Nội dung

- Khái niệm, giải tích vector
- Định luật Coulomb và cường độ điện trường
- Luật Gauss và dịch chuyển điện
- Năng lượng và điện thế
- Vật dẫn và điện môi
- Tụ điện và điện dung
- Dòng điện không đổi
- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Trường điện từ dừng
- Lực từ, vật liệu từ, điện cảm
- Hệ phương trình Maxwell-Trường điện từ biến thiên

Vector chuyển dịch điện

- Vector dịch chuyển điện (còn gọi là mật độ điện thông/vector điện cảm) có thể được định nghĩa theo cường độ điện trường

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon'$$

trong đó: ε' là hằng số điện môi tương đối của môi trường

E: [V/m] , ε [F/m], **D** [C/m^2]

Vector dịch chuyển điện sinh ra bởi một điện tích điểm:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

D *không phụ thuộc vào môi trường hay* ε

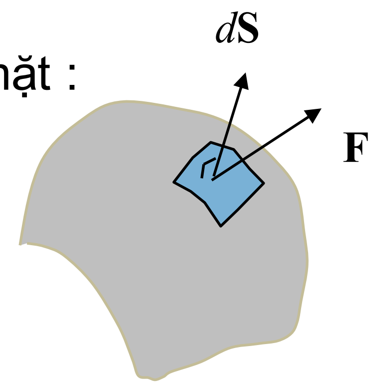
D *được xác định bởi giá trị của điện tích tạo ra trường và vị trí của điểm quan sát.*

$$\varepsilon_0 = 8{,}851.10^{-12} = \frac{1}{36\pi}.10^{-9} \text{ F/m}$$

Thông lượng (1)

- Thông lượng (điện thông) của trường vector **F** qua một mặt :

$$\Phi = \int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$$

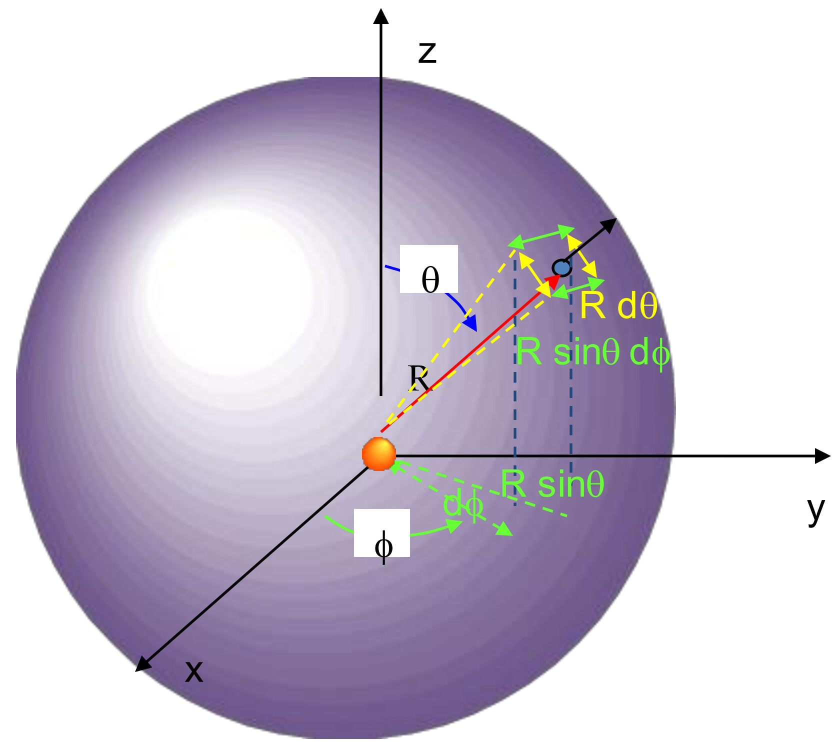


Giả sử cần tính thông lượng của **E** (do điện tích điểm Q gây ra) qua mặt cầu bán kính R (tâm: điện tích điểm), đã biết: $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$

$$\Phi = \int_{S_R} \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \int_{S_R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_r.d\mathbf{S}$$

$$= \int_{S_R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_r.\left[(Rd\theta)(R\sin\theta d\phi)\mathbf{a}_r\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o (R)^2} R^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} (\sin\theta)\, d\theta}_{2} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$



Thông lượng (2)

- Ví dụ 1:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$$

Trong chân không biết: $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z (pC/m^2)$

Tìm thông lượng qua hộp chữ nhật: $z = 2$, $0 < x < 2$, $1 < y < 3$ theo hướng $\mathbf{a}_z$.

$$\Phi = \int_0^2\int_1^3 \mathbf{D}_z dxdy = \int_0^2\int_1^3 16x^2y(2)^3 dxdy = 16\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_1^3 = 1365,33\,pC$$

Tính $\mathbf{E}$ tại $P(2, -1, 3)$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\left[8.2(-1)3^4\mathbf{a}_x + 4.2^2.3^4\mathbf{a}_y + 16.2^2(-1)3^3\mathbf{a}_z\right].10^{-12}}{8,85.10^{-12}}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -146,44\mathbf{a}_x + 146,4\mathbf{a}_y - 195,2\mathbf{a}_z V/m$$

Luật Gauss

- Thông lượng của vector chuyển dịch điện **D** chảy ra khỏi một mặt kín bằng tổng các điện tích tự do bọc trong mặt đó

$$\boxed{\Phi = \int_{mặt\ ki'n\ S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_\Sigma}$$

$$Q = \sum Q_n$$

$$Q = \int \rho_L dL$$

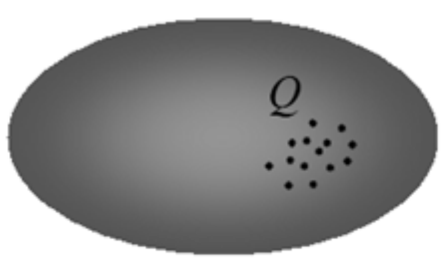
$$Q = \int_S \rho_S dS$$

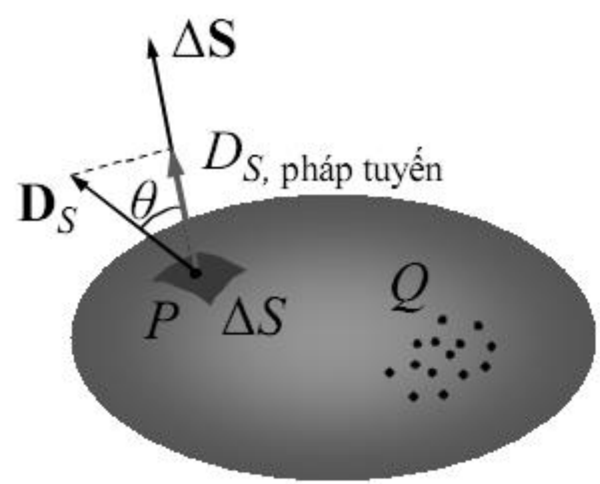
$$Q = \int_V \rho_v dV$$

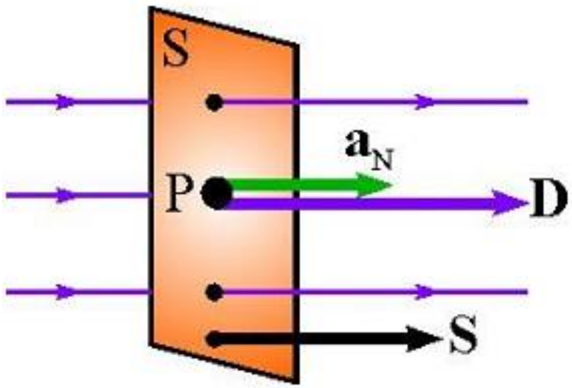
Nên chọn một mặt kín sao cho $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ là một hằng số hoặc bằng 0 (**D** trực giao với d**S**)

- Ví dụ với phân bố điện tích khối:

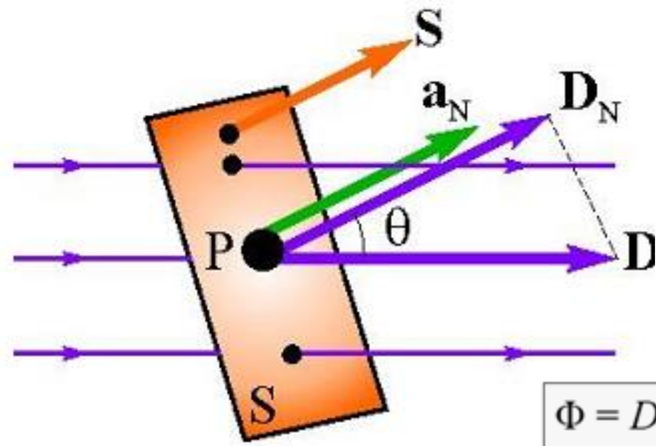
$$\Phi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{n} Q_k = \int_V \rho_v dV$$



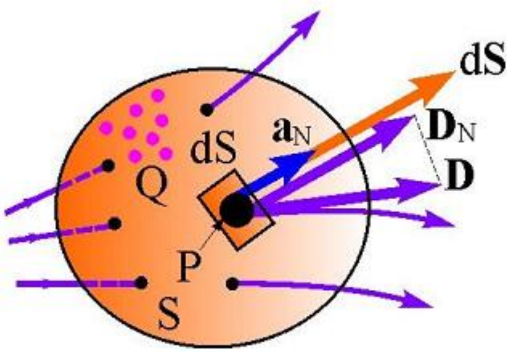




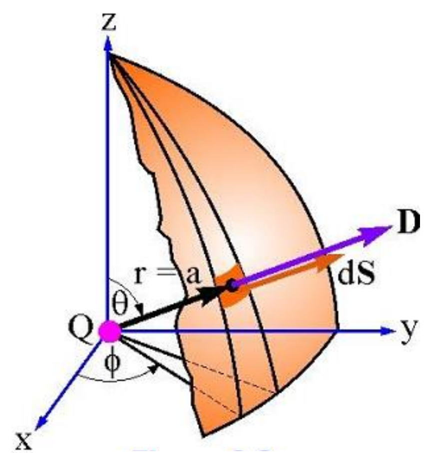
$$\Phi = DS$$



$$\Phi = D_N S$$
$$\Phi = DS\cos\theta$$
$$\Phi = \mathbf{D} \,.\, \mathbf{S}$$



$$d\Phi = D_N dS = DdS\cos\theta = \mathbf{D} \,.\, dS\mathbf{a}_N = \mathbf{D} \,.\, d\boldsymbol{S}$$

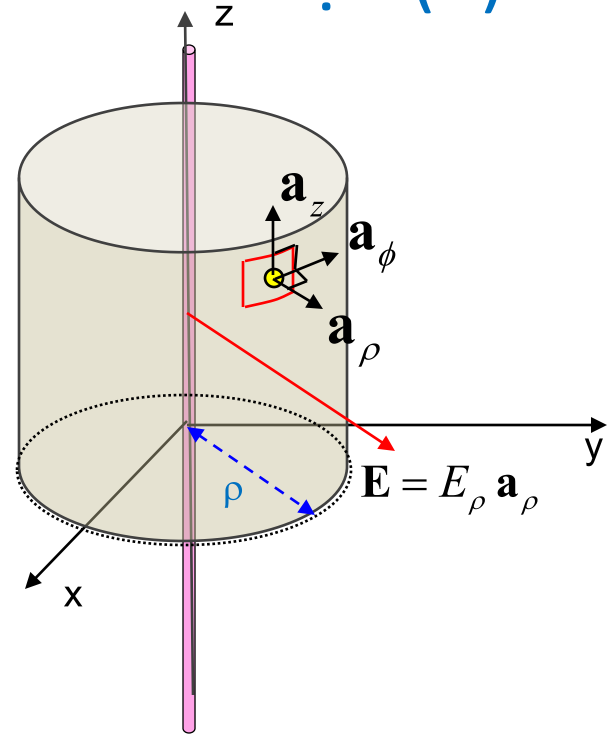


$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi a^2} dS$$

$$= \frac{Q}{4\pi a^2} \oint_S dS = \frac{Q}{4\pi a^2} S = Q$$

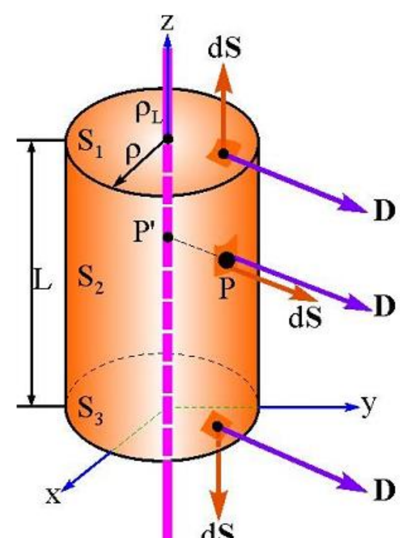
Trường do một điện tích dây dài vô hạn (1)

- Cho điện tích dây chiều dài h (coi như dài vô hạn) mang điện tích đường ρ_L. Cần khảo sát trường điện từ bằng cách sử dụng định luật Gauss



- Do tính đối xứng, trường có phương bán kính và hướng từ dây ra bên ngoài
- Do sợi dây nằm theo trục z, trường có tính đối xứng trụ.

Chọn mặt Gauss đặc biệt là mặt trụ tròn, bán kính ρ và chiều cao h.



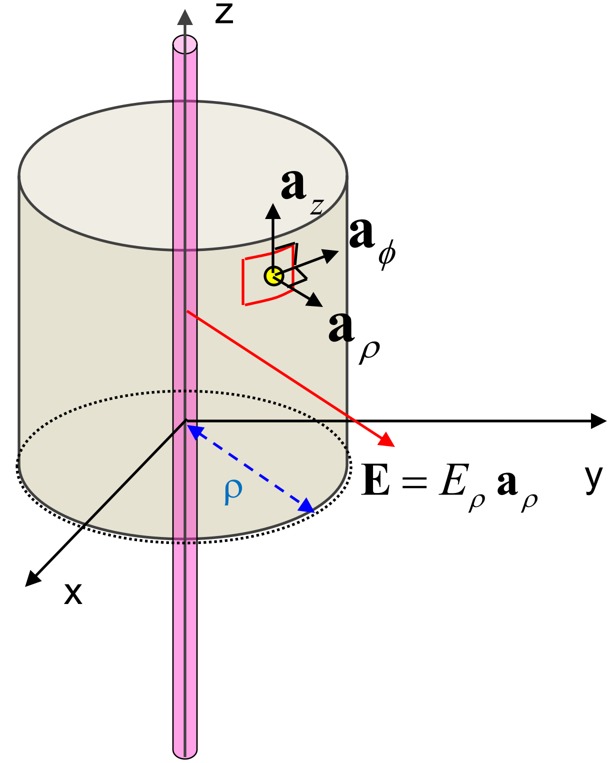
Trường do một điện tích dây dài vô hạn (2)

- Chọn mặt kín Gauss là một trụ có bán kính ρ, chiều cao h, và điện tích dây nằm xuyên tâm hình trụ.
- Theo luật Gauss:

$$\Phi_{tông} = Q_{\Sigma}$$

$$Q_{\Sigma} = \int_{dL} \rho_L dL = \int_0^h \rho_L dz = \rho_L h$$

$$\Phi_{tông} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{mặt\ bên}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{top}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{bottom}} \mathbf{D}.d\mathbf{S}$$



Đã biết: trường có phương bán kính và hướng từ dây ra bên ngoài: $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$

$$\Phi_{tông} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{mặt\ bên}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{top}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{bottom}} \mathbf{D}.d\mathbf{S}$$

$$= \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) + \int_{S_{top}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z\right) + \int_{S_{bottom}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi d\rho\left(-\mathbf{a}_z\right)\right)$$

Trường do một điện tích dây dài vô hạn (3)

$$\Phi_{tổng} = \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{mặt\ bên}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{top}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{bottom}} \mathbf{D}.d\mathbf{S}$$

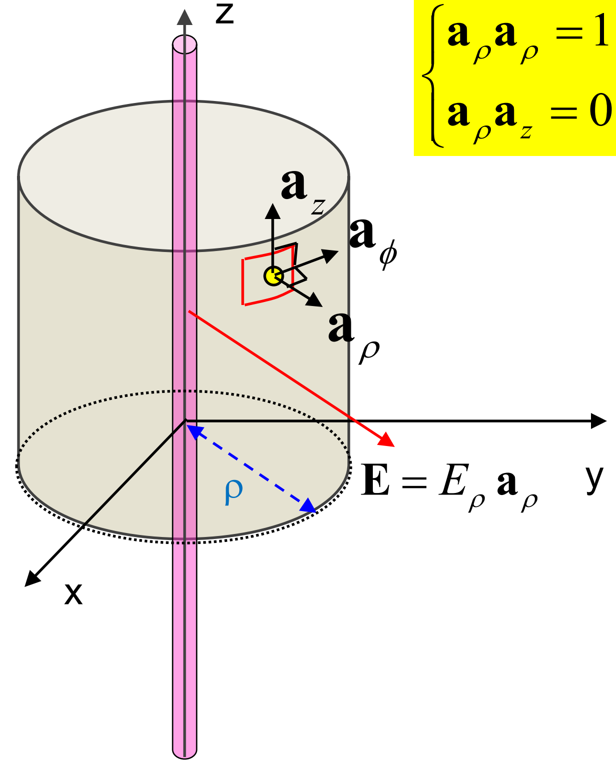
$$= \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) + \int_{S_{top}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z\right) + \int_{S_{bottom}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi d\rho\left(-\mathbf{a}_z\right)\right)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_\rho = 1 \\ \mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_z = 0 \end{cases}$$

$$= \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) + 0 + 0$$

$$= D_\rho \rho \int_{S_{mặt\ bên}} d\phi dz = D_\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = 2\pi\, \rho h\, D_\rho$$

$$\rightarrow \Phi_{tổng} = 2\pi\rho h\, D_\rho \qquad (1)$$



Mặt khác đã tính được: $Q_\Sigma = \rho_L h$ (2)

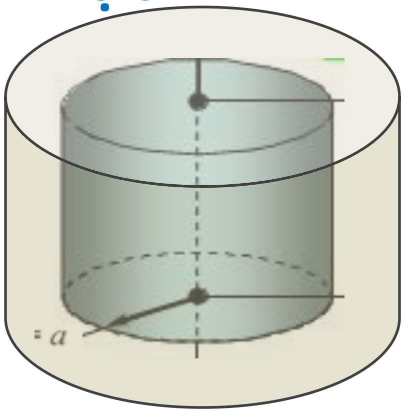
Thay (1), (2) vào công thức luật Gauss: $\Phi_{tổng} = Q_\Sigma$

$$\leftrightarrow 2\pi\rho h\, D_\rho = \rho_L h \leftrightarrow 2\pi\rho\, D_\rho = \rho_L$$

$$\rightarrow D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\,\rho} \rightarrow \mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\,\rho}\mathbf{a}_\rho$$

→Cường độ điện trường gây bởi dây dài mang điện: $\boxed{\mathbf{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\mathbf{a}_\rho}$

Trường do trụ tròn mang điện tích mặt



-Xét trong vùng ρ≥a : $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$

$Q = 2\pi a h \rho_s$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_\rho = 1 \\ \mathbf{a}_\rho \mathbf{a}_z = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_{tổng} = \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{mặt\ bên}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{top}} \mathbf{D}.d\mathbf{S} + \int_{S_{bottom}} \mathbf{D}.d\mathbf{S}$$

$$= \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) + \int_{S_{top}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z\right) + \int_{S_{bottom}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi d\rho\left(-\mathbf{a}_z\right)\right)$$

$$= \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho.\left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) + 0 + 0$$

$$= D_\rho \rho \int_{S_{mặt\ bên}} d\phi dz = D_\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = 2\pi \rho h D_\rho$$

$$\rightarrow \Phi_{tổng} = 2\pi\rho h D_\rho \qquad (1)$$

Mặt khác đã tính được: $Q_\Sigma = 2\pi a h \rho_s$ (2)

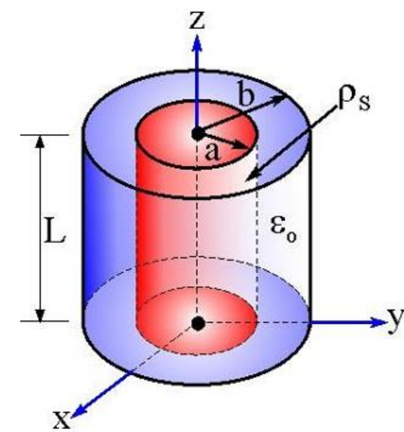
Thay (1), (2) vào công thức luật Gauss: $\Phi_{tổng} = Q_\Sigma$

$$\leftrightarrow 2\pi\rho h D_\rho = 2\pi a h \rho_s \leftrightarrow \rho D_\rho = a\rho_s$$

$$\rightarrow D_\rho = \frac{a\rho_s}{\rho} \rightarrow \mathbf{D} = \frac{a\rho_s}{\rho}\mathbf{a}_\rho \rightarrow \mathbf{E} = \frac{a\rho_s}{\varepsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho$$

Trường do hệ trụ tròn mang điện tích mặt (1)

Hai mặt trụ tròn đồng trục mang điện tích (hệ đồng trục). Trụ trong bán kính a, trụ ngoài bán kính b, dài L (gần như vô hạn). Mặt trụ trong có mật độ điện tích mặt ρ_{s1}, mặt trụ ngoài có mật độ điện tích ρ_{s2} .
Tổng điện tích mặt trong là Q



- Lưu ý với hệ trụ đồng trục:

$$Q_{\text{mặt trụ ngoài}} = -Q_{\text{mặt trụ trong}}$$

$$Q_{\text{mặt trụ ngoài}} = 2\pi bL\rho_{S,\text{mặt trụ ngoài}}$$

$$Q_{\text{mặt trụ trong}} = 2\pi aL\rho_{S,\text{mặt trụ trong}}$$

$$\rightarrow \rho_{S,\text{mặt trụ ngoài}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\text{mặt trụ trong}}$$

$$Q_{ngoa'i} = \int_0^L\int_0^{2\pi} \rho_{s2} b\,d\phi\,dz = 2\pi bL\rho_{s2} = -Q$$

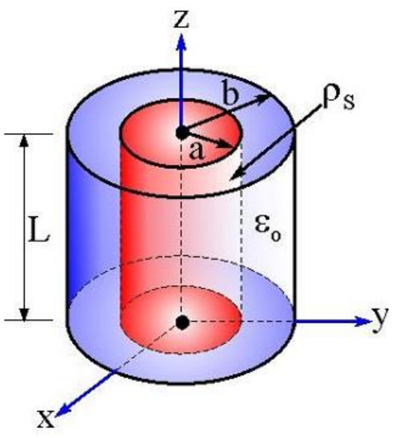
$$Q_{trong} = \int_0^L\int_0^{2\pi} \rho_{s1} a\,d\phi\,dz = 2\pi aL\rho_{s1} = Q$$

Đã biết: trường có phương bán kính và hướng từ dây ra bên ngoài:

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$$

- Chọn mặt kín Gauss S là một trụ có bán kính ρ, chiều cao L, và đồng tâm với hai trụ tròn .

Trường do hệ trụ tròn mang điện tích mặt (2)



-Xét trong vùng 0≤ρ≤a:

$$\Phi_{tông} = Q_\Sigma; \quad Q_\Sigma = 0$$

$$\rightarrow \Phi_{tông} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad D = 0$$

-Xét trong vùng a≤ρ≤b:

$$Q_\Sigma = \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_{s1} a d\phi dz = 2\pi a L \rho_{s1} = Q$$

$$\Phi_{tông} = \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho . \left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) = D_\rho .2\pi\rho L;$$

$$\Phi_{tông} = Q_\Sigma$$

$$\leftrightarrow D_\rho .2\pi\rho L = 2\pi a L \rho_{s1}$$

$$\rightarrow D_\rho = \frac{a\rho_{s1}}{\rho} \rightarrow \mathbf{D} = \frac{a\rho_{s1}}{\rho} \mathbf{a}_\rho$$

-Xét trong vùng b≤ρ:

$$\Phi_{tông} = \int_{S_{mặt\ bên}} D_\rho \mathbf{a}_\rho . \left(\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho\right) = D_\rho .2\pi\rho L$$

$$Q_\Sigma = \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_{s1} a d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_{s2} b d\phi dz$$

$$= 2\pi a L \rho_{s1} + 2\pi b L \rho_{s2}$$

$$= Q + (-Q) = 0$$

$$\Phi_{tông} = Q_\Sigma \leftrightarrow D_\rho .2\pi\rho L = 0 \quad \rightarrow D_\rho = 0 \leftrightarrow \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{E} = 0$$

Trường do trụ mang điện tích khối

Trong một thể tích trụ tròn bán kính a, chiều dài L, phân bố đều một điện tích có mật độ ρ_v [C/m³]. Tìm phân bố **E**, **D**

- Bài toán có tính đối xứng trục. Dùng luật Gauss:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \sum q \leftrightarrow D_\rho S_{xq} = \sum q$$

$$\rho \le a: \quad D_\rho.2\pi\rho L = \rho_v\left(\pi\rho^2 L\right) \to D_\rho = \rho_v\frac{\rho}{2} \leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \rho_v\frac{\rho}{2\varepsilon}\mathbf{a}_\rho$$

$$\rho \ge a: \quad D_\rho.2\pi\rho L = \rho_v\left(\pi a^2 L\right) \to D_\rho = \rho_v\frac{a^2}{2\rho} \leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \rho_v\frac{a^2}{2\varepsilon\rho}\mathbf{a}_\rho$$

Trường do một mặt phẳng mang điện

– Xét mặt trên

$\Rightarrow$ $\mathbf{D}.d\mathbf{S}$ = Ddxdy $\Rightarrow$ $\int \mathbf{D}.d\mathbf{S} = D \cdot S$

– Xét mặt dưới

$\Rightarrow$ $\mathbf{D}.d\mathbf{S}$ = Ddxdy $\Rightarrow$ $\int \mathbf{D}.d\mathbf{S} = D \cdot S$

– Xét mặt bên

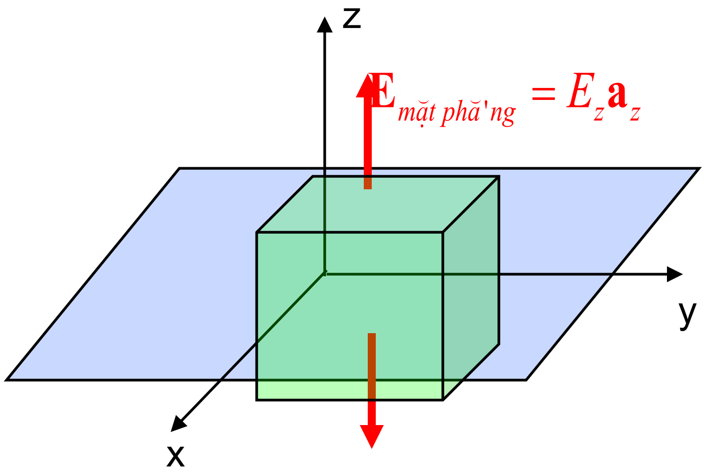
$\Rightarrow$ $\mathbf{D}.d\mathbf{S} = 0$

– Tổng thông lượng= $2D \cdot S$

– Điện tích : $\rho_s \cdot S$

$2D \cdot S = \rho_s \cdot S$

$\Rightarrow$ $D = \rho_s/2$ $\Rightarrow$ $E = \rho_s/2\varepsilon_o$



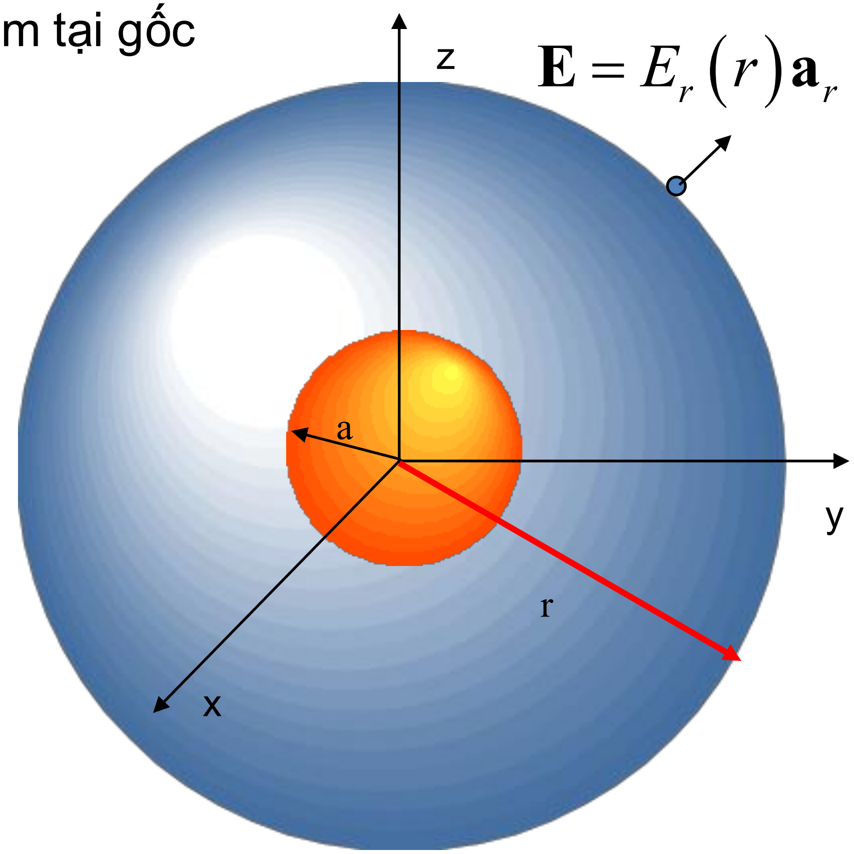
$$\boxed{E = \rho_s/2\varepsilon_o}$$

Trường do một quả cầu mang điện

- Xét quả cầu mang điện với mật độ ρ_V:

Quả cầu đồng nhất tích điện, có tâm tại gốc tọa độ và bán kính a

-Do tính đối xứng, trường sinh ra bởi quả cầu có tính đối xứng cầu, theo hướng bán kính



-Chọn mặt Gauss là mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ, bán kính r:

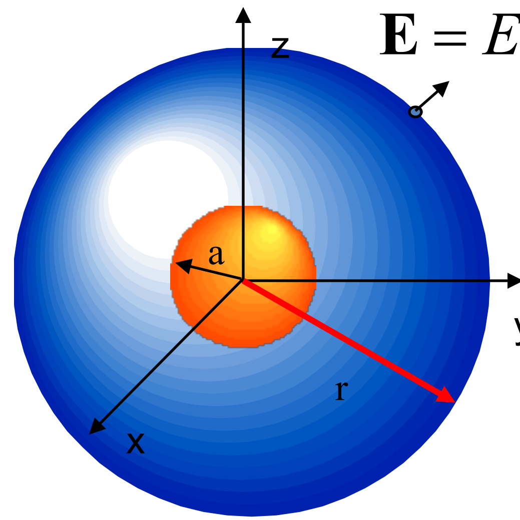
$$\rho_v = \begin{cases} \rho_{vo} & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Trường do một quả cầu mang điện

- Xét trường hợp r >a

$$Q_{tong} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{vo}$$

$$\mathbf{E} = E_r(r)\,\mathbf{a}_r$$



$$\Phi = \int\limits_{\substack{\text{câ`u} \\ \text{ba'nki'nh } r}} \mathbf{D}.d\mathbf{s}$$

$$= \int\limits_{\substack{\text{câ`u} \\ \text{ba'nki'nh } r}} (D_r\,\mathbf{a}_r).\left(r^2 \sin\theta d\theta d\phi\,\mathbf{a}_r\right) = 4\pi r^2 D_r$$

Theo luật Gauss: $4\pi r^2 D_r = Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{vo}$

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_{vo} & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$D_r = \frac{\rho_{vo} a^3}{3r^2}$$

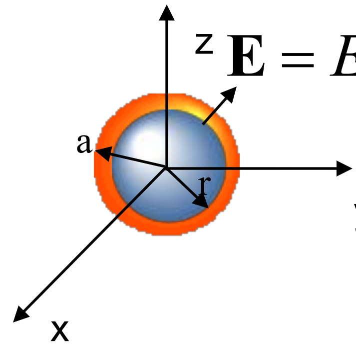
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}_r}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{vo} a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{E} = Q\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r = \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{vo}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

Trường do một quả cầu mang điện

- Xét trường hợp r<a

$$Q_{tong} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vo}$$



$$\mathbf{E} = E_r(r)\,\mathbf{a}_r$$

$$\Phi = \int_{\substack{\text{cầu} \\ \text{bán kính } r}} \mathbf{D}.d\mathbf{s}$$

$$= \int_{\substack{\text{cầu} \\ \text{bán kính } r}} (D_r \mathbf{a}_r).(r^2 \sin\theta d\theta d\phi\, \mathbf{a}_r) = 4\pi r^2 D_r$$

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_{vo} & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Theo luật Gauss: $4\pi r^2 D_r = Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vo}$

$$\Rightarrow D_r = \frac{\rho_{vo} r}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}_r}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{vo}}{3\varepsilon_0} r\,\mathbf{a}_r$$

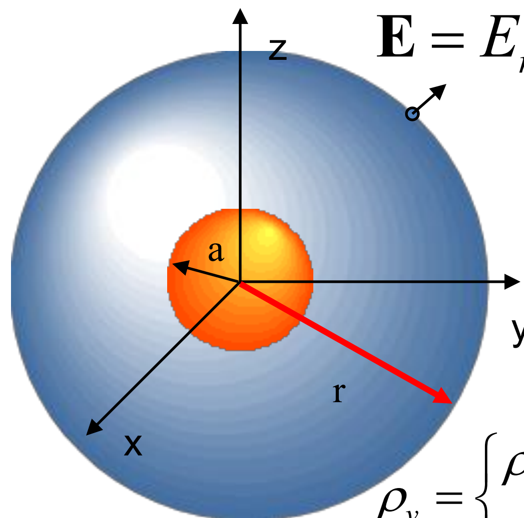
$$\mathbf{E} = Q\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r = \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vo}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

Trường do một quả cầu mang điện

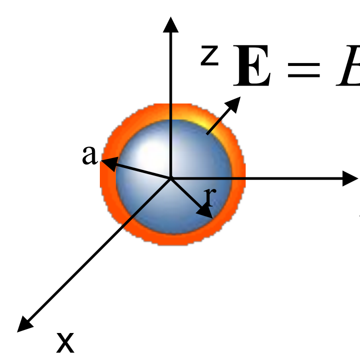
- Tổng hợp kết quả

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_{vo}}{3\varepsilon_o} r\,\mathbf{a}_r & r < a \\[2ex] \dfrac{\rho_{vo} a^3}{3\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r & r > a \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = E_r(r)\,\mathbf{a}_r$$



$$\rho_v = \begin{cases} \rho_{vo} & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

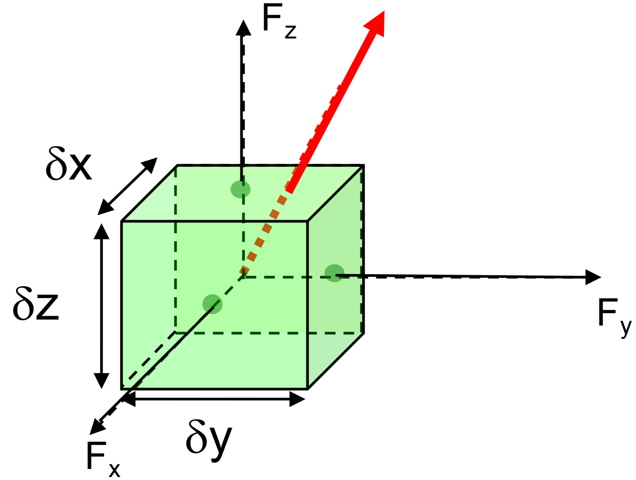


$$\mathbf{E} = E_r(r)\,\mathbf{a}_r$$

Thông lượng qua một vi phân thể tích (1)

Để tính D áp dụng luật Gauss, cần tìm được mặt Gauss (vấn đề khó)
→ chọn một mặt kín rất nhỏ (tiến đến zero)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{a}_x + F_y\mathbf{a}_y + F_z\mathbf{a}_z$$



- Xét hộp chữ nhật có tâm tại (x,y,z) đặt trong trường vector **F**. Áp dụng chuỗi Taylor, độ lớn của thành phần Fx ở mặt trước và sau hộp được xấp xỉ như sau:

$$F_x\left(mặt\ truo'c\right) \approx F_x\left(x,y,z\right) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

$$F_x\left(mặt\ \ sau\right) \approx F_x\left(x,y,z\right) - \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

$$\delta\Phi\left(mặt\ truoc\right) \approx \left(F_x\left(x,y,z\right) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\left(\delta y\,\delta z\right)$$

$$\delta\Phi\left(mặt\,sau\right) \approx -\left(F_x\left(x,y,z\right) - \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\left(\delta y\,\delta z\right)$$

Thông lượng mặt trước lấy dấu (+) vì Fx cùng hướng với vector pháp tuyến ở mặt trước

Thông lượng mặt sau lấy dấu (-) vì Fx ngược hướng với vector pháp tuyến ở mặt sau

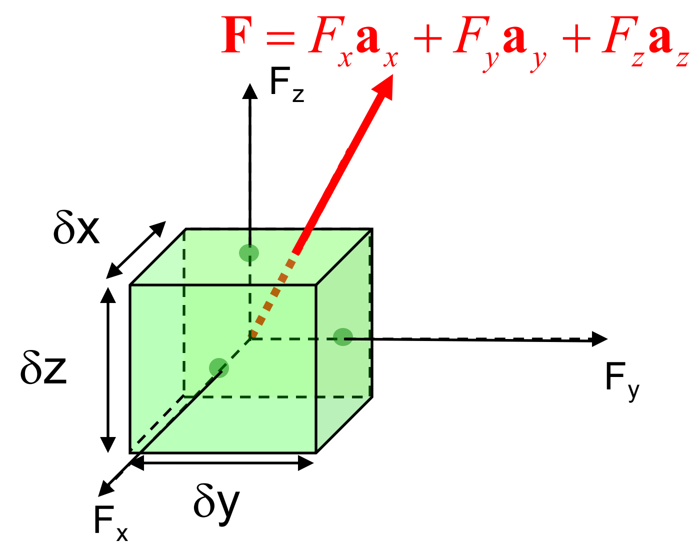
Thông lượng qua một vi phân thể tích (2)

Thông lượng tổng qua mặt trước và sau:

$$\delta\Phi_x = \delta\Phi_{truoc} + \delta\Phi_{sau}$$

$$\approx \left(F_x(x,y,z) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2} \right)(\delta y \, \delta z) - \left(F_x(x,y,z) - \frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2} \right)(\delta y \, \delta z)$$

$$\approx \frac{\partial F_x}{\partial x}\delta x \, \delta y \, \delta z$$



Tính tương tự cho Fy, Fz được tổng thông lượng đi qua tất cả các mặt hình hộp thể tích δxδyδz

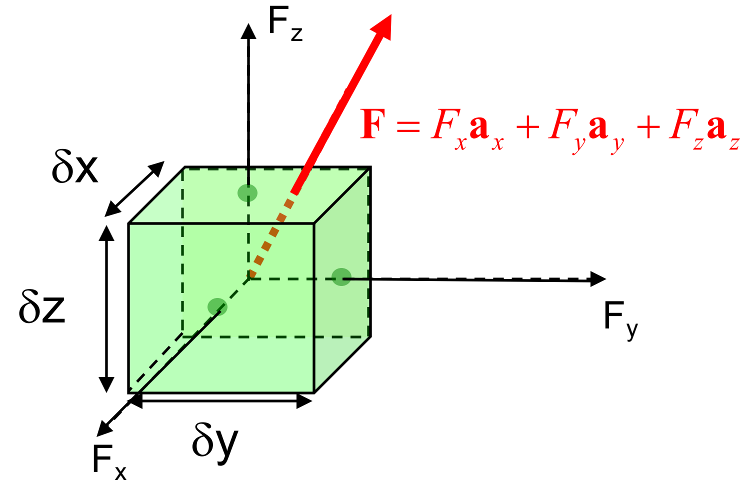
$$\delta\Phi \approx \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)\delta x \, \delta y \, \delta z$$

Khi thể tích hộp tiến dần về 0, phép xấp xỉ trên trở thành một kết quả chính xác. Ta được divergence của một trường vector **F**

Divergence của trường vector (1)

Từ thông lượng đi qua tất cả các mặt hình hộp thể tích δxδyδz

$$\delta\Phi \approx \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \delta x \, \delta y \, \delta z$$



Khi thể tích hộp tiến dần về 0, phép xấp xỉ trên trở thành một kết quả chính xác. Ta được divergence của một trường vector **F**

$$divergence(\mathbf{F}) = div\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta\Phi}{\delta v}$$

Trong hệ tọa độ Đề-các:

$$div\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$\nabla.\mathbf{F}$ *Đọc là: del dot F*

Divergence của trường vector (2)

- Công thức divergence trong hệ tọa độ trụ và tọa độ cầu:

Trụ:
$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho D_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(D_\phi\right)}{\partial\phi}+\frac{\partial\left(D_z\right)}{\partial z}$$

Cầu:
$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 D_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta D_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(D_\phi\right)}{\partial\phi}$$

Dạng vi phân của luật Gauss

$$divF = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\delta\Phi \approx \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z$$

Từ công thức div, có divergence của vector **D**

$$div\mathbf{D} = \nabla.\mathbf{D} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta\Phi}{\delta v} \qquad div\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta\Phi}{\delta v}$$

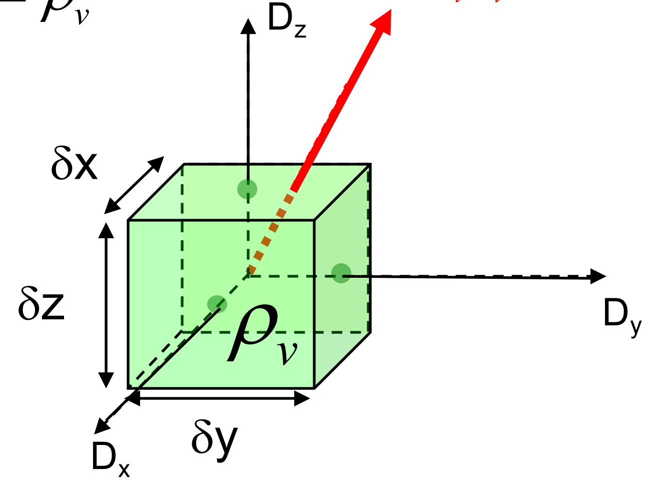
Nếu vi phân thể tích δv chứa mật độ điện tích khối ρ_v

$$\delta\Phi = \delta Q = \delta v \rho_v \Longrightarrow \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta\Psi}{\delta v} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta Q}{\delta v} = \rho_v$$

$$\Longrightarrow \nabla.\mathbf{D} = \rho_v$$

Phương trình Maxwell 1

$$\mathbf{D} = D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z$$



Theo luật Gauss: $\boxed{\Phi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{bao\ boi\ S}}$

Mặt khác: $Q_{bao\ boi\ S} = \int_V \rho_v dv$

$$\boxed{\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}}$$

Ta có dạng vi phân của luật Gauss: $\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V\ bao\ boi\ S} (\nabla \cdot \mathbf{D})\, dv}$

- Ví dụ 1

$$\mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a_x} + (x^2 z - 2xy)\mathbf{a_y} + x^2 y \mathbf{a_z} C/m^2 \text{ tại } P_A(2,3,-1)$$

*Tìm div***D**

$$div\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2yz - 2x + 0 = -10$$

- Ví dụ 2

*Tìm div***D**

$$\mathbf{D} = 2\rho z^2 \sin^2 \varphi \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \sin 2\varphi \mathbf{a}_\varphi + 2\rho^2 z \sin^2 \varphi \mathbf{a}_z C/m^2$$

tại $P_B(\rho = 2, \varphi = 110^0, z = -1)$

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$div\mathbf{D} = 4z^2 \sin^2 \varphi + 2z^2 \cos 2\varphi + 2\rho^2 \sin^2 \varphi = 9$$

Đạo hàm	Hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

- Ví dụ 3

*Tìm div***D**

$$\mathbf{D} = 2r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{a_r} + r\cos\theta\cos\varphi\mathbf{a_\theta} - r\sin\varphi\mathbf{a_\varphi} C/m^2$$

tại $P_C(r = 1.5, \theta = 30^0, \varphi = 50^0)$

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$div\mathbf{D} = 6\sin\theta\cos\varphi - \frac{\cos\varphi\cos 2\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} = 2,57$$

- Ví dụ 4

Trong miền không gian bao bởi trụ tròn ρ=2cm; 1cm $\le$ z $\le$ 4cm, cho vector

$$\mathbf{D} = \rho^2 \mathbf{a}_\rho + 3z\mathbf{a}_z$$

Hãy kiểm nghiệm định lý Divergence bằng cách tính các tích phân:

$$\int div\mathbf{D}dv$$

$$\oint \mathbf{D}.d\mathbf{S}$$

- Ví dụ 5

Trong không gian giữa hai mặt cầu bán kính 2m và 3m cho $\mathbf{D} = \dfrac{\cos^2\phi}{r^3}\mathbf{a}_r$

Tính: a) $\int div\mathbf{D}dv$ b) $\oint \mathbf{D}.d\mathbf{S}$