

Chương 2: Phương vi phân

Trần Hoàng Anh
Cộng Đồng Sinh Viên 2K1
Handwritten signature

2.1. Phương vi phân cấp 1

Bài 14.

a) $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1), y(0) = 2$

ta có
 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{2dy}{y^2 - 1} = dx \Leftrightarrow \int \frac{2}{y^2 - 1} dy = \int dx$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{y-1}{y+1} = x + C$$

với $x=0 \rightarrow y=2 \Rightarrow C = -\ln 3$

Vậy nghiệm của pt là: $x = \ln \frac{y-1}{y+1} + \ln 3$

b) $y' + y = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - y \Leftrightarrow \frac{dy}{1-y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y} dy = \int dx$$

$$\Leftrightarrow -\ln(1-y) = x + C_1$$

Vậy tập nghiệm của pt là: $\ln(1-y) = -x + C$

c) $x = (y')^2 - y' + 2$

$$\Leftrightarrow (y')^2 - y' + 2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{1 + \sqrt{4x-7}}{2} \\ y' = \frac{1 - \sqrt{4x-7}}{2} \end{cases}$$

ĐK $4x-7 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{4x-7}^3) + C_1 \\ y = \frac{1}{2} \cdot (x - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{4x-7}^3) + C_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của pt là $y = \frac{1}{2} \cdot (x \pm \frac{1}{6} \cdot \sqrt{4x-7}^3) + C$

d) $y^2 + (y')^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -\sqrt{4-y^2} \\ y' = \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = -dx \\ \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin \frac{y}{2} = -x + C_1 \\ \arcsin \frac{y}{2} = x + C_2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm tổng quát của pt là $\arcsin \frac{y}{2} = \pm x + C$

② a) $y' = x^2 y$
 $\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx$

$\Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{3} x^3 + C_1$

Vậy tập tổng quát của pt là: $\ln y = \frac{1}{3} x^3 + C$

b) $2y(x^2+4)dy = (y^2+1)dx$

$\Leftrightarrow \frac{2y}{y^2+1} dy = \frac{1}{x^2+4} dx \Leftrightarrow \int \frac{2y}{y^2+1} dy = \int \frac{1}{x^2+4} dx$

$\Leftrightarrow \ln(y^2+1) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C_1$

Vậy tập tổng quát của pt là: $\ln(y^2+1) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

c) $y' + e^{xy} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -e^x \cdot e^y \Leftrightarrow \frac{1}{e^y} dy = -e^x dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{e^y} dy = -\int e^x dx$

$\Leftrightarrow -e^{-y} = -e^x + C_1$

Vậy tập tổng quát của pt là: $e^{-y} - e^x = C$

d) $1+x+xy'y=0$

* $x=0$ ko phải nghiệm của pt, chia 2 vế pt cho x

$y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow y dy = -(1 + \frac{1}{x}) dx \Leftrightarrow \int y dy = \int -(1 + \frac{1}{x}) dx$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -(x + \ln|x|) + C_1$

Vậy tích phân tổng quát của pt là

$\frac{y^2}{2} + x + \ln|x| = C$

③ a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow y' = u'x + u$, thay vào pt ta được
 $u'x + u = u + \frac{1}{u} + 1$

$$\Leftrightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u} \Leftrightarrow \frac{u}{u+1} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u+1| = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + C_1$$

Vậy t.p.t.q của pt (a) $\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + C$

b) $xy' = x \cdot \sin \frac{y}{x} + y$

ĐK: $x \neq 0$

pt $\Leftrightarrow y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ (1)

Đặt $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y' = u'x + u$, thay vào pt (1)

$$u'x + u = \sin u + u$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin u} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cdot \cos \frac{u}{2}} \right) du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} + \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right) du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow -\ln|\cos \frac{u}{2}| + \ln|\sin \frac{u}{2}| = \ln|x| + C_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|\tan \frac{u}{2}| = \ln|x| + C_2 \Leftrightarrow \ln|\tan \frac{y}{2x}| = \ln|x| + C_1$$

Vậy t.p.t.q của pt (a): $\ln|\tan \frac{y}{2x}| = \ln|x| + C$

c) $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -1$

ĐK: $x \neq 0$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$, thay vào pt

$$2(u'x + u) + u^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2u'x = -(u+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(u+1)^2} = \frac{1}{2x} dx \Rightarrow \frac{1}{u+1} = \frac{1}{2} \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{1}{2} \ln|x| + C_1$$

Vậy t.p.t.q của pt (a) $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{2} \ln|x| + C$

