



Nội dung

- Khái niệm, giải tích vector
- Định luật Coulomb và cường độ điện trường
- Luật Gauss và dịch chuyển điện
- Năng lượng và điện thế
- Vật dẫn và điện môi
- Tụ điện và điện dung
- Dòng điện không đổi
- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Trường điện từ dừng
- Lực từ, vật liệu từ, điện cảm
- Hệ phương trình Maxwell-Trường điện từ biến thiên

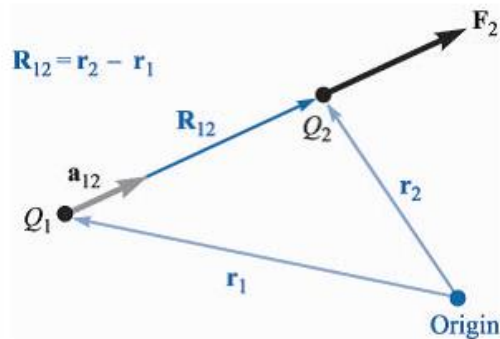


Định luật Coulomb

Charles Augustin Coulomb (1736-1806)

Hai điện tích điểm Q_1, Q_2 đứng yên trong một hệ qui chiếu quán tính đặt trong chân không tác dụng lực tĩnh điện với nhau.

$$|\mathbf{F}| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2}$$



Hằng số điện môi trong chân không:

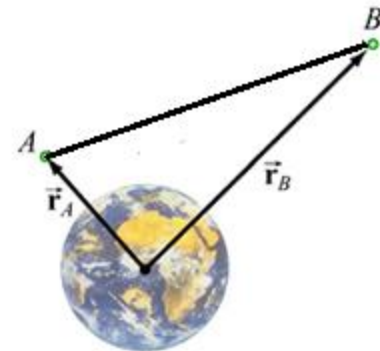
$$\epsilon_o = 8,851 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2} \mathbf{a}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|}$$

Liên hệ với lực vạn vật hấp dẫn của Newton :

$$|\mathbf{F}_g| = G \frac{Mm}{r^2}$$

giữa hai vật đặt cách nhau r , khối lượng M, m



Hằng số hấp dẫn G

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$



Định luật Coulomb

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12}$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$



Ví dụ 1a Cho $Q_1 = 50 \mu\text{C}$ ở $M(-1, 1, -3)$ và $Q_2 = 10 \mu\text{C}$ ở $N(3, 1, 0)$ trong chân không. Tính lực tác dụng lên Q_1 .

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} \mathbf{a}_{21} \quad ; \mathbf{a}_{21} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}}; R_{21} = |\mathbf{R}_{21}|$$

$$\mathbf{R}_{21} = (x_{Q1} - x_{Q2})\mathbf{a}_x + (y_{Q1} - y_{Q2})\mathbf{a}_y + (z_{Q1} - z_{Q2})\mathbf{a}_z$$

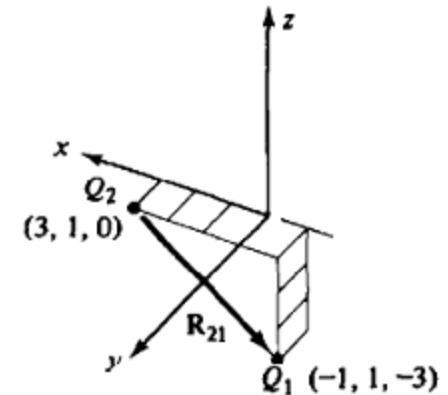
$$\mathbf{R}_{21} = (-1-3)\mathbf{a}_x + (1-1)\mathbf{a}_y + (-3-0)\mathbf{a}_z = -4\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{21} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{-4\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{(-4)^2 + (0)^2 + (-3)^2}} \rightarrow \mathbf{a}_{21} = \frac{-4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{5}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} \mathbf{a}_{21} = \frac{(50 \cdot 10^{-6})(10^{-5})}{4\pi \left(\frac{10^{-9}}{36\pi} \right) (5)^2} \left(\frac{-4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{5} \right)$$

$$\mathbf{F}_1 = 0,18(-0,8\mathbf{a}_x - 0,6\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{F}_1 = 0,144\mathbf{a}_x - 0,108\mathbf{a}_z \text{ N}$$





Định luật Coulomb

Ví dụ 1b

Cho $Q_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ C ở M(1, 2, 3) và $Q_2 = -10^{-4}$ C ở N(2, 0, 5) trong chân không. Tính lực của Q_1 tác dụng lên Q_2 .

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2} \mathbf{a}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2} \left(\frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} \right)$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2-1)\mathbf{a}_x + (0-2)\mathbf{a}_y + (5-3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\rightarrow |\mathbf{R}_{12}| = R_{12} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}$$

$$\epsilon_0 = 8,851 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{(3 \cdot 10^{-4})(-10^{-4})}{4\pi \left(\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \right) \cdot (3)^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) = -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z \text{ N}$$



Cường độ điện trường (1)

- Cường độ điện trường do điện tích điểm tạo ra:
 - Xét điện tích đặt cố định Q_1 và điện tích thử Q_t

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\epsilon_o (R_{1t})^2} \mathbf{a}_{1t} \rightarrow \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o (R_{1t})^2} \mathbf{a}_{1t}$$

Cường độ điện trường: vector lực tác dụng lên một điện tích 1C
Đơn vị: V/m

Véc tơ cường độ điện trường do một điện tích điểm Q tạo ra trong chân không:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o (r)^2} \mathbf{a}_r$$

\mathbf{r} : vector hướng từ điện tích Q tới điểm xét

\mathbf{a}_r : vector đơn vị của \mathbf{r}



Cường độ điện trường (2)

- Xét điện tích điểm Q đặt tại tâm của hệ tọa độ cầu

Cường độ điện trường tại một điểm trên mặt của cầu bán kính r :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o (r)^2} \mathbf{a}_r$$

- Xét điện tích điểm Q đặt tại điểm gốc tọa độ Đề-các

Xét cường độ điện trường tại một điểm bất kỳ có tọa độ (x, y, z) :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o (x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \right)$$



Cường độ điện trường (3)

- Xét điện tích điểm Q đặt tại điểm (x', y', z') trong tọa độ Đề-các (không phải ở gốc tọa độ)

Xét cường độ điện trường tại một điểm $P(x, y, z)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Vector đơn vị: $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

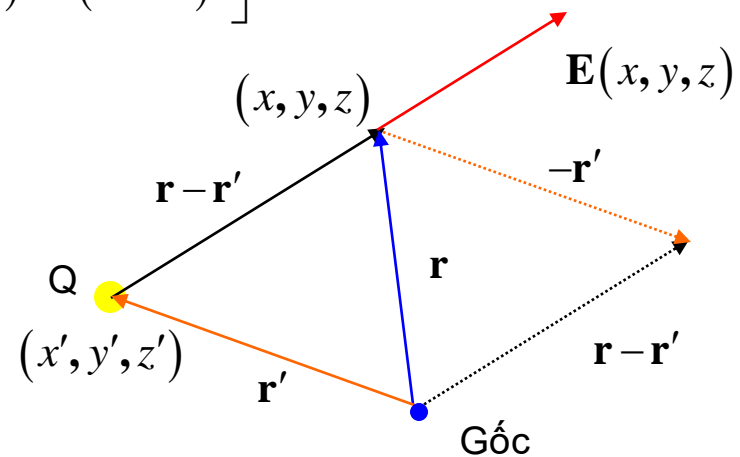
$$\mathbf{E} = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^3} = \frac{Q[(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

- Tổng cường độ điện trường do các điện tích điểm tạo ra:

\mathbf{E} do nhiều điện tích sinh ra bằng tổng của \mathbf{E} do từng điện tích sinh ra:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|)^2} \mathbf{a}_k$$

(Tính chất xếp chồng)





Ví dụ 2: Tính cường độ điện trường tại điểm $M(0,3,4)$ trong hệ tọa độ Đề-các, do điện tích điểm $Q=0,5 \mu\text{C}$ gây ra tại gốc tọa độ

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o (R)^2} \mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z; R = |\mathbf{R}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = 0,6\mathbf{a}_y + 0,8\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{(0,5 \cdot 10^{-6})}{4\pi \left(\frac{10^{-9}}{36\pi} \right) (5)^2} (0,6\mathbf{a}_y + 0,8\mathbf{a}_z) = 180\mathbf{a}_R \text{ V/m}$$



Ví dụ 3: Cho $Q_1 = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ ở $P_1(3, -2, 1)$, $Q_2 = -3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ ở $P_2(1, 0, -2)$, $Q_3 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ ở $P_3(0, 2, 2)$, $Q_4 = -10^{-9} \text{ C}$ ở $P_4(-1, 0, 2)$. Tính cường độ điện trường tại $P(1, 1, 1)$.

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2} \mathbf{a}_k = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2 + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|^2} \mathbf{a}_3 + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_4|^2} \mathbf{a}_4$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 &= (x - x_1)\mathbf{a}_x + (y - y_1)\mathbf{a}_y + (z - z_1)\mathbf{a}_z \\ &= (1 - 3)\mathbf{a}_x + (1 - (-2))\mathbf{a}_y + (1 - 1)\mathbf{a}_z \\ &= -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3,32 \\ \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} = \frac{-2}{3,32}\mathbf{a}_x + \frac{3}{3,32}\mathbf{a}_y \\ \quad \quad \quad = -0,60\mathbf{a}_x + 0,91\mathbf{a}_y \end{cases}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = 3,16 \quad \mathbf{a}_2 = 0,32\mathbf{a}_y + 0,95\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = 1,73 \quad \mathbf{a}_3 = 0,58\mathbf{a}_x - 0,58\mathbf{a}_y - 0,58\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| = 2,45 \quad \mathbf{a}_4 = 0,82\mathbf{a}_x + 0,41\mathbf{a}_y - 0,41\mathbf{a}_z$$



Cho $Q_1 = 4.10^{-9}$ C ở $P_1(3, -2, 1)$, $Q_2 = -3.10^{-9}$ C ở $P_2(1, 0, -2)$, $Q_3 = 2.10^{-9}$ C ở $P_3(0, 2, 2)$, $Q_4 = -10^{-9}$ C ở $P_4(-1, 0, 2)$. Tính cường độ điện trường tại $P(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{4.10^{-4}}{4\pi\epsilon_0.3,32^2} (-0,60\mathbf{a}_x + 0,91\mathbf{a}_y) \\ & + \frac{-3.10^{-4}}{4\pi\epsilon_0.3,16^2} (0,32\mathbf{a}_y + 0,95\mathbf{a}_z) + \\ & + \frac{2.10^{-4}}{4\pi\epsilon_0.1,73^2} (0,58\mathbf{a}_x - 0,58\mathbf{a}_y - 0,58\mathbf{a}_z) + \\ & + \frac{-10^{-4}}{4\pi\epsilon_0.2,45^2} (0,82\mathbf{a}_x + 0,41\mathbf{a}_y - 0,41\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = 24,66\mathbf{a}_x + 9,99\mathbf{a}_y - 32,40\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$



Điện trường của một phân bố điện tích

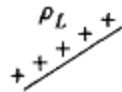
■ Các phân bố điện tích:

- Điểm:



$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

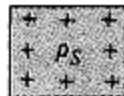
- Đường:



$$dQ = \rho_L dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L dl$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

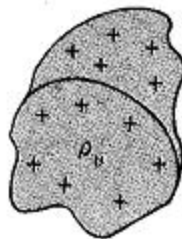
- Mặt:



$$dQ = \rho_S dS \rightarrow Q = \int_S \rho_S dS$$

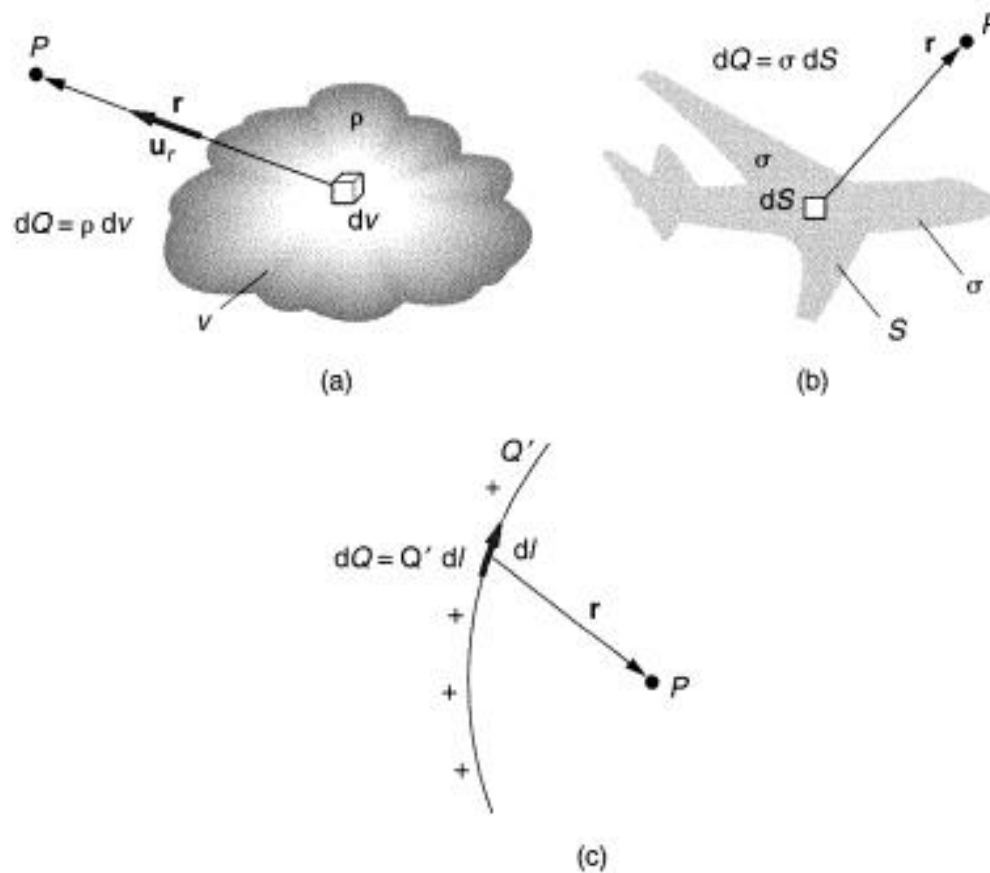
$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

- Khối:



$$dQ = \rho_V dv \rightarrow Q = \int_V \rho_V dv$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_V dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$





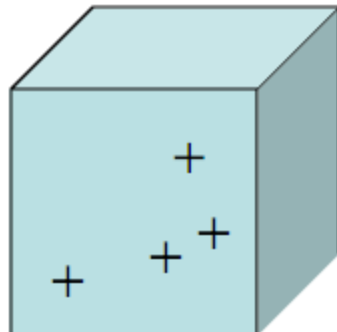
Điện trường của một điện tích khối liên tục

Xét vùng không gian được lấp đầy bằng các hạt mang điện. Có thể coi sự phân bố của các hạt mang điện là liên tục và có thể mô tả sự phân bố đó bằng hàm mật độ điện tích khối (C/m^3).

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}$$

Tổng số điện tích tồn tại trong một không gian hữu hạn thể tích V

$$Q = \int_V \rho_v dv$$





Ví dụ điện tích khối liên tục

Ví dụ: Tính điện tích tổng trong mặt trụ, biết mật độ điện tích khối của điện tử $\rho_v = -5e^{-10^5 \rho z} \mu\text{C}/\text{m}^3$.

$$Q = \int_V \rho_v dv$$

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho d\phi dz$$

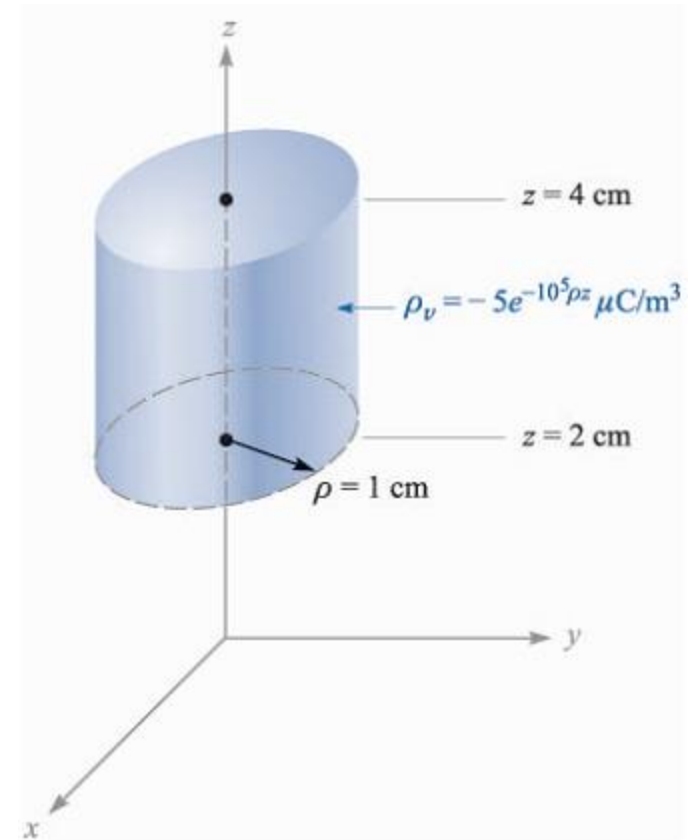
$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz$$

$$Q = \int_0^{0.01} \left(\frac{-10^{-5} \pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho \right)_{z=0.02}^{z=0.04}$$

$$= \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi (e^{-2000\rho} - e^{-4000\rho}) d\rho$$

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{e^{-2000\rho}}{-2000} - \frac{e^{-4000\rho}}{-4000} \right)_0^{0.01}$$

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right) = \frac{-\pi}{40} = 0.0785 \text{ pC}$$





Điện trường của một vi phân điện tích khối

- Điện trường do một điện tích khối:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{Q}{4\pi\epsilon_o \left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|\right)^2} \mathbf{a}_k$$

- Điện trường do một vi phân điện tích khối:

$$Q = \int_V \rho_v dv$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho_v (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} dv,$$

$$\longleftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

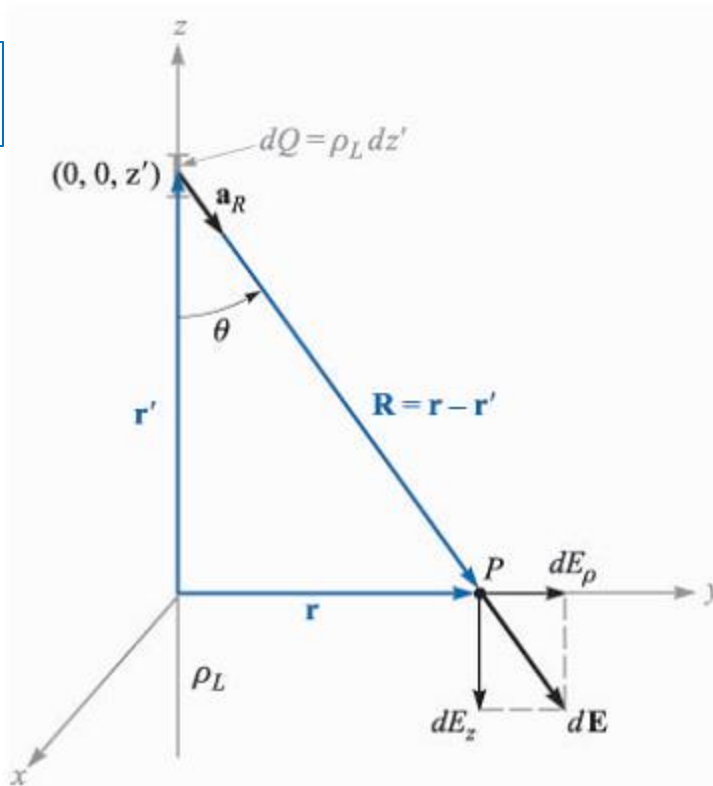
$$\rightarrow \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\rho_v \Delta v}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$



Điện trường của một điện tích đường

- Xét một tia điện tử/dây dẫn tích điện có một mật độ điện tích đường ρ_L (đơn vị C/m)
- Thường xét trong hệ tọa độ trụ tròn
- Nếu dây dài vô hạn thì cường độ điện trường của điện tích đường chỉ phụ thuộc vào bán kính

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$





Chứng minh:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rightarrow d\mathbf{E} = \frac{dQ(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\rho_L = \frac{dQ}{dz'} \rightarrow dQ = \rho_L dz'$$

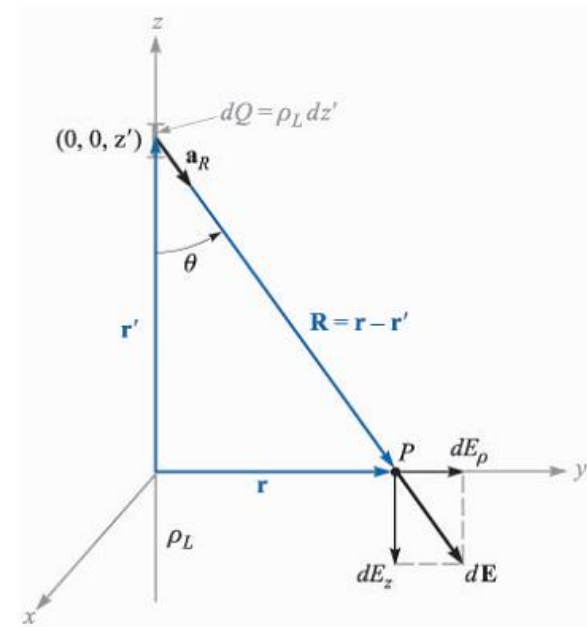
$$\rightarrow d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z')^2} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

$$d\mathbf{E} = dE_\rho \mathbf{a}_\rho + dE_z \mathbf{a}_z$$

E không phụ thuộc vào z $\rightarrow dE_z = 0$





$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

$$d\mathbf{E} = dE_\rho \mathbf{a}_\rho + dE_z \mathbf{a}_z$$

E không phụ thuộc vào z $\rightarrow dE_z = 0$

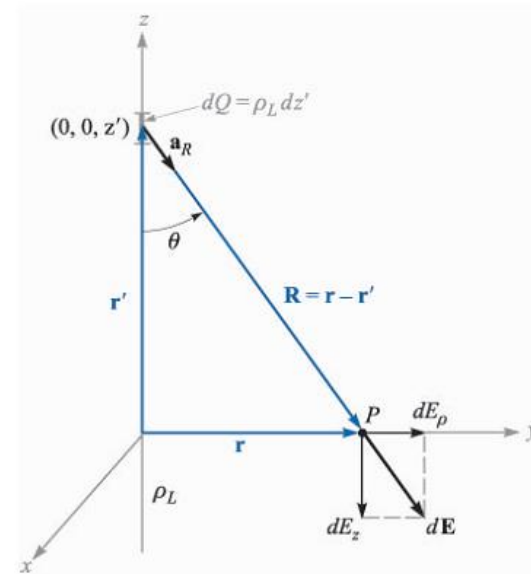
$$\rightarrow dE = dE_\rho = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

$$\rightarrow E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \rho \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$





$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{a}_R$$

Ví dụ xét trường hợp dây không nằm trên trục z

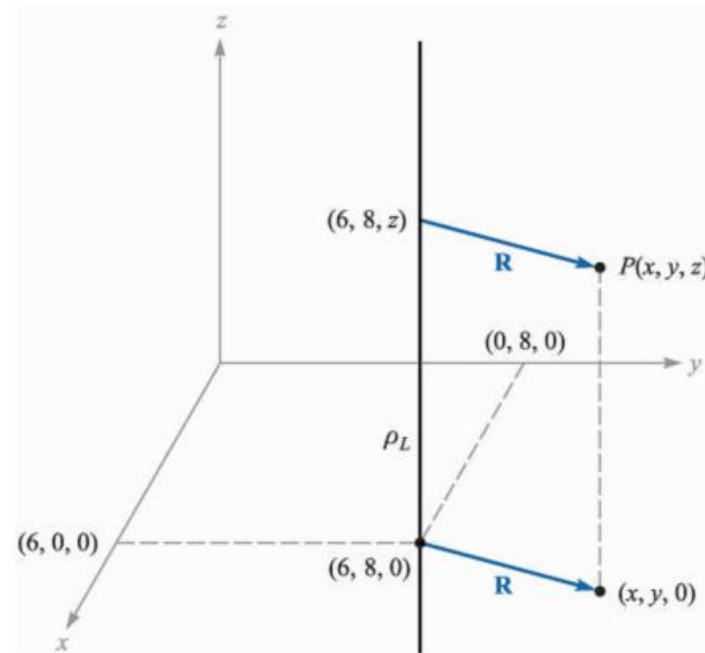
$$\mathbf{R} = (x - 6)\mathbf{a}_x + (y - 8)\mathbf{a}_y$$

$$R = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{(x - 6)\mathbf{a}_x + (y - 8)\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}} \mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x - 6)\mathbf{a}_x + (y - 8)\mathbf{a}_y}{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}$$





Ví dụ: Cho sợi dây tích điện tích dài vô hạn nằm trên trục z. Tìm cường độ trường tại điểm có tọa độ (6,8,3) m ?

Biết: $\rho_l = 20 \text{ n C/m}$

Trong hệ tọa độ trụ:

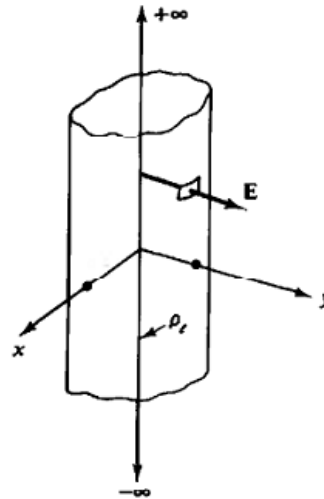
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

$$\rho = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

$$= \frac{20 \cdot 10^{-9}}{2\pi \left(\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \right) 10} \mathbf{a}_\rho$$

$$= 36 \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$$





Điện trường của một điện tích mặt

Điện tích phân bố đều trên bề mặt của một tấm phẳng
(ví dụ bản tụ điện) **rộng vô hạn**

Đặc trưng bằng mật độ điện tích mặt ρ_s (đơn vị C/m²)

$$\rho_s = \frac{dQ}{dS}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$



Chứng minh:

Tính cường độ điện trường tại điểm P trên trục z

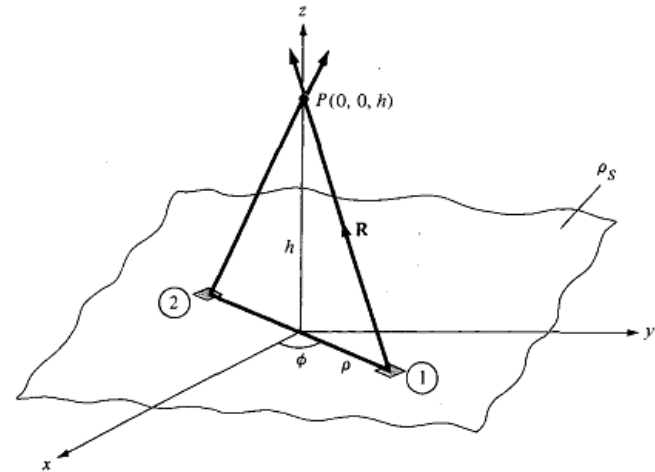
$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad Q = \int \rho_S dS$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{R} = \rho(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z, \quad R = |\mathbf{R}| = [\rho^2 + h^2]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad dQ = \rho_S dS = \rho_S \rho d\phi d\rho$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S \rho d\phi d\rho [-\rho\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

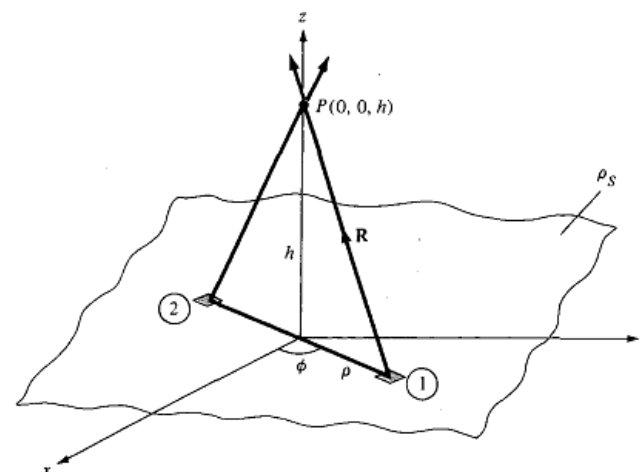




$$\int \frac{dx x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S \rho d\phi d\rho [-\rho \mathbf{a}_\rho + h \mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{h\rho d\rho d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_S h}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^{\infty} [\rho^2 + h^2]^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2) \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_S h}{2\epsilon_0} \left\{ -[\rho^2 + h^2]^{-1/2} \right\}_0^{\infty} \mathbf{a}_z \\ \mathbf{E} &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$





Chứng minh (cách 2):

Đã biết: $\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$

$$\rho = R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho_L = \rho_S dy'$$

$$\rightarrow d\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}} \mathbf{a}_R$$

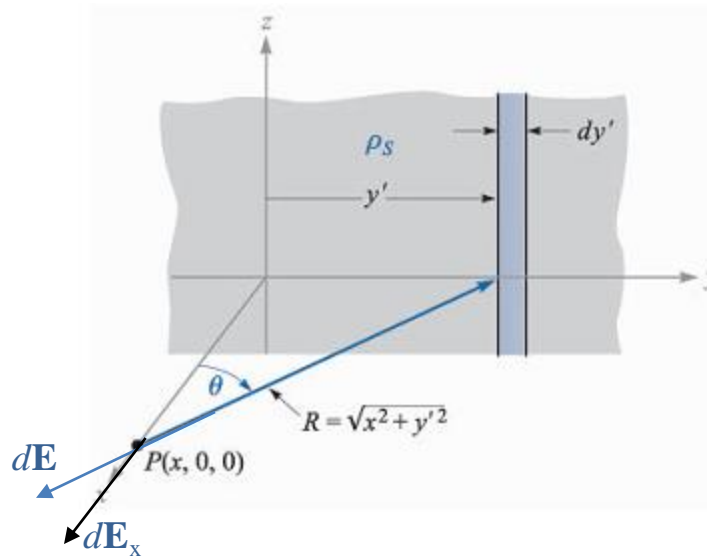
$$\rightarrow d\mathbf{E} = \frac{\rho_S dy' \mathbf{a}_R}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$dE_x = dE \cos\theta$$

$$\rightarrow dE_x = \frac{\rho_S dy' \cos\theta}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$\rightarrow dE_x = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x dy'}{x^2 + y'^2}$$



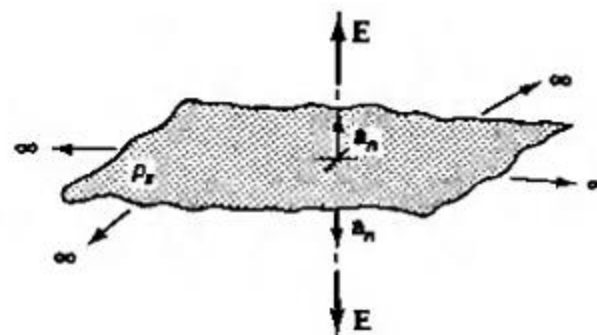
$$\rho_S = \frac{dQ}{dS}$$

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y'}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

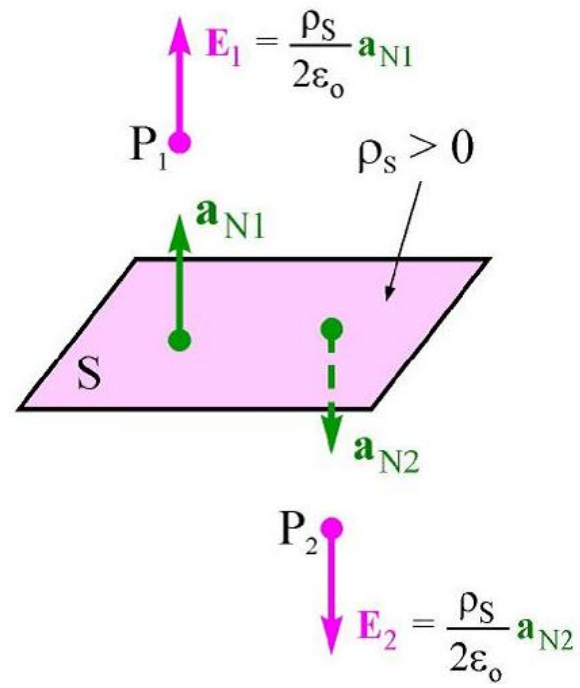
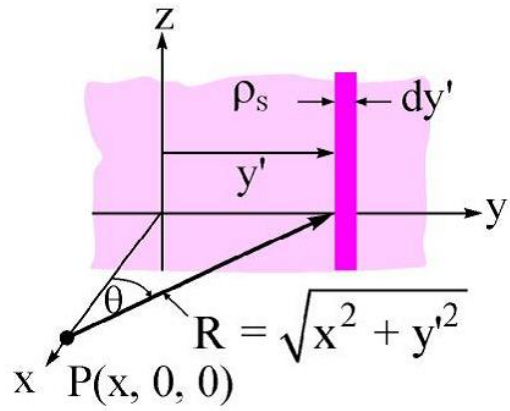
$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y'^2}} \cos \theta = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \frac{x dy'}{x^2 + y'^2}$$

$$\rightarrow E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$



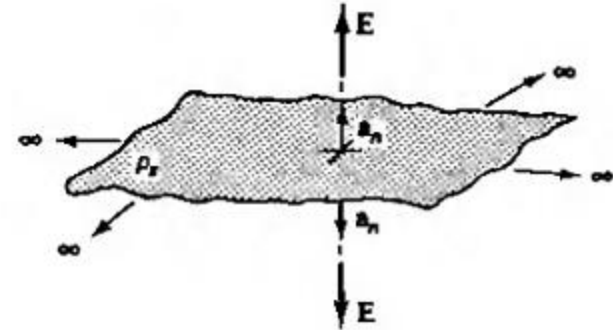
\mathbf{a}_n : vector vuông góc với mặt phẳng tích điện





Ví dụ: Cho mặt phẳng tích điện rộng vô hạn nằm trên mặt phẳng $z=10$ cm. Tìm cường độ trường tại điểm có tọa độ $(6,8,3)$ m ? Biết: $\rho_s=(1/3\pi)$ nC/m²

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{(1/3\pi)10^{-9}}{2(10^{-9}/36\pi)} = 6 \text{ V/m}$$



Với $z>10$ cm (phía trên mặt phẳng mang điện):

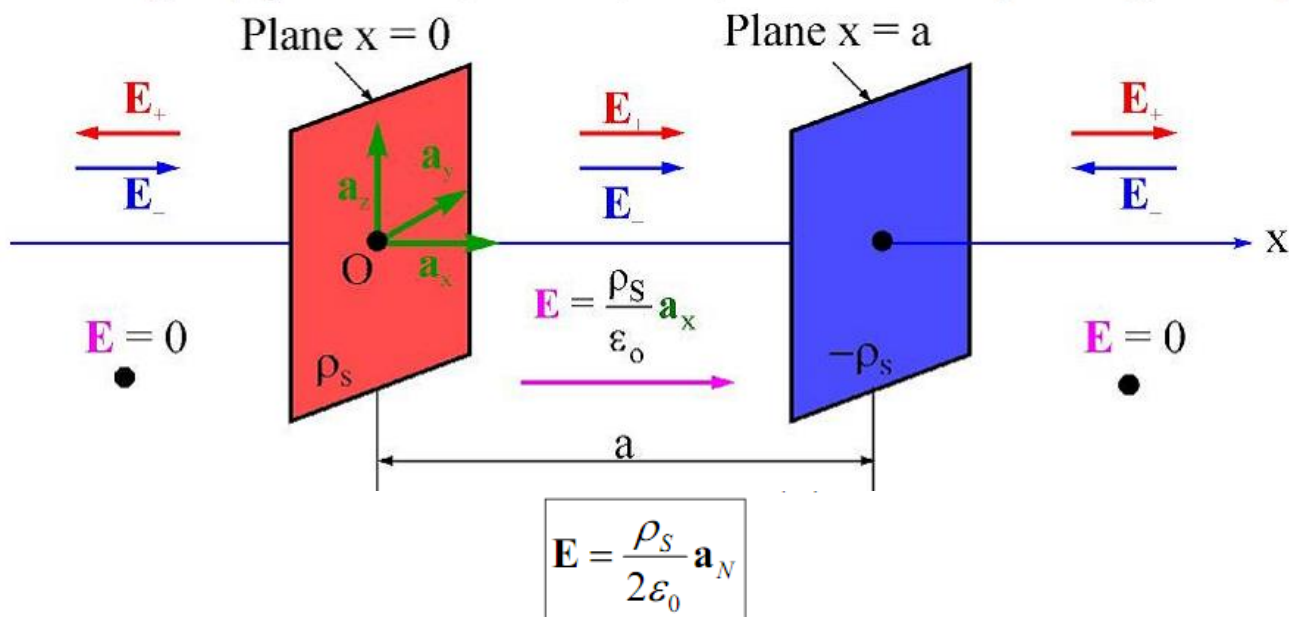
$$\mathbf{E} = 6\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Với $z<10$ cm (phía dưới mặt phẳng mang điện):

$$\mathbf{E} = -6\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$



Cho hai mặt phẳng song song, một mặt mang mật độ $\rho_s > 0$ và mặt kia mang $-\rho_s$. Xác định \mathbf{E} tại một điểm bất kỳ trong không gian



$$x < 0$$

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

$$0 < x < a$$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$x > a$$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

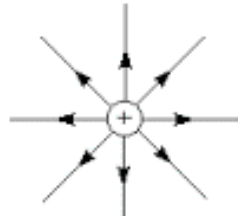
$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

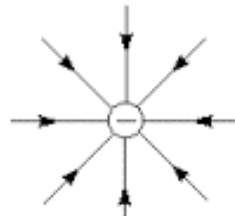


Đường sức

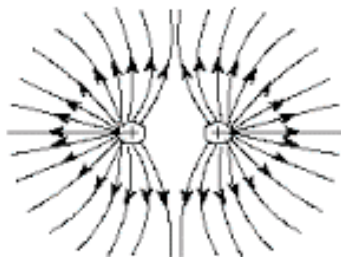
- Minh họa trực quan một điện trường
- Tập hợp các vectơ chỉ hướng của điện trường
- Một điện tích tự do nhỏ dương được đặt trên một đường sức sẽ tăng tốc theo hướng của đường sức đó



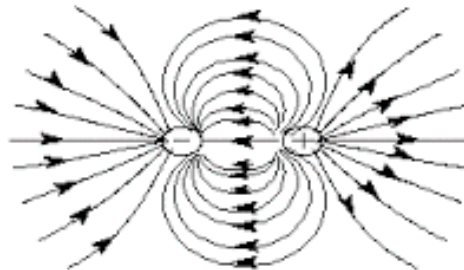
Đường sức của một điện tích dương



Đường sức của một điện tích âm



Đường sức của hệ gồm hai điện tích dương đặt gần nhau



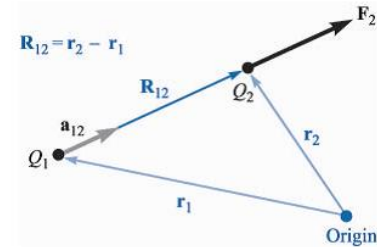
Đường sức của một điện tích dương và một điện tích âm đặt gần nhau



Ôn tập chương- Bài tập

- Định luật Coulomb:
$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2} \mathbf{a}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_o (R_{12})^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|}$$

$$\epsilon_o = 8,851 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$



- Vectơ cường độ điện trường do một điện tích điểm Q :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o (r)^2} \mathbf{a}_r \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{Q}{4\pi\epsilon_o (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)^2} \mathbf{a}_k \qquad \mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Điện trường do một điện tích khối:

$$Q = \int_V \rho_v dv \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho_v (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} dv'$$

- Điện trường do một dây mang điện tích (điện tích đường ρ_L) dài vô hạn:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_o \rho} \mathbf{a}_\rho$$

- Điện trường do mặt phẳng (điện tích mặt ρ_s) rộng vô hạn:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_o} \mathbf{a}_n$$

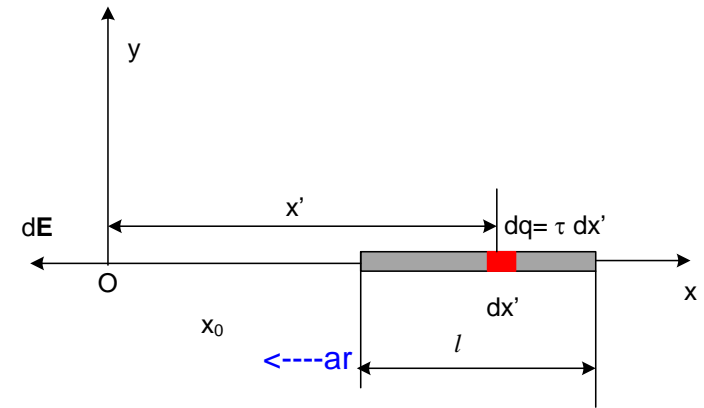
\mathbf{a}_n : vector vuông góc với mặt phẳng tích điện



Bài 1: Tính cường độ điện trường trên trục của thanh mang điện tích dương Q , chiều dài l , với mật độ điện tích τ

Xét tại điểm P, cách thanh dẫn khoảng $x_0 \gg l$

Lượng điện tích trên một đoạn nhỏ của thanh: $dq = \tau dx'$



$$\text{---} \div \mathbf{a}_r = -\mathbf{a}_x$$

Phân bố điện trường do dq gây ra:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{a}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx'}{x'^2} \mathbf{a}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \frac{dx'}{x'^2} \mathbf{a}_x$$

Điện trường tại P do toàn bộ thanh gây ra:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{dx'}{x'^2} \mathbf{a}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+l} \right) \mathbf{a}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0(x_0+l)} \mathbf{a}_x$$

Với: $x_0 \gg l$ $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0^2} \mathbf{a}_x$ \rightarrow Thanh coi như điện tích điểm



Bài 2. Cho mặt phẳng tích điện rộng vô hạn, đặt cách mặt phẳng xOy ($z=0$) một khoảng 10cm.

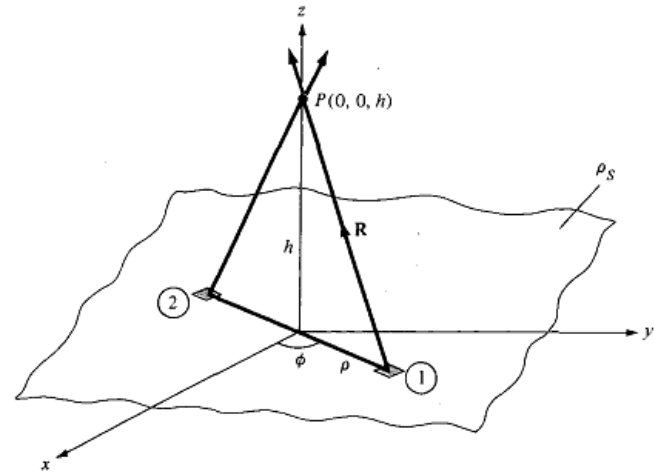
Điện tích phân bố đều trên mặt với mật độ: $\rho_s = \sigma = \frac{1}{3\pi} \frac{nC}{m^2}$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{\frac{1}{3\pi} 10^{-9}}{2(10^{-9}/36\pi)} = 6 \quad \text{V/m}$$

$$z \geq 10\text{cm}: \quad \mathbf{E} = 6\mathbf{a}_z \quad \text{V/m}$$

$$z < 10\text{cm}: \quad \mathbf{E} = -6\mathbf{a}_z \quad \text{V/m}$$



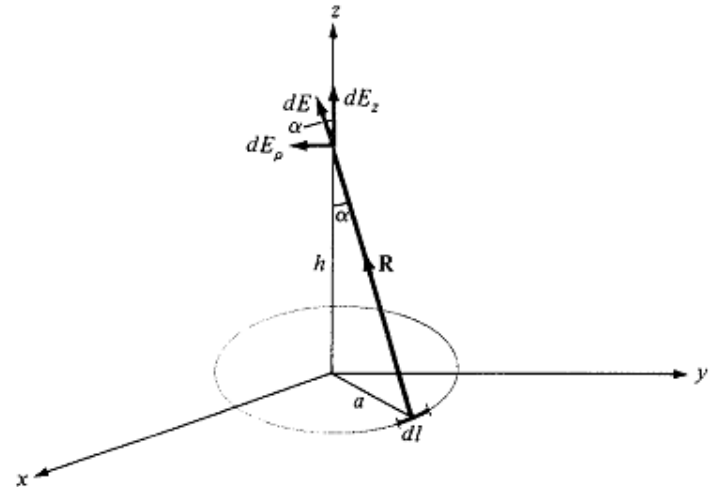


Bài 3. Xét vòng dây bán kính a , với mật độ điện tích τ , tổng điện tích Q . Vòng dây được đặt trên mặt xOy . Tính điện trường tại điểm P trên trục z , hướng z^\wedge .

$$dl = a d\phi, \quad \mathbf{R} = a(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [a^2 + h^2]^{1/2}, \quad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z}{[a^2 + h^2]^{3/2}}$$



$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z)}{[a^2 + h^2]^{3/2}} a d\phi$$

Do tính đối xứng, thành phần theo hướng \mathbf{a}_ρ khi tổng hợp lại sẽ bằng 0.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 [h^2 + a^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{2\epsilon_0 [h^2 + a^2]^{3/2}} \quad \rho_L = \frac{Q}{2\pi a}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 [h^2 + a^2]^{3/2}} \mathbf{a}_z \quad \text{Khi } a \rightarrow 0 \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \mathbf{a}_z \quad \sim \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_R$$



Cách 2:

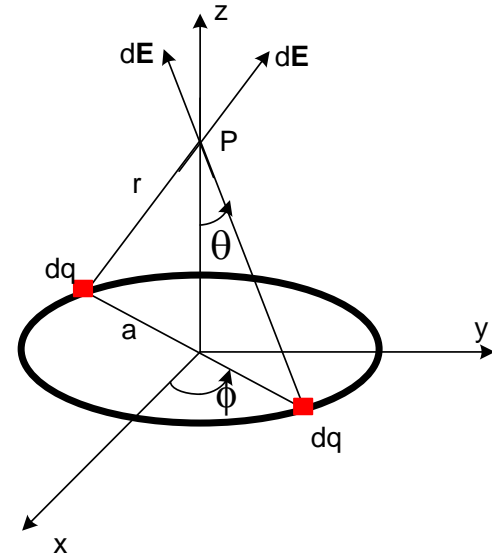
Xét một đoạn dl' trên vòng dây.

Lượng điện tích chứa trong đoạn này là:

$$dq = \tau dl' = \tau a d\phi'$$

Phân bố điện trường tại P:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau a d\phi'}{r^2} \mathbf{a}$$



Sử dụng tính đối xứng như hình vẽ, ta thấy điện trường tại P có hướng $+z^{\wedge}$

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau a d\phi'}{a^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{az d\phi'}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Lấy tích phân trên toàn bộ vòng dây:

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{az}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \oint d\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\tau 2\pi a) z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \frac{az}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



Hướng dẫn một số bài tập ở nhà