Nội dung

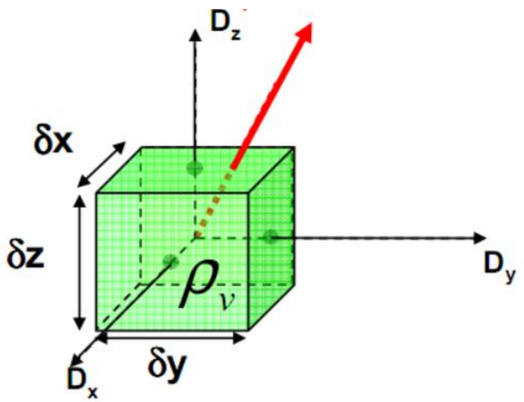
- Khái niệm, giải tích vector
- Định luật Coulomb và cường độ điện trường
- Luật Gauss và dịch chuyển điện
- Năng lượng và điện thế
- Dòng điện và vật dẫn
- Điện môi và điện dung
- Dòng điện không đổi
- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Trường điện từ dừng
- Lực từ, vật liệu từ, điện cảm
- Hệ phương trình Maxwell-Trường điện từ biến thiên

Công thức Laplace

- Ta đã biết, đối với vector điện cảm **D**:

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho_v \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

-Ý nghĩa: Nếu thể tích δv bao một điện tích $\delta Q=\rho_v\delta v$, thông lượng đi ra từ điểm bao bởi δv là mật độ điện tích ρ_v



- Ta cũng đã có cường độ điện trường là gradient của điện thế:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

Có thể kết hợp các công thức trên?

Kết hợp các công thức trên:

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho_v \leftrightarrow \nabla.\left(\varepsilon\mathbf{E}\right) = \rho_v$$

$$\leftrightarrow \nabla.\left(\varepsilon\left(-\nabla V\right)\right) = \rho_v$$

Nếu ε không thay đổi theo không gian: $\nabla.\nabla V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$

Công thức Laplace

$$\nabla.\nabla V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

- Có thể viết lại công thức trên

$$\nabla.\nabla V = \nabla^2 V \equiv \Delta V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$\nabla^2 \equiv \Delta$ là toán tử Laplace: divgrad(V)

- Trong hệ tọa độ Đề-các:

$$grad = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)V$$

$$\nabla^2 V = \nabla.\nabla V = \nabla.\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = \nabla.\left(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{F_x}\mathbf{a}_x + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{F_y}\mathbf{a}_y + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{F_z}\mathbf{a}_z\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Công thức Laplace trong các hệ tọa độ

- Đề-các:

$$\nabla.\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Trụ:

$$\nabla.\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho F_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(F_\phi\right)}{\partial\phi} + \frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Cầu:

$$\nabla.\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 F_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta F_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(F_\phi\right)}{\partial\phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

Phương trình Laplace-Poisson

Đối với một điện môi đồng nhất, mối quan hệ giữa điện thế và mật độ điện tích được biểu diễn bằng phương trình Poisson

Nếu ε không thay đổi theo không gian:

$$\boxed{\nabla . \nabla V = \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

Trong trường hợp mật độ điện tích bằng 0, ta được phương trình Laplace (trường hợp đặc biệt của phương trình Poisson)

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

→Từ đây có thể chuyển từ cách giải quyết bài toán từ các phép tích phân sang giải các phương trình vi phân

Một khi đã xác định được V, ta sẽ xác định được **E** (do đó **D**)

Nhắc lại: Bài toán tích phân

- Coulomb

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S \, dS}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

- Định luật Gauss

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \varepsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{V_{bao\,boi\,S}} (\nabla\cdot\mathbf{D})\,dv$$

- Hiệu điện thế-Điện thế

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Bài toán vi phân

$$\rho_v = \nabla\cdot\mathbf{D}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Poisson: $$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

Laplace: $$\nabla^2 V = 0$$

Ví dụ trong HTĐ Đề-các

$$\nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Phương trình Laplace-Poisson

- Các phương trình Laplace-Poisson là các phương trình vi phân từng phần elliptic:

  \- Đối với dạng phương trình vi phân này, nếu ta có thể tìm được nghiệm thỏa mãn các điều kiện bờ, thì nghiệm này là duy nhất.

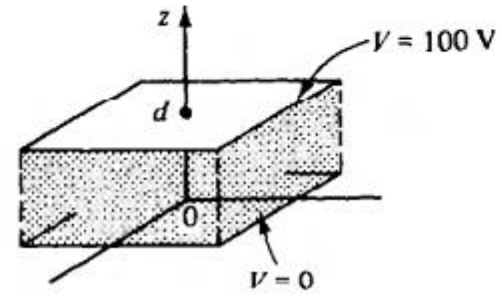
- Nghiệm của các phương trình Laplace là các nghiệm khả vi bậc 2, được gọi là các hàm điều hòa

- Các bài toán có vật dẫn trên các bờ phân cách thường dễ giải quyết:

  \- Các vật dẫn là đẳng thế, tức *V*= hằng số trên bề mặt vật dẫn. Vì vậy ta có các điều kiện bờ Dirichlet (tức là các giá trị tại các bề mặt phân cách được xác định rõ) cho bài toán này

Bài toán bản mỏng song song (tụ điện phẳng)

- Ví dụ 1: Xét hai vật dẫn (bản mỏng) song song, trong đó *V*=0 tại *z*=0 và $V = U_0 = 100$ (volt) tại *z*=*d*. Giả sử vùng giữa hai bản mỏng không chứa điện tích tự do.
- Trong tọa độ Đề-các, vùng xét không chứa điện tích tự do



$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

- Do điện thế chỉ phụ thuộc *z*:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \frac{dV}{dz} = A \rightarrow V = Az + B$$

- Điều kiện bờ tại *V*=0 và $V = U_0$:

$$\begin{cases} V(d) = A.d + B = U_0 \\ V(0) = A.0 + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{U_0 - B}{d} \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow A = U_0/d$$

$$\rightarrow V = \frac{U_0}{d} z$$

Bài toán bản mỏng song song (tụ điện phẳng)

- Từ *V* có thể tính cường độ điện trường $V = \frac{U_0}{d} z$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_0}{d} z \right)\mathbf{a}_z = -\frac{U_0}{d}\mathbf{a}_z \quad [\mathrm{V/m}]$$

- Suy ra vector chuyển dịch điện $\mathbf{D} = -\varepsilon \frac{U_0}{d}\mathbf{a}_z \quad [\mathrm{C/m^2}]$

- Phân bố điện tích mặt trên các bản cực

$$\rho_s = D_n = \pm\varepsilon \frac{U_0}{d} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

(dấu dương tại *z*=*d* và âm tại *z*=0)

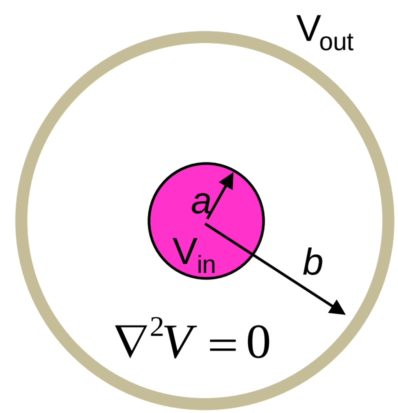
$$|Q| = \int_S |\rho_s| dS = \int_S \varepsilon \frac{U_0}{d} dS = \varepsilon \frac{U_0 S}{d} \rightarrow C = \frac{|Q|}{V} = \frac{|Q|}{U_0} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Bài toán cáp đồng trục (tụ điện trụ tròn)

- Ví dụ 2: Xét cáp đồng trục đặt dọc theo trục *z*, có lớp điện môi phân bố đồng nhất, không có điện tích tự do
  - Trong hệ tọa độ trụ, nghiệm sẽ không biến thiên theo ϕ, mà chỉ biến thiên duy nhất theo ρ

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$$



$$\nabla^2 V = 0$$

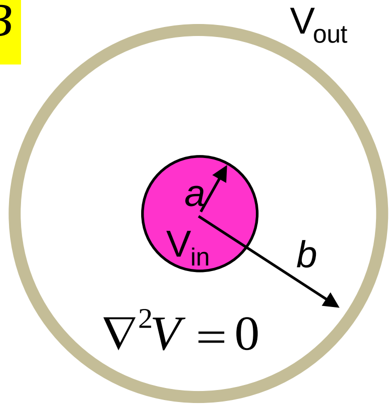
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = A = constant \leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad V = A\ln(\rho) + B$$

Bài toán cáp đồng trục (tụ điện trụ tròn)

$$V = A\ln(\rho) + B$$



- Áp dụng các điều kiện bờ

Với $V = V_{out}$ tại $\rho = b$:

$$\Rightarrow \quad V_{out} = A\ln(b) + B \quad \Rightarrow \quad B = V_{out} - A\ln(b)$$

Với $V = V_{in}$ tại $\rho = a$:

$$\Rightarrow \quad V_{in} = A\ln(a) + B = A\ln(a) + V_{out} - A\ln(b)$$

$$= A\ln(a/b) + V_{out} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V_{in} - V_{out}}{\ln(a/b)}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{V_{in} - V_{out}}{\ln(a/b)}\ln(\rho) + \left(V_{out} - \frac{V_{in} - V_{out}}{\ln(a/b)}\ln(b)\right)$$

$$\Rightarrow \quad V - V_{out} = (V_{in} - V_{out})\frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)} \rightarrow V = (V_{in} - V_{out})\frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)} + V_{out}$$

- Ví dụ 3: Một tụ điện hình trụ tròn có bán kính trong a_1, bán kính ngoài a_2, được đặt dưới hiệu điện thế U (trụ ngoài nối đất). Tìm phân bố $E(\rho)$, $D(\rho)$?

Theo phương trình Laplace-Poisson,
trong không gian điện môi: $\nabla^2 V = 0$

Với tọa độ trụ: $$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Do tính đối xứng quanh trục: $$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0; \frac{\partial}{\partial z} = 0;$$

$$\nabla^2 V = 0 \leftrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0 \to V(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2$$

Điều kiện bờ:

$$\begin{cases} V(a_1) = C_1 \ln a_1 + C_2 = U \\ V(a_2) = C_1 \ln a_2 + C_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = \dfrac{-U}{\ln(a_2/a_1)} \\ C_2 = \dfrac{U \ln a_1}{\ln(a_2/a_1)} \end{cases}$$

$$V(\rho)=\frac{-U}{\ln(a_2/a_1)}\ln\rho+\frac{U\ln a_1}{\ln(a_2/a_1)}$$

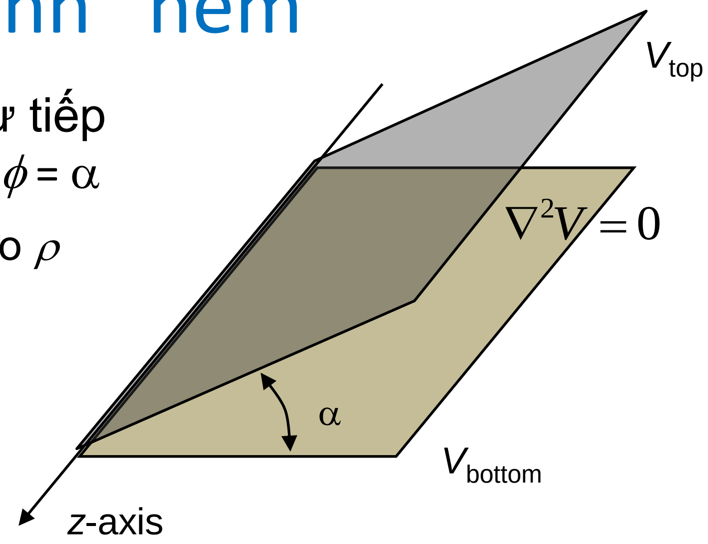
$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial\rho}\mathbf{a}_\rho=\frac{U}{\ln(a_2/a_1)}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$\rightarrow \rho_s=D_n\Big|_{\rho=a_1}=\frac{\varepsilon U}{\ln(a_2/a_1)}\frac{1}{a_1}$$

$$Q=\int_S\rho_s dS=\frac{\varepsilon U}{a_1\ln(a_2/a_1)}2\pi a_1 L$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(a_2/a_1)}$$

Bài toán vật dẫn hình “nêm”



- Ví dụ 4: Xét hai bản mỏng kim loại, gần như tiếp xúc với nhau dọc theo trục *z*, tạo thành góc $\phi = \alpha$
  - Trong hệ tọa độ trụ, *V* sẽ không biến thiên theo ρ mà chỉ biến đổi theo ϕ

$$\nabla^2 V = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)}_{0} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \underset{0}{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} = 0$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow V = A\phi + B$$

  - **Áp dụng điều kiện bờ**

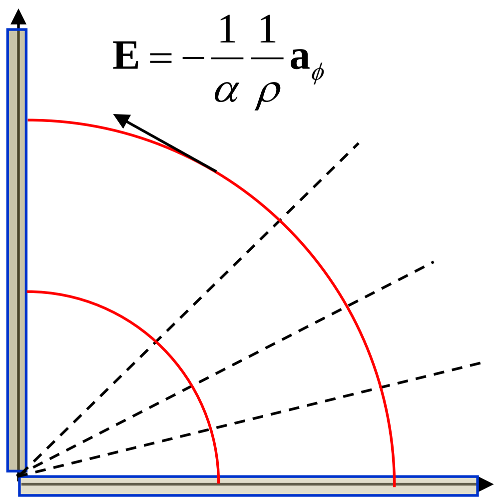
$V = V_{bottom}$ tại $\phi = 0$ $\Rightarrow$ $V_{bottom} = B$

$V = V_{top}$ tại $\phi = \alpha$ $\Rightarrow$ $V_{top} = A\alpha + V_{bottom}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{top} - V_{bottom}}{\alpha} = A$

$$\Rightarrow V = \left(V_{top} - V_{bottom}\right)\frac{\phi}{\alpha} + V_{bottom} \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\left(V_{top} - V_{bottom}\right)}{\alpha}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

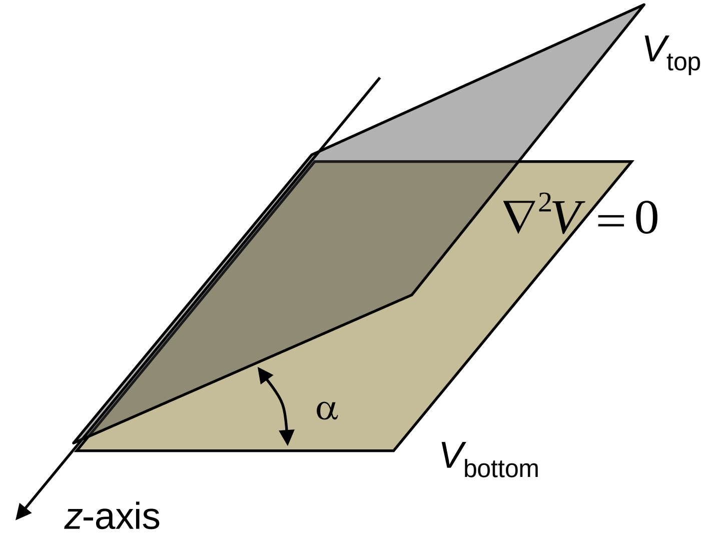
- Khi $\alpha = \pi/2$, $V_{bottom} = 0$, $V_{top} = 1V$



$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\phi$$

$$\frac{\phi}{\pi/2} \text{ (vôn)}$$

$$V = (1-0)\frac{\phi}{\pi/2} + 0 = \frac{\phi}{\pi/2} \quad \text{(vôn)}$$



$$V = \left(V_{top} - V_{bottom}\right)\frac{\phi}{\alpha} + V_{bottom}$$

⇨ Đường đẳng thế là các đường thẳng đi qua gốc tọa độ

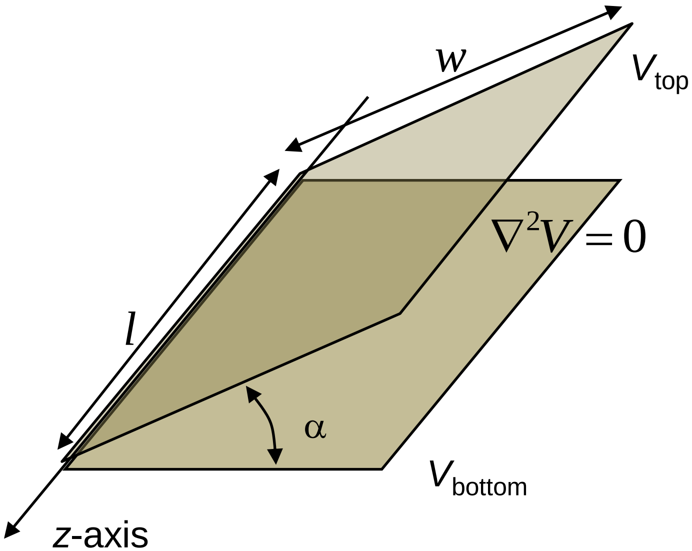
$$\mathbf{E} = -\frac{\left(V_{top} - V_{bottom}\right)}{\alpha}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\phi$$

⇨ đường sức là các vòng tròn

Tiếp tuyến với bề mặt vật dẫn:

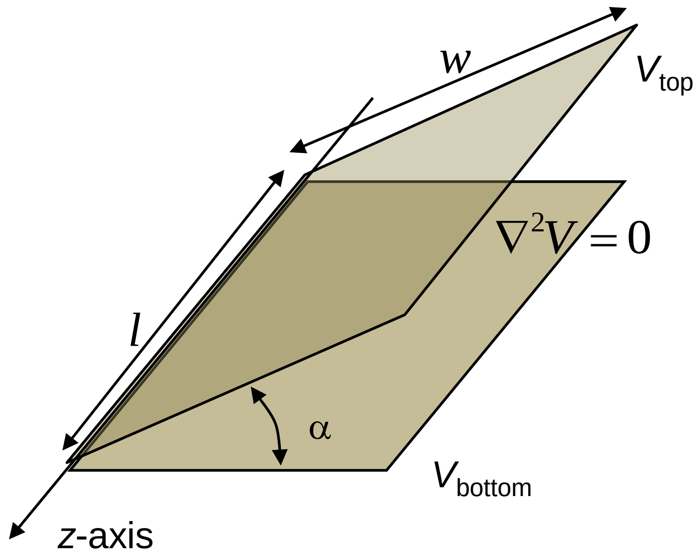
$$E_t = 0 = D_t$$

$$\rho_{surface} = \varepsilon \left|\mathbf{E}\right|_{top\ plate} = \varepsilon \frac{\left|V_{top} - V_{bottom}\right|}{\alpha} \frac{1}{\rho}$$



Trực giao với bề mặt vật dẫn:

$$D_n = \rho_{surface} = \varepsilon E_n$$



$$V = \left(V_{top} - V_{bottom}\right)\frac{\phi}{\alpha} + V_{bottom}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\left(V_{top} - V_{bottom}\right)}{\alpha}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_{\phi}$$

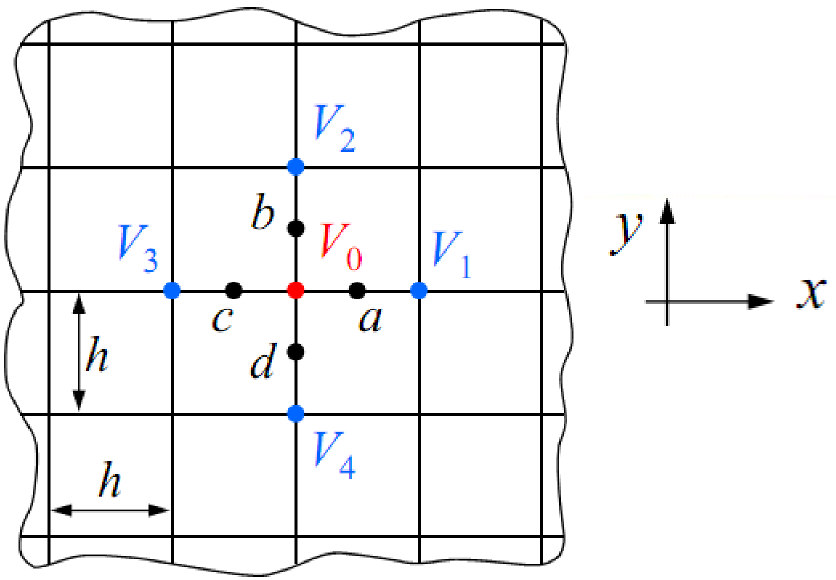
$$\begin{cases} V_{bottom} = 0 \\ V_{top} = V_0 \end{cases} \rightarrow E = -\frac{V_0}{\alpha\rho}$$

Phương pháp lưới

Với điều kiện và hình dáng bờ phức tạp, việc dùng phương trình Laplace-Poisson rất khó.

Phương pháp lưới: Là phương pháp số dùng để giải phương trình Laplace khi *V* = *V*(*x*, *y*)

- Sai phân theo lưới chữ nhật trong hệ Đề-cac
- Thay thế gần đúng các vi phân *dx*, *dy* trong không gian bằng các sai phân
- Lặp lại các bước tính tới một sai số cho phép

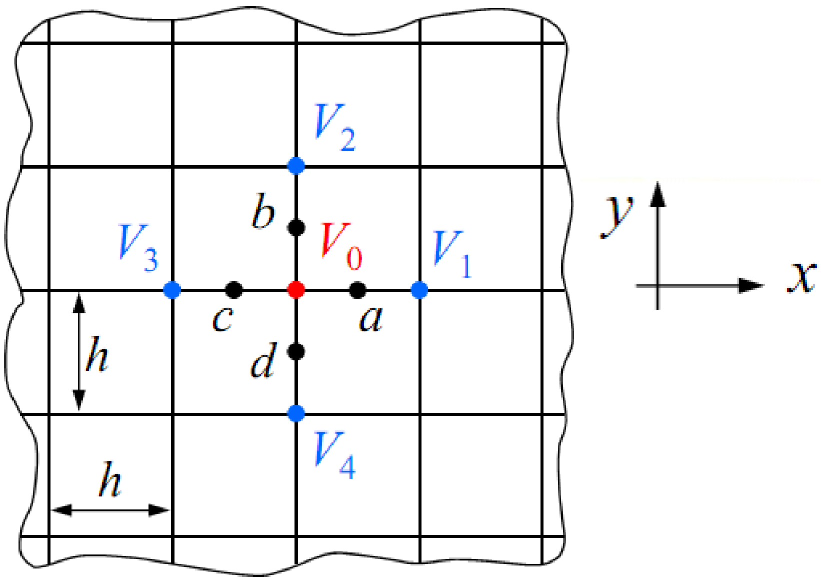


Phương trình Laplace trong hệ Đề-các:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Trong không gian 2D:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



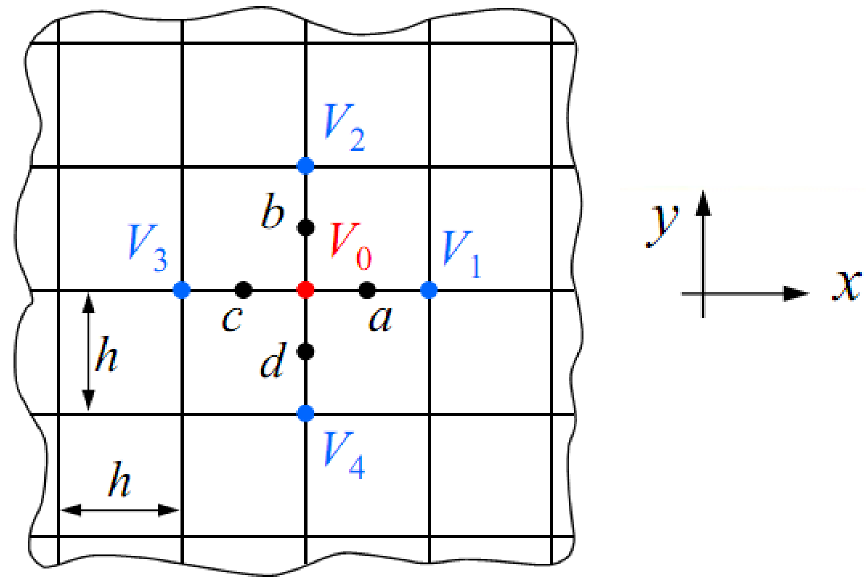
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{h}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \qquad \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

$$\rightarrow V_0 \approx \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

$$V_0 \approx \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

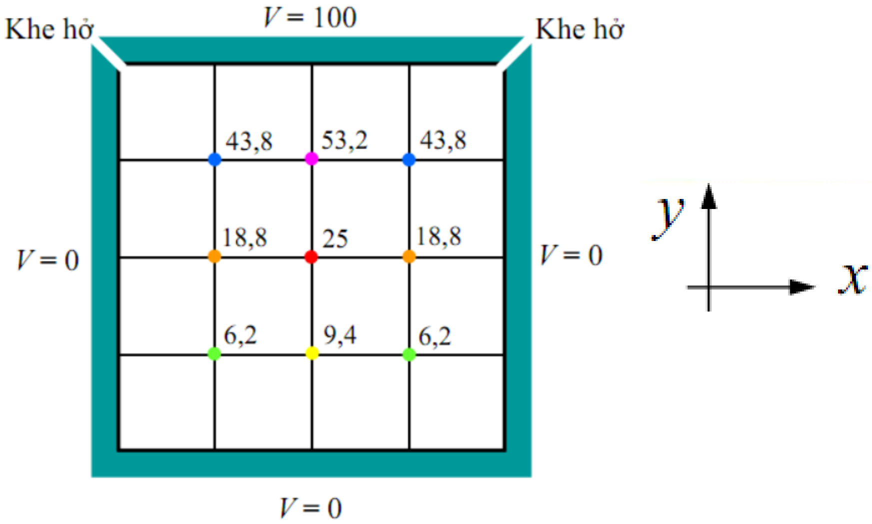
- Ví dụ 5: Tính điện thế tại các điểm

- Bước 1: Ước lượng

$$\frac{1}{4}(100+0+0+0) = 25\,(\text{tâm})$$

$$\frac{1}{4}(50+100+25+0) = 43{,}8\,(\text{duong cheo})$$

$$\frac{1}{4}(0+0+0+25) = 6{,}2\,(\text{duong cheo})$$



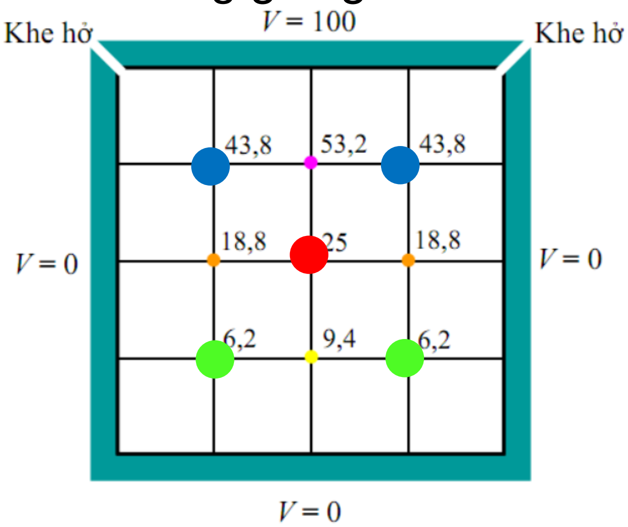
Các ô cột bên phải gần ngoài cùng bằng thế tương ứng với cột đầu do tính đối xứng

Tính thế của cột và hàng giữa, dựa trên thế các ô láng giềng:

$$\frac{1}{4}(43{,}8+43{,}8+25+100) = 53{,}2$$

$$\frac{1}{4}(43{,}8+25+6{,}2+0) = 18{,}8$$

$$\frac{1}{4}(6{,}2+25+6{,}2+0) = 9{,}4$$



- Bước 2:

$$\frac{1}{4}(100+50+0+25)=43,8$$

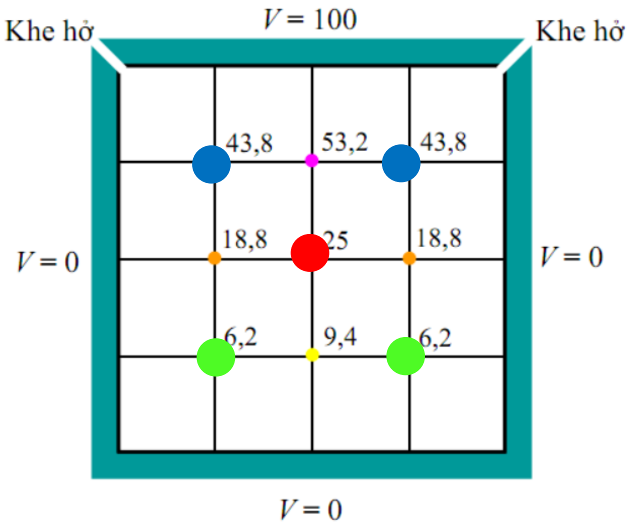
$$\frac{1}{4}(53,2+100+0+18,8)=43$$

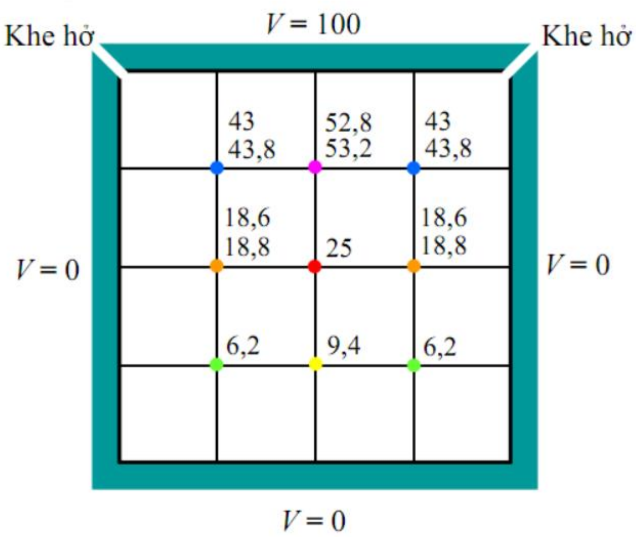
$$\frac{1}{4}(43,8+100+43,8+25)=53,2$$

$$\frac{1}{4}(43+100+43+25)=52,8$$

$$\frac{1}{4}(25+43,8+0+6,2)=18,8$$

$$\frac{1}{4}(25+43+0+6,2)=18,6$$





- Bước 3:

$$\frac{1}{4}\left(52,8+100+0+18,6\right)=42,9$$

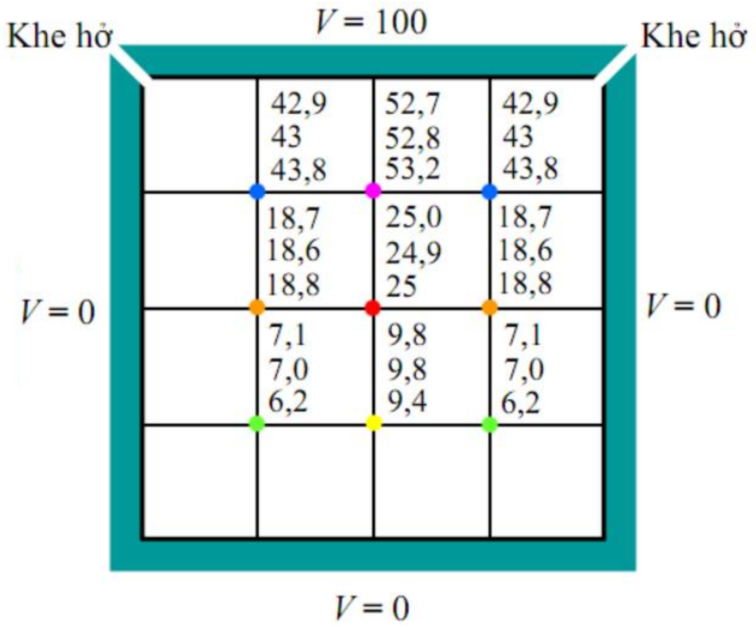
$$\frac{1}{4}\left(42,9+100+42,9+24,9\right)=52,7$$

$$\frac{1}{4}\left(24,9+42,9+0+7,0\right)=18,7$$

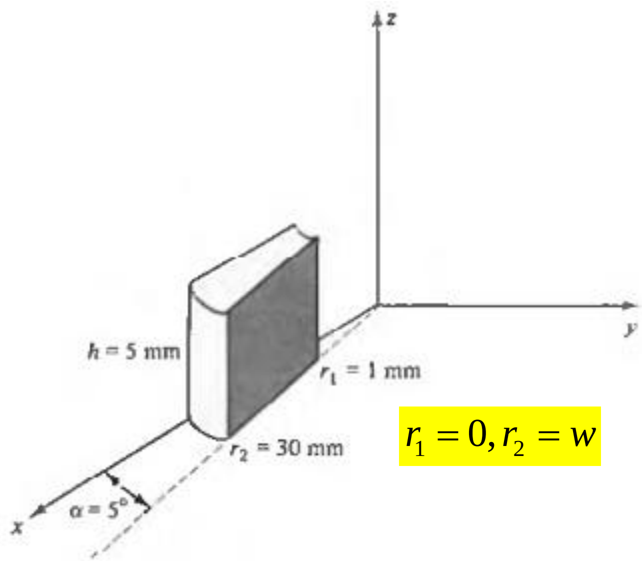
$$\frac{1}{4}\left(18,7+52,7+18,7+9,8\right)=25,0$$

$$\frac{1}{4}\left(9,8+18,7+0+0\right)=7,1$$

$$\frac{1}{4}\left(7,1+25+7,1+0\right)=9,8$$



❖ **<u>BT 1</u>**: Cho tụ điện tạo bởi hai mặt dẫn hình nêm tạo thành góc α, bán kính r_1, r_2 như hình vẽ, giữa là lớp điện môi ε_r. Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là V_0.
Tìm *C?*



$r_1 = 0, r_2 = w$

Vector chuyển dịch điện trong lớp điện môi: $\mathbf{D} = D_\phi \mathbf{a}_\phi$

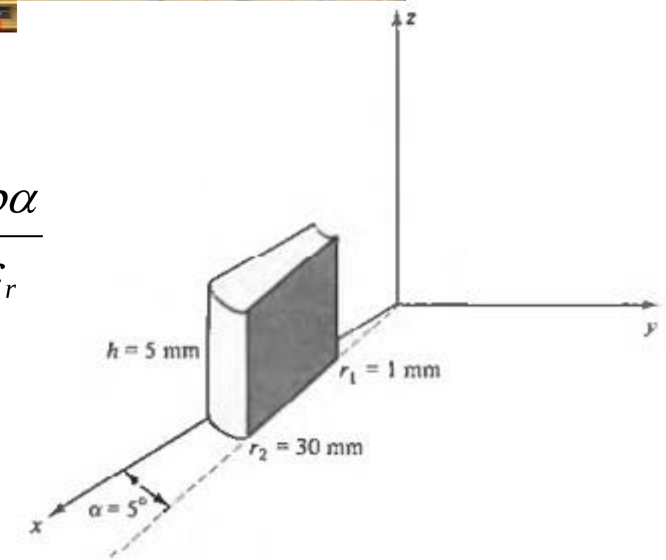
$$V_0 = \int \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\int_0^\alpha \left(\frac{D_\phi}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \mathbf{a}_\phi \right) \left(\rho d\phi \mathbf{a}_\phi \right) = -\frac{D_\phi \rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_0^\alpha d\phi = -\frac{D_\phi \rho \alpha}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$D_\phi = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V_0}{\rho \alpha} \rightarrow E_\phi = -\frac{V_0}{\rho \alpha}$$

Giả sử hiệu điện thế giữa hai bản cực là V_0

$$V_0 = \int \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\int_0^{\alpha}\left(\frac{D_\phi}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\mathbf{a}_\phi\right)\left(\rho d\phi \mathbf{a}_\phi\right) = -\frac{D_\phi \rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_0^{\alpha} d\phi = -\frac{D_\phi \rho\alpha}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\rightarrow D_\phi = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_0}{\rho\alpha}$$



Phân bố điện tích mặt trên bản tụ $\phi=\alpha$:

$$\rho_s = D_n = -D_\phi = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_0}{\rho\alpha}$$

$$V = \left(V_{top} - V_{bottom}\right)\frac{\phi}{\alpha} + V_{bottom}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\left(V_{top} - V_{bottom}\right)}{\alpha}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\phi$$

$$V_{bottom} = 0$$
$$V_{top} = V_0$$

Tổng điện tích trên bản tụ khi đó:

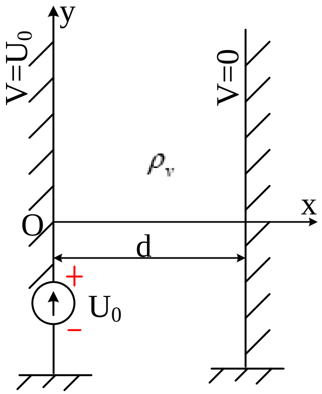
$$Q = \int \rho_s dS = \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_0}{\rho\alpha} d\rho dz = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_0 h}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Điện dung của tụ:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

BT2: Tìm phân bố điện thế của điện trường giữa hai bản cực của tụ điện phẳng cách nhau một khoảng *d*. Biết V=U$_0$ tại x=0, V=0 tại x=d.

Mật độ điện tích khối phân bố trong miền giữa hai điện cực là



$$\rho_v = -a\varepsilon_0 x$$

$$a = 30\,\mathrm{kV/cm^3};\, d = 30\mathrm{cm};\, \mathrm{U}_0 = 200\mathrm{V}$$

Ta có mặt x=0 và x=d là mặt đẳng thế

Phương trình trong hệ toạ độ Đề các: $\nabla^2 V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

với V=V(x) $\Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0;\quad \nabla^2 V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 V}{dx^2}$

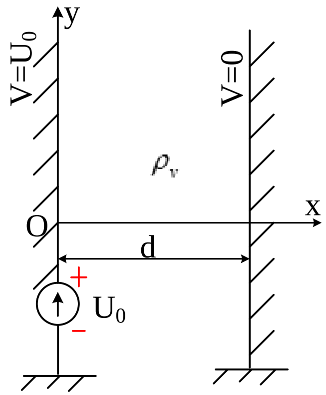
Có phương trình Poisson: $\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = \frac{a\varepsilon_0 x}{\varepsilon_0} = ax;\ \frac{dV}{dx} = \int axdx = a\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\rightarrow V(x) = \int (a\frac{x^2}{2} + C_1)dx = \frac{a}{2}\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = \frac{a\varepsilon_0 x}{\varepsilon_0} = ax; \frac{dV}{dx} = \int axdx = a\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\rightarrow V(x) = \int (a\frac{x^2}{2} + C_1)dx = \frac{a}{2}\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$



Điều kiện bờ: $V(0) = U_0$ → $V(0) = C_2 = U_0$

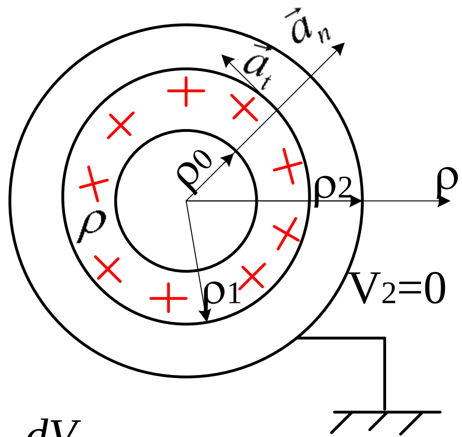
$$V(d) = \frac{a}{2}\frac{d^3}{3} + C_1 d + C_2 = \frac{a}{2}\frac{d^3}{3} + C_1 d + E = 0 \Rightarrow C_1 = -20100 \text{ V/cm}$$

$$V(x) = \frac{30.10^3}{2}\frac{x^3}{3} - 20100x + 200 = 5000x^3 - 20100x + 200$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\mathbf{a}_x = -(15000x^2 - 20100)\mathbf{a}_x \text{V/cm}$$

- BT3: Cho cáp đồng trục, vỏ ngoài nối đất, bán kính trong ρ_0, bán kính ngoài $\rho_{2.}$ Trong vùng bán kính $\rho_0 < \rho < \rho_1$ có phân bố điện tích khối $\rho_v \left[\mathrm{C/cm^3}\right]$

Tìm biểu thức của điện thế *V* bên trong trục?



Cho $V(\rho_0) = V_0; V(\rho_2) = 0; \rho_0 \le \rho \le \rho_1$

miền có phân bố điện tích (do cường độ điện trường trong trụ ρ_0 rất lớn nên nó ion hoá không khí)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\rho\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 V}{\rho^2\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\rho^2\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \nabla^2 V = \frac{d}{\rho d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right)$$

1) Xét trong vùng: $\rho_0 \le \rho \le \rho_1$ $\quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

Do ρ khác không, nhân hai vế với ρ ta được: $\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\rho \Rightarrow \rho\frac{dV}{d\rho} = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\rho^2 + C_1$

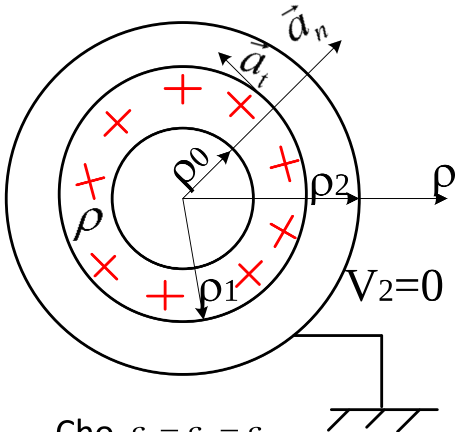
Do ρ khác không, chia hai vế cho ρ ta được :

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{2} + \frac{C_1}{\rho} \Rightarrow V_1(\rho) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\frac{\rho^2}{4} + C_1\ln\rho + C_2$$

2) Xét trong vùng: $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right)=0 \rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right)=0 \Rightarrow \rho\frac{dV}{d\rho}=C_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{d\rho}=\frac{C_3}{\rho} \Rightarrow V(\rho_2)=C_3\ln\rho+C_4$$



Cho $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$

(bằng của không khí)

*Xác định các hằng số tích phân theo các điều kiện bờ

+Với ρ= ρ_0, Vì $V(\rho_0)=V_0$ $\quad \Leftrightarrow -\frac{\rho_v}{4\varepsilon_0}\rho_0^{\,2}+C_1\ln\rho_0+C_2=V_0 \quad (1)$

+Với ρ = ρ_2 $\quad V_2(\rho_2)=C_3\ln\rho_2+C_4=0 \quad (2)$

+Tại ρ = ρ_1

$$V_1(\rho_1)=V_2(\rho_1) \Leftrightarrow -\frac{\rho_v}{4\varepsilon_0}\rho_1^{\,2}+C_1\ln\rho_1+C_4 \quad (3)$$

$$E_{1n}=E_{2n} \qquad \Leftrightarrow \left(-\frac{dV_1}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_1}=\left(-\frac{dV_2}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_1} \Leftrightarrow -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_0}\rho_1+\frac{C_1}{\rho_1}=\frac{C_3}{\rho_1} \quad (4)$$

Giải 4 phương trình trên ta được:

$$C_1=\frac{\frac{\rho_v}{4\varepsilon}(\rho_1^{\,2}-\rho_2^{\,2})+\frac{\rho_v\rho_1^{\,2}}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}-V_0}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_0}} \qquad C_2=V_0+\frac{\rho_v\rho_0^{\,2}}{4\varepsilon_0}-C_1\ln\rho_0$$

$$C_3=C_1-\frac{\rho_v\rho_1^{\,2}}{2\varepsilon_0}$$

$$C_4=-C_3\ln\rho_2$$

BT4: Tìm sự phân bố cường độ trường, điện trở cách điện, dòng điện rò giữa lõi và vỏ một dây cáp trụ tròn đồng trục dài L=1km. Cho bán kính lõi a_1=1cm, bán kính trong của vỏ a_2=3cm, điện dẫn suất của chất cách điện $\sigma=10^{-9}$S/m; điện áp đặt giữa lõi và vỏ là U=6kV (lõi nối đất).

Phương trình Laplace cho miền không gian điện môi (chất cách điện σ)

$$\nabla^2 V \equiv \Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V = A\ln(\rho) + B$$

Giải điều kiện biên: $\begin{cases} A\ln(a_1) + B = 0 \\ A\ln(a_2) + B = U \end{cases} \rightarrow A = \dfrac{U}{\ln(a_2/a_1)} \quad ; B = \dfrac{-U\ln a_1}{\ln(a_2/a_1)}$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{-\partial V}{\partial\rho}\mathbf{a}_\rho = \frac{-U}{\ln(a_2/a_1)}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho = -5,46\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho \ \text{kV/cm}$$

Dòng rò:

$$I_{rò} = J.S = \sigma\frac{U}{\ln(a_2/a_1)}\frac{1}{\rho}\cdot 2\pi\rho L = \frac{2\pi L\sigma U}{\ln 3} = 0,034\ \text{A}$$

Điện trở cách điện $\quad R_{cd} = \dfrac{U}{I_{rò}} = \dfrac{\ln\dfrac{a_2}{a_1}}{2\pi L\sigma} = 175\ \text{k}\Omega$

BT5: Cho hai mặt dẫn hình cầu đồng tâm, bán kính cầu trong r_1, cầu ngoài r_2, điện môi ε. Mặt cầu trong có điện thế U, mặt cầu ngoài nối đất. Tìm điện thế trong vùng điện môi. Tính điện dung của tụ điện?

Theo phương trình Laplace-Poisson, trong không gian điện môi: $\nabla^2 V = 0$

Với tọa độ cầu: $$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

Do tính đối xứng, điện thế chỉ phụ thuộc bán kính: $\frac{\partial}{\partial\phi} = 0; \frac{\partial}{\partial\theta} = 0;$

$$\nabla^2 V = 0 \leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \to r^2\frac{\partial V}{\partial r} = A_1$$

$$\to \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A_1}{r^2} \to V(r) = \frac{A}{r} + B$$

Điều kiện bờ: $$\begin{cases} V(r_1) = \dfrac{A}{r_1} + B = U \\ V(r_2) = \dfrac{A}{r_2} + B = 0 \end{cases}$$

$$\to A = \frac{U}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}; B = \frac{U}{r_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$V(r) = \frac{U}{r\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} + \frac{U}{r_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad = U\frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\mathbf{a}_r = \frac{U}{r^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}\mathbf{a}_r \left[\mathrm{V/m}\right]$$

$$\rightarrow \rho_s = D_n\Big|_{r=r_1} = \frac{\varepsilon U}{r_1^{\,2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}\left[\mathrm{C/m^2}\right]$$

$$Q = \int_S \rho_s dS = \frac{\varepsilon U}{r_1^{\,2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} 4\pi r_1^{\,2} = \frac{4\pi\varepsilon U}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\left[\mathrm{F}\right]$$