TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

CHƯƠNG 5: Phép biến đổi Fourier

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Biến đổi Fourier
- Các tính chất của biến đổi Fourier
- Các ứng dụng của biến đổi Fourier

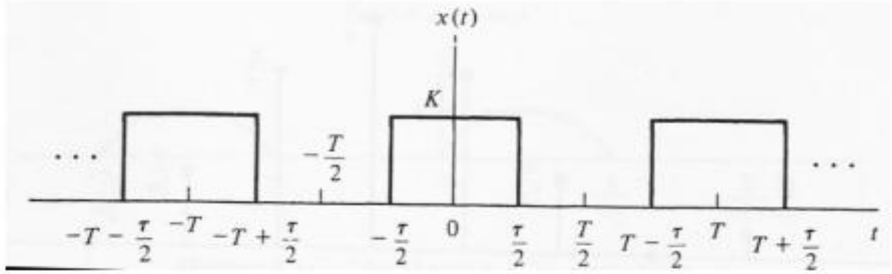
MỞ ĐẦU: Ý TƯỞNG

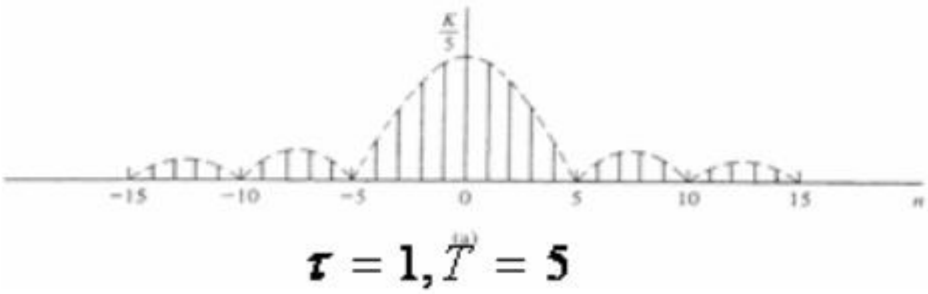
- **Ý tưởng:**

\- Chuỗi Fourier: các tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích được thành tổng hợp của những tín hiệu hàm mũ phức trực giao

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

- Mỗi hàm mũ phức chứa 1 tần số duy nhất: *n/T*





- Miền thời gian $\leftrightarrow$ Miền tần số

Tín hiệu không tuần hoàn (T = ∞) thì sao?

UNIVERSITY OF ARKANSAS

MỞ ĐẦU: HÀM TRUYỀN

- **Hàm truyền của hệ thống**

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow e^{j\omega t}H(\omega)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{j\omega t}dt$$

- **Hệ thống với tín hiệu vào tuần hoàn**

$$e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow e^{jn\omega_0 t}H(n\omega_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}H(n\omega_0)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}H(n\omega_0)$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- **Biến đổi Fourier**
- Các tính chất của biến đổi Fourier
- Các ứng dụng của biến đổi Fourier

UNIVERSITY OF ARKANSAS

BIẾN ĐỔI FOURIER

- **Biến đổi Fourier**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- **Biến đổi Fourier ngược**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Cho $X(\omega)$, ta có thể Hãy tìm được tín hiệu x(t) trên miền thời gian

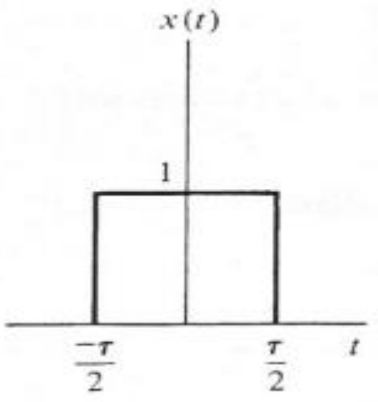
- Tín hiệu được phân tích thành tổng có trọng số của các hàm mũ phức (phép tích phân là trường hợp tới hạn của tổng)

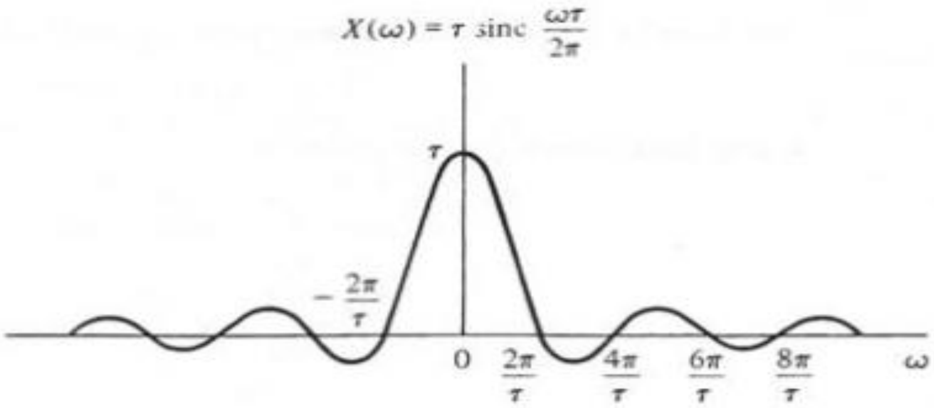
$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

BIẾN ĐỔI FOURIER

- **Ví dụ**
  - Hãy tìm biến đổi Fourier của x(t) = rect(t/τ)





BIẾN ĐỔI FOURIER

- **Ví dụ**
  - Hãy tìm biến đổi Fourier của x(t) = $e^{-a|t|}$ a > 0

BIẾN ĐỔI FOURIER

- **Ví dụ**
  - Hãy tìm biến đổi Fourier của x(t) = $e^{-at}u(t)$ a > 0

BIẾN ĐỔI FOURIER

- **Ví dụ**
  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = \delta(t-a)$

BẢNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI FOURIER

$x(t)$	$X(\omega)$
1. 1	$2\pi\delta(\omega)$
2. $u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
3. $\delta(t)$	1
4. $\delta(t - t_0)$	$\exp[-j\omega t_0]$
5. $\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \,\text{sinc}\,\frac{\omega\tau}{2\pi} = \frac{2\sin\omega\tau/2}{\omega}$
6. $\frac{\omega_B}{\pi}\,\text{sinc}\,\frac{\omega_B t}{\pi} = \frac{\sin\omega_B t}{\pi t}$	$\text{rect}(\omega/2\omega_B)$
7. $\text{sgn}\, t$	$\frac{2}{j\omega}$
8. $\exp[j\omega_0 t]$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp[jn\omega_0 t]$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta(\omega - n\omega_0)$
10. $\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
11. $\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
12. $(\cos\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$x(t)$	$X(\omega)$
13. $(\sin\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2_j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
14. $\cos\omega_0 t \,\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \,\text{sinc}\,\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2\pi}$
15. $\exp[-at]u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
16. $t\exp[-at]u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\left(\frac{1}{a + j\omega}\right)^2$
17. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\exp[-at]u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
18. $\exp[-a\lvert t\rvert], \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
19. $\lvert t\rvert \exp[-a\lvert t\rvert], \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{4aj\omega}{a^2 + \omega^2}$
20. $\frac{1}{a^2 + t^2}, \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{\pi}{a}\exp[-a\lvert\omega\rvert]$
21. $\frac{t}{a^2 + t^2}, \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{-j\pi\omega\exp[-a\lvert\omega\rvert]}{2a}$
22. $\exp[-at^2], \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[\frac{-\omega^2}{4a}\right]$
23. $\Delta(t/\tau)$	$\tau\,\text{sinc}^2\,\frac{\omega\tau}{2\pi}$
24. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$

BIẾN ĐỔI FOURIER

- **Điều kiện tồn tại biến đổi Fourier**

  - Không phải tín hiệu nào cũng có biến đổi Fourier

  - Nếu một tín hiệu có biến đổi Fourier, tín hiệu đó phải thoải mãn 2 điều kiện:

    1. *x(t)* phải khả tích tuyệt đối

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$$

    2. *x(t)* có hữu hạn số điểm không liên tục, điểm cực tiểu và điểm cực đại trong bất kỳ khoảng thời gian hữu hạn nào.

- **Ví dụ**

  x(t) = $e^{t}u(t)$

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Biến đổi Fourier
- **Các tính chất của biến đổi Fourier**
- Các ứng dụng của biến đổi Fourier

CÁC TÍNH CHẤT: TUYẾN TÍNH

- **Tính tuyến tính**

  - Nếu: $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)$ $\qquad$ $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(\omega)$

  - thì: $ax_1(t) + bx_2(t) \Leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$

- **Ví dụ**

  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = 2rect(t/\tau) + 3exp(-2t)u(t) + 4\delta(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: DỊCH THỜI GIAN

- **Tính dịch thời gian**

  - Nếu: $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
  - thì: $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

  dịch pha

- **Ôn lại về số phức:**

$$c = |c|e^{j\theta} = |c|\cos(\theta) + j|c|\sin(\theta) = a + jb$$

$$a = |c|\cos\theta \qquad b = |c|\sin\theta$$

$$|c| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta = a\tan(b/a)$$

- Dịch pha của số phức c tạo bởi θ_0 : $ce^{j\theta_0} = |c|e^{j(\theta+\theta_0)}$

Phép dịch trong miền thời gian → Phép dịch trong miền tần số

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: DỊCH THỜI GIAN

- **Ví dụ**
  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = rect[t-2]$

CÁC TÍNH CHẤT: CO GIÃN THỜI GIAN

- **Tính thay đổi thang thời gian**

  - Nếu: $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$

  - thì: $x(at) \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} X\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

- **Ví dụ**

  - Cho $X(\omega) = rect[(\omega-1)/2]$. Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(-2t+4)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỐI XỨNG

- **Tính đối xứng**

  - Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, và *x(t)* là 1 tín hiệu thực trên miền thời gian

  - thì: $X(-\omega) = X^*(\omega)$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM

- **Tính đạo hàm**

  - Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$

  - thì: $\dfrac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(\omega)$ $\qquad \dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$

- **Ví dụ**

  - Cho $X(\omega) = rect[(\omega-1)/2]$. Hãy tìm biến đổi Fourier của $\dfrac{dx(t)}{dt}$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM

- **Ví dụ**

- Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t)$ = sgn(t)

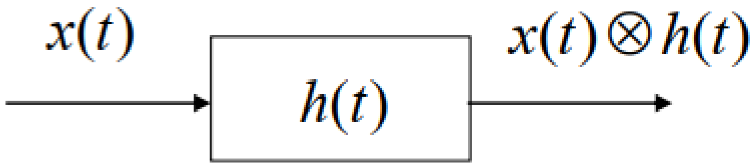
(Gợi ý: $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right] = \delta(t)$)

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH CHẬP

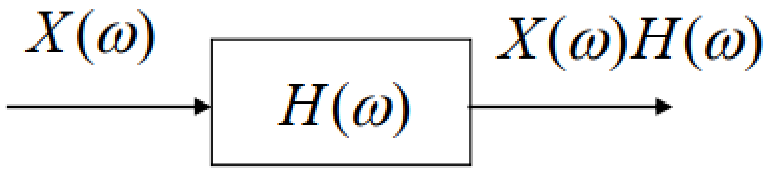
- **Tích chập**

  - Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$

  - thì: $x(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow X(\omega)H(\omega)$



Miền thời gian



Miền tần số

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ**

  - Một hệ LTI có đáp ứng xung $h(t) = e^{-at}u(t)$

    Nếu đầu vào là $x(t) = (a-b)e^{-bt}u(t) + (c-a)e^{-ct}u(t)$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$

    Hãy tìm đầu ra.

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: PHÉP NHÂN

- **Phép nhân**

  - Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, $m(t) \Leftrightarrow M(\omega)$

  - thì: $x(t)m(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) \otimes M(\omega)\right]$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỐI NGẪU

- **Tính đối ngẫu**

  - Nếu $g(t) \Leftrightarrow G(\omega)$

  - thì: $G(t) \Leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỐI NGẪU

- **Ví dụ**

  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $h(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right)$

  (Nhớ lại: $rect(t/\tau) \Leftrightarrow \tau \sin\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$)

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỐI NGẪU

- **Ví dụ**

  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = 1$

  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

CÁC TÍNH CHẤT: TÓM TẮT

1.	Tính tuyến tính	$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(\omega)$
2.	Liên hợp phức	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
3.	Dịch thời gian	$x(t-t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
4.	Dịch tần số	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega-\omega_0)$
5.	Co giãn thời gian	$x(at)$	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
6.	Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
7.	Tích phân	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
8.	Định lý Paseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t) \rvert^2 \, dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega) \rvert^2 \, d\omega$
9.	Tính tích chập	$x(t)*h(t)$	$X(\omega)H(\omega)$
10.	Tính đối ngẫu	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
11.	Phép nhân với t	$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$
12.	Điều chế	$x(t)m(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * M(\omega)$

CÁC TÍNH CHẤT: VÍ DỤ

- **Ví dụ**
  - 1. Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = \cos(\omega_0 t)$
  - 2. Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t) = u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}(t) + 1\right] \qquad \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: VÍ DỤ

- **Ví dụ**

  - 3. Cho hệ LTI với đáp ứng xung $h(t) = e^{-at}u(t)$

    Hãy tìm đầu ra của hệ biết đầu vào là $x(t) = u(t)$

  - 4. Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$. Hãy tìm biến đổi Fourier của $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

    (Gợi ý: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) \otimes u(t)$)

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: VÍ DỤ

- **Ví dụ**

  - 5. (Điều chế) Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, $m(t) = \cos(\omega_0 t)$

    Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t)m(t)$

  - 6. Nếu $X(\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$. Hãy tìm $x(t)$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM TRONG MIỀN TẦN SỐ

- **Đạo hàm trong miền tần số**

  - Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$

  - thì: $$(-jt)^n x(t) = \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM TRONG MIỀN TẦN SỐ

- **Ví dụ**

  - Hãy tìm biến đổi Fourier của $te^{-at}u(t)$, a > 0

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: DỊCH TẦN SỐ

- **Dịch tần số**

  - Nếu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$

  - thì: $x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

- **Ví dụ**

  - Nếu $X(\omega) = rect\left[\dfrac{\omega - 1}{2}\right]$. Hãy tìm biến đổi Fourier của $x(t)e^{-j2t}$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ PARSEVAL

- **Năng lượng của tín hiệu**

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- **Định lý Parseval**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ PARSEVAL

- **Ví dụ**

  - Hãy tìm năng lượng của tín hiệu $x(t) = e^{-2t}u(t)$

CÁC TÍNH CHẤT: TÍN HIỆU TUẦN HOÀN

- **Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn**

  - Tín hiệu tuần hoàn có thể viết được dưới dạng chuỗi Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

  - Thực hiện biến đổi Fourier cả 2 vế

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_{\partial 0})$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Biến đổi Fourier
- Các tính chất của biến đổi Fourier
- **Các ứng dụng của biến đổi Fourier**

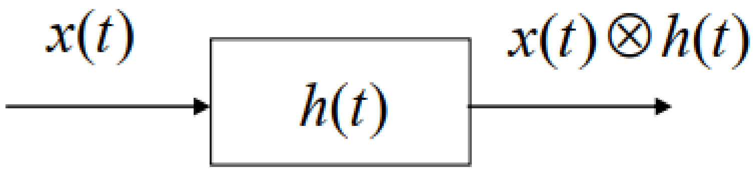
UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC ỨNG DỤNG: LỌC

- **Lọc tín hiệu**

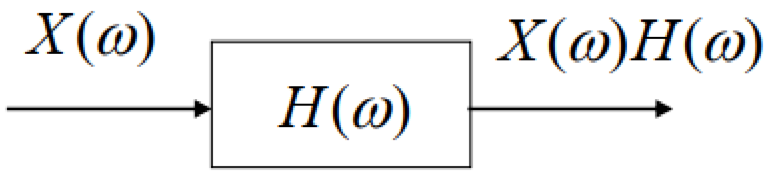
- Lọc tín hiệu là quá trình trích xuất những phần cần thiết và hữu dụng của tín hiệu ra khỏi những thành phần không mong muốn
  - Cho tín hiệu qua bộ lọc
  - Ở đầu ra của bộ lọc, những phần không mong muốn(ví dụ: tiếng ồn) sẽ bị loại bỏ

- Dựa vào tính chất tích chập, chúng ta có thể thiết kế bộ lọc chỉ cho những tín hiệu trong dải tần số nào đó đi qua



Bộ lọc

Miền thời gian

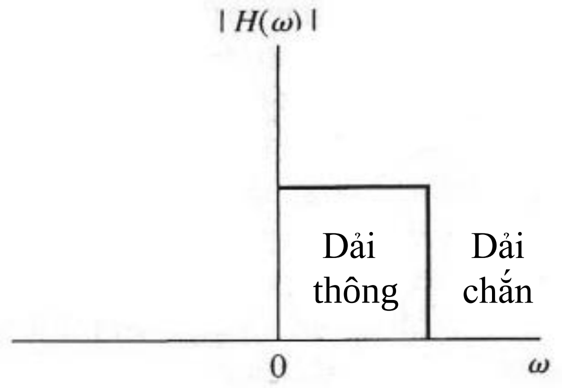


Bộ lọc

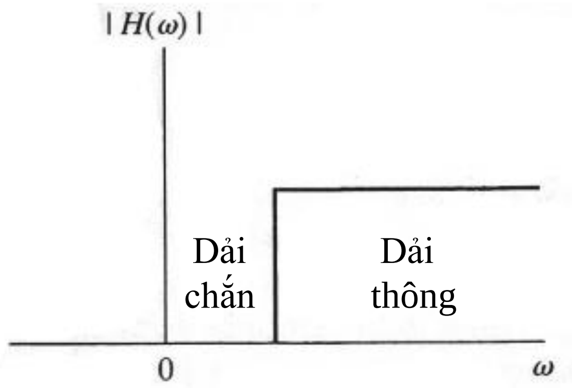
Miền tần số

CÁC ỨNG DỤNG: LỌC

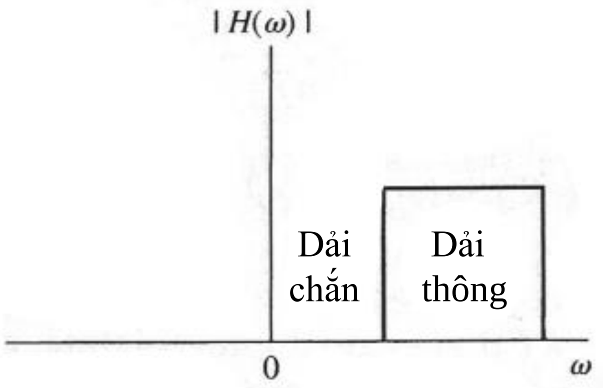
- **Phân loại bộ lọc**



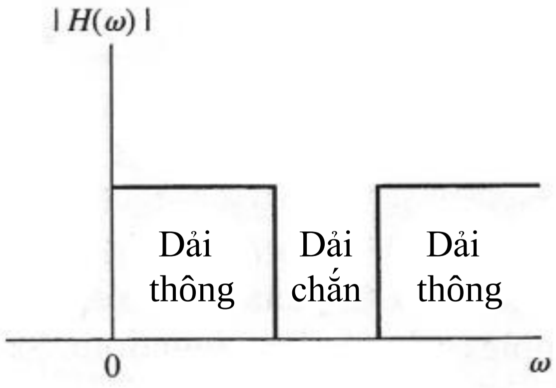
(a) Bộ lọc thông thấp



(b) Bộ lọc thông cao



(c) Bộ lọc thông dải

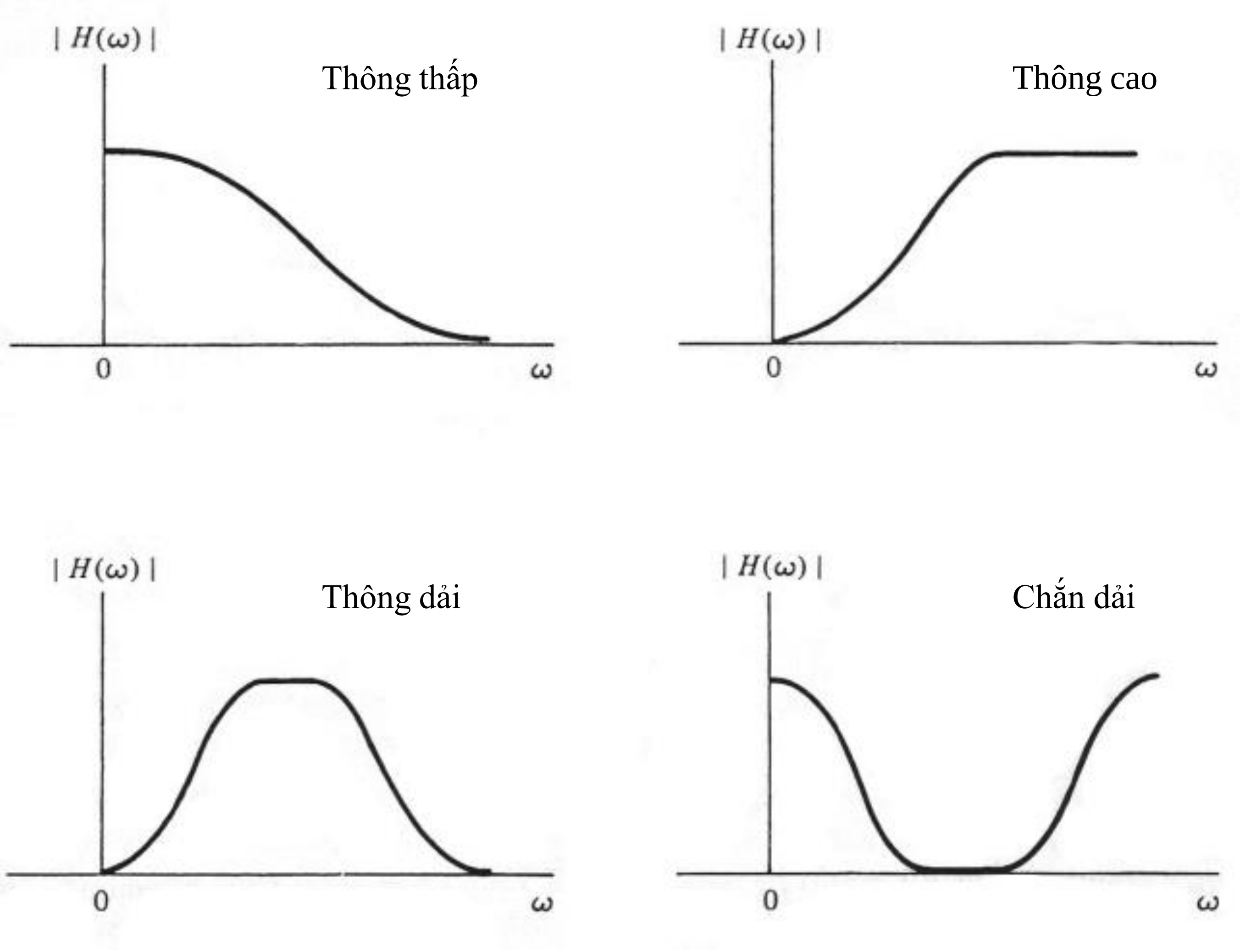


(d) Bộ lọc chắn dải (notch)

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC ỨNG DỤNG: LỌC

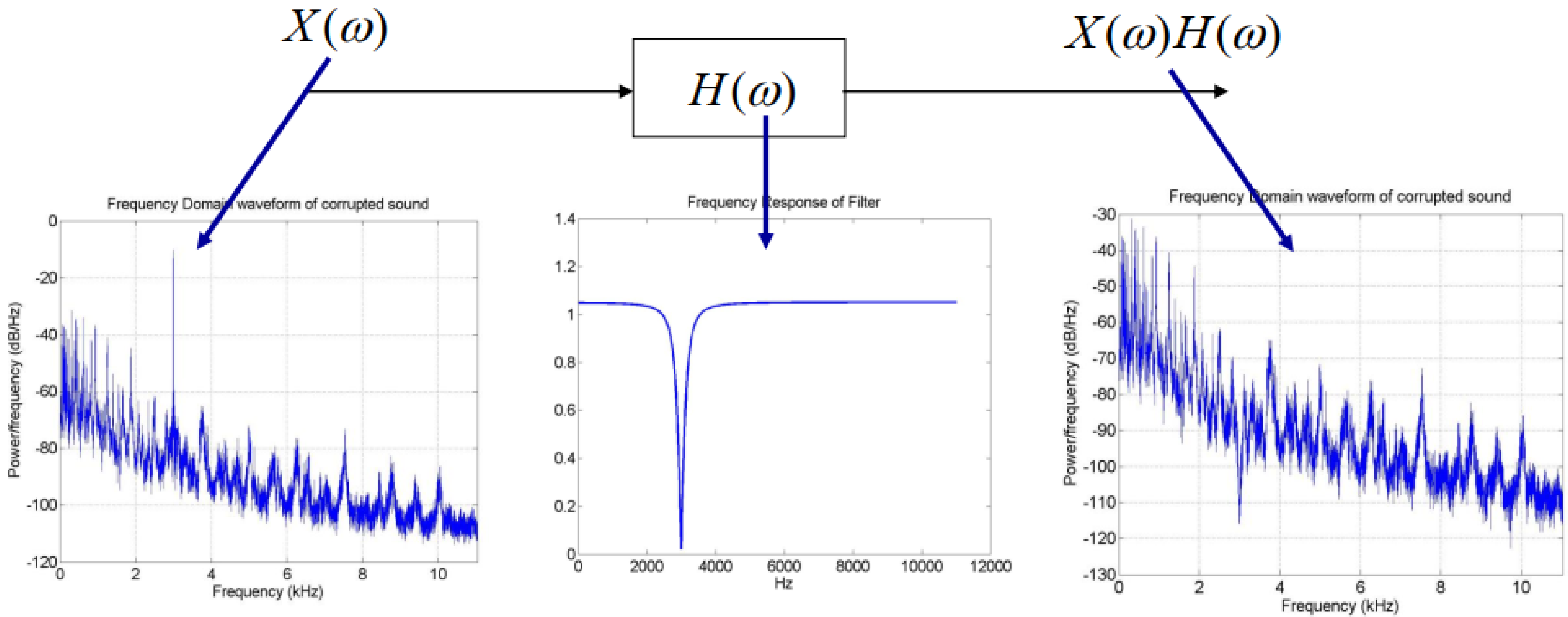
- **Bộ lọc thực tế (bộ lọc không lý tưởng)**



CÁC ỨNG DỤNG: LỌC

- **Ví dụ về bộ lọc**

  - Giới thiệu chung về bộ lọc notch



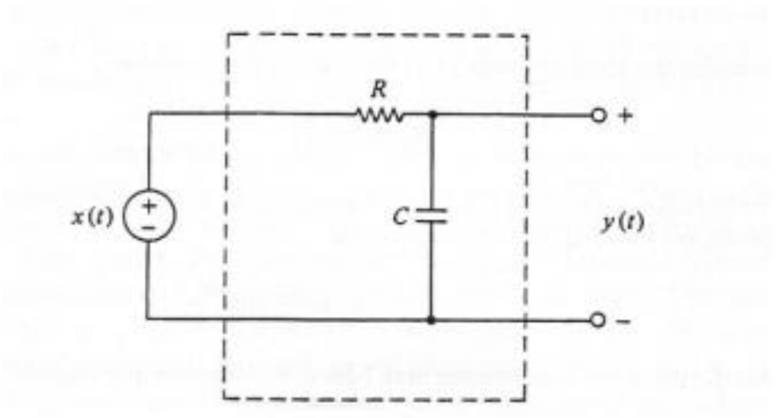
UNIVERSITY OF ARKANSAS

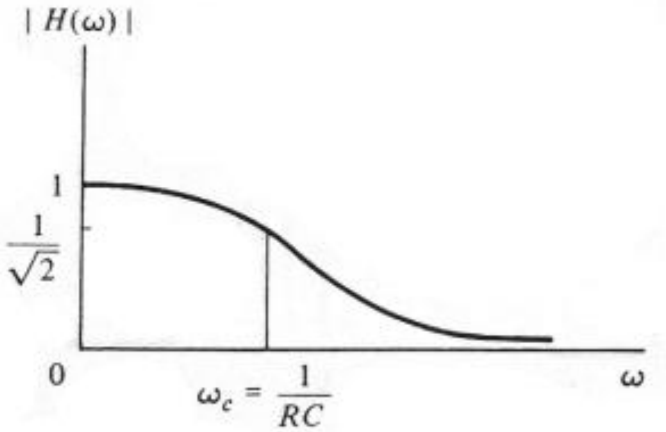
CÁC ỨNG DỤNG: LỌC

- **Ví dụ**

  - Hãy tìm đáp ứng tần số của mạch RC sau.

  - Đây là bọ lọc loại gì?

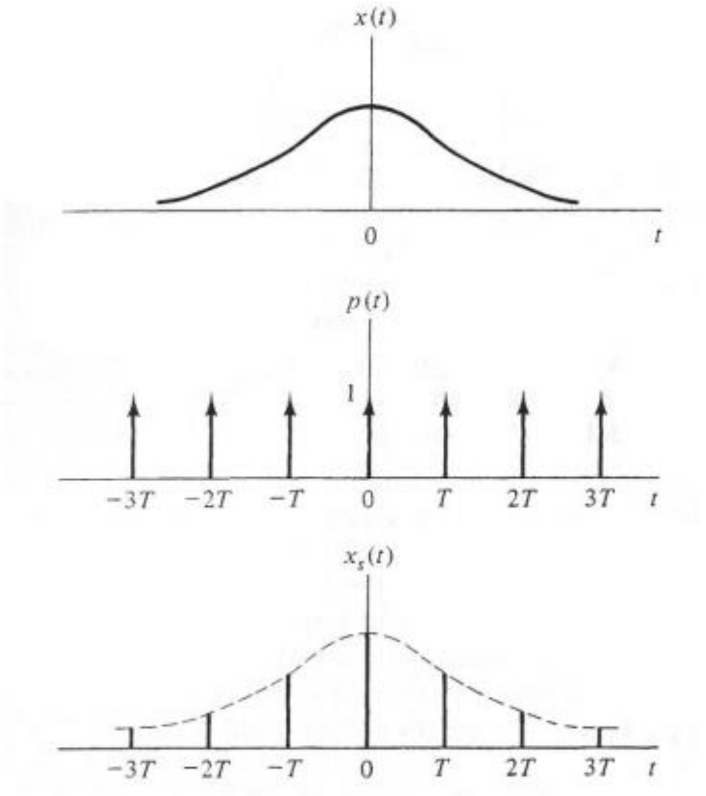




CÁC ỨNG DỤNG: ĐỊNH LÝ LẤY MẪU

- **Định lý lấy mẫu: Miền thời gian**

  - Lấy mẫu: Chuyển đổi tín hiệu liên tục sang tín hiệu rời rạc



$$x(t)$$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

Chu kì lấy mẫu

$$x_s(t)=x(t)\,p(t)$$

CÁC ỨNG DỤNG: ĐỊNH LÝ LẤY MẪU

- **Định lý lấy mẫu: Miền tần số**

  - Biến đổi Fourier của dãy xung đơn vị

Chuỗi Fourier

- Chuỗi xung lực tuần hoàn

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \times e^{jn\omega_s t}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

- Hãy tìm biến đổi Fourier của 2 vế

$$\omega_s > 2\omega_B$$

- Phép nhân miền thời gian $\rightarrow$ Tích chập miền tần số

$$x(t)p(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) \otimes P(\omega)\right]$$

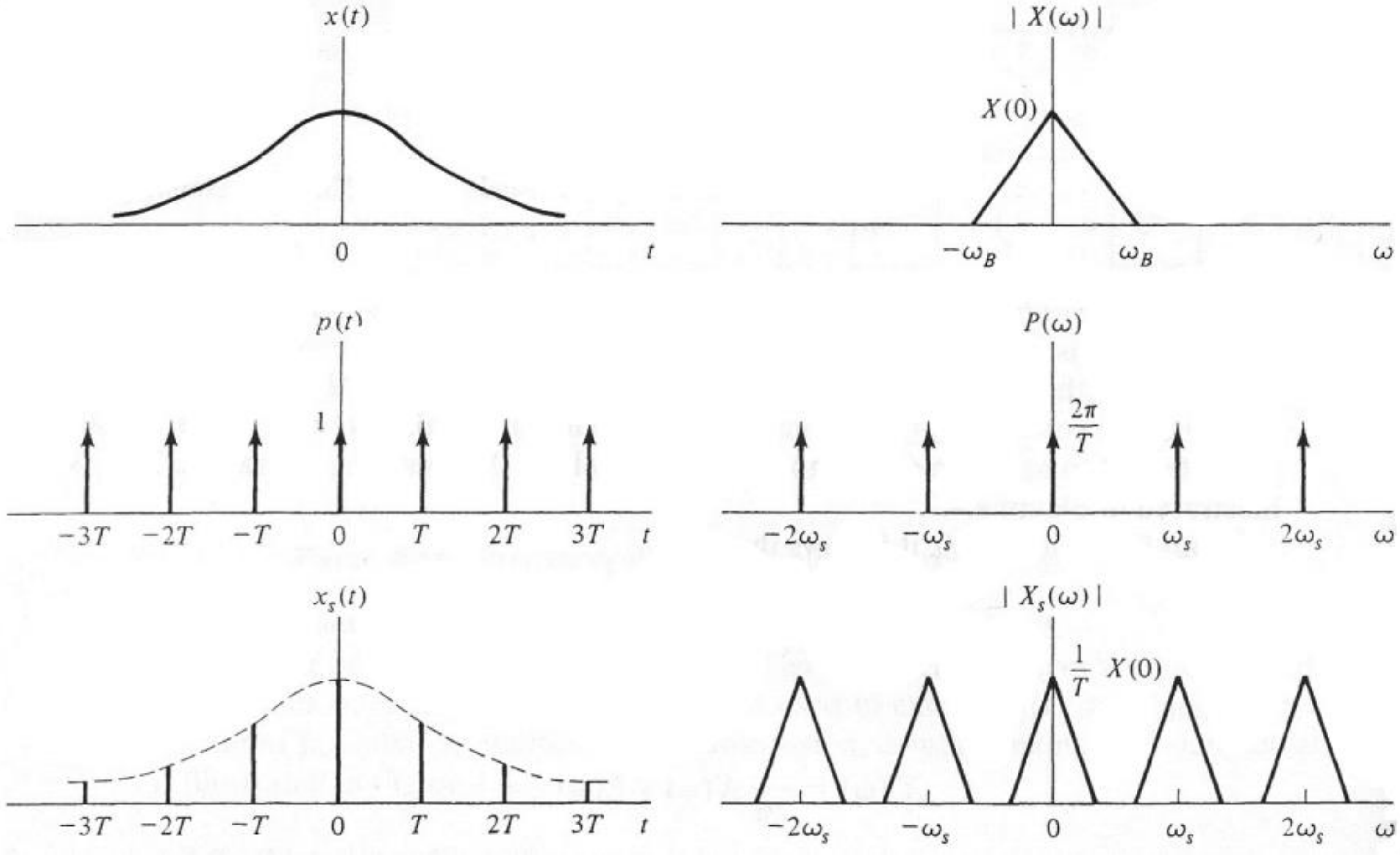
$$x(t)p(t) \Leftrightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC ỨNG DỤNG: ĐỊNH LÝ LẤY MẪU

- **Định lý lấy mẫu: Miền tần số**

  - Lấy mẫu trong miền thời gian → Lặp lại trong miền tần số

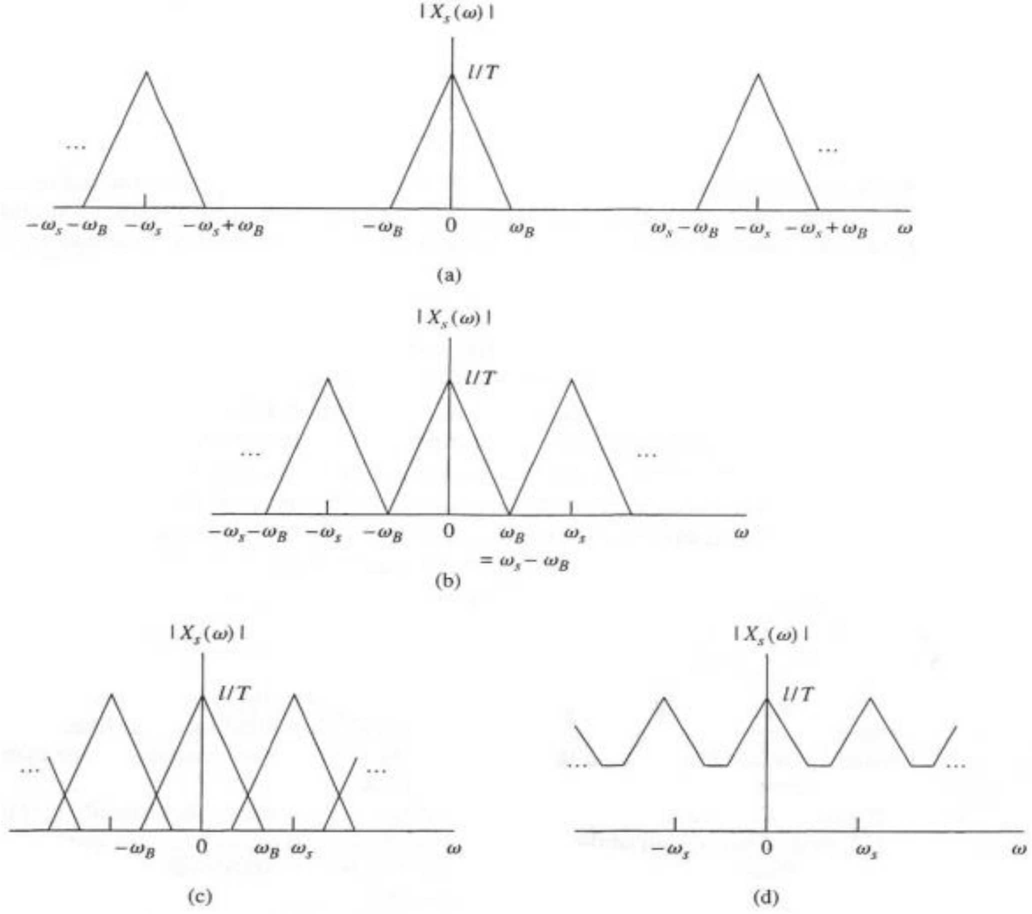


CÁC ỨNG DỤNG: ĐỊNH LÝ LẤY MẪU

- **Định lý lấy mẫu:**

  - Nếu tốc độ lấy mẫu gấp đôi băng thông, tín hiệu gốc có thể được khôi phục lại một cách hoàn hảo từ các mẫu.

$$\omega_s > 2\omega_B$$



$$\omega_s > 2\omega_B$$

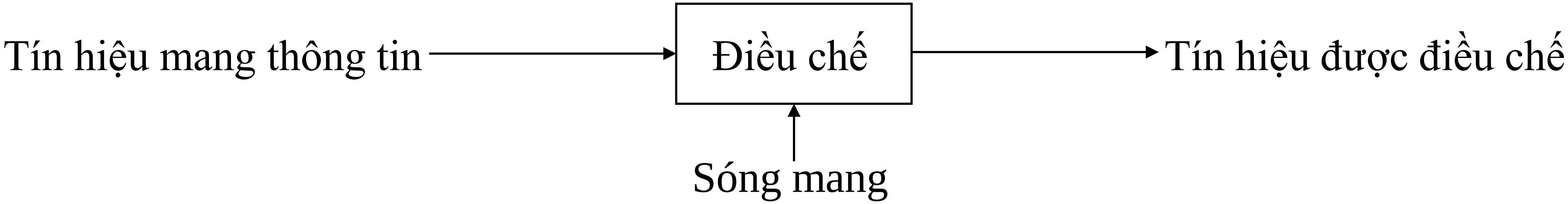
$$\omega_s = 2\omega_B$$

$$\omega_s < 2\omega_B$$

CÁC ỨNG DỤNG: ĐIỀU CHẾ BIÊN ĐỘ

- **Điều chế là gì?**

  - Là quá trình thay đổi một số đặc tính của sóng mang để phù hợp với tín hiệu mang thông tin



- **Trong đó:**

  - Tín hiệu mang thông tin (tín hiệu điều chế):
    - Thường có tần số thấp (dải cơ sở)
    - Ví dụ: Tín hiệu giọng nói: 20Hz-20KHz

  - Sóng mang:
    - Thường có tần số cao, hình sin (dải thông)
    - Ví dụ: Trạm phát thanh AM (1050KHz), trạm phát thanh FM (100.1MHz), 2.4GHz,...

  - Tín hiệu được điều chế: tín hiệu nằm trong một dải thông.

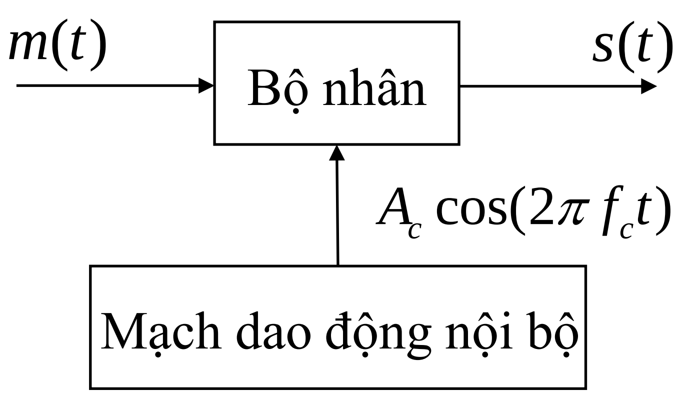
UNIVERSITY OF ARKANSAS

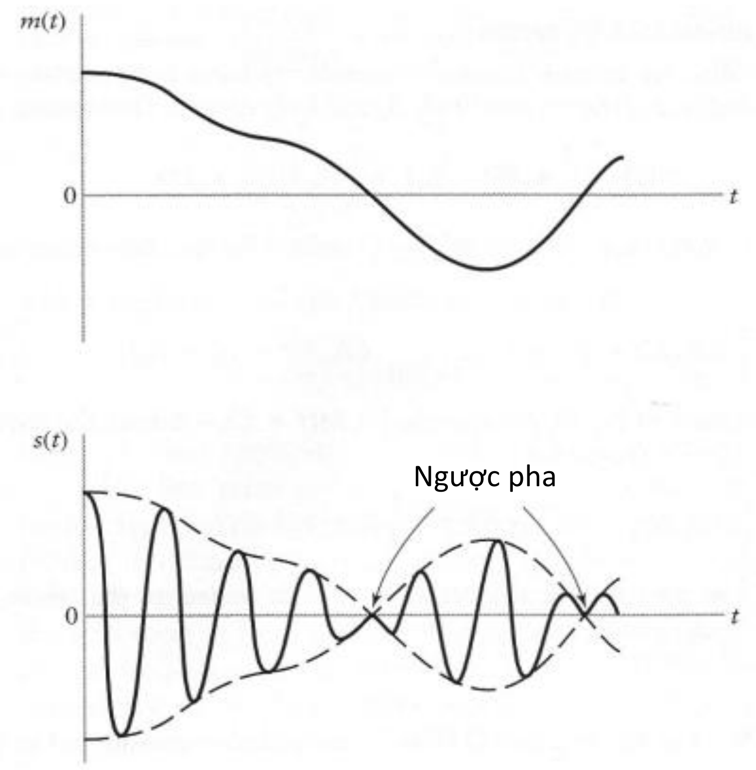
CÁC ỨNG DỤNG: ĐIỀU CHẾ BIÊN ĐỘ

- **Điều chế biên độ (AM)**

$$s(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

- Là phép nhân trực tiếp giữa tín hiệu sóng mang và tín hiệu thông tin cần gửi đi.

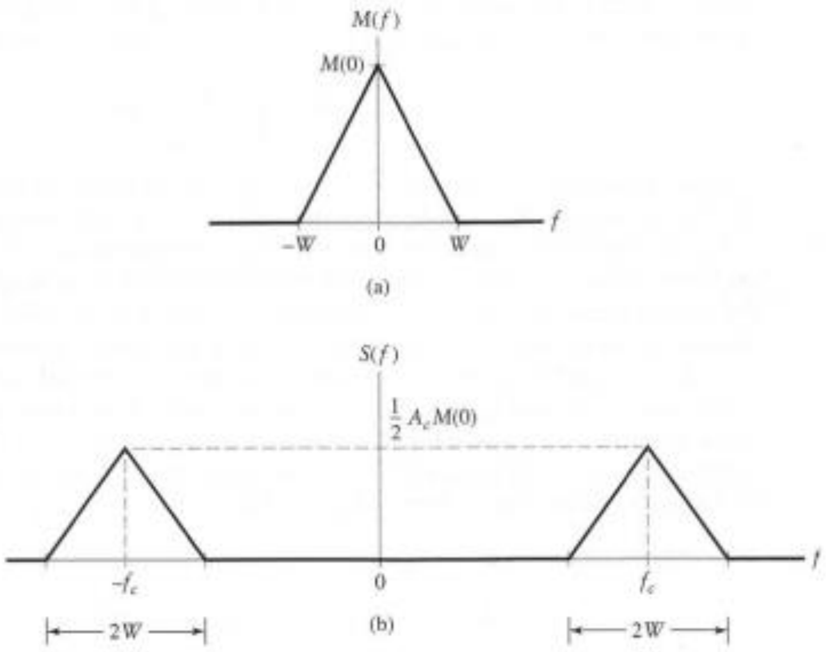




CÁC ỨNG DỤNG: ĐIỀU CHẾ BIÊN ĐỘ

- **Điều chế biên độ (AM)**

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\left[M(f - f_c) + M(f + f_c)\right]$$



UNIVERSITY OF ARKANSAS