

## Chương 2. Cơ học vật rắn

### A. Phần lý thuyết

- **Khối tâm của hệ chất điểm:**  $\vec{r}_G = OG = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

- **Vận tốc của khối tâm:**  $\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m}$

- **Gia tốc của khối tâm:**  $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}}{m} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a}_G$

→ Phương trình chuyển động của khối tâm.

- **Định luật bảo toàn động lượng của 1 hệ cô lập:**  $\sum_i \vec{F}_i = 0 \rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const} (\vec{v}_G = \text{const})$

- **Vận tốc của 1 điểm trên vật rắn trong chuyển động phức tạp:**  $\vec{v}_M = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

- **Mô-men quán tính của một chất điểm:**

$I_\Delta = mr^2$  - r là khoảng cách từ chất điểm đến trục quay  $\Delta$ ;

- **Mô-men quán tính của hệ chất điểm:**

$I_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  -  $r_i$  là khoảng cách từ chất điểm thứ i đến trục quay  $\Delta$ ;

- **Mô-men quán tính của 1 vật rắn:**

$I_\Delta = \int_{vr} r^2 dm$  - r là khoảng cách từ khối lượng nguyên tố dm đến trục quay  $\Delta$ .

Đơn vị của mô-men quán tính:  $\text{kgm}^2$ , thứ nguyên:  $ML^2$

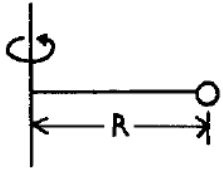
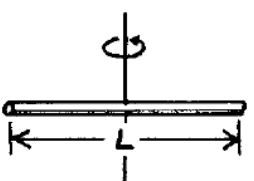
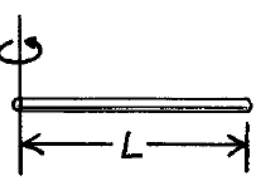
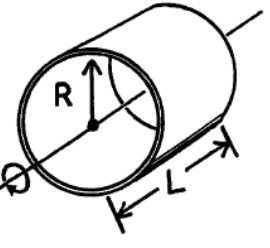
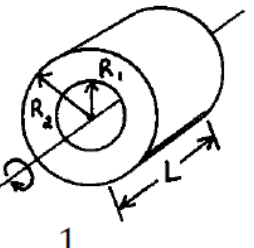
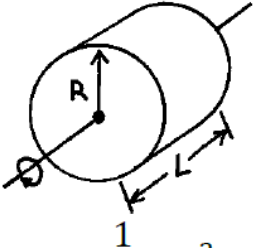
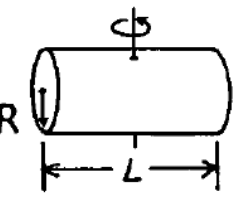
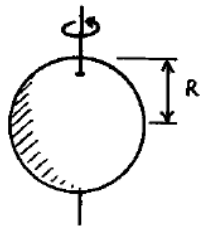
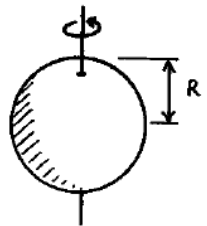
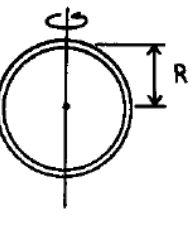
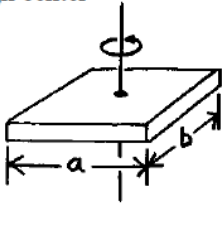
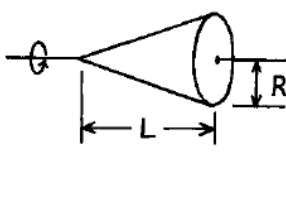
- **Mô men quán tính đối với trục quay đi qua khối tâm của các vật rắn đồng chất**

Khối trụ đặc, đĩa tròn	$I = \frac{1}{2} mR^2$
Khối trụ rỗng, vành tròn:	$I = mR^2$
Thanh mảnh có chiều dài L:	$I = \frac{1}{12} mL^2$
Khối cầu đặc:	$I = \frac{2}{5} mR^2$
Quả cầu rỗng:	$I = \frac{2}{3} mR^2$
Mặt chữ nhật	$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

- **Định lý Huygens-Steiner**

$I_\Delta = I_{\Delta_0} + md^2$ , trong đó d là khoảng cách giữa 2 trục  $\Delta$  &  $\Delta_0$ .

- Mô-men quán tính của một số vật rắn thường gặp

<p>Point mass at a radius R</p>  $I = MR^2$	<p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p>  $I = \frac{1}{12} ML^2$	<p>Thin rod about axis through end perpendicular to length</p>  $I = \frac{1}{3} ML^2$
<p>Thin-walled cylinder about central axis</p>  $I = MR^2$	<p>Thick-walled cylinder about central axis</p>  $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$	<p>Solid cylinder about central axis</p>  $I = \frac{1}{2} MR^2$
<p>Solid cylinder about central diameter</p>  $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$	<p>Solid sphere about center</p>  $I = \frac{2}{5} MR^2$	<p>Thin hollow sphere about center</p>  $I = \frac{2}{3} MR^2$
<p>Thin ring about diameter</p>  $I = \frac{1}{2} MR^2$	<p>Slab about perpendicular axis through center</p>  $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$	<p>Cone about central axis</p>  $I = \frac{3}{10} MR^2$

Note: All formulas shown assume objects of uniform mass density.

- **Mômen lực:**  $\vec{\mathcal{M}} \equiv \vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}_t$

Độ lớn:  $|\vec{\mathcal{M}}| \equiv |\vec{M}| = rF \sin \theta = rF_t$

- **Phương trình cơ bản của chuyển động quay:**  $I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}} \rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{I}$

- **Mômen động lượng:**  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

**- Định lý về mômen động lượng:**  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}} dt$  (xung lượng của mômen lực trong

khoảng thời gian  $\Delta t$ .)

**- Định luật bảo toàn mô men động lượng của hệ chất điểm.**

Ta có:  $\vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}$

Với hệ cô lập:  $\sum_{i=1}^n \vec{\mathcal{M}}_i = \vec{\mathcal{M}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \Rightarrow I\vec{\omega} = \text{const}$

## B. Phần bài tập

Bài tập cần làm:

3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.9, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.19-3.22, 3.24

Bài tập cần trình bày ra giấy A4 & ghim vào nẹp cho thầy

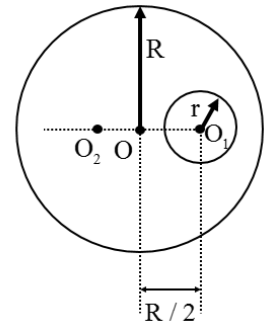
3.4, 3.5, 3.9, 3.12, 3.13, 3.20, 3.22, 3.24

**Bài 3.2.** Trên một đĩa tròn đồng chất bán kính  $R$  có khoét 1 lỗ tròn nhỏ bán kính  $r$ ; tâm của lỗ khoét nằm cách tâm của đĩa một đoạn bằng  $R/2$ . Xác định vị trí khối tâm của đĩa trên.

**Bài giải:**

Bài này có 2 cách, cách thứ nhất có thể áp dụng đúng định nghĩa về khối tâm và sử dụng phương pháp tọa độ để giải.

**Cách 1:** Vì đĩa đối xứng qua đường nối tâm  $OO_1$  nên khối tâm cần tìm cũng nằm trên đường  $OO_1$ . Chọn  $O$  là gốc tọa độ, từ đó có tọa độ khối tâm của cái đĩa khi chưa bị khoét là:  $x_O = 0$



Theo định nghĩa:  $x_O = \frac{m_1 x_{O_1} + m_2 x_{O_2}}{m_1 + m_2} = 0$ , trong đó:  $x_{O_1} = \frac{R}{2}$ ,  $x_{O_2}$  là khoảng cách chúng ta cần tìm,  $m_1$  là

khối lượng của phần bị khoét đi (bán kính là  $r$ ),  $m_2$  là khối lượng của phần đĩa còn lại (mà chúng ta đang đi tìm khối tâm).

Thay vào biểu thức trên ta được:  $m_1 \frac{R}{2} + m_2 x_{O_2} = 0 \rightarrow x_{O_2} = -\frac{m_1 R}{m_2}$

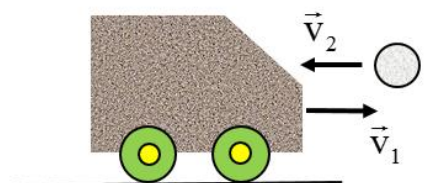
Lại có:  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sigma \pi r^2}{\sigma \pi (R^2 - r^2)} = \frac{r^2}{(R^2 - r^2)}$ ,  $\sigma$  có thể coi là khối lượng phân bố theo diện tích ( $\text{kg/m}^2$ ).

Từ đó suy ra:  $x_{O_2} = -\frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$ , dấu “-” có nghĩa là  $O_2$  nằm ngược phía với  $O_1$ .

**Cách 2.** Làm theo kiểu thời phổ thông đã được học, chúng ta dùng quy tắc hợp lực song song chẳng hạn, khi đó trọng lượng của cả cái đĩa chưa bị khoét bằng trọng lượng của cái đĩa (đang cần tìm khối tâm –  $m_2$ ) cộng với trọng lượng phần đĩa bị khoét đi ( $m_1$ ), và đương nhiên khối tâm của cái đĩa đầy đủ nằm tại  $O$ . Theo quy tắc chia trong ta có:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{OO_2}{OO_1} \rightarrow OO_2 = \frac{P_1 \cdot OO_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2} OO_1 = \frac{m_1 R}{2m_2} = \frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$$

**Bài 3.4.** Một xe chở đầy cát chuyển động không ma sát với vận tốc  $v_1 = 1 \text{ m/s}$  trên mặt đường nằm ngang. Toàn bộ xe cát có khối lượng  $M = 10 \text{ kg}$ . Một quả cầu khối lượng  $m = 2 \text{ kg}$  bay theo chiều ngược lại với vận tốc nằm ngang  $v_2 = 7 \text{ m/s}$ . Sau khi gặp xe, quả cầu nằm ngấp trong cát. Hỏi sau đó xe chuyển động theo chiều nào, với vận tốc bằng bao nhiêu?



**Tóm tắt:**

$$v_1 = 1(\text{m/s}), M = 10 \text{ kg}$$

$$m = 2 \text{ kg}, v_2 = -7(\text{m/s})$$

$$v' = ?$$

### Bài giải:

Đây là 1 bài toán va chạm mềm, áp dụng định luật bảo toàn động lượng.

$$Mv_1 + mv_2 = (M + m)v \rightarrow v = \frac{Mv_1 + mv_2}{M + m} = \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot (-7)}{10 + 2} = -0,33(\text{m/s})$$

Dấu “-” nghĩa là chuyển động ngược với chiều ban đầu.

**Bài 3.6.** Một hỏa tiễn lúc đầu đứng yên, sau đó phụt khí đều đặn ra phía sau với vận tốc ko đổi  $u = 300 \text{ m/s}$  đối với hỏa tiễn. Trong mỗi giây, lượng khí phụt ra bằng  $\mu = 90 \text{ g}$ . Khối lượng tổng cộng ban đầu của hỏa tiễn bằng  $M_0 = 270 \text{ g}$ . Hỏi:

a) Sau bao lâu hỏa tiễn đạt tới vận tốc  $v = 40 \text{ m/s}$ ?

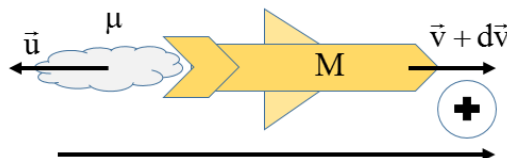
b) Khi khối lượng tổng cộng của hỏa tiễn là  $90 \text{ g}$  thì vận tốc của hỏa tiễn là bao nhiêu? Bỏ qua sức cản của ko khí và lực hút của Trái đất.

### Tóm tắt:

$$u = 300(\text{m/s})$$

$$\mu = 90(\text{g}) = 0,09(\text{kg})$$

$$M_0 = 270(\text{g}) = 0,27(\text{kg})$$



$$a) v = 40(\text{m/s}) \rightarrow t = ?$$

$$b) M = 90(\text{g}) = 0,09(\text{kg}) \rightarrow v = ?$$

### Bài giải:

Tại thời điểm  $t$  bất kỳ, khối lượng của hỏa tiễn là  $M$ , vận tốc là  $\vec{v}$ , chiều lên phương chuyển động là  $v$

Tại thời điểm  $t + dt$ , khối lượng của hỏa tiễn là  $M + dM$  (vì khối lượng hỏa tiễn giảm dần nên  $dM < 0$ ), vận tốc là  $\vec{v} + d\vec{v}$ , chiều lên phương chuyển động là  $v + dv$ ,

Vận tốc khí phụt ra là  $\vec{u} + \vec{v}$ , chiều lên phương chuyển động được  $v - u$ ,

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương chuyển động:

$$(M + dM)(v + dv) + (-dM)(v - u) = Mv, \text{ “} -dM \text{” là khối lượng của lượng khí phụt ra.}$$

Bỏ qua tích của  $dMdv$  ta được:

$$Mdv + udM = 0 \rightarrow \frac{dv}{u} = -\frac{dM}{M} \rightarrow \int_0^v \frac{dv}{u} = -\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \rightarrow \frac{v}{u} = -\ln \frac{M}{M_0} = \ln \frac{M_0}{M} \rightarrow v = u \ln \left( \frac{M_0}{M} \right) = u \ln \left( \frac{M_0}{M_0 - \mu t} \right)$$

a) với  $v = 40 \text{ m/s}$

$$v = u \ln \left( \frac{M_0}{M_0 - \mu t} \right) \rightarrow \frac{M_0}{M_0 - \mu t} = e^{\frac{v}{u}} \rightarrow t = \frac{M_0 \left( e^{\frac{v}{u}} - 1 \right)}{\mu e^{\frac{v}{u}}} = \frac{270 \left( e^{\frac{40}{300}} - 1 \right)}{90 e^{\frac{40}{300}}} = 0,374(\text{s})$$

$$b) v = u \ln \left( \frac{M_0}{M_0 - \mu t} \right) = 300 \ln \left( \frac{270}{90} \right) = 300 \ln 3 = 329,6(\text{m/s})$$

**Bài 3.9.** Một trụ đặc khối lượng  $m = 100 \text{ kg}$ , bán kính  $R = 0,5 \text{ m}$  đang quay xung quanh trục của nó. Tác dụng lên trụ một lực hãm  $F = 243,4 \text{ N}$ , tiếp tuyến với mặt trụ và vuông góc với trục quay. Sau thời gian  $\Delta t = 31,4$  giây, trụ dừng lại. Tính vận tốc góc của trụ lúc bắt đầu tác dụng lực hãm.

### Tóm tắt:

$$m = 100(\text{kg}), R = 0,5(\text{m}), F = -243,4(\text{N}), \Delta t = 31,4(\text{s}) \rightarrow \omega = 0$$

$$\omega_0 = ?$$

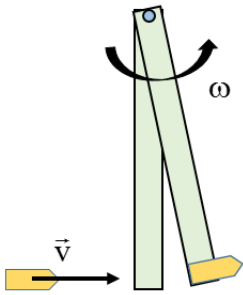
**Bài giải:**

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} \rightarrow \omega_0 = \omega - \beta \Delta t$$

$$\text{Lại có: } \beta = \frac{M}{I} = \frac{RF}{mR^2/2} = \frac{2F}{mR}$$

$$\text{Thay vào ta được: } \omega_0 = \omega - \frac{2F\Delta t}{mR} = \frac{-2F\Delta t}{mR} = \frac{2.243,4.31,4}{100.0,5} = 305,7 \text{ (rad/s)}$$

**Bài 3.11.** Một thanh chiều dài  $l = 0,5 \text{ m}$  có thể quay tự do xung quanh một trục nằm ngang đi qua một đầu của thanh. Một viên đạn khối lượng  $m = 0,01 \text{ kg}$  bay theo phương nằm ngang với vận tốc  $v = 400 \text{ m/s}$  tới xuyên vào đầu kia của thanh và mắc vào thanh. Tìm vận tốc góc của thanh ngay sau khi viên đạn đập vào thanh. Biết rằng mômen quán tính của thanh đối với trục quay bằng  $5 \text{ kg.m}^2$ .

**Bài giải:**

Tại vị trí va chạm, các lực tác dụng vào hệ “thanh + đạn” là trọng lực và lực đàn hồi của thanh đều đi qua trục quay nên không gây ra mômen vì thế  $\mathcal{M} = 0$  nên mômen động lượng được bảo toàn.

Mômen trước:  $lmv$  (của viên đạn)

Mômen sau:  $I'\omega$  trong đó  $I'$  là mômen quán tính của hệ “thanh + đạn”:

$$I' = I_{\text{bar}} + I_{\text{bullet}} = I + ml^2$$

$$\text{Ta có: } lmv = (I + ml^2)\omega \rightarrow \omega = \frac{lmv}{I + ml^2} = \frac{0,5.0,01.400}{5 + 0,01.0,5^2} = 0,4 \text{ (rad/s)}$$

**Bài 3.14.** Một đĩa bằng đồng (khối lượng riêng  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  có bề dày  $b = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , bán kính  $R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Đĩa bị khoét thủng hai lỗ tròn bán kính  $R/2$  như trên hình. Tìm mômen quán tính của đĩa đã khoét đối với trục quay vuông góc với đĩa và đi qua tâm O của đĩa.

**Bài giải:**

Mômen quán tính đĩa tròn chưa bị khoét đối với trục quay đi qua tâm là  $I_0 = \frac{MR^2}{2}$

$$\text{Trong đó: } M = \rho \pi R^2 b \rightarrow I_0 = \frac{\rho \pi R^2 b R^2}{2} = \frac{\rho \pi b R^4}{2}$$

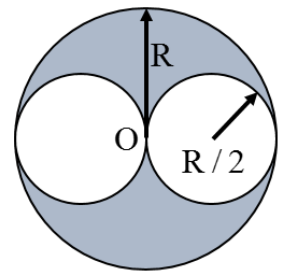
Mômen quán tính của 2 đĩa tròn nhỏ có kích thước đúng bằng 2 lỗ tròn bán kính  $R/2$  đối với trục quay đi qua tâm của chính chúng là:

$$I_1 = I_2 = \frac{M_1 (R/2)^2}{2}, \text{ theo định lý Huygen-Steiner, mômen quán tính của 2 đĩa tròn nhỏ đối với trục quay đi}$$

$$\text{qua O là: } I_{10} = I_{20} = \frac{M_1 (R/2)^2}{2} + M_1 (R/2)^2 = \frac{3}{8} M_1 R^2 = \frac{3}{8} \rho \pi b (R/2)^2 R^2 = \frac{3}{32} \rho \pi b R^4$$

Suy ra mômen của đĩa bị khoét đi 2 lỗ có bán kính  $R/2$  là:

$$I = I_0 - I_1 - I_2 = \frac{\rho \pi b R^4}{2} - 2 \cdot \frac{3}{32} \rho \pi b R^4 = \frac{5}{16} \rho \pi b R^4 = \frac{5}{16} \cdot 8,9 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4 = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ (kg.m}^2\text{)}$$



**Bài 3.20.** Hai vật có khối lượng lần lượt bằng  $m_1$  và  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), được nối với nhau bằng một sợi dây vắt qua một ròng rọc (khối lượng của ròng rọc bằng  $m$ ) (hình vẽ).

Tìm:

a) Gia tốc của các vật;

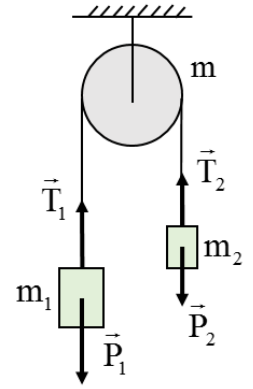
b) Sức căng  $T_1$  và  $T_2$  của các dây treo. Coi ròng rọc là một đĩa tròn, ma sát không đáng kể. Áp dụng bằng số  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ .

**Tóm tắt:**

$$m_1 > m_2 \quad (m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, m = 1 \text{ kg})$$

a)  $a = ?$

b)  $T_1 = ?$ ,  $T_2 = ?$



**Bài giải:**

Dễ dàng viết được 2 phương trình theo định luật 2 Newton đối với mỗi vật:  $m_1 g - T_1 = m_1 a$  (1),

$$-T_2 + m_2 g = -m_2 a$$

Phương trình đối với chuyển động quay của ròng rọc:

$$\mathfrak{M} = I\beta \rightarrow T_1 R - T_2 R = I\beta = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R} = \frac{maR}{2} \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{ma}{2} \quad (3)$$

(Ở đây chú ý, phương trình cơ bản của chuyển động quay được chiếu lên phương của véc-tơ  $\vec{\omega}$ , trong trường hợp này véc-tơ này hướng từ bên trong mặt phẳng hình vẽ đi ra)

Từ các phương trình trên ta dễ dàng suy ra hệ phương trình:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 a$$

$$-T_2 + m_2 g = -m_2 a \rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 a$$

$$T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}$$

$$(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a = \frac{ma}{2} \rightarrow a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = 10 \frac{2-1}{2+1+0,5} = 2,86 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$T_1 = m_1 \left( g - g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \right) = \frac{m_1 g \left( m_1 + m_2 + \frac{m}{2} - m_1 + m_2 \right)}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{m_1 g (4m_2 + m)}{2m_1 + 2m_2 + m} = \frac{2 \cdot 10 \cdot (4 \cdot 1 + 1)}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1} = 14,3 \text{ (N)}$$

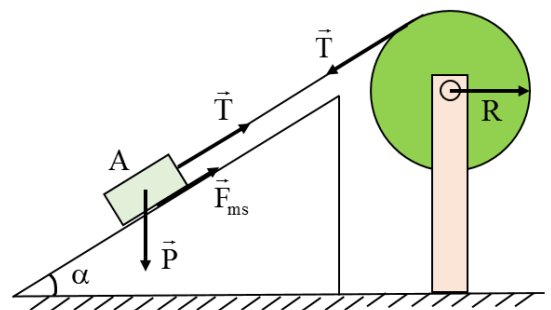
$$T_2 = m_2 \left( g + g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \right) = \frac{m_2 g \left( m_1 + m_2 + \frac{m}{2} + m_1 - m_2 \right)}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{m_2 g (4m_1 + m)}{2m_1 + 2m_2 + m} = \frac{1 \cdot 10 \cdot (4 \cdot 2 + 1)}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1} = 12,9 \text{ (N)}$$

**Bài 3.22.** Một vật A khối lượng  $m$  trượt trên mặt phẳng nghiêng và làm quay một bánh xe có bán kính  $R$  (hình vẽ). Mômen quán tính của bánh xe đối với trục quay bằng  $I$ . Khối lượng của dây không đáng kể. Tìm gia tốc góc của bánh xe.

**Bài giải:**

Đối với vật nặng ta có phương trình định luật 2 Newton như sau:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{ms} = m\vec{a}$$



Chiếu phương trình trên lên phương chuyển động và phương vuông góc với phương chuyển động ta được:

$$P \sin \alpha - T - F_{ms} = ma \quad \text{và} \quad N - P \cos \alpha = 0 \rightarrow N = P \cos \alpha \rightarrow F_{ms} = kmg \cos \alpha$$

$$\text{Suy ra } mg \sin \alpha - T - kmg \cos \alpha = ma = m\beta R$$

Đối với đĩa tròn ta có:  $\vec{M} = I\vec{\beta} \rightarrow TR = I\beta \rightarrow T = \frac{I\beta}{R}$

Thay vào phương trình phía trên ta được:  $mg \sin \alpha - \frac{I\beta}{R} - kmg \cos \alpha = m\beta R \rightarrow \beta = \frac{mgR(\sin \alpha - k \cos \alpha)}{I + mR^2}$

*Bài này chẳng rõ ràng gì sất, thứ nhất là chẳng nhắc gì đến lực ma sát cả, thứ 2 là từ công thức cuối cùng có thể thấy, hệ này chỉ chuyển động khi mà  $\sin \alpha > k \cos \alpha \rightarrow k < \tan \alpha$ , còn ngược lại thì hệ này cân bằng. Nên về nguyên tắc, phải nói rõ mấy thứ này nữa. Và chú ý là trong sách giải của Trần Văn Quảng sai bét nhé.*