$2. Phép biến đổi Laplace với bài toán Cauchy

1. **Định lý.** Nếu $y(t)$ liên tục và có cấp mũ, $y'(t)$ liên tục từng khúc trên $[0, +\infty)$thì tồn tại $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0)$.

Chứng minh. Đặt $u = e^{-st}, dv = f'(t)dt$ ta có

$$\int_a^b f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_a^b - \int_a^b f(t)(-s)e^{-st}dt$$

$= -f(a)e^{-sa} + f(b)e^{-sb} + s\int_a^b f(t)e^{-st}dt$. Thay $a = 0, b = T$

ta có $\int_0^T y'(t)e^{-st}dt = -y(0)e^{-0} + y(T)e^{-sT} + s\int_0^T y(t)e^{-st}dt$

Cho $T \to +\infty$ ta được $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0)$ vì $y(T)e^{-sT} \to 0$

2. Hệ quả: Nếu $y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)$ liên tụ va có cấp mũ, $y^{(n)}(t)$ liên tục tưng khúc trên $[0, +\infty)$ thì

$$L\{y^{(n)}(t)\} = s^n L\{y(t)\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - s^{n-3}y"(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

Chứng minh: Bằng quy nạp

3. Các ví dụ giải PTVP và Hệ PTVP

1. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'' - \frac{5}{2}y' + y = -\frac{5}{2}sint$ thỏa mãn $y(0) = 0; y'(0) = 2$

b) $y''' - y'' + y' - y = 1$ thỏa mãn $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

2. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

a) $\begin{cases} y' - 2z = 1 + t \\ z' + 2y = e^t \end{cases}$ thỏa mãn $y(0) = 1;\ z(0) = 2$

b) $\begin{cases} x' + 2y' + z' = 0 \\ x' - y' = 3t - 3 \\ y' + 2z' = 1 - t^2 \end{cases}$ thỏa mãn $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

Giải:

1.a $y'' - \frac{5}{2}y' + y = -\frac{5}{2}sint$ thỏa mãn $y(0) = 0; y'(0) = 2$

$$\to L\left\{y'' - \frac{5}{2}y' + y\right\} = -\frac{5}{2}L\{sint\}$$

$\to L\{y''\} - \frac{5}{2}L\{y'\} + L\{y\} = -\frac{5}{2}L\{sint\}.$

Đặt $Y = L\{y\} \to \left[(s^2Y - sy(0) - y'(0)) - \frac{5}{2}\left(sY - y(0)\right) + Y\right] = -\frac{5}{2}\frac{1}{s^2+1}$

$$\to \left(s^2 - \frac{5}{2}s + 1\right)Y - 2 = -\frac{5}{2(s^2+1)} \to Y = \frac{4s^2 - 1}{(s^2+1)(2s^2 - 5s + 2)}$$

$$Y = \frac{(2s+1)(2s-1)}{(s^2+1)(s-2)(2s-1)} = \frac{2s+1}{(s^2+1)(s-2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{-s}{s^2+1} + \frac{1}{s-2}\right]$$

$$\to y(t) = L^{-1}(Y) = \frac{1}{2}\left[L^{-1}\left\{\frac{-s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}\right] = \frac{1}{2}(e^{2t} - cost)$$

Giải:

1. b $y''' - y" + y' - y = 1$. thỏa mãn $y(0) = y'(0) = y"(0) = 0$

Đặt $L\{y(t)\} = Y(s)$. Ta có $L\{y''' - y" + y' - y\} = L\{1\}$

$$\to L\{y'''\} - L\{y"\} + L\{y'\} - L\{y\} = \frac{1}{s}$$

$$\to [s^3Y - s^2y(0) - sy'(0) - y"(0)] - [s^2Y - sy(0) - y'(0)] + [sY - y(0)] - Y = \frac{1}{s}$$

$$(s^3 - s^2 + s - 1)Y = \frac{1}{s} \to Y = \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{-1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1}\right\} = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(cost - sint)$$

Giải.

2.a $\begin{cases} y' - 2z = 1 + t \\ z' + 2y = e^t \end{cases}$ thỏa mãn $y(0) = 1;\ \ z(0) = 2$

Đặt $L\{y(t)\} = Y;\ \ \ L\{z(t)\} = Z$ ta có:

$$\begin{cases} L\{y' - 2z\} = L\{1 + t\} \\ L\{z' + 2y\} = L\{e^t\} \end{cases} \to \begin{cases} sY - y(0) - 2Z = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} \\ sZ - z(0) + 2Y = \dfrac{1}{s-1} \end{cases} \to \begin{cases} sY - 2Z = \dfrac{s^2 + s + 1}{s^2} \\ sZ + 2Y = \dfrac{2s + 1}{s - 1} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 4;\ \ D_1 = \begin{vmatrix} \frac{s^2+s+1}{s^2} & -2 \\ \frac{2s+1}{s-1} & s \end{vmatrix} = \frac{s^2+s+1}{s} + \frac{4s+2}{s-1}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} s & \dfrac{s^2 + s + 1}{s^2} \\ 2 & \dfrac{2s + 1}{s - 1} \end{vmatrix} = \frac{2s^2 + s}{s - 1} - \frac{2s^2 + 2s + 2}{s^2}$$

2.a (tiếp)

$$Y=\frac{D_1}{D}=\frac{s^2+s+1}{s(s^2+4)}+\frac{4s+2}{(s-1)(s^2+4)}=\frac{2}{5(s-1)}+\frac{7s}{20(s^2+4)}+\frac{46}{10(s^2+4)}+\frac{1}{4s}$$

$$Z=\frac{D_2}{D}=\frac{2s^2+s}{(s-1)(s^2+4)}-\frac{2s^2+2s+2}{s^2(s^2+4)}=\frac{1}{5(s-1)}+\frac{23s}{20(s^2+4)}-\frac{14}{10(s^2+4)}-\frac{1}{2s^2}$$

$$\rightarrow\begin{cases} y(t)=L^{-1}\{Y\}=\frac{2}{5}e^t+\frac{7}{20}cos2t+\frac{23}{10}sin2t+\frac{1}{4} \\ z(t)=L^{-1}\{Z\}=\frac{1}{5}e^t+\frac{23}{20}cos2t-\frac{7}{10}sin2t-\frac{1}{2}t \end{cases}$$

2.b

$$\begin{cases} x' + 2y' + z' = 0 \\ x' - y' = 3t - 3 \\ y' + 2z' = 1 - t^2 \end{cases}$$ thỏa mãn $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

Đặt L$\{x(t)\} = X;$ L$\{y(t)\} =$ Y; L$\{z(t)\} =$ Z ta có

$$\begin{cases} L\{x' + 2y' + z'\} = 0 \\ L\{x' - y'\} = L\{3t - 3\} \\ L\{y' + 2z'\} = L\{1 - t^2\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sX + 2sY + sZ = 0 \\ sX - sY = \dfrac{3}{s^2} - \dfrac{3}{s} \\ sY + 2sZ = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^3} \end{cases}$$

$$??\rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{4}{s^2} + \dfrac{3}{s^3} + \dfrac{2}{s^4} \\ Y = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{2}{s^4} \\ Z = \dfrac{3}{s^3} - \dfrac{2}{s^4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = L^{-1}\{X\} = L^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2} + \dfrac{3}{s^3} + \dfrac{2}{s^4}\right\} = 4t + \dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 \\ y(t) = L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{2}{s^4}\right\} = t - 3t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 \\ z(t) = L^{-1}\{Z\} = L^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^3} - \dfrac{2}{s^4}\right\} = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

Ví dụ hệ PTVP tuyến tính cấp 2

Giải hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y + z'' - z = 0 \end{cases}$$ thỏa mãn

$$x(0) = 1, y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$$

Giải: Đặt $L\{x(t)\} = X, L\{y(t)\} = Y, L\{z(t)\} = Z$ ta có hệ pt

$$\begin{cases} (s^2 - 1)X + Y + Z = s \\ X + (s^2 - 1)Y + Z = 0 \\ X + Y + (s^2 - 1)Z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{s^3}{(s^2 + 1)(s^2 - 2)} \\ Y = Z = \dfrac{-s}{(s^2 + 1)(s^2 - 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{2}{3}\dfrac{s}{s^2 - 2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2 + 1} \\ Y = Z = -\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2 - 2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2 + 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}cosh\left(\sqrt{2}t\right) + \dfrac{1}{3}cost \\ y = z = -\dfrac{1}{3}cosh\left(\sqrt{2}t\right) + \dfrac{1}{3}cost \end{cases}$$