$3. PTVP cấp 2

1. Đại cương về PTVP cấp 2.

1.1 ĐN $F(x, y, y', y") = 0$ (1); $y" = f(x, y, y')$ (2).

1.2 Sơ kiện ban đầu: $y\Big|_{x = x_0} = y_0$ và $y'\Big|_{x = x_0} = y'_0$

hay $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$ (3) với x_0, y_0, y'_0 cho trước

Bài toán Cauchy (bài toán giá trị ban đầu): Tìm nghiệm của PTVP (1) hoặc (2) thỏa mãn sơ kiện ban đầu (3).

1.3 Định lý (sự tồn tại và duy nhất nghiệm). Nếu $f(x, y, y'); \frac{\partial f}{\partial y}$ và $\frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong miền Ω chứa điểm (x_0, y_0, y'_0) thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất thỏa mãn sơ kiện (3).

1.4 Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng

Nghiệm TQ của PTVP (2) là hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý sao cho:

1) Nó thỏa mãn PTVP (2) với mọi C_1, C_2
2) Với bộ 3 số (x_0, y_0, y'_0) cho trước sao cho điều kiện

Định lý trên thỏa mãn thì tồn tại $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}$ để hàm số $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02})$ thỏa mãn sơ kiện ban đầu (3).

Hệ thức $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm TQ của (2) gọi là TP TQ của nó.

Hệ thức $\phi(x, y, C_{01}, C_{02}) = 0$ gọi là TP riêng

2. Một số PT khuyết.

2.1 PT khuyết y, y': $F(x, y") = 0$.

Cách giải: Đặt $p = y' \to p' = y'' \to F(x, p') = 0$ đây là PTVP cấp 1.

VD. Giải PTVP $y" = sin^2x$ thỏa mãn $y(0) = 0; y'(0) = 0$

Giải: Đặt $p = y' \to p' = y'' = sin^2x$

$$\to p = \int sin^2x dx = \int \frac{1 - cos2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4} + C_1$$

$$y'(0) = p(0) = C_1 = 0 \to p = \frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4} \to y = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4}\right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{cos2x}{8} + C_2$$

$$y(0) = \frac{1}{8} + C_2 = 0 \to C_2 = -\frac{1}{8} \to y = \frac{x^2}{4} + \frac{cos2x}{8} - \frac{1}{8}$$

2.2 PT khuyết y: $F(x, y'. y'') = 0.$

Cách giải: Đặt $y' = p(x) \rightarrow y'' = p' \rightarrow F(x, p, p') = 0$ PTVP cấp1

VD. $(x^2 + 1)y'' + xy' = 0$

Giải. Đặt $y' = p(x) \rightarrow y'' = p' \rightarrow (x^2 + 1)p' + xp = 0$

$$(x^2 + 1)p' = -xp$$

$*p = 0$ là nghiệm $\rightarrow y = C.$

* $p \neq 0 \rightarrow (x^2 + 1)\frac{dp}{dx} = -xp \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{x}{x^2+1}dx$

$$\rightarrow ln|p(x)| = -\frac{1}{2}ln(x^2 + 1) + ln|C_1| = ln\left|\frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right|$$

$$\rightarrow y' = p = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\rightarrow y = \int \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = C_1 ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right| + C_2$$

2.3 PT khuyết x: $F(y, y', y") = 0$.

Cách giải: Đặt $y' = p(y) \to y" = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p.\frac{dp}{dy} \to$
$F(y, p, \frac{dp}{dy}) = 0$. PTVP cấp 1 ẩn là p, biến là y.

<u>VD.</u> Giải phương trình $2yy" - 1 = y'^2$.

<u>Giải:</u> Đặt $y' = p(y) \to y" = p\frac{dp}{dy} \to 2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$

$\frac{2p}{p^2+1}dp = \frac{dy}{y} \to \int \frac{2\text{p}}{\text{p}^2+1}\text{dp} = \int \frac{1}{y}dy \to ln(p^2 + 1) + ln|C_1| = ln|y|$

$\to ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = ln(p^2 + 1) \to y = C_1(p^2 + 1)$ với C_1 là hằng số

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \to dx = \frac{dy}{p} = \frac{2C_1pdp}{p} = 2C_1dp \to \frac{dx}{2C_1} = dp$$

$$p = \frac{x}{2C_1} + C_2 \to y = C_1(p^2 + 1) = C_1\left[\left(\frac{x}{2C_1} + C_2\right)^2 + 1\right]$$

4. PTVT tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1) \text{ với } p, q \text{ là hằng số}$$

4.1 Công thức Euler:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{i\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots.\right)$$

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

4.2 PT thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0$ (2)

Nghiệm $y = e^{kx} \rightarrow y' = ke^{kx} \rightarrow y'' = k^2 e^{kx}$ thay vào (2)

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$\rightarrow k^2 + pk + q = 0 \quad \text{Phương trình đặc trưng}$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

Nghiệm của PT thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0$

<u>TH1</u>. $\Delta > 0 \to k_1 \neq k_2 \to y_1 = e^{k_1 x}; y_2 = e^{k_2 x}$ đltt $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

<u>TH2</u>. $\Delta = 0 \to k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \to y_1 = e^{k_1 x};$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{(y_1)^2} dx = e^{k_1 x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{(e^{k_1 x})^2} dx = e^{k_1 x} \int \frac{e^{2k_1 x}}{(e^{k_1 x})^2} dx$$

$$y_2 = e^{k_1 x} \int dx = x e^{k_1 x}$$

$$\to \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

<u>TH3</u>: $\Delta < 0 \to k_1 = \alpha + i\beta;\ k_2 = \alpha - i\beta$

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x)$$
$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)$$

$$\xrightarrow{\text{Định lý } 1} Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} cos\beta x; Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} sin\beta x$$

là 2 nghiệm đltt của (2)

$$\to \bar{y} = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$$

Là nghiệm TQ của (2)

VD. Tìm nghiệm tổng quát:

1) $y" - 2y' + 5y = 0$.

Giải: $k^2 - 2k + 5 = 0 \rightarrow k_1 = 1 + 2i$; $k_2 = 1 - 2i$

$\bar{y} = e^x(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$

2)$y" - 5y' + 6y = 0$

Giải: $k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow k_1 = 2; k_2 = 3$

$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

3) $y" + 6y' + 9y = 0$

Giải: $k^2 + 6k + 9 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = -3$

$$\bar{y} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$$

4.3 PT tuyến tính không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$

Nguyên tắc chung: Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.
Khi $f(x)$ có dang đặc biệt

Dạng 1. $f(x) = e^{kx}P_n(x)$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

TH1: $k \neq k_1; k \neq k_2 \to y^* = e^{kx}Q_n(x)$; $Q_n(x)$ đa thức cùng bậc với $P_n(x)$

TH2: $k = k_1 \neq k_2 \to y^* = xe^{kx}Q_n(x)$

TH3: $k = k_1 = k_2 \to y^* = x^2e^{kx}Q_n(x)$

VD. 1) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ (1)

Giải: $k^2 - 3k + 2 = 0 \to k_1 = 1; k_2 = 2 \to \bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$

$$f(x) = x^2 = e^{0x}x^2 \to k = 0 \to y^* = e^{0x}(Ax^2 + Bx + C)$$

$(y^*)' = 2Ax + B$; $(y^*)'' = 2A$ thay vào (1):

$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$

$$\to \begin{cases} 2A = 2 \\ -6A + 2B = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = \dfrac{7}{2} \end{cases} \to y^* = x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

Nghiệm $y = \bar{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$

VD2: $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 6x - 5$ (1)

Giải: $k^2 - 5k + 6 = 0 \to k_1 = 2; k_2 = 3 \to \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

- $f_1(x) = 1.e^{2x} \to k = 2 = k_1 \neq k_2 \to y1^* = xAe^{2x} = Axe^{2x}$

$$(y1^*)' = A(e^{2x} + 2xe^{2x}) = A(1 + 2x)e^{2x}$$

$$(y1^*)'' = A[2e^{2x} + (2 + 4x)e^{2x}] = A(4 + 4x)e^{2x}$$

$$(y1^*)'' - 5(y1^*)' + 6(y1^*) = e^{2x}$$

$$A(4 + 4x)e^{2x} - 5A(1 + 2x)e^{2x} + 6xAe^{2x} = e^{2x}$$

$$-Ae^{2x} = e^{2x} \to A = -1 \to y1^* = -xe^{2x}$$

$$* \; f_2(x) = 6x - 5 = e^{0x}(6x-5)$$

$$\rightarrow k = 0 \rightarrow y2^* = Ax + B \rightarrow (y2^*)' = A \rightarrow (y2^*)'' = 0$$

$$(y2^*)'' - 5(y2^*)' + 6(y2^*) = -5A + 6(Ax + B) = 6x - 5$$

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ -5A + 6B = -5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow y2^* = x$$

$$y^* = y1^* + y2^* = -xe^{2x} + x$$

Nghiệm TQ:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + -xe^{2x} + x.$$

VD :$y'' - 2y' + y = e^x$

Giải: $k^2 - 2k + 1 = 0 \to k_1 = k_2 = 1 \to \bar{y} = e^x(C_1 + C_2x)$

$$f(x) = 1.e^x \to k = 1 = k_1 = k_2 \to y^* = x^2e^xA.$$

$$(y^*)' = A(2xe^x + x^2e^x) = A(x^2 + 2x)e^x$$

$$(y^*)'' = A\left((2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x\right) = A(x^2 + 4x + 2)e^x$$

$$A(x^2 + 4x + 2)e^x - 2A(x^2 + 2x)e^x + x^2e^xA = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \to A = \frac{1}{2} \to y^* = \frac{1}{2}x^2e^x$$

$$y = \bar{y} + y^* = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}x^2e^x$$

Dạng 2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x]$

$$k = \alpha + i\beta$$

TH1: $k \neq k_1; k \neq k_2: y^* = e^{\alpha x}[R_l(x)cos\beta x + S_l(x)sin\beta x]; l = max\{m, n\}$

TH2: $k = k_1 \neq k_2: y^* = xe^{\alpha x}[R_l(x)cos\beta x + S_l(x)sin\beta x]; l = max\{m, n\}$

VD: $y'' + y = 2sinx$ (1)

Giải: $k^2 + 1 = 0 \to k_{1,2} = \pm i = 0 \pm i \to \bar{y} = C_1cosx + C_2sinx$

$$f(x) = e^{0x}(0.cosx + 2.sinx) \to k = 0 + i = k_1$$

$$y^* = xe^{0x}(Acosx + Bsinx) = x(Acosx + Bsinx)$$

$$(y^*)' = Acosx + Bsinx + x(-Asinx + Bcosx)$$

$$(y^*)' = (Bx + A)cosx - (Ax - B)sinx$$

$$(y^*)'' = Bcosx - (Bx + A)sinx - Asinx - (Ax - B)cosx$$

$$(y^*)'' = (2B - Ax)cosx - (Bx + 2A)sinx$$

$$(y^*)'' + y^* = (2B - Ax)cosx - (Bx + 2A)sinx + x(Acosx + Bsinx) = 2sinx$$

$$2Bcosx - 2Asinx = 2sinx \to \begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 2 \end{cases} \to \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases} \to y^* = -xcosx$$

Nghiệm $y = \bar{y} + y^* = C_1cosx + C_2sinx - xcosx$.

Ghi chú: $f(x)$ không có dạng đặc biệt: sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

VD: $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1}$. Giải: PT đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \to k_1 = 1; k_2 = -1$

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{-x} \to \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{-x} = 0 \\ C'_1 e^x - C'_2 e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2;\ D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{e^x}{e^x+1} & e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^x+1}; D_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$

$$C_1(x) = \int C'_1(x)dx = \int \frac{D_1}{D}dx = \int \frac{1}{2(e^x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right)dx = \frac{1}{2}[x - \ln(e^x + 1)]$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)dx = \int \frac{D_2}{D}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

$$y^* = \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

Nghiệm TQ:

$$y = \bar{y} + y^*$$

$$= C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

5. PTVP Euler: $x^2y'' + axy' + by = 0$ (1); a, b là hằng số

Cách giải: Đặt $|x| = e^t \to t = ln|x|$

$$\to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$ thay vào (1):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$$

VD: $x^2y'' - xy' + y = cos(lnx)$ (1).

Giải: $x = e^t \to \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = cost$ (2). Đây là ptvp tt cấp 2 hệ số hằng

Nghiệm của (2): $y = e^t(C_1t + C_2) - \frac{1}{2}sint$

Nghiệm của (1): $y = x(C_1lnx + C_2) - \frac{1}{2}sinlnx$

Các VD

Giải các PTVP sau:

1) y''−4y'+4y=$e^{2x}cos^2x$

2) $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1}$

3) y''−2y'+y=3$e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $x^2y'' + xy' - 4y = x^2lnx$

5) $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y$=0 bằng cách đổi hàm phải tìm z= $\frac{y}{x}$

LỜI GIẢI

Bài 1. y”−4y’+4y=$e^{2x}cos^2x$

PT đặc trưng:$k^2 - 4k + 4 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 2$

$$\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

$f(x) = e^{2x}cos^2x$=$\frac{1}{2}e^{2x}(1 + cos2x) = \frac{1}{2}e^{2x}$+$\frac{1}{2}e^{2x}cos2x$

TH1: y”−4y’+4y= $\frac{1}{2}e^{2x}(1) \rightarrow k = k_1 = k_2 = 2 \rightarrow y_1^* = Ax^2e^{2x}$

$$(y_1^*)' = A(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}) = 2A(x + x^2)e^{2x}$$

$$(y_1^*)'' = 2A[(1 + 2x)e^{2x} + 2(x + x^2)e^{2x}] = 2A(1 + 4x + 2x^2)e^{2x}$$

Thay vào (1):$[2A(1 + 4x + 2x^2) - 8A(x + x^2) + 4Ax^2]e^{2x}$=$\frac{1}{2}e^{2x}$

Ta được $A = \frac{1}{4} \rightarrow y_1^* = \frac{1}{4}x^2e^{2x}$

Bài 1

TH2: $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}e^{2x}cos2x$ $(2) \to k = 2 + 2i \to y_2^* = (Acos2x + Bsin2x)e^{2x}$

$$(y_2^*)' = [(-2Asin2x + 2Bcos2x) + 2(Acos2x + Bsin2x)]e^{2x}$$

$$= 2[(A + B)cos2x + (B - A)sin2x]e^{2x}$$

$(y_2^*)'' = 2[-2(A + B)sin2x + 2(B - A)cos2x]e^{2x}$
$+4[(A + B)cos2x + (B - A)sin2x]e^{2x} = [-8Asin2x + 8Bcos2x]e^{2x}$

Thay vào (2):

$[-8Asin2x + 8Bcos2x]e^{2x} - 8[(A + B)cos2x + (B - A)sin2x]e^{2x} +$
$4(Acos2x + Bsin2x)e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}cos2x$

$[-4Acos2x - 4Bsin2x]e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}cos2x \to A = -\frac{1}{8}; B = 0 \to y_2^* =$
$-\frac{1}{8}cos2xe^{2x}$

$y^* = y_1^* + y_2^* = \dfrac{1}{4}x^2e^{2x} - \dfrac{1}{8}cos2xe^{2x}$

Nghiệm $y = \overline{y} + y^* = \left(C_1 + C_2x + \frac{x^2}{4} - \frac{cos2x}{8}\right)e^{2x}$

Bài 2

$$y" - y = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

Giải: PT đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \to k_1 = 1; k_2 = -1$

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{-x} \to \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{-x} = 0 \\ C'_1 e^x - C'_2 e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2;\ D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{e^x}{e^x+1} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^x+1}; D_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

$$C_1(x) = \int C'_1(x)dx = \int \frac{D_1}{D} dx = \int \frac{1}{2(e^x+1)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x+1} dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = \frac{1}{2}[x - \ln(e^x+1)]$$

Bài 2 (tiếp)

$$C_2(x) = \int C'_2(x)dx = \int \frac{D_2}{D}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

$$y^* = \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

Nghiệm TQ:

$$y = \bar{y} + y^*$$

$$= C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

Bài 3

y”+2y’+y=3$e^{-x}\sqrt{x+1}$

Giải: PT đặc trưng $k^2+2k+1=0 \rightarrow k_1=k_2=-1$

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

$y^*=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)xe^{-x}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} C_1'e^{-x}+C_2'xe^{-x}=0 \\ -C_1'e^{-x}-C_2'(1-x)e^{-x}=3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Ta có $D=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}=e^{-2x}$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ 3e^{-x}\sqrt{x+1} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}=-3xe^{-2x}\sqrt{x+1}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{x} & 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{vmatrix}=3e^{-2x}\sqrt{x+1}$$

Bài 3 (tiếp)

$$C_1' = \frac{D_1}{D} = -3x\sqrt{x+1} \to C_1 = -3\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{-6}{5}\sqrt{(x+1)^5} + 2\sqrt{(x+1)^3}$$

$$C_2' = \frac{D_2}{D} = 3\sqrt{x+1} \to C_2 = 3\int \sqrt{x+1}dx = 2\sqrt{(x+1)^3}$$

$$y^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$$

Bài 4

$x^2y" + xy' - 4y = x^2lnx$

Giải: Đặt $t = lnx \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 4y$=t$e^{2t}$ (1)

PT đặc trưng $k^2 - 4 = 0 \rightarrow k_1 = 2; k_2 = -2$

$\overline{y} = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2}$

$f(t) =$ t$e^{2t} \rightarrow k = 2 = k_1 \rightarrow y^* = te^{2t}(At + B) = (At^2 + Bt)e^{2t}$

$(y^*)' = (2At + B)e^{2t} + 2(At^2 + Bt)e^{2t} = [2At^2 + 2(A + B)t + B]e^{2t}$

(y^*)”=$(4At + 2A + 2B)e^{2t} + 2[2At^2 + 2(A + B)t + B]e^{2t}$

=$[4At^2 + ((8A + 4B)t + 2A + 4B]e^{2t}$

Thay vào (1) ta được

$[4At^2 + (8A + 4B)t + 2A + 4B]e^{2t} - 4(At^2 + Bt)e^{2t}$= t$e^{2t}$

$\rightarrow A = \frac{1}{8}; B = -\frac{1}{16} \rightarrow y^* = \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t\right)e^{2t} = \left(\frac{1}{8}ln^2x - \frac{1}{16}lnx\right)x^2$

$y = \overline{y} + y^* = \left(C_1 + \frac{1}{8}ln^2x - \frac{1}{16}lnx\right)x^2 + \frac{C_2}{x^2}$

Bài 5

$x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ bằng cách đổi hàm phải tìm z= $\frac{y}{x}$

Giải. $y = x.z \rightarrow y' = z + xz' \rightarrow y'' = 2z' + xz''$ thay vào pt đã cho ta được:

$x^2(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + x(2 - x^2)z=0$

$\rightarrow x^3z'' - x^3 z=0 \rightarrow z'' - z = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \rightarrow k = \pm 1$

$$\rightarrow z = \overline{z} = C_1e^x + C_2e^{-x} \rightarrow y = x.z = x(C_1e^x + C_2e^{-x})$$