{6y} \Rightarrow y'^2 = \frac{(1-x)^2}{4x}$$

Nên áp dụng công thức 2.17 ta có:

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3}.\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}dx = 2\pi.\frac{1}{6}\int_0^3 (3-x)(1+x)dx = 3\pi$$

§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Khi định nghĩa tích phân xác định, chúng ta đã xét các hàm số xác định trên một đoạn hữu hạn $[a,b]$ và bị chặn trên đoạn đó. Trong phần này chúng ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân, từ đó đưa vào khái niệm tích phân suy rộng với cận vô hạn và tích phân của hàm số không bị chặn.

4.1 Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a,+\infty)]$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a,A]$, $(a \leq A < +\infty)$.

Định nghĩa 2.6. *Giới hạn của tích phân* $\int_a^A f(x)dx$ *khi* $A \to +\infty$ *được gọi là tích phân suy rộng của hàm số* $f(x)$ *trên khoảng* $[a,+\infty)$ *và ký hiệu như sau*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ. Ngược lại, nếu không tồn tại giới hạn này hoặc giới hạn bằng vô cùng ta nói tích phân đó phân kỳ.*

Tương tự ta định nghĩa tích phân của một hàm số $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty,a]$ và $(-\infty,+\infty)$ bởi các công thức sau

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty, A'\to-\infty}\int_{A'}^A f(x)dx$$

Ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

khi hai trong ba tích phân nói trên hội tụ.
Qua các định nghĩa trên ta thấy rằng tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định (hiểu theo nghĩa thông thường) khi cho cận tích phân dần tới vô cùng. Do đó có thể dùng công thức Leibniz để tính tích phân, sau đó cho cận tiến ra vô cùng.

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = F(A) - F(a)$$

kí hiệu

$$F(+\infty) = \lim_{A\to\infty} F(A)$$

thì có thể viết

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\big|_a^{+\infty}$$

Ví dụ 4.1. *1. Tính tích phân* $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$

Ta có

$$\int_{e^2}^{A} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln\ln x}\Big|_{e^2}^{A} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln\ln A} \textit{ nên } \Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_{e^2}^{A} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Vậy

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

2. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Trước hết ta tính $\displaystyle\int_{A'}^{A} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$*, đặt* $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t dt$*,*

$$\int_{A'}^{A} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{\operatorname{arctg} A'}^{\operatorname{arctg} A} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\operatorname{arctg} A'}^{\operatorname{arctg} A}$$

Khi $A \to +\infty, A' \to -\infty$ *thì* $\text{arctg}\, A \to \frac{\pi}{2}; \text{arctg}\, A' \to -\frac{\pi}{2}$ *, suy ra*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x \sin x dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{0} x \sin x dx = \lim_{A \to -\infty} (-x \cos x + \sin x)\big|_A^0 = \lim_{A \to -\infty} (A \cos A - \sin A)$

Giới hạn này không tồn tại, do đó tích phân phân kỳ.

4. Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Tích phân suy rộng I *hội tụ khi và chỉ khi* $\alpha > 1$*, và phân kỳ khi và chỉ khi* $\alpha \leq 1$*.*

4.2 Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a, b)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, t]$, ($t < b$ bất kỳ), và $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$. Điểm $x = b$ được gọi là điểm bất thường (điểm kỳ dị) của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa 2.7. *Giới hạn của tích phân* $\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ *khi* $t \to b^-$*, được gọi là tích phân suy rộng của hàm số* $f(x)$ *trên khoảng* $[a, b)$ *và được ký hiệu như sau:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại, ta nói tích phân suy rộng hội tụ. Ngược lại nếu không tồn tại giới hạn này hoặc giới hạn bằng vô cùng, ta nói tích phân phân kỳ.

Tương tự ta định nghĩa tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ không bị chặn trên khoảng $(a, b]$ và (a, b) lần lượt nhận $x = a$ và $x = b$ làm điểm bất thường.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \text{ và } \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+, t' \to b^-} \int_t^{t'} f(x)dx$$

Đối với tích phân có hai điểm bất thường $x = a, x = b$, ta có thể viết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

khi hai trong ba tích phân nói trên hội tụ.

Ví dụ 4.2. *1. Xét sự hội tụ của tích phân* $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1} \int\limits_{t}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1} \arcsin x \Big|_{t}^{0} = \lim_{t\to -1} (-\arcsin t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \arcsin x \Big|_{0}^{t} = \lim_{t\to 1} \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

nên

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

2. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$

Tích phân suy rộng I *hội tụ khi và chỉ khi* $\alpha < 1$*, phân kỳ khi và chỉ khi* $\alpha \geq 1$.

4.3 Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 2.19.

- *Nếu* $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*
- *Nếu* $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$ *(có điểm bất thường là* a *hoặc* b*) hội tụ thì* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *cũng hội tụ*

Định nghĩa 2.8.

- *Nếu* $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì ta nói* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối, còn nếu* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *bán hội tụ.*
- *Nếu* $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$ *(có điểm bất thường là* a *hoặc* b*) hội tụ thì ta nói* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối, còn nếu* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$ *bán hội tụ.*

4.4 Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 2.20 (Tiêu chuẩn so sánh).

1. *Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a, A](a \leq A)$ và*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), x \geq a$$

   Khi đó

   i) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*

   ii) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ*

2. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A](a \leq A)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k(0 < k < +\infty)$. Khi đó các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.*

Hệ quả 2.3. *Cho f và g là hai hàm số dương khả tích trên $[a, +\infty)$. Khi đó*

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kì thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kì.*

Tương tự chúng ta cũng có các tiêu chuẩn hội tụ cho trường hợp tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn.

Định lý 2.21 (Tiêu chuẩn so sánh).

1. *Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $(a, b]$ và có cùng điểm bất thường là $x = a$ sao cho*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b]$$

   Khi đó

   i) *Nếu* $\int\limits_a^{b} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ *hội tụ* *ii) Nếu* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *phân kỳ*

2. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số dương khả tích trên $(a, b]$ và có cùng điểm bất thường $x = a$. Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = k(0 < k < +\infty)$$

Khi đó các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ *và* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.*

Hệ quả 2.4. *Cho f và g là hai hàm số dương khả tích trên $(a, b]$ và có cùng điểm bất thường $x = a$. Khi đó*

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và nếu* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và nếu* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *phân kì thì* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *phân kì.*

Chú ý:

- Khi xét đến tính chất hội tụ hay phân kì của một tích phân suy rộng, nói chung chúng ta chỉ "*quan tâm*" tới *dáng điệu* của hàm số tại các điểm bất thường.

- Khi sử dụng tiêu chuẩn so sánh chúng ta thường hay so sánh các tích phân suy rộng đã cho với hai loại tích phân suy rộng sau:

a) $I_1 = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\begin{cases}\text{hội tụ nếu} & \alpha > 1\\ \text{phân kì nếu} & \alpha \le 1\end{cases}$

b) $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\begin{cases}\text{hội tụ nếu } \alpha < 1\\ \text{phân kì nếu } \alpha \ge 1\end{cases}$, $I_2' = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\begin{cases}\text{hội tụ nếu } \alpha < 1\\ \text{phân kì nếu } \alpha \ge 1\end{cases}$

4.5 Bài tập

Bài tập 2.20. *Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau:*

a. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$ b. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$

c. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ d. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Lời giải. a. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = e^x(x-1)\Big|_{-\infty}^{0} = 1$

b. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx = \sin x\Big|_{0}^{+\infty}$. Do không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ nên tích phân đã cho phân kì.

c. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Đặt $x = \operatorname{tg} t$ thì $I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$

d. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}_{I_2}$

- Xét tích phân I_1 có điểm bất thường là $x = 0$. Khi $x \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Mặt khác tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên I_1 hội tụ.
- Xét tích phân I_2 có điểm bất thường là $x = 1$. Khi $x \to 1$, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Mặt khác tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ hội tụ nên I_2 hội tụ. ■

Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ.

Trong trường hợp tổng quát, muốn tính $I = \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ta thực hiện phép đổi biến

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$$

sẽ chuyển I về tích phân xác định

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi$$

Bài tập 2.21. *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau*

a. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$ b. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x} - 1}$ c. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$ e. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ f. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

Lời giải. a. Tích phân đã cho có điểm bất thường là $x = 0$ và

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x - x} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Mặc khác $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$ phân kì nên $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$ cũng phân kì.

b. Tích phân đã cho có điểm bất thường là $x = 0$ và khi $x \to 0$, $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ nên $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Do $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x} - 1}$ cũng hội tụ.

c. Tích phân đã cho có điểm bất thường là $x =$ và khi $x \to 1$ thì

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Do $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ hội tụ nên $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$ cũng hội tụ.

d. Ta có $\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{x}$ với mọi $x > e - 1$. Mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kì nên $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$ cũng phân kì.

e. Ta có $e^{-x^2} < 1$ với mọi $x > 0$ nên $\frac{e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$ với mọi $x > 0$. Mặt khác $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ cũng hội tụ.

f. Khi $x \to +\infty$ thì $\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \sim \frac{1}{x^2}$ nên tích phân đã cho hội tụ. ■

Bài tập 2.22. *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ thì có suy ra được* $f(x) \to 0$ *khi* $x \to +\infty$ *không?*

Lời giải. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ không suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$. Ví dụ như $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ hội tụ (xem bài tập 2.24) nhưng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x^2)$. ■

Bài tập 2.23. *Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $[a, +\infty)$ *và* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. *Hỏi* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *có hội tụ không?*

Lời giải. Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{A} = 1$, mà $\int\limits_a^{+\infty} Adx$ phân kì nên $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng phân kì.■

Bài tập 2.24. *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau*

a. $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ b. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ c. $\int\limits_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$

d. $\int\limits_0^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ e. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx$ f. $\int\limits_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

g. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ h. $\int\limits_0^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $(f \in C[0,1])$

Lời giải. a. Thực hiện phép đổi biến $x = \sqrt{t}, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, đưa tích phân đã cho về dạng

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}$$

Ta có thể viết

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin tdt}{\sqrt{t}} = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}}_{I_2}$$

Vì $\lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ nên tích phân I_1 thực chất là tích phân xác định nên hội tụ, do đó chỉ cần xét I_2.

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{d(\cos t)}{\sqrt{t}} = -\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$$

Vì $\left|\dfrac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ nên $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{3/2}} dt$ hội tụ. Vậy ta có I_2 cũng hội tụ và tích phân đã cho hội tụ.

b. Ta có với $x > 1$ thì $e^{-x^2} < e^{-x}$ mà $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$ hội tụ nên $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ cũng hội tụ.

c. Khi $x \to +\infty$, $1 - \cos\dfrac{2}{x} = 2\sin^2\dfrac{1}{x} \sim \dfrac{2}{x^2}$ nên $\int\limits_1^{+\infty} \left(1 - \cos\dfrac{2}{x}\right) dx$ hội tụ.

d. Khi $x \to 1$, $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{[(1-x)(1+x)]^5}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}.\sqrt[3]{(1-x)^5}}$ nên $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ hội tụ.

e. Trước hết ta có nhận xét rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx$ có điểm bất thường là $x = 0$ khi $p < 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ khi $p > 0$.

- Nếu $p < 0$ thì khi $x \to 0$, $(\operatorname{tg} x)^p = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^{-p} \sim \dfrac{1}{x^{-p}}$ nên I hội tụ nếu $-1 < p < 0$ và phân kì nếu $p \leq -1$.
- Nếu $p > 0$ thì khi $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $(\operatorname{tg} x)^p = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^p = \left(\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}\right)^p \sim \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^p}$ nên I hội tụ nếu $0 < p < 1$ và phân kì nếu $p \geq 1$.

Kết luận: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx$ hội tụ khi $|p| < 1$ và phân kì khi $|p| \geq 1$.

f. Trước hết ta có nhận xét rằng nếu $p < 1$ thì $x = 0$ là điểm bất thường, còn nếu $q < 1$ thì $x = 1$ là điểm bất thường. Phân tích

$$I = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx}_{I_2}$$

I_1 chỉ hội tụ khi $1 - p < 1$, nghĩa là $p > 0$; còn I_2 chỉ hội tụ khi $1 - q < 1$, nghĩa là $q > 0$. Vậy I chỉ hội tụ khi $p > 0, q > 0$.

g. Nếu $p \geq 1$ thì tích phân đã cho chỉ có điểm bất thường tại $+\infty$ và

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^{p-1} e^{-x}\right] : \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

nên $\int\limits_{x\to+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ hội tụ.

Nếu $p < 1$ thì $x = 0$ cũng là một điểm bất thường. Ta có

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{I_2}$$

Tích phân I_1 hội tụ khi $p > 0$ và I_2 hội tụ với p bất kì.

Vậy $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ hội tụ nếu $p > 0$.

h. Mặc dù tích phân đã cho là tích phân suy rộng có điểm bất thường là $x = 1$ nhưng ta có thể đưa I về tích phân thường bằng cách đổi biến. Đặt $x = \sin\theta$, trên $[0, c]$ ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to1^-}\int\limits_0^c \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to1^-}\int\limits_0^{\arcsin c} f(\sin\theta)d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta$$

Vì f là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$ nên hàm hợp $f(\sin\theta)$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ và tích phân đã cho là tích phân xác định nên hội tụ. ■

Bài tập 2.25. *Tính các tích phân suy rộng sau*

a. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ *b.* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ *c.* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Lời giải. a. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}$

b. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}$

c. Thực hiện phép đổi biến $x = \frac{1}{t}$ ta có

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{1+t^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$$

Do đó

$$2I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

Lại đặt $z = x - \dfrac{1}{x}$ ta được

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1 Giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0$ hay nếu $x_n \to x_0, y_n \to y_0$.

- Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0. Ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là l khi M dần đến M_0 nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận V dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \text{ hay } \lim_{M\to M_0} f(M) = l$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.

- Các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Nhận xét:

- Theo định nghĩa trên, muốn chứng minh sự tồn tại của giới hạn của hàm số nhiều biến số là việc rất *khó khăn* vì phải chỉ ra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$ với mọi dãy số $\{x_n \to$

$x_0\}, \{y_n \to y_0\}$. Trong thực hành, muốn tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số, phương pháp chứng minh *chủ yếu* là đánh giá hàm số, dùng nguyên lý giới hạn kẹp để đưa về giới hạn của hàm số một biến số.

- Với chiều ngược lại, muốn chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $\{x_n \to x_0, y_n \to y_0\}$ và $\{x'_n \to x_0, y'_n \to y_0\}$ sao cho
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$$
hoặc chỉ ra tồn tại hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

1.2 Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, M_0 là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu
$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$
Nếu miền D đóng và M_0 là điểm biên của D thì $\lim_{M\to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của $f(M)$ khi M dần tới M_0 ở bên trong của D.

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

- Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó liên tục đều, bị chặn trong miền ấy, đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền đó.

1.3 Bài tập

Bài tập 3.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ b. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

c. $z = \arcsin \dfrac{y - 1}{x}$ d. $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài tập 3.2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} (x \to 0, y \to 0)$ b. $f(x, y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x + y} (x \to \infty, y \to \infty)$

Lời giải. a. Nếu cho $(x,y) \to (0,0$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x,kx) = \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} \to \frac{1-k^2}{1+k^2} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b. Nếu cho $(x,y) \to (0,0$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x,kx) = \sin\frac{\pi x}{2x+kx} = \sin\frac{\pi}{2+k} \to \sin\frac{\pi}{2+k} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ■

§2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.1 Đạo hàm riêng

- Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D, điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $y = y_0$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_0)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng của f với biến x* tại M_0 và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}$ hay $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

- Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D, điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $x = x_0$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x_0,y)$ có đạo hàm tại điểm $y = y_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng của f với biến x* tại M_0 và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial y}$ hay $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0,y_0)}{\triangle y}$$

Chú ý: Các đạo hàm riêng của các hàm số n biến số (với $n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Khi cần tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, còn các biến còn lại là các hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm như hàm số một biến số.

2.2 Vi phân toàn phần

- Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0, y_0) \in D, M(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) \in D$. Biểu thức $\triangle f = f(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) - f(x_0, y_0)(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0. Nếu như có thể biểu diễn số gia toàn phần dưới dạng

$$\triangle f = A. \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle y + \beta \triangle y$$

  trong đó A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, thì ta nói hàm số z *khả vi* tại M_0, còn biểu thức $A. \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle y$ được gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x,y)$ tại M_0 và được kí hiệu là dz.
  Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là khả vi trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

- Đối với hàm số một biến số, sự tồn tại đạo hàm tại điểm x_0 tương đương với sự khả vi của nó tại x_0. Đối với hàm số nhiều biến số, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0)$ chưa đủ để nó khả vi tại M_0 (xem bài tập 3.3). Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại M_0.

  Định lý 3.22. *Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0 và*

$$dz = f'_x \triangle x + f'_y \triangle y$$

2.3 Đạo hàm của hàm số hợp

Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$ và các hàm số

$$D \xrightarrow{\varphi} \varphi(D) \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

và $F = f \circ \varphi$ là hàm số hợp của hai hàm số f và φ:

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

Định lý 3.23. *Nếu f có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u, v có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì tồn tại các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ và*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{3.1}$$

Công thức 3.1 có thể được viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

trong đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ φ, định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v với x, y và được kí hiệu là $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

2.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}''(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}''(x,y) \end{cases}$$

  Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, ...

  Định lý 3.24 (Schwarz). *Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f_{xy}'', f_{yx}'' và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f_{xy}'' = f_{yx}''$ tại M_0.*

- Xét hàm số $z = f(x,y)$, vi phân toàn phần của nó $dz = f'_x dx + f'_y dy$, nếu tồn tại, cũng là một hàm số với hai biến số x, y. Vi phân toàn phần của dz, nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z và được kí hiệu là d^2z. Ta có công thức

$$d^2z = f_{xx}''dx^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{yy}''dy^2$$

2.5 Đạo hàm theo hướng - Gradient

- Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số xác định trong một miền $D \in \mathbb{R}^3$ và $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ là một véctơ bất kì trong $\mathbb{R}^3$. Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{l}$ tại M_0 và được kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$. Nếu $\vec{l}$ trùng với véctơ đơn vị i của trục Ox thì đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ chính là đạo hàm riêng theo biến x của hàm f

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

Vậy đạo hàm riêng theo biến x chính là đạo hàm theo hướng của trục Ox, cũng như vậy, $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ là các đạo hàm của f theo hướng của trục Oy và Oz. Định lý sau đây cho ta mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng:

Định lý 3.25. *Nếu hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ thì tại M_0 có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và ta có*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là cosin chỉ phương của $\vec{l}$.

- Cho $f(x,y,z)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của f tại M_0 là véctơ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$$

và được kí hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$.

Định lý 3.26. *Nếu hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì tại đó ta có*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f.\vec{l}$$

Chú ý: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f.\vec{l} = \left|\overrightarrow{\text{grad}} f\right| \left|\vec{l}\right| .\cos\left(\overrightarrow{\text{grad}} f, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}} f\right| \left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. Cụ thể

- Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$.
- Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$.

2.6 Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

- Cho phương trình $F(x,y) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ trong một lân cận nào đó của x_0 và có đạo hàm

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

- Tương tự, cho phương trình $F(x,y,z) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^3$ và $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định một hàm số ẩn $z = z(x,y)$ trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) và có đạo hàm

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

2.7 Bài tập

Bài tập 3.3. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$ nhưng không liên tục tại $(0,0)$ và do đó không khả vi tại $(0,0)$.

Bài tập 3.4. Tính các đạo hàm riêng của hàm số sau

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ b) $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$ c) $z = x^{y^3}$

d) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ e) $u = x^{y^z}, (x,y,z > 0)$ f) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z > 0)$

Lời giải. a.

$$z'_x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; z'_y = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}}$$

b.

$$z'_x = y\cos\frac{x}{y}; z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}.$$

c.

$$z'_x = y^3 x^{y^3-1}; z'_y = 3y^2 \ln x . x^{y^3}$$

d.

$$z'_x = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$$

$$z'_y = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$$

e.

$$u'_x = y^z x^{y^z-1}; u'_y = x^{y^z} z y^{z-1}. \ln x; u'_z = x^{y^z} y^z \ln y \ln x$$

f.

$$u'_x = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}.\frac{-2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}; u'_y = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{-2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}; u'_z = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{-2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

■

Bài tập 3.5. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của các hàm số $f(x,y)$ sau

a.

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

b.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lời giải. a. Ta dễ thấy hàm số liên tục với mọi $(x,y)\neq(0,y)$.

Xét $x=0$, vì $\left|x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|\leq\frac{\pi}{2}|x|$ nên $\lim\limits_{x\to 0}x.\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2=0=f(0,y)$. Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Với $x\neq 0$ các đạo hàm riêng tồn tại và liên tục:

$$z'_x=\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{2x^2y^2}{x^4+y^4},z'_y=\frac{2x^3y}{x^4+y^4}$$

Xét tại $x=0$,

$$\begin{cases} f'_x(0,y)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\mathrm{arctg}\left(\frac{h}{y}\right)^2=\left[\begin{array}{l}0,y=0\\ \frac{\pi}{2},y\neq 0\end{array}\right.\\ f'_y(0,y)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}0=0\end{cases}$$

Vậy ta thấy $f'_x(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$; $f'_y(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, còn tại $(0,0)$ thì

$$0\leq\left|\frac{x\sin y-y\mathrm{sinx}}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\left(\frac{\sin y}{y}-\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leq\frac{1}{2}\left|\frac{\sin y}{y}-\frac{\sin x}{x}\right|$$

nên

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{x\sin y-y\mathrm{sinx}}{x^2+y^2}\right|=0$$

Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$. ■

Bài tập 3.6. Giả sử $z=yf\left(x^2-y^2\right)$, ở đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thoả mãn

$$\frac{1}{x}z'_x+\frac{1}{y}z'_y=\frac{z}{y^2}$$

Lời giải. Ta có

$$z'_x=yf\left(x^2-y^2\right).2x,z'_y=f\left(x^2-y^2\right)+y.f\left(x^2-y^2\right).(-2y)$$

nên

$$\frac{1}{x}z'_x+\frac{1}{y}z'_y=\frac{f\left(x^2-y^2\right)}{y}=\frac{z}{y^2}$$ ■

Bài tập 3.7. Tìm đạo hàm của hàm số hợp sau đây

a. $z=e^{u^2-2v^2},u=\cos x,v=\sqrt{x^2+y^2}.$

b. $z = \ln\left(u^2 + v^2\right), u = xy, v = \frac{x}{y}$.

c. $z = \arcsin\left(x - y\right), x = 3t, y = 4t^3$.

Lời giải. a. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = -\sin x \\ u'_y = 0 \end{cases}; \begin{cases} v'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases};$$

nên

$$\begin{cases} z'_x = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)}\left[-\sin 2x - 4x\right]. \\ z'_y = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)}\left[-4y\right]. \end{cases}$$

b. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = y \\ u'_y = x \end{cases}; \begin{cases} v'_x = \frac{1}{y} \\ v'_y = \frac{-x}{y^2} \end{cases}$$

nên

$$z'_x = \frac{2}{x}, z'_y = \frac{2\left(y^4 - 1\right)}{y\left(y^4 + 1\right)}$$

c. Ta có

$$\begin{cases} x'_t = 3 \\ y'_t = 12t^2 \end{cases}$$

nên

$$z'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (x-y)^2}}\left(3 - 12t^2\right)$$

■

Bài tập 3.8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a. } z = \sin\left(x^2 + y^2\right). & \text{b. } z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} \\ \text{c. } z = arctg\dfrac{x+y}{x-y} & \text{d. } u = x^{y^2 z}. \end{array} \tag{3.2}$$

Lời giải. a.

$$dz = \cos\left(x^2 + y^2\right)\left(2xdx + 2ydy\right)$$

b.

$$dz = \frac{2}{\sin\frac{2y}{x}}.\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right).$$

c.

$$dz = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x-y)^2 + (x+y)^2}.$$

d.

$$du = x^{y^2 z}\left(\frac{y^2 z}{x}dx + 2yz\ln x dy + y^2 \ln x dz\right).$$

■

Bài tập 3.9. Tính gần đúng

a. $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$ b. $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

Lời giải. a. Xét hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}, \Delta x = 0,02; \Delta y = 0,05; x = 1; y = 0$. Ta có

$$f'_x = \frac{1}{3(x^2+y^2)^{2/3}}2x; f'_y = \frac{1}{3(x^2+y^2)^{2/3}}2y$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 0+\Delta y) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\Delta x + f'_y(1,0)\Delta y = 1 + \frac{2}{3}.0,02 + 0.0,05 = 1,013.$$

b. Xét hàm

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right); x = 1; y = 1; \Delta x = 0,03; \Delta y = 0,02$$

Ta có

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}; f'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3y^{\frac{3}{4}}}$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(1,1) + f'_x(1,1)\Delta x + f'_y(1,1)\Delta y = 0 + \frac{1}{3}.0,03 + \frac{1}{4}(-0,02) = 0,005.$$

■

Bài tập 3.10. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a. $x^3y - y^3x = a^4$; tính y' b. $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$; tính y'

c. $x + y + z = e^z$; tính z'_x, z'_y d. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y

Lời giải.

a. Xét hàm số ẩn $F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4 = 0$, có $F'_x = 3x^2y - y^3; F'_y = x^3 - 3y^2x$. Vậy

$$y' = \frac{-F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x}$$

b. Xét hàm số ẩn $F(x,y) = \text{arctg}\,\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a}$ có $\begin{cases} F'_x = \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} = \frac{a}{a^2+(x+y)^2} \\ F'_y = \frac{a}{a^2+(x+y)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a^2-a^2-(x+y)^2}{a\left(a^2+(x+y)^2\right)} \end{cases}$ nên

$$y' = \frac{a}{(x+y)^2}.$$

c. Xét hàm số ẩn $F(x,y,z) = x+y+z-e^z$ có $F'_x = 1; F'_y = 1; F'_z = 1-e^z$ nên

$$z'_x = \frac{-1}{1-e^z}; z'_y = \frac{-1}{1-e^z}$$

d. Xét hàm số ẩn $F(x,y) = x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$ có $F'_x = 3x^2-3yz; F'_y = 3y^2-3xz; F'_z = 3z^2-3xy$ nên

$$z'_x = \frac{3yz-3x^2}{3z^2-3xy}; z'_x = \frac{3xz-3y^2}{3z^2-3xy}$$

■

Bài tập 3.11. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x,y xác định bởi phương trình $z.e^z = x.e^x + y.e^y$

Lời giải. Xét hàm số $F(x,y,z) = ze^z - xe^x - ye^y = 0$ có $\begin{cases} F'_x = -\left(e^x + xe^x\right) \\ F'_y = -\left(e^y + ye^y\right) \\ F'_z = e^z + ze^z \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{(1+z'_x).(y+z)-(x+z)(z'_x)}{(y+z)^2} = \dfrac{\left(1+\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}\right)-(x+z)\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}}{(y+z)^2} \\ u'_y = \dfrac{(x+z).\left(1+z'_y\right)-(y+z)\left(z'_y\right)}{(y+z)^2} = \dfrac{(x+z).\left(1+\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)-(y+z)\left(\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)}{(y+z)^2} \end{cases}$$

■

Bài tập 3.12. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{cases}$$

Lời giải. Lấy đạo hàm hai vế của các phương trình của hệ ta có

$$\begin{cases} 1+y'_x+z'_x &= 0 \\ 2x+2yy'_x+2zz'_x &= 0 \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{z-x}{y-z} \\ z'_x = \dfrac{x-y}{y-z} \end{cases}$$

■

Bài tập 3.13. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$

Lời giải. Xét hàm số $F(x, y, z) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2}$ có $\begin{cases} F'_x = -\frac{2}{x^2} \\ F'_y = \frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}} \\ F'_z = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}} \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\frac{2}{x^2}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} \\ z'_y = \dfrac{\frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x^2 z'_x + \frac{z'_y}{y} = \frac{1}{z}$. ∎

Bài tập 3.14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a. $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ b. $z = x^2 \ln\left(x^2 + y^2\right)$ c. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Lời giải. a. Ta có $\begin{cases} z'_x = x\sqrt{x^2+y^2} \\ z'_y = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ nên $\begin{cases} z''_{xx} = \sqrt{x^2+y^2} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{yy} = \sqrt{x^2+y^2} + y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{xy} = \dfrac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

b. Ta có $\begin{cases} z'_x = 2x\ln(x+y) + \dfrac{x^2}{x+y} \\ z'_y = \dfrac{x^2}{x+y} \end{cases}$ nên $\begin{cases} z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{2x(x+y) - x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{-x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

c. Ta có $\begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ z'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$ nên $\begin{cases} z''_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{-\left(x^2+y^2\right) + y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$ ∎

Bài tập 3.15. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a. $z = xy^2 - x^2y$ b. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$

Lời giải. a. Ta có $dz = \left(y^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - x^2\right)dy$ nên

$$d^2z = -2y\,(dx)^2 + 4\,(y-x)\,dxdy + (2y)\,(dy)^2$$

b. Ta có $dz = \frac{x}{2(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y}{2(x^2+y^2)^2}dy$ nên

$$d^2z = \frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3}(dx)^2 - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^3}dxdy + \frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3}(dy)^2$$

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

3.1 Cực trị tự do

Định nghĩa 3.9. *Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong một miền D và $M_0(x_0,y_0) \in D$. Ts nói rằng hàm số $f(x,y)$ đạt* cực trị *tại M_0 nếu với mọi điểm M trong lân cận nào đó của M_0 nhưng khác M_0, hiệu số $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.*

- *Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì M_0 được gọi là* cực tiểu *của hàm số f tại M_0.*
- *Nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì M_0 được gọi là* cực đại *của hàm số f tại M_0.*

Trong phần tiếp theo chúng ta sử dụng các kí hiệu sau:

$$p = f'_x(M), q = f_y(M), r = f_{xx}''(M), s = f_{xy}''(M), t = f_{yy}''(M)$$

Định lý 3.27. *Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị tại M và tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M), q = f_y(M)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không.*

Định lý 3.28. *Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0,y_0)$. Giả sử tại M_0 ta có $p = q = 0$, khi đó*

1. *Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$.*

2. *Nếu* $s^2 - rt > 0$ *thì* $f(x, y)$ *không đạt cực trị tại* M_0.

Chú ý: Nếu $s^2 - rt = 0$ thì chưa kết luận được điều gì về điểm M_0, nó có thể là cực trị, cũng có thể không. Trong trường hợp đó ta sẽ dùng định nghĩa để xét xem M_0 có phải là cực trị hay không bằng cách xét hiệu $f(M) - f(M_0)$, nếu nó xác định dấu trong một lân cận nào đó của M_0 thì nó là cực trị và ngược lại.

Bài tập 3.16. Tìm cực trị của các hàm số sau

a. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ b. $z = x + y - x.e^y$

c. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ d. $z = x^2 + y^2 - e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Lời giải. a. Xét hệ phương trình $\begin{cases} p = z'_x = 2x + y + 1 = 0 \\ q = z'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy ta có $M(-1, 1)$ là điểm tới hạn duy nhất.

Ta có $A = z''_{xx}(M) = 2; B = z''_{xy}(M) = 1; C = z''_{yy}(M) = 2$ nên $B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0$. Vậy hàm số đạt cực trị tại M và do $A > 0$ nên M là điểm cực tiểu.

b. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} p = 1 - e^y = 0 \\ q = 1 - xe^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số có điểm tới hạn duy nhất $M(1, 0)$. Ta có $A = z''_{xx}(M) = 0; B = z''_{xy}(M) = -1; C = z''_{yy}(M) = -1$ nên $B^2 - AC = 1 > 0$. Hàm số đã cho không có cực trị.

c. Xét hệ phương trình
$\begin{cases} z'_x = 8x^3 - 2x \\ z'_y = 4y^3 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(4x^2 - 1\right) = 0 \\ y\left(y^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1 \end{cases}$ Vậy các điểm tới hạn của hàm số là

$$M_1(0,0); \quad M_2(0,1); \quad M_3(0,-1); \quad M_4\left(\frac{1}{2}, 0\right); \quad M_5\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$M_6\left(\frac{1}{2}, -1\right); \quad M_7\left(-\frac{1}{2}, 0\right); \quad M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right); \quad M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Ta có $z''_{xx} = 24x^2 - 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 12y^2 - 4$.

- Tại $M_1(0,0)$, $A = -2; B = 0; C = -4; B^2 - AC = -8 < 0$ nên M_1 là điểm cực đại với $z = 0$.
- Tại $M_2(0,1); M_3(0,-1); A = -2; B = 0; C = 8; B^2 - AC = 16 > 0$ nên M_2, M_3 không phải là điểm cực đại với $z = 0$.

- Tại $M_4\left(\frac{1}{2},0\right); M_7\left(\frac{-1}{2},0\right); A=4; B=0; C=-4; B^2-AC=16>0$ nên M_4, M_7 không phải là điểm cực đại với $z=0$.
- Tại $M_5\left(\frac{1}{2},1\right); M_6\left(\frac{1}{2},-1\right); M_8\left(-\frac{1}{2},1\right); M_9\left(-\frac{1}{2},-1\right); A=4; B=0; C=8; B^2-AC=-32<0$ nên M_5, M_6, M_8, M_9 là các điểm cực tiểu với giá trị tại đó là $z=-\frac{9}{8}$.

d. Xét hệ phương trình $\begin{cases} p=z'_x=2x+e^{-\left(x^2+y^2\right)}.2x=0 \\ q=z'_y=2y+e^{-\left(x^2+y^2\right)}.2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $M(0,0)$ là điểm tới hạn duy nhất. Xét

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2+2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}-4x^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ z''_{xy} &= -4xy.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ z''_{yy} &= 2+2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}-4y^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned}$$

Tại $M(0,0)$ có $A=4; B=0; C=4; B^2-AC=-16<0; A>0$ nên tại M hàm số đạt cực tiểu. ■

3.2 Cực trị có điều kiện

Cho tập mở $U\subset\mathbb{R}^2$ và hàm số $f: U\to\mathbb{R}$. Xét bài toán tìm cực trị của hàm số f khi các biến x, y thoả mãn phương trình

$$\varphi(x,y)=0$$

Ta nói rằng tại điểm $(x_0,y_0)\in U$ thoả mãn điều kiện $\varphi(x_0,y_0)=0$ hàm f có *cực đại tương đối* (tương ứng *cực tiểu tương đối*) nếu tồn tại một lân cận $V\subset U$ sao cho $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ (tương ứng $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$) với mọi $(x,y)\in V$ thoả mãn điều kiện $\varphi(x,y)=0$. Điểm (x_0,y_0) được gọi là cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y)$, còn điều kiện $\varphi(x,y)=0$ được gọi là điều kiện ràng buộc của bài toán. Nếu trong một lân cận của (x_0,y_0) từ hệ thức $\varphi(x,y)=0$ ta xác định được hàm số $y=y(x)$ thì rõ ràng $(x_0,y(x_0))$ là cực trị địa phương của hàm số một biến số $g(x)=f(x,y(x))$. Như vậy, trong trường hợp này bài toán tìm cực trị ràng buộc được đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm số một biến số. Ta xét bài toán sau đây

Bài tập 3.17. Tìm cực trị có điều kiện

a. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$

b. $z=x.y$ với điều kiện $x+y=1$

Lời giải. a. Đặt $x = \frac{a}{\sin t}; y = \frac{a}{\cos t}$, ta có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$. Khi đó

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\sin t}{a} + \frac{\cos t}{a}.$$

Ta có

$$z'_t = \frac{\cos t}{a} - \frac{\sin t}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4}$$

Với $t = \frac{\pi}{4}$ ta có $x = \sqrt{2}a; y = \sqrt{2}a$, hàm số đạt cực tiểu và $z_{\text{CT}} = \frac{-\sqrt{2}}{a}$.
Với $t = \frac{5\pi}{4}$ ta có $x = -\sqrt{2}a; y = -\sqrt{2}a$, hàm số đạt cực đại và $z_{\text{CĐ}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

b. Từ điều kiện $x + y = 1$ ta suy ra $y = 1 - x$. Vậy $z = xy = x(1-x)$. Dễ dàng nhận thấy hàm số $x = x(1-x)$ đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$ và $z_{\text{CĐ}} = \frac{1}{4}$. ■

Tuy nhiên không phải lúc nào cũng tìm được hàm số $y = y(x)$ từ điều kiện $\varphi(x,y) = 0$. Do đó bài toán tìm cực trị điều kiện không phải lúc nào cũng đưa được về bài toán tìm cực trị tự do. Trong trường hợp đó ta dùng **phương pháp Lagrange** được trình bày dưới đây.

Định lý 3.29 (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị điều kiện). *Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ và (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm f với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$. Hơn nữa giả thiết rằng:*

a. Các hàm $f(x,y), \varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của (x_0, y_0).

b. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại một số λ_0 cùng với x_0, y_0 tạo thành nghiệm của hệ phương trình sau (đối với λ, x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

với $\phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ được gọi là hàm Lagrange.

Định lý trên chính là điều kiện cần của cực trị có ràng buộc. Giải hệ phương trình 3.3 ta sẽ thu được các điểm tới hạn. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm tới hạn ứng với giá trị λ_0. Ta có

$$\phi(x,y,\lambda_0) - \phi(x_0,y_0,\lambda_0) = f(x,y) + \lambda_0\varphi(x,y) - f(x_0,y_0) - \lambda_0\varphi(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

nên nếu M là một điểm cực trị của hàm số $\phi(x,y,\lambda_0)$ thì M cũng là điểm cực trị của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$. Muốn xét xem M có phải là điểm cực trị của hàm số $\phi(x,y,\lambda_0)$ hay không ta có thể quay lại sử dụng định lý 3.28 hoặc đi tính vi phân cấp hai

$$d^2\phi(x_0,y_0,\lambda_0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_0,y_0,\lambda_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,\lambda_0)dxdy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x_0,y_0,\lambda_0)dy^2$$

trong đó dx và dy liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)dy = 0$$

hay

$$dy = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)}dx$$

Thay biểu thức này của dy vào $d^2\phi(x_0,y_0,\lambda_0)$ ta có

$$d^2\phi(x_0,y_0,\lambda_0) = G(x_0,y_0,\lambda_0)dx^2$$

Từ đó suy ra

- Nếu $G(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$ thì (x_0,y_0) là điểm cực tiểu có điều kiện.
- Nếu $G(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$ thì (x_0,y_0) là điểm cực đại có điều kiện.

Bài tập 3.18. Tìm cực trị có điều kiện của hàm số $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Lời giải. Xét hàm số Lagrange $\phi(x,y,\lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2})$. Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0 \end{cases}$$

ta thu được các điểm tới hạn là $M_1(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $M_2(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ta có

$$d^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}\right)dx^2 + \left(\frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}\right)dy^2$$

Từ điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0$ suy ra $-\frac{2}{x^3}dx - \frac{2}{y^3}dy = 0$ nên $dy = -\frac{y^3}{x^3}dx$, thay vào biểu thức $d^2\phi$ ta có

- Tại M_1, $d^2\phi(M_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = -\frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) < 0$ nên M_1 là điểm cực đại có điều kiện.
- Tại M_2, $d^2\phi(M_2) = \frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = \frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) > 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu có điều kiện. ■

3.3 Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất

Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên tập hợp đóng A của $\mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A. Để tìm các giá trị này ta hãy tìm giá trị của hàm số tại tất cả các điểm dừng trong miền A cũng như tại các điểm đạo hàm riêng không tồn tại, sau đó so sánh các giá trị này với các giá trị của hàm trên biên ∂A của A (tức là ta phải xét cực trị có điều kiện).

Bài tập 3.19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a. $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

b. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$.