GIẢI HỆ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS VÀ PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN.

Gv: Ts. Đỗ Đức Tâm.

Phương pháp Gauss

Xét hệ 4 ẩn 4 phương trình (I). Xét trường hợp ma trận hệ số có định thức khác 0. Trong trường hợp định thức này bằng 0 ta có thể đưa hệ trên về hệ 3 ẩn 3 phương trình.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases}$$

Bước thuận: Không giảm tính tổng quát giả sử $a_{11} \neq 0$. Chia hai vế của phương trình thứ 1 của hệ cho a_{11} ta nhận được:

$$x_1 + b^0_{12}x_2 + b^0_{13}x_3 + b^0_{14}x_4 = b^0_{15} \qquad (1)$$

trong đó $b^0_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ với $j > 1$.

Trừ 2 vế của phương trình thứ 2 cho phương trình (1) nhân với a_{21}, nghĩa là:

$$\text{PHƯƠNG TRÌNH THỨ 2} - \text{PHƯƠNG TRÌNH (1)} * a_{21},$$

ta nhận được

$$a^1_{22}x_2 + a^1_{23}x_3 + a^1_{24}x4 = a^1_{25} \tag{2}$$

trong đó với $j > 1$

$$a^1_{2j} = a_{2j} - a_{21} * b^0_{1j}.$$

Phương pháp Gauss

Tương tự như trên ta nhận được:

$$a^1_{32}x_2 + a^1_{33}x_3 + a^1_{34}x4 = a^1_{35} \tag{3}$$

$$a^1_{42}x_2 + a^1_{43}x_3 + a^1_{44}x4 = a^1_{45} \tag{4}$$

trong đó với $j > 1$ và $i = 3, 4$ trong đó với $j > 1$

$$a^1_{ij} = a_{ij} - a_{i1} * b^0_{1j}.$$

Phương pháp Gauss

Kết hợp 4 phương trình (2)-(4) ta nhận được hệ:

$$\begin{aligned}
a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + a_{24}^1 x4 &= a_{25}^1 \\
a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + a_{34}^1 x4 &= a_{35}^1 \\
a_{42}^1 x_2 + a_{43}^1 x_3 + a_{44}^1 x4 &= a_{45}^1
\end{aligned}$$

Không giảm tính tổng quát giả sử $a_{22}^1 \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình thứ 2 của hệ phương trình trên cho a_{22}^1 ta nhận được:

$$x_2 + b_{23}^1 x_3 + b_{24}^1 x4 = b_{25}^1 \tag{5}$$

trong đó với $j > 2$: $b_{2j}^1 = \dfrac{a_{2j}^1}{a_{22}^1}$.

Trừ 2 vế của phương trình thứ 3 cho phương trình (5) nhân với a^1_{32}, nghĩa là:

$$\text{PHƯƠNG TRÌNH THỨ 3} - \text{PHƯƠNG TRÌNH (5)} * a^1_{32},$$

ta nhận được

$$a^2_{33}x_3 + a^2_{34}x4 = a^2_{35} \tag{6}$$

trong đó với $j > 2$

$$a^2_{3j} = a^1_{3j} - a^1_{32} * b^1_{2j}.$$

Tương tự như trên ta nhận được

$$a^2_{43}x_3 + a^2_{44}x4 = a^2_{45} \tag{7}$$

trong đó với $j > 2$

$$a^2_{4j} = a^1_{4j} - a^1_{42} * b^1_{2j}.$$

Không giảm tính tổng quát giả sử $a_{33}^2 \neq 0$. Chia cả 2 vế của phương trình (6) cho a_{33}^2 ta nhận được:

$$x_3 + b_{34}^2 x_4 = b_{35}^2 \tag{8}$$

trong đó với $j > 3$ thì $b_{3j}^2 = a_{3j}^2 / a_{33}^2$.
Trừ 2 vế của phương trình (7) cho phương trình (8) nhân với a_{43}^2 ta nhận được

$$a_{44}^3 x_4 = a_{45}^3 \tag{9}$$

trong đó $a_{4j}^3 = a_{4j}^2 - a_{43}^2 * b_{3j}^2$. Chia hai vế của (9) cho a_{44}^3 ta nhận được:

$$x_4 = b_{45}^3 \tag{10}$$

trong đó $b_{45}^3 = a_{45}^3 / a_{44}^3$.

Tổng hợp các phương trình (1), (5), (8) và (10) ta nhận được hệ (III):

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}^0 x_2 + b_{13}^0 x_3 + b_{14}^0 x_4 &= b_{15}^0 \\ x_2 + b_{23}^1 x_3 + b_{24}^1 x4 &= b_{25}^1 \\ x_3 + b_{34}^2 x_4 &= b_{35}^2 \\ x_4 &= b_{45}^3 \end{aligned}$$

Bước ngược: Từ hệ tam giác (III) ta tìm các nghiệm theo thứ tự x_4, x_3, x_2 và x_1.

Phương pháp Gauss

Tổng quát cho hệ n ẩn n phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i,n+1} \text{ với } i = 1, 2, \cdots, n$$

ta đưa về hệ tam giác dạng

$$\begin{array}{rcl} x_1 + b_{12}^0 x_2 + b_{13}^0 x_3 + \cdots + b_{1n}^0 x_n & = & b_{1,n+1}^0 \\ x_2 + b_{23}^1 x_3 + \cdots + b_{2n}^1 x_n & = & b_{2,n+1}^1 \\ \cdots & & \\ x_n & = & b_{n,n+1}^{n-1} \end{array}$$

trong đó

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} b_{kj}^{k-1} \text{ với } i, j \geq k$$

và

$$b_{kj}^{k-1} = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} \text{ với } j > k.$$

Phương pháp Gauss-Jordan

Xét hệ 3 ẩn 3 phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 = a_{14}^0 \\ a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 = a_{24}^0 \\ a_{31}^0 x_1 + a_{32}^0 x_2 + a_{33}^0 x_3 = a_{34}^0 \end{cases}$$

Bước 1: Không giảm tính tổng quát giả sử $a_{11}^0 \neq 0$. Chia cả 2 vế của phương trình thứ 1 cho a_{11}^0 và khử x_1 từ các phương trình thứ 2 và 3 ta nhận được hệ:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 & = & a_{14}^1 \\ a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 & = & a_{24}^1 \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 & = & a_{34}^1 \end{array}$$

trong đó $a_{1,j}^1 = a_{1j}^0 / a_{11}^0$ và với $i \neq 1$ $a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - a_{i1}^0 * a_{1j}^0 / a_{11}^0$.

Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 2: Chia 2 vế của phương trình thứ 2 cho a_{22}^1 và khử x_2 từ phương trình thứ 1 và thứ 3 ta nhận được

$$\begin{aligned} x_1 + 0.x_2 + a_{13}^2 x_3 &= a_{14}^2 \\ x_2 + a_{23}^2 x_3 &= a_{24}^2 \\ a_{33}^2 x_3 &= a_{34}^2 \end{aligned}$$

trong đó $a_{2j}^2 = a_{2j}^1 / a_{22}^1$ và với $i \neq 2$ $a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - a_{i2}^1 * a_{2j}^2$.

Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 3: Chia 2 vế của phương trình thứ 3 cho a_{33}^2 và khử x_3 từ phương trình thứ 1 và thứ 2 ta nhận được

$$\begin{aligned} x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 &= a_{14}^3 \\ x_2 + 0.x_3 &= a_{24}^3 \\ x_3 &= a_{34}^3 \end{aligned}$$

trong đó $a_{34}^3 = a_{34}^2 / a_{33}^2$ và với $i \neq 3$ $a_{ij}^3 = a_{ij}^2 - a_{i3}^2 * a_{3j}^3$.

Phương pháp Gauss-Jordan

Tổng quát cho hệ n ẩn n phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i,n+1} \text{ với } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Với $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ ta có:

$$a_{kj}^{k+1} = a_{kj}^{k}/a_{kk}^{k} \qquad \forall j > k;$$

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} * a_{kj}^{k+1} \qquad \forall i \neq k; \quad j > i.$$