GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN.

Gv: Ts. Đỗ Đức Tâm.

Nội dung phương pháp lặp đơn

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng phân ly nghiệm (a, b).

a. Ý tưởng:

Biến đổi tương đương:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

Chọn giá trị ban đầu $x_0 \in (a, b)$. Xây dựng dãy xấp xỉ nghiệm theo công thức truy hồi

$$x_n = g(x_{n-1}). \tag{2}$$

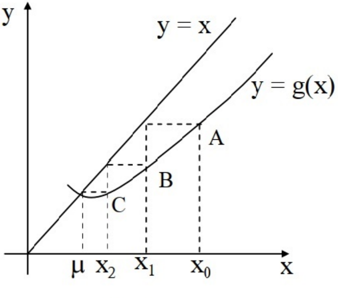
Như vậy ta nhận được dãy x_n, nếu dãy này hội tụ thì tồn tại giới hạn

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \eta$$

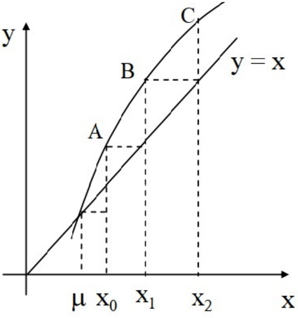
là nghiệm phương trình.

Nội dung phương pháp lặp đơn

b. Ý nghĩa hình học:



Hình a



Hình b

Trường hợp hình a: hội tụ đến nghiệm μ

Trường hợp hình b: không hội tụ đến nghiệm μ.

Điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn

Định lý 1

Giả sử hàm $g(x)$ xác định, khả vi trên đoạn $[a, b]$ và mọi $x \in [a, b]$ giá trị $g(x)$ đều thuộc $[a, b]$. Khi đó nếu tồn tại $q > 0$ sao cho

$$|g'(x)| \leq q < 1 \forall x \in (a, b)$$

thì:
+ Quá trình lặp hội tụ đến nghiệm không phụ thuộc vào $x_0 \in [a, b]$
+ Giới hạn $\lim_{n \to +\infty} x_n = \eta$ là nghiệm duy nhất trên (a, b).

Sai số của phương pháp

Nếu chọn phần tử x_n của dãy (2) làm xấp xỉ nghiệm thực η của phương trình (1) và q là số như trong định lý 1 thì ta có

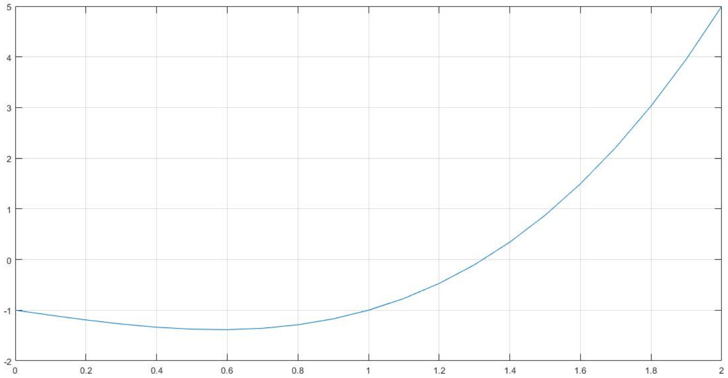
$$|x_n - \eta| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \tag{3}$$

và

$$|x_n - \eta| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \tag{4}$$

Nhận xét: Từ công thức (4) có thể tính được số lần lặp cần thiết để đạt được sai số ε cho trước.

Ví dụ: Tìm nghiệm: $x^3 - x - 1 = 0$ bằng phương pháp lặp.
Lời giải: - Tách nghiệm: Bằng phương pháp đồ thị tìm được phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(1, 2)$.



- Chính xác hóa nghiệm:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = x + 1$$

hay

$$x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Chọn

$$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

thì

$$g'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} \Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{3} < 1 \forall x \in [1,2].$$

Do đó phương pháp lặp hội tụ.

- Áp dụng phương pháp lặp (chọn $x_0 = 1$) ta được bảng sau

n	x_n	$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
0	1	1.260
1	1.260	1.312
2	1.312	1.322
3	1.322	1.324
4	1.324	1.325
5	1.325	1.325

Chọn $x_5 = 1.325$ là nghiệm xấp xỉ thì sai số là

$$|x_5 - \eta| \leq \frac{q}{1-q}|x_5 - x_4| = 0.5.10^{-3}.$$

Suy ra nghiệm xấp xỉ $x_5 = 1.325$ có 4 chữ số tin tưởng.

c. Thuật toán

- Khai báo hàm $g(x)$;
- Nhập x, ε, q;
- Lặp: $y = x$, $x = g(x)$ trong khi $|q * (x - y)/(1 - q)| > \varepsilon$;
- Xuất nghiệm: x (hoặc y).

Thuật toán và sơ đồ khối