# Chương 3. Phương pháp toán tử Laplace

Mục đích: PTVT (Hệ PTVT)$\overset{L}{\Rightarrow}$PTĐS (Hệ PTĐS)

$\xrightarrow{\text{giải}}$ nghiệm PTĐS (Hệ PTĐS) $\xrightarrow{L^{-1}}$ Nghiệm PTVP (Hệ PTVP)

## $1. Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi Laplace ngược

### 1. Phép biến đổi Laplace.

1.1 Định nghĩa:Giả sử $f(t)$xác định với $t \geq 0$. Phép bđ Laplace của $f(t)$ là:

$$F(s) \coloneqq \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

nếu giới hạn trên tôn tại với mọi $s$ đủ lớn (tp hội tụ với $\forall s > s_0$ với $s_0 > 0$ nào đó).

Ký hiệu $L\{f(t)\}(s) = F(s)$

$e^{-st}$ gọi là hạt nhân của phép bđ Laplace

Các VD

VD 1. $f(t) = 1 \to F(s) = L\{f(t)\}(s) = \lim\limits_{T \to +\infty} \int_0^T 1.e^{-st}dt$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^T = \lim_{T \to +\infty} \frac{1-e^{-sT}}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{nếu } s > 0 \\ +\infty & \text{nếu } s \leq 0 \end{cases}$$

Vậy $L\{1\}(s) = \frac{1}{s}$ nếu $s > 0$.

VD 2. $f(t) = e^{at}$ $(a \in R)$.

$$L\{e^{at}\}(s) = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-st}e^{at}dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-(s-a)t}dt = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & khi\ s > a \\ +\infty & khi\ s \leq a \end{cases}$$

$L\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$ nếu $s > a$ (nếu $a \in C$ thì $s > Rea$).

VD3: $f(t) = t^a; \quad a > -1.$

$L\{t^a\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^a dt;$

Đặt $ts = u \to t = \frac{u}{s} \to dt = \frac{du}{s}$

$$L\{t^a\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^a \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^a du$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} & nếu \quad s > 0 \\ +\infty & nếu \quad s \leq 0 \end{cases}$$

Ghi chú:Hàm Gamma: $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$
- $L\{t^n\}(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ nếu $s > 0$

# 1.2 Tính chất

**Định lý:** Nếu $f_1(t)$ và $f_2(t)$ là 2 hàm có bđ Laplace và $C_1; C_2$ là 2 hằng số thì:

$$L\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\}(s) = C_1L\{f_1(t)\}(s) + C_2\, L\{f_2(t)\}(s).$$

Chứng minh: $L\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}[C_1f_1(t) + C_2f_2(t)]dt$

$$= C_1\int_0^{+\infty} e^{-st}f_1(t)dt + C_2\int_0^{+\infty} e^{-st}f_2(t)dt = C_1L\{f_1(t)\}(s) + C_2L\{f_2(t)\}(s)$$

VD1: $$L\{coshbt\}(s) = L\left\{\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}L\{e^{bt} + e^{-bt}\}(s)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b}\right) = \frac{s}{s^2-b^2} \text{ với } s > |b|.$$

$$L\{coshbt\}(s) = \frac{s}{s^2-b^2} \text{ với } s > |b|$$

Tương tự $L\{sinhbt\}(s) = \dfrac{b}{s^2-b^2}$ với $s > |b|$

VD 2: $L\{cosbt\}(s) = L\left\{\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}L\{e^{ibt} + e^{-ibt}\}(s)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ib} + \frac{1}{s+ib}\right) = \frac{s}{s^2+b^2} \; nếu \quad s > 0$$

Vậy $L\{cosbt\}(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$ với $s > 0.$

Tương tự $L\{sinbt\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$ với $s > 0$

VD3 .

$L\{2t^3 - 5e^{-4t} - 4sin^2 3t\} = 2L\{t^3\} - 5L\{e^{-4t}\} - 2L\{1 - cos6t\}$

$= \frac{12}{s^4} - \frac{5}{s+4} - \frac{2}{s} + 2\frac{s}{s^2+36}$ (s>0)

Công thức Euler

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

# 1.3 Điều kiện để hàm số có bđ Laplace

ĐN 1. $f(t)$ xđ trên $[a;b]$ gọi là lt từng khúc nếu nó lt trên $[a;b]$ trừ một sô điểm gián đoạn loại I.

ĐN2. Hàm $f(t)$ xác định trên khoảng $[0,+\infty)$ được gọi là liên tục từng khúc trên khoảng đó nếu nó liên tục từng khúc trên mọi khoảng hữu hạn$[0,T]$.

ĐN 3. Hàm $f(t)$ xác định trên $[0,+\infty)$ gọi là có cấp mũ c $\geq$ 0 nếu tồn tại các số $M > 0$ và $t_0 \geq 0$ sao cho $|f(t)| \leq Me^{ct},\ \forall t \geq t_0$

# MỘT SỐ VD:

- Hàm $f(t) = e^{at}$. Ta có $|f(t)| \leq 1. e^{at}$ nên có cấp mũ c $= a$
- Hàm $f(t) = t^n$ có cấp mũ c $> 0$tùy ý vì khi $t$ đủ lớn thì
$$|f(t)| = t^n < 1. e^{ct}$$
- Hàm $f(t) = cost$ hay $f(t) = sint$ là hàm có cấp mũ 0 vì $|f(t)| \leq 1. e^{0.t},\ \forall t \geq 0.$
- Hàm $f(t) = e^{t^2}$ không có cấp mũ

**Định lý** (*về sự tồn tại của biến đổi Laplace*): Nếu $f(t)$ liên tục từng khúc trên $[0,+\infty)$ và có bậc mũ $c>0$ thi tồn tại phép biến đổi Laplace của $f(t)$ với $s>c$

***Chứng minh:*** $f(t)$ có bậc mũ $c$ nên $\exists M_1>0$ sao cho $|f(t)|\le M_1e^{ct}, \forall t\ge t_0$. Hơn nữa $f(t)$ liên tục từng khúc trên $[0,t_0]$ nên $\exists M_2>0\colon |f(t)|\le M_2\le M_2e^{ct}, \forall t\in[0,t_0]$. Đặt $M=Max\{M_1,M_2\}\to |f(t)|\le Me^{ct}, \forall t>0$. Do đó $\forall T>0$ ta có

$$\left|\int_0^T e^{-st}f(t)dt\right|\le\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt\le\int_0^T e^{-st}Me^{ct}dt$$

$$=M\int_0^T e^{-(s-c)t}dt=M\left.\frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)}\right|_0^T=\frac{M}{s-c}-\frac{Me^{-(s-c)T}}{s-c}<\frac{M}{s-c}$$

Với $s>c$. Cho $T\to+\infty$ ta được $\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt\le\frac{M}{s-c}$ với $s>c$

Do đó $\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=F(s)$ tồn tại va $|F(s)|\le\frac{M}{s-c}$ với $s>c$

Hệ qủa: Nếu $f(t)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý trên và $F(s) = L\{f(t)\}$ thì $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

Ghi chú: Định lý trên chỉ cho điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần của sự tồn tại phép biến đổi Laplace.

VD hàm $f(t) = t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ có gián đoạn vô hạn tại $t = 0$ nhưng phép biến đổi Laplace của nó tồn tại và $L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

# 2.Phép biến đổi Laplace ngược

## 2.1 Đinh nghĩa

Nếu $L\{f(t)\}$=F(s) thì $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ gọi là phép biến đổi Laplace ngược.

## 2.2 Các VD

a) $L\{cosbt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \to L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\} = cosbt$

b) $L\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} \to L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{6}$

c) $L\{sinh3t\} = \frac{3}{s^2-9} \quad (s > 3) \to L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\} = \frac{sinh3t}{3}$

## Tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace ngược

Nếu $F_1(s) = L\{f_1(t)\}$ và $F_2(s) = L\{f_2(t)\}$ thì

$$L^{-1}\{aF_1(s) + bF_2(s)\} = af_1(t) + bf_2(t)$$

Ví dụ. Tính $L^{-1}\left\{\frac{5}{s^5} - \frac{3}{s+2} + \frac{s-9}{s^2+4}\right\}$

$$= \frac{5}{4!}L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{9}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{5}{24}t^4 - 3e^{-2t} + cos2t - \frac{9}{2}sin2t$$

# 3. Hàm Heaviside

3.1 Định nghĩa. Hàm Heaviside là hàm bậc thang đơn vị:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có $u_c(t) = u(t-c) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < c \\ 1 & \text{nếu } t \geq c \end{cases}$

Vậy hàm số $u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ 1 & \text{nếu } a \leq t < b \\ 0 & \text{nếu } b \leq t \end{cases}$

Ta ký hiệu $u(t-a) - u(t-b) = u_a(t) - u_b(t) = u_{ab}(t)$

Ta tìm phép biến đổi Laplace của $u_c(t)$:

$$L\{u_c(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t-c)dt = \int_c^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty} \int_c^{T} e^{-st}dt = \frac{e^{-sc}}{s}$$

với $s > 0$. Từ đây ta có: $L\{u_c(t)\} = \frac{e^{-sc}}{s}$; $L\{u_{ab}(t)\} = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$ $(s > 0)$

## 3.2 Ví dụ về phép biến đổi Laplace của hàm bậc thang

- Nếu $c \geq 0, t \geq 0$ thì

$$f(t)u(t-c) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < c \\ f(t) & \text{nếu} \quad t \geq c \end{cases}$$

- Nếu $0 \leq a < b$ thì

$$f(t)u_{ab}(t) = f(t)[u(t-a) - u(t-b)] = \begin{cases} 0 & khi\ t < a \\ f(t) & khi\ a \leq t < b \\ 0 & khi\ t \geq b \end{cases}$$

# Các VD

1. $f(t) = \begin{cases} 2 & khi \quad 0 \le t < 3 \\ -1 & khi \quad 3 \le t < 5 \\ 4 & khi \quad 5 \le t \end{cases}$

$f(t) = 2[u(t) - u(t-3)] - [u(t-3) - u(t-5)] + 4u(t-5)$

$=2u(t) - 3u(t-3) + 5u(t-5)$

Vậy $L\{f(t)\} = 2L\{u(t)\} - 3L\{u(t-3)\} + 5L\{u(t-5)\} = \frac{2-3e^{-3s}+5e^{-5s}}{s}$

2. Tính $L^{-1}\left\{\frac{1+2e^{-s}}{s}\right\}$

Ta có $L^{-1}\left\{\frac{1+2e^{-s}}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} = 1 + 2u(t-1)$