Chương 2: Hệ thống tuyến tính liên tục trong miền phức

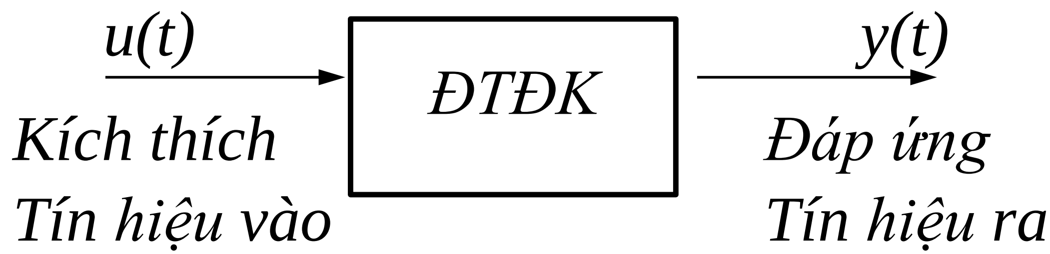
TS. Nguyễn Thu Hà
Bộ môn Điều khiển tự động
Viện Điện, Trường ĐHBK HN
ha.nguyenthu3@hust.edu.vn/
hanguyenac@gmail.com

2.1. Mô tả hệ thống

1. Đặt vấn đề

- Xây dựng mô hình toán học của đối tượng điều khiển:
  - Hiểu biết về đối tượng.
  - Sử dụng mô hình để phân tích động học và tổng hợp bộ điều khiển.
  - Sử dụng mô hình để mô phỏng hoạt động của hệ thống.
- Các loại mô hình toán học:
  - Phương trình vi phân.
  - Hàm truyền đạt.
  - Phương trình trạng thái.

2. Khái niệm hàm truyền đạt



Định nghĩa 2.2: Hàm truyền đạt là tỷ số giữa ảnh Laplace của tín hiệu ra *Y*(*s*) và ảnh Laplace của tín hiệu vào *U*(*s*) (các điều kiện đầu bằng 0).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}$$

Nếu hệ là causal thì hàm truyền đạt G(s) của nó phải có bậc đa thức tử số không lớn hơn bậc đa thức mẫu số ($m \le n$). Các hàm truyền đạt như vậy có tên là hợp thức. Còn nếu $m < n$ thì G(s) được gọi là một hàm hợp thức chặt.

Khái niệm hàm truyền đạt

A(s) = $a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n$ gọi là đa thức đặc tính (quyết định quá trình quá độ)

A(s) = 0 gọi là phương trình đặc tính

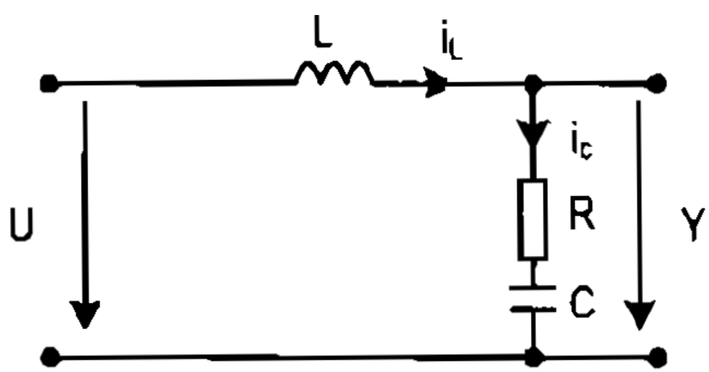
- Nghiệm của phương trình đặc tính là các điểm cực
- Nghiệm của phương trình B(s) = 0 gọi là các điểm không

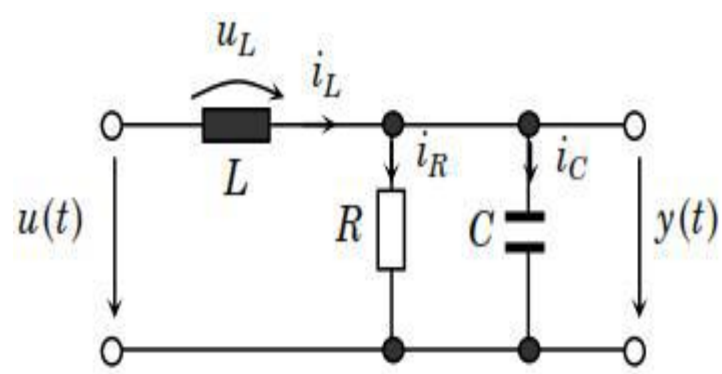
Ví dụ xác định hàm truyền đạt

- Định nghĩa hàm truyền đạt trong Matlab

  >>G=tf($[b_m \ldots . b_1\ b_0], [a_n \ldots . a_1\ a_0]$)

- Ví dụ : Xác định hàm truyền đạt của mạch điện





G(s)=$\frac{RCs+1}{LCs^2+RCs+1}$

G(s)=$\frac{R}{RLCs^2+Ls+R}$

3. Các đặc tính trong miền thời gian

3.1. Hàm trọng lượng

Định nghĩa 2.3: Hàm trọng lượng g(t) là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 (có các giá trị ban đầu bằng 0) và được kích thích bởi tín hiệu dirac δ(t) ở đầu vào.

- Giả sử $G(s)$ là hàm truyền đạt của hệ. Hàm trọng lượng $g(t)$ là ảnh Laplace ngược của $G(s)$.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Để vẽ hàm trọng lượng g(t) trong matlab sử dụng lệnh:

```
>>impulse(G)
```

3.2. Hàm quá độ

- **Định nghĩa 2.4:** Hàm quá độ h(t) là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 (có các giá trị ban đầu bằng 0) và được kích thích bởi tín hiệu Heaviside 1(t) ở đầu vào.

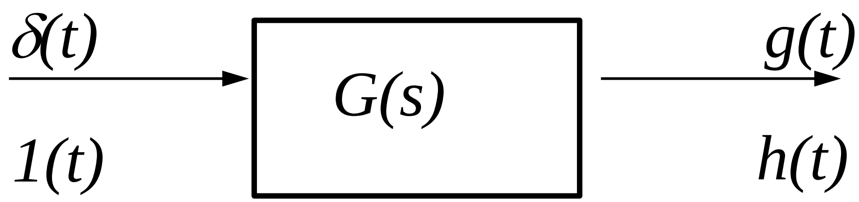
Hàm quá độ h(t) được tính theo công thức:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}$$

Để vẽ hàm quá độ h(t) trong matlab sử dụng lệnh:

```
>>step(G)
```

Mối quan hệ giữa hàm quá độ và hàm trọng lượng



Định lý 2.1: Cho hệ SISO tuyến tính
Hệ luôn được mô tả bởi ba mô hình toán học tương đương là hàm truyền đạt G(s), hàm quá độ h(t) và hàm trọng lượng g(t) với các quan hệ:

$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$; $\quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}$ $\quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$

Ví dụ

Xác định hàm quá độ và hàm trọng lượng của hệ được mô tả bởi hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{1+T_t s}{1+T_m s} \text{ với } T_t \neq T_m$$

Ảnh Laplace H(s) của hàm quá độ h(t) là

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T_m - T_t}{T_m} \frac{1}{s+\frac{1}{T_m}}$$

Vậy $h(t) = \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{-\frac{1}{T_m}t}\right) 1(t)$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{T_m - T_t}{T_m^2} e^{-\frac{1}{T_m}t} 1(t) + \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{-\frac{1}{T_m}t}\right)\delta(t)$$ thay tại thời điểm t=0 ta có $g(t) = \frac{T_m - T_t}{T_m^2} e^{-\frac{1}{T_m}t} 1(t) + \frac{T_t}{T_m}\delta(t)$

4. Các đặc tính trong miền tần số

4.1. Đường đặc tính tần biên pha

- Xét hệ thống tuyến tính mô tả bởi phương trình vi phân (*). Hệ đó sẽ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0+b_1 s+\dots+b_m s^m}{a_0+a_1 s+\dots+a_n s^n} \qquad \text{với } m \leq n$$

- Hàm đặc tính tần được hiểu là

$$\tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \mathrm{Re}\tilde{G}(j\omega) + j\, Im\tilde{G}(j\omega) = |\tilde{G}(j\omega)|e^{j\varphi)}$$

Lưu ý : Viết $\tilde{G}(j\omega)$ thay vì G(jω) là để tránh nhầm lẫn rằng $\tilde{G}(j\omega)$ chính là ảnh Fourier của hàm trọng lượng g(t)

Định lý 2.2: Nếu kích thích một hệ thống có hàm truyền đạt bền G(s) từ trạng thái 0, tức là tại thời điểm kích thích hệ có y(0) = $\frac{dy(0)}{dt}$ = …. = $\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$ =0 bằng tín hiệu điều hòa u(t) =$e^{j\omega t}$ *thì khi* t→∞ hệ sẽ có đáp ứng y(t) được xác định từ hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$:

$$y(t) = |\tilde{G}(j\omega)|e^{j(\omega t+\varphi)} \text{ với góc pha } \varphi = \text{arc } \tilde{G}(j\omega)$$

4. Các đặc tính trong miền tần số

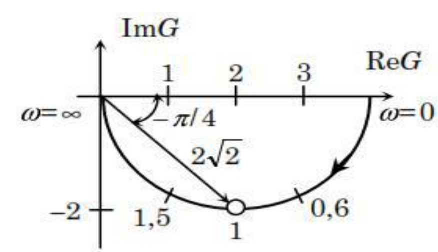
- Ký hiệu arc $\tilde{G}(j\omega)$ để chỉ góc pha của $\tilde{G}(j\omega)$ tức là

$$\text{arc } \tilde{G}(j\omega) = \text{arctan}\frac{Im\tilde{G}(j\omega)}{Re\tilde{G}(j\omega)}$$

- Với Re$\tilde{G}(j\omega)$ là phần thực, $Im\tilde{G}(j\omega)$ là phần ảo của $\tilde{G}(j\omega)$.
- Đường biểu diễn hàm $\tilde{G}(j\omega)$ dưới dạng đồ thị theo tham số ω khi ω chạy từ 0 đến ∞ trong hệ trục tọa độ có trục tung $Im\tilde{G}(j\omega)$ và trục hoành Re$\tilde{G}(j\omega)$ được gọi là đường đặc tính tần biên pha.
- Ví dụ: Xây dựng hàm đặc tính tần cho hệ thống có hàm truyền đạt

G(s) = $\frac{4}{1+s}$ hàm đặc tính tần của hệ là:

$\tilde{G}(j\omega)$ = G(s)|$s = j\omega$ = $\frac{4}{1+j\omega}$ = $\frac{4}{1+\omega^2}$ - j$\frac{4\omega}{1+\omega^2}$



- Do có [Re$\tilde{G}(j\omega)$ -2]^2+[$Im\tilde{G}(j\omega)$]^2 = 4

nên khi ω chạy từ 0 đến ∞ , đồ thị của nó là nửa hình tròn nằm dưới trục hoành. Khi u(t) = sin(t) thì y(t) = 2$\sqrt{2}$sin(t - $\frac{\pi}{4}$) khi t→∞

4.2.Đường đặc tính tần logarit – Đồ thị Bode

Định nghĩa 2.5: Đồ thị Bode là dạng đồ thị biểu diễn hàm đặc tính tần, gồm 2 đồ thị riêng biệt theo ω cho:

Biên độ: $L(\omega) = 20lg\left|\tilde{G}(j\omega)\right|$ có đơn vị là dezibel [dB].

Pha: $\varphi(\omega)$ = arc $\tilde{G}(j\omega)$ có đơn vị [grad].

Lưu ý: Cả hai đồ thị này có trục hoành là ω xong không được chia đều theo giá trị của ω mà theo lg(ω)

$$\tilde{G}(j\omega) = k\,\frac{(1+T_1'j\omega)(1+T_2'j\omega)\ldots(1+T_m'j\omega)}{(1+T_1\ j\omega)(1+T_2\ j\omega)\ldots(1+T_n'j\omega)}$$

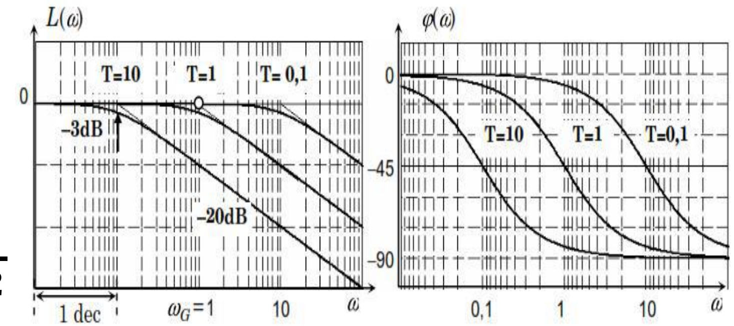
Được thực hiện đơn giản là cộng trừ các thành phần

$L(\omega) = 20\text{lgk}+20[\sum_{k=1}^{m} lg|1+T_k'j\omega| - \sum_{k=1}^{m} lg\left|1+T_k\ j\omega\right|]$

Ví dụ

- Xây dựng biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$



- Khâu này có hàm đặc tính tần:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1}{1+jT\omega} = \frac{1}{1+(T\omega)^2} - j\,\frac{T\omega}{1+(T\omega)^2}$$

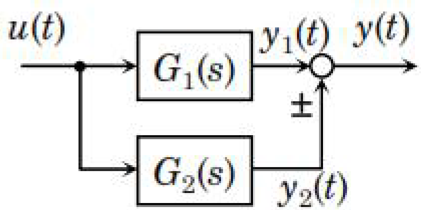
- Nên L(ω)= -10lg(1+$T^2\omega^2$) và $\varphi(\omega) = -arctanT\omega$
- Đường đồ thị của L(ω) có hai tiệm cận ứng với khi $\omega \to 0$ và khi $\omega \to \infty$:

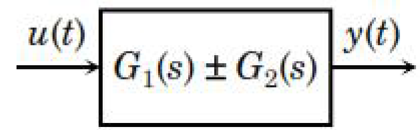
$$L(\omega)=\begin{cases} 0\ khi\ \omega \to 0 \\ -20(\lg\omega + lgT)\ khi\ \omega \to \infty \end{cases}$$

- Hai đường tiệm cận này cắt nhau tai $\omega_G = \frac{1}{T}$ được gọi là tần số gãy và ở đó có L(ω_G) = -10lg(2) $\approx -3dB$

5. Phép biến đổi đại số sơ đồ khối

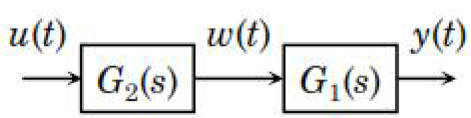
- Hai khối song song

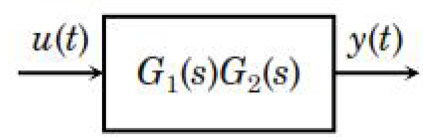




$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s) \pm Y_{2(s)}}{U(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$$

- Hai khối nối tiếp





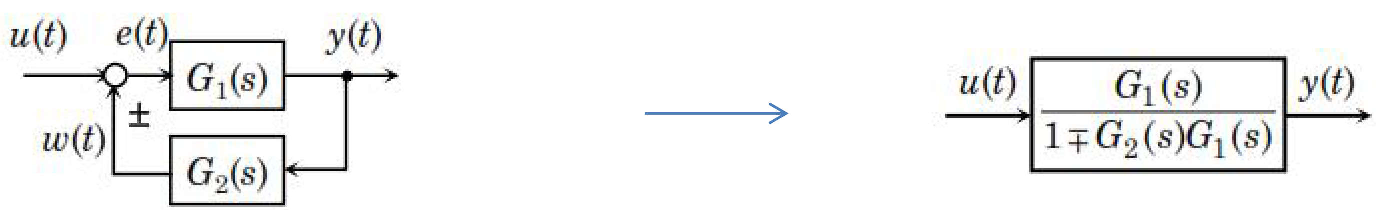
$$\begin{cases} Y(s)=G1(s)W(s) \\ W(s)=G2(s)U(s) \end{cases}$$

$Y(s)=G_1(s)G_2(s)U(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

5. Phép biến đổi đại số sơ đồ khối

- Hệ có hai khối mắc hồi tiếp

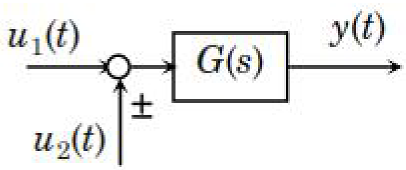


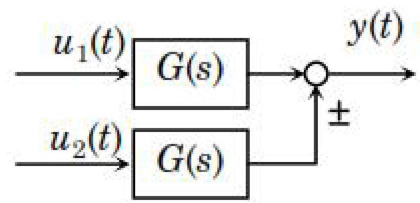
Tín hiệu đầu vào e(t) của $G_1(s)$ là tín hiệu tạo bởi tín hiệu vào của hệ thống u(t) và tín hiệu ra w(t) của $G_2(s)$:
e(t) = u(t) $\pm w(t)$.
Suy ra: $Y(s)=G_1(s)E(s)=G_1(s)[U(s) \pm G_2(s)Y(s)]$
$=G_1(s)U(s) \pm G_1(s)G_2(s)Y(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$$

5. Phép biến đổi đại số sơ đồ khối

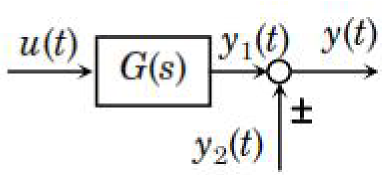
- Chuyển nút nối tín hiệu từ trước ra sau một khối

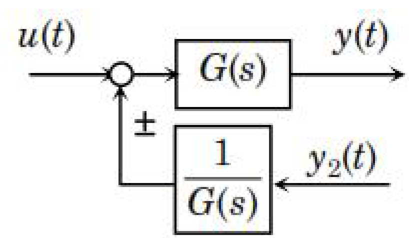




$$Y(s) = G(s)\,[U_1(s) \pm U_2(s)] = G(s)U_1(s) \pm G(s)U_2(s)$$

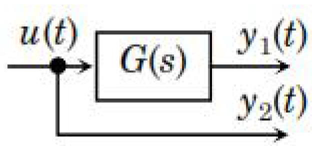
- Chuyển nút nối tín hiệu từ sau ra trước một khối

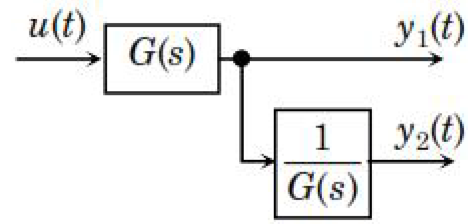




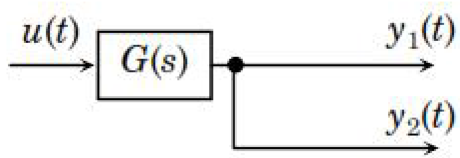
$$Y(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) = G(s)\left[U(s) \pm \frac{1}{G(s)} Y_2(s)\right]$$

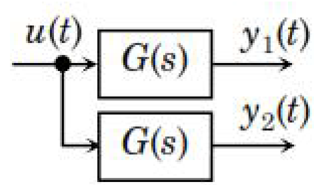
- Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một khối





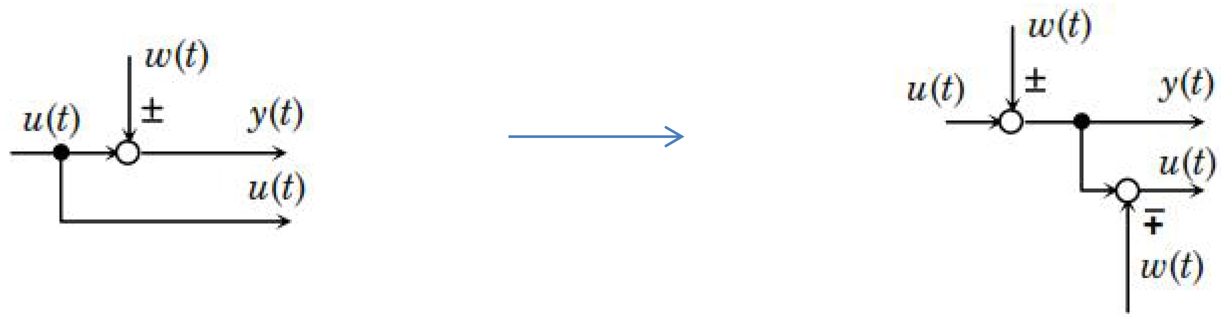
- Chuyển nút rẽ nhánh từ sau ra trước một khối



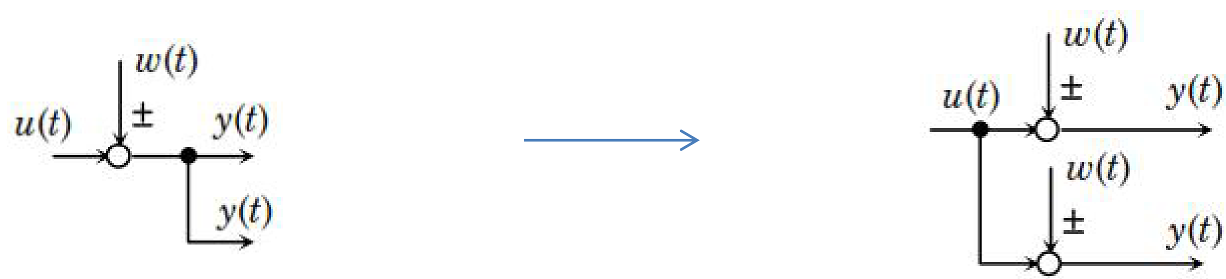


5. Phép biến đổi đại số sơ đồ khối

- Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một nút nối



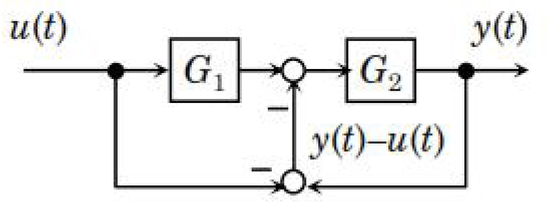
- Chuyển nút rẽ nhánh từ sau ra trước một nút nối



Ví dụ

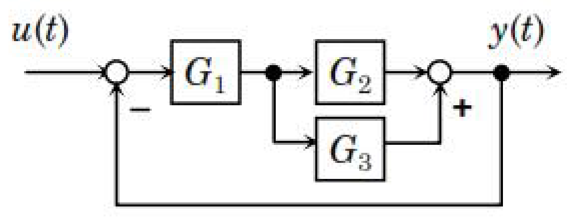
- Xác định hàm truyền đạt

Ví dụ 1:



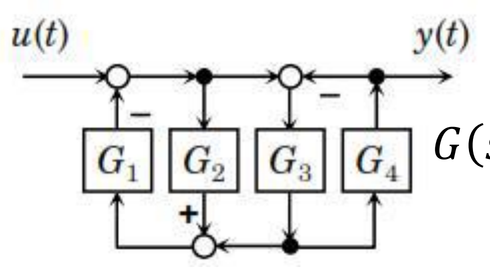
$$G(s) = \frac{G_2(1+G_1)}{1+G_2}$$

Ví dụ 2:



$$G(s) = \frac{G_1(G_2+G_3)}{1+G_1(G_2+G_3)}$$

Ví dụ 3:



$$G(s) = \frac{G_3G_4}{(1+G_1G_2)(1+G_3G_4)+G_1G_3}$$

6. Sơ đồ tín hiệu

- Nhược điểm của sơ đồ khối:
- Việc biểu diễn một hệ thống lớn thông qua các hệ con nhờ sơ đồ khối cho ta cách nhìn trực quan tổng quát về cấu trúc bên trong, tuy nhiên phải biển đổi về các dạng quen thuộc

=>Thay thế sơ đồ khối bằng sơ đồ tín hiệu:

- Các điểm nút (node) nếu so sánh với sơ đồ khối thì các điểm nút chính là điểm rẽ nhánh và điểm nối tín hiệu.
- Những đường nối các điểm nút (branch). Trong sơ đồ khối thì những đường nối này có vai trò giống như các khối. Mỗi đường nối có giá trị đúng bằng hàm truyền đạt của khối tương ứng. Đường nối không có khối được thể hiện trong sơ đồ tín hiệu bằng giá trị 1. Các đường nối phải có hướng chỉ chiều tín hiệu. Theo quy ước, chiều các đường nối luôn đương chỉ từ trái sang phải trong sơ đồ, trừ đường phản hồi.

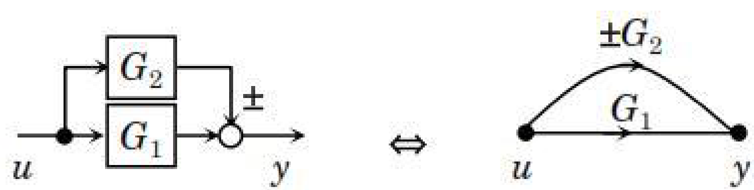
6. Sơ đồ tín hiệu

- Tín hiệu đầu vào u(t) là điểm nút chỉ có đường nối từ đó đi và không có đường nối dẫn đến nó nếu đó không phải là đường phản hồi. Điểm nút chỉ tín hiệu vào có tên gọi là điểm nút nguồn (source).
- Tín hiệu đầu ra y(t) là điểm nút chỉ có đường nối dẫn đến nó, không có đường nối từ đó đi nếu đó không phải là đường phản hồi. Điểm nút chỉ tín hiệu ra có tên gọi là điểm nút đích (sink).
- Tuyến thẳng (forward path) là những đường nối liền nhau đi từ điểm nút nguồn, tức là điểm đầu vào u(t), tới điểm đích, tức là điểm tín hiệu ra y(t) và chỉ đi qua mỗi điểm nút một lần.

6. Sơ đồ tín hiệu

- Các vòng lặp (loops) sẽ được thể hiện bằng tập những điểm nút có các đường nối với nhau tạo thành một vòng kín.
- Những vòng lặp không dính nhau (nontouching loops) là những vòng lặp không có chung một đoạn nối nào.
- Một vòng lặp và một tuyến thẳng sẽ không dính nhau nếu chúng không có chung một đoạn nối nào.
- Tất cả các điểm nút của sơ đồ tín hiệu đều là điểm cộng tín hiệu.

Ví dụ:



Công thức Mason

- Bước 1: Xác định tất cả những tuyến thẳng P_k ; k = 1; ... ;m.

- Bước 2: Xác định các vòng lặp L_k; k = 1; ...; n.

- Bước 3: Tính

$$\Delta = 1 - \sum_k L_k + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{l,m,n} L_l L_m L_n + \cdots$$

Trong đó L_i, L_j là những cặp hai vòng lặp không dính nhau(không có chung một đoạn nối nào)

L_l, L_m, L_n là những bộ ba vòng lặp không dính nhau

Công thức Mason

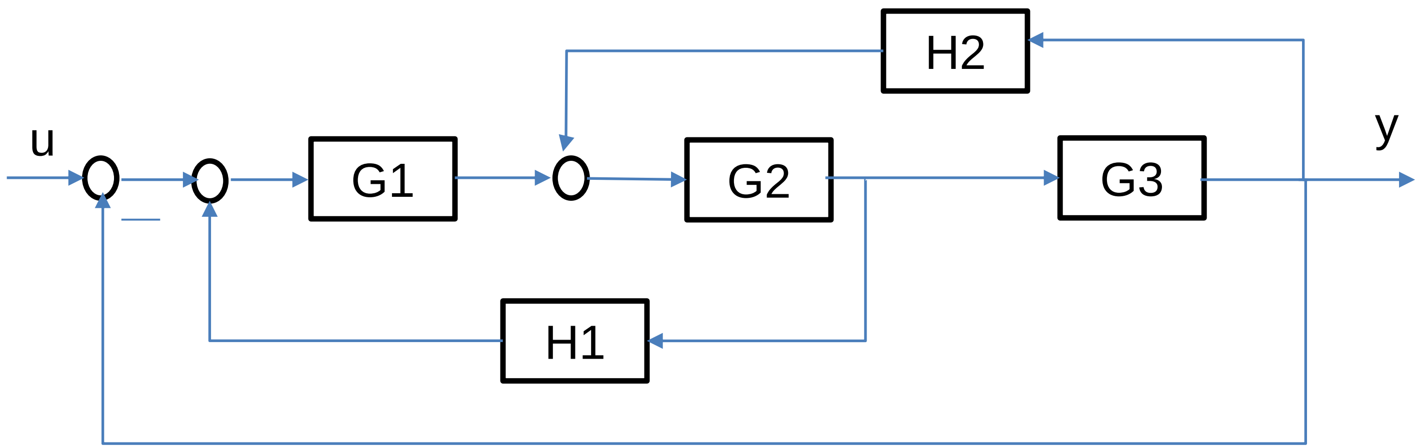
- Bước 4: Xác định Δ_k từ Δ bằng cách bỏ đi các vòng lặp có dính với P_k .

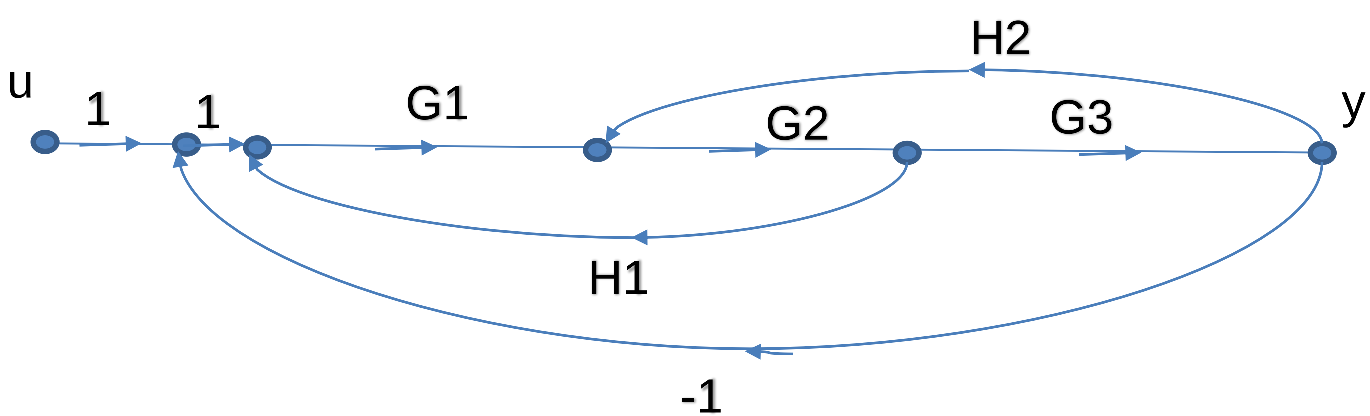
- Bước 5: Xác định hàm truyền đạt của hệ thống theo công thức Mason:

$$G(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

Ví dụ

- Ví dụ 1: Sử dụng công thức Mason để xác định hàm truyền đạt cho hệ:





Ví dụ

- B1: Hệ chỉ có một tuyến thẳng

  $P_k = G_1G_2G_3$
- B2: Hệ có 3 vòng lặp dính nhau từng đôi một

  $L_1 = G_1G_2H_1$

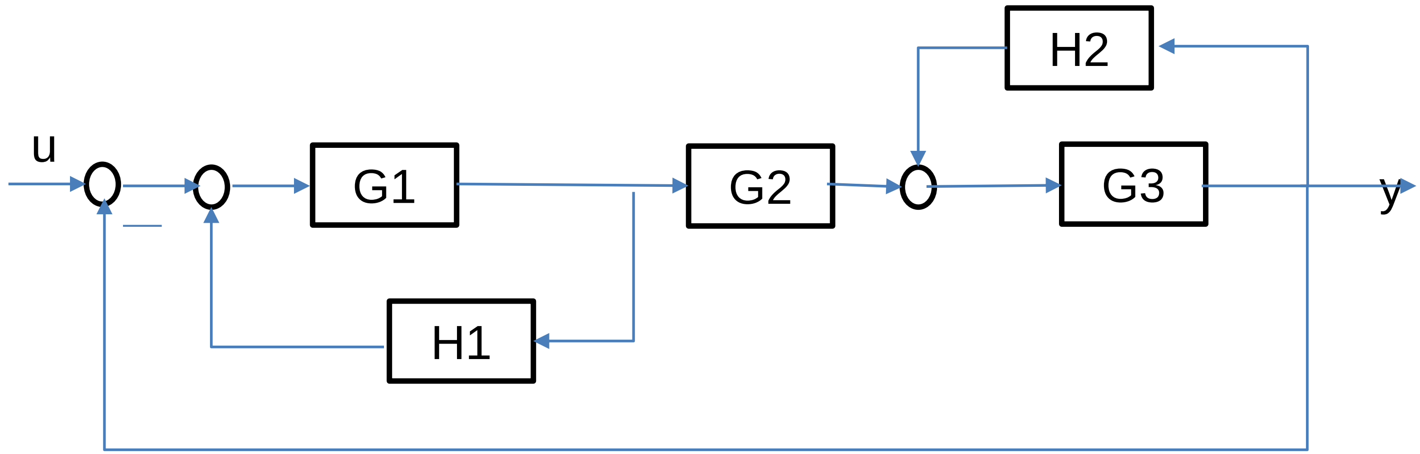
  $L_2 = G_2G_3H_2$

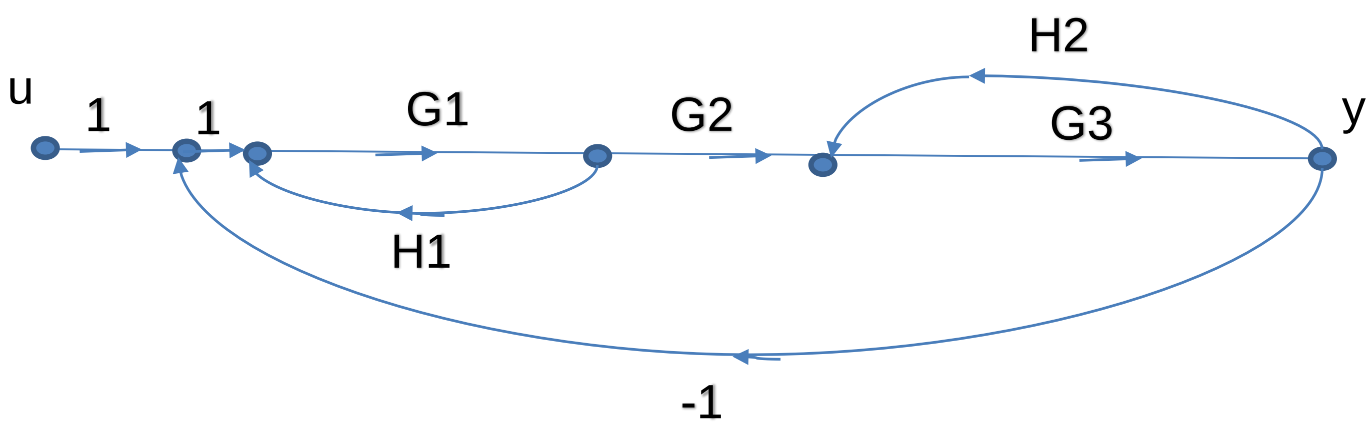
  $L_3 = -G_1G_2G_3$
- B3: $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$
- B4: Do tất cả các vòng lặp đều dính vào tuyến thẳng P1 có đoạn chung nên : $\Delta_1 = 1$
- B5: Hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

Ví dụ

- Ví dụ 2: Sử dụng công thức Mason để xác định hàm truyền đạt cho hệ:





Ví dụ

- B1: Hệ chỉ có một tuyến thẳng

  $P_1 = G_1G_2G_3$

- B2: Hệ có 3 vòng lặp

  $L_1 = G_1H_1$

  $L_2 = G_3H_2$

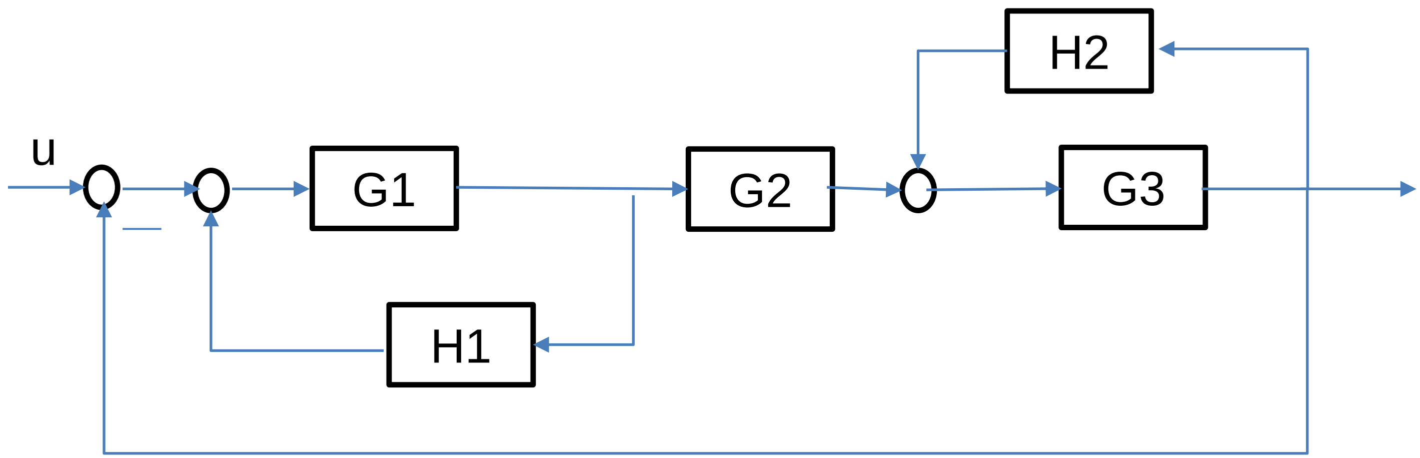
  $L_3 = -G_1G_2G_3$

- B3: $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 = 1 - G_1H_1 - G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1H_1G_3H_2$
- B4: Do tất cả các vòng lặp đều dính vào tuyến thẳng P_1 có đoạn chung nên : $\Delta_1 = 1$
- B5: Hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1H_1 - G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1H_1G_3H_2}$$

Ví dụ sử dụng Matlab

Ví dụ: Cho sơ đồ cấu trúc như hình vẽ



Dùng Matlab để tính hàm truyền đạt, khảo sát hàm quá độ , hàm trọng lượng, đặc tính tần biên pha và đồ thị Bode. Biết G1= $\frac{5}{20s+1}$; G2 = $\frac{1}{s}$; G3 = $\frac{5}{s^2+3s+1}$; H1 = 2; H2 = 5;

Ví dụ sử dụng Matlab

- Vào File / New / Script

```
G1=tf(5,[20 1]);
G2=tf(1, [1 0]);
G3=tf(5,[1 3 1]);
H1= 2;
H2 = 5;
W1= feedback(G1,-H1)   % hàm truyền đạt có hồi tiếp dương
W2=feedback(G3,-H2)
G = feedback(W1*G2*W2,1)
subplot(221);step(G)   % vẽ hàm quá độ
subplot(222);impulse(G) % hàm trọng lượng
subplot(223);nyquist(G) % đặc tính tần biên pha
subplot(224); bode(G)    % đồ thị Bode
```

- Sau đó save ten file vidu1, rồi sang cửa sổ command của Matlab danh vidu1