TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG
CHƯƠNG 3: Phép biến đổi Laplace

TS. Jingxian Wu

wuj@uark.edu

Nội Dung Chính

- Mở Đầu
- Biến đổi Laplace
- Các tính chất của biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược
- Các ứng dụng của biến đổi Laplace

Mở Đầu

- **Tại sao lại cần phép biến đổi Laplace ?**

- Phân tích trong miền tần số với biến đổi Fourier rất hữu dụng trọng việc nghiên cứu về tín hiệu và hệ thống LTI.

* Tích chập trong miền thời gian => Phép nhân trong miền tần số

- Vấn đề: Nhiều tín hiệu không có biến đổi Fourier

$x(t)=\exp(at)u(t), a>0$ $\qquad$ $x(t)=tu(t)$

- Biến đổi Laplace có thể giải quyết vấn đề này

* Nó tồn tại cho hầu hết tín hiệu thông thường
* Tuân theo các tính chất tương tự như biến đổi Fourier
* Nó không mang bất kỳ ý nghĩa vật lý nào, chỉ là công cụ toán học tạo điều kiện cho việc phân tích

-Biến đổi Fourier cho ta cách biểu diễn tín hiệu trên miền tần số

Nội Dung Chính

- Mở đầu
- **Biến đổi Laplace**
- Các tính chất của biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược
- Các ứng dụng của biến đổi Laplace

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE HAI PHÍA

- **Biến đổi Laplace hai phía:**

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \qquad s = \sigma + j\omega$$

-$s = \sigma + j\omega$ là một giá trị phức
-s cũng thường được gọi là tần số phức
-Ký hiệu :

$$X_B(s) = L\left[x(t)\right]$$

$$x(t) \leftrightarrow X_B(s)$$

- **Miền thời gian và miền phức S**

-x(t) : là hàm của thời gian t $\rightarrow$ x(t) được gọi là tín hiệu trên miền thời gian
-X_B (s) : là một hàm của s$\rightarrow$ X_B (s) được gọi là tín hiệu trên miền s
Miền s cũng được gọi là miền tần số phức

UNIVERSITY OF ARKANSAS

BIẾN ĐỔI LAPLACE

- **Miền thời gian và miền s:**

- x(t) : là hàm của thời gian t → x(t) được gọi là tín hiệu trên miền thời gian

-X_B (s) : là một hàm của s→ X_B (s) được gọi là tín hiệu trên miền s

*Miền s cũng được gọi là miền tần số phức

- Bằng cách chuyển đổi tín hiệu từ miền thời gian sang miền s, chúng ta có thể đơn giản hóa rất nhiều việc phân tích hệ thống LTI.

- Phân tích hệ thống trên miền s:

1. Chuyển đổi các tín hiệu trên miền thời gian sang miền s bằng biến đổi Laplace.
2. Thực hiện biểu diễn việc phân tích hệ thống miền s
3. Chuyển kết quả trên miền s về miền thời gian

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE HAI PHÍA

- **Ví dụ :**

  -Tìm biến đổi Laplace hai phía của: x(t)=exp(-at)u(t)

- **Miền hội tụ :**

  -Phạm vi của s mà biến đổi Laplace của tín hiệu hội tụ

  -Biến đổi Laplace luôn chứa 2 thành phần :

  *Biểu thức toán học của biến đổi Laplace

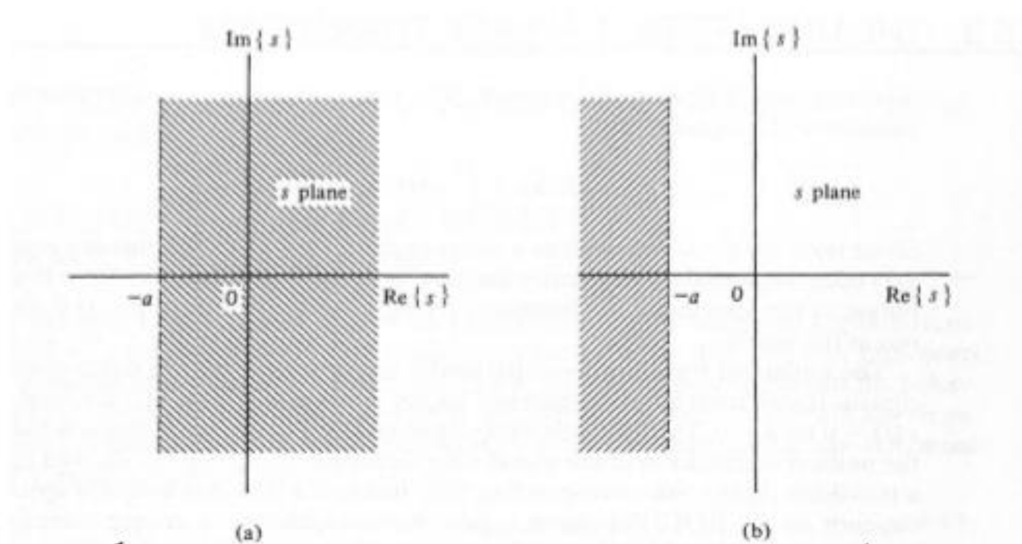
  *Miền hội tụ

UNIVERSITY OF ARKANSAS

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE HAI PHÍA

- **Ví dụ :**

  -Tìm biến đổi Laplace hai phía của: x(t)=exp(-at)u(t)



$$X_B(s) = \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) > -a \qquad\qquad X_B(s) = \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) < -a$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE HAI PHÍA

- **Ví dụ**
  - Tìm biến đổi Laplace hai phía của:

$$x(t)=3\exp(-2t)u(t)+4\exp(t)u(-t)$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

- **Biến đổi Laplace một phía:**

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt$$

- 0^- : Giá trị của x(t) tại t=0 được xem xét

- Hữu ích khi xử lí tín hiệu nhân quả hoặc hệ thống nhân quả

*Tín hiệu nhân quả :x(t)=0,t<0.

*Hệ thống nhân quả :h(t)=0,t<0.

- Chúng ta sẽ gọi đơn giản biến đổi Laplace một phía là biến đổi Laplace.

UNIVERSITY OF ARKANSAS

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

- **Ví dụ : Tìm biến đổi Laplace một phía của các tín hiệu sau .**

1. $x(t)= A$

2. $x(t)=\delta(t)$

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

- **Ví dụ :**

3. $x(t)= \exp(j2t)$

4. $x(t)= \cos(2t)$

5. $x(t)= \sin(2t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

BIẾN ĐỔI LAPLACE: BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

Signal	Transform	ROC
1. u(t)	$\frac{1}{s}$	Re{s}>0
2. u(t) – u(t-a)	$\frac{1-\exp[-at]}{s}$	Re{s}>0
3. $\delta(t)$	1	For all x
4. $\delta(t-a)$	exp[-at]	For all x
5. t^nu(t)	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n=1,2,\ldots$	Re{s} >0
6. exp[-at]u(t)	$\frac{1}{s+a}$	Re{s} > -a
7. t^nexp[-at]u(t)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	Re{s} > -a
8. $\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	Re{s} >0

Signal	Transform	ROC
9. $\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega_0^2}$	Re{s} >0
10. $\cos^2\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{s^2+2\omega_0^2}{s(s^2+4\omega_0^2)}$	Re{s} >0
11. $\sin^2\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	Re{s} >0
12. exp[-at] $\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	Re{s} > -a
13. exp[-at] $\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	Re{s} > -a
14. t $\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{x^2-\omega_0^2}{(x^2+\omega_0^2)^2}$	Re{s} >0
15. t $\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(x^2+\omega_0^2)^2}$	Re{s} >0

UNIVERSITY OF ARKANSAS

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Biến đổi Laplace
- **Các tính chất của biến đổi Laplace**
- Phép biến đổi Laplace ngược
- Các ứng dụng của biến đổi Laplace

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: TUYẾN TÍNH

- **Tính tuyến tính:**

  - Nếu $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$ $\quad$ $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$

  - Khi đó :

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$$

Miền hội tụ là giao giữa các miền hội tụ của hai tín hiệu gốc

- **Ví dụ :**

  -Hãy tìm biến đổi Laplace của $[A+B\exp(-bt)]u(t)$

CÁC TÍNH CHẤT: DỊCH THỜI GIAN

- **Dịch thời gian**

  - Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$ và $t_0 > 0$

  - Khi đó :

$$x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow X(s)\exp(-st_0)$$

  Miền hội tụ không thay đổi

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: DỊCH TRÊN MIỀN S

- **DỊCH trên miền s**
  - Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$ $\quad Re(s) > \sigma$
  - Khi đó $\quad Re(s) > \sigma + Re(s_0)$

$$y(t) = x(t)\exp(s_0 t) \leftrightarrow X(s - s_0)$$

- **Ví dụ :**
  - Hãy tìm biến đổi Laplace của $x(t) = A\exp(-\alpha t)\cos(\omega_0 t)u(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: CO GIÃN THỜI GIAN

- **CO giãn thời gian:**

  - Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$ $\qquad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_1$

  - Khi đó $\qquad \mathrm{Re}\{s\} > a\,\sigma_1$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- **Ví dụ :**

  - Hãy tìm biến đổi Laplace của $x(t)=u(at)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM TRÊN MIỀN THỜI GIAN

- **Đạo hàm trên miền thời gian :**

  - Nếu $g(t) \leftrightarrow G(s)$

  - Khi đó :

$$\frac{dg(t)}{dt} \leftrightarrow sG(s) - g(0^-)$$

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2G(s) - sg(0^-) - g'(0^-)$$

$$\frac{d^ng(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nG(s) - s^{n-1}g(0^-) - \ldots - sg^{n-2}(0^-) - g^{n-1}(0^-)$$

- **Ví dụ:**

  -Hãy tìm biến đổi Laplace của $g(t)=(\sin^2 \omega t)u(t)$, $g(0^-)=0$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM TRÊN MIỀN THỜI GIAN

- **Ví dụ :**
  - Hãy sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân :

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0, \qquad y(0^-)=3 \quad y'(0^-)=1$$

CÁC TÍNH CHẤT: ĐẠO HÀM TRÊN MIỀN S

- **Đạo hàm trên miền s :**

  -Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$

  -Khi đó

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

- **Ví dụ :**

  -Hãy tìm biến đổi Laplace của $t^n u(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH CHẬP

- **Tích chập :**

  - Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$ $\quad$ $h(t) \leftrightarrow H(s)$

  - Khi đó $x(t) \otimes h(t) \leftrightarrow X(s)H(s)$

    Miền hội tụ của $X(s)H(s)$ là giao của các miền hội tụ của $X(s)$ và $H(s)$

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH PHÂN TRÊN MIỀN THỜI GIAN

- **Tích phân trên miền thời gian**

-Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$

-Khi đó

$$\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

- **Ví dụ**

- Hãy tìm biến đổi Laplace của $r(t)=tu(t)$

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ: Tìm tích chập**

$$rect\left(\frac{t-a}{2a}\right)\otimes rect\left(\frac{t-a}{2a}\right)$$

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ :**

Đối với một hệ LTI, đầu vào là $x(t)=\exp(-2t)u(t)$, và đầu ra của hệ thống là $y(t)=[\exp(-t)+\exp(-2t)-\exp(-3t)]u(t)$

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống

CÁC TÍNH CHẤT: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ :**

  -Hãy tìm biến đổi Laplace của đáp ứng xung của hệ thống LTI được biểu diễn bởi phương trình vi phân sau

$$2y''(t)-3y'(t)+y(t)=3x'(t)+x(t)$$

Giả thiết hệ thống ban đầu ở trạng thái nghỉ ($y^n(0)=x^n(0)=0$)

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐiỀU CHẾ

- **Điều chế :**

-Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$

- Khi đó

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(s+j\omega_0)+X(s-j\omega_0)\right]$$

$$x(t)\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{j}{2}\left[X(s+j\omega_0)+X(s-j\omega_0)\right]$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐIỀU CHẾ

- **Ví dụ :**

  - Hãy tìm biến đổi Laplace của $x(t)=\exp(-at)\sin(\omega_0 t)u(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU

- **Định lý giá trị đầu:**

  - Nếu tín hiệu x(t) khả vi vô hạn trên khoảng xung quanh $x(0^+)$ thì :

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

s= **∞** phải thuộc miền hội tụ ∞

-Diễn biến của x(t) với giá trị t nhỏ được xác định bởi diễn biến của X(s) với giá trị s lớn .

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU

- **Ví dụ :**

Biến đổi Laplace của x(t) là: $$X(s)=\frac{cs+d}{(s-a)(s-b)}$$

Hãy tìm giá trị của $x(0^+)$

TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ CUỐI

- **Định lý giá trị cuối :**

  -Nếu $x(t) \leftrightarrow X(s)$

  - Khi đó $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$, s=0 phải thuộc miền hội tụ

- **Ví dụ :**

  -Đầu vào x(t)=Au(t) được đưa tới một hệ thống với hàm truyền

như sau $H(s) = \dfrac{c}{s(s+b)+c}$, hãy tìm giá trị của $\lim_{t\to\infty} y(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

TÍNH CHẤT

1. Linearity	$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n X_n(s)$
2. Time shift	$x(t-t_0)u(t-t_0)$	$X(s)\exp(-st_0)$
3. Frequency shift	$\exp(s_0 t)x(t)$	$X(s-s_0)$
4. Time scaling	$x(\alpha t),\ \alpha > 0$	$1/\alpha\ X(s/\alpha)$
5. Differentiation	$dx(t)/dt$	$s\,X(s) - x(0^-)$
6. Integration	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
7. Multiplication by t	$t\,x(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
8. Modulation	$x(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[X(s-j\omega_0)+X(s+j\omega_0)]$
	$x(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2j}[X(s-j\omega_0)-X(s+j\omega_0)]$
9. Convolution	$x(t)*h(t)$	$X(s)H(s)$
10. Initial value	$x(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} s\,X(s)$
11. Final value	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{s\to 0} s\,X(s)$

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Biến đổi Laplace
- Các tính chất của biến đổi Laplace
- **Phép biến đổi Laplace ngược**
- Các ứng dụng của biến đổi Laplace

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

- **Phép biến đổi Laplace ngược :**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \exp(st) ds$$

- Để tính được tích phân trên cần dùng đến tích phân đường trên mặt phẳng phức → Khó

- **Trường hợp đặc biệt của phép biến đổi Laplac ngược :**

-Trong nhiều trường hợp, biến đổi Laplace có thể biểu diễn bởi hàm phân thức của s:

$$X(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

-Các bước tìm phép biến đổi ngược:

1.Khai triển X(s) thành tổng các phân thức tối giản

2.Tìm phép biến đổi ngược thông qua bảng biến đổi Laplace

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

- **Nhắc lại : Khai triển thành phân thức tối giản khi các nghiệm đa thức là các nghiệm phân biệt:**

$$X(s) = \frac{A}{s-a_1} + \frac{B}{s-a_2} + \frac{C}{s-a_3}$$

$$A = (s-a_1)X(s)\big|_{s=a_1} \qquad B = (s-a_2)X(s)\big|_{s=a_2} \qquad C = (s-a_3)X(s)\big|_{s=a_3}$$

- **Ví dụ :**

Hãy tìm biến đổi Laplace ngược của

$$X(s) = \frac{2s+1}{s^3+3s^2-4s}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

- **Ví dụ :**

-Hãy tìm biến đổi Laplace ngược :

$$X(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 3s + 2}$$

***Nếu đa thức tử có bậc cao hơn hoặc bằng bậc của đa thức mẫu , ta cần sắp xếp lại sao cho bậc của đa thức mẫu cao hơn.**

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

- **Nhắc lại : Khai triển thành phân thức tối giản khi đa thức mẫu có nghiệm bội hai (nghiệm kép) :**

$$X(s) = \frac{1}{(s-a)^2(s-b)} = \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_1}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

$$A_2 = (s-a)^2 X(s)\big|_{s=a} \qquad A_1 = \frac{d}{ds}[(s-a)^2 X(s)]\big|_{s=a} \qquad B = (s-b)X(s)\big|_{s=b}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

- **Đa thức mẫu có nghiệm bội N**

$$X(s) = \frac{1}{(s-a)^N (s-b)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_N}{(s-a)^N} + \frac{B}{s-b}$$

$$A_k = \frac{1}{(N-k)!} \frac{d^{N-k}}{ds^{N-k}} [(s-a)^N X(s)] |_{s=a}$$

$$k = 1, \ldots, N$$

$$B = (s-b) X(s) |_{s=b}$$

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Biến đổi Laplace
- Các ính chất của biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược
- **Các ứng dụng của biến đổi Laplace**

ỨNG DỤNG: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI

- **Hệ thống LTI :**

-Phương trình hệ thống : phương trình vi phân biểu diễn mối quan hệ giữa đầu ra và đầu vào của hệ thống

$$y^N(t) + a_{N-1}y^{N-1}(t) + \ldots + a_1 y^1(\mathrm{t}) + a_0 y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^m(t)$$

$$y^N(t) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n y^n(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^m(t)$$

- Biểu diễn trên miền s:

$$[s^N + \sum_{n=0}^{N-1} a_n s^n]Y(s) = [\sum_{m=0}^{M} b_m s^m]X(\mathrm{s})$$

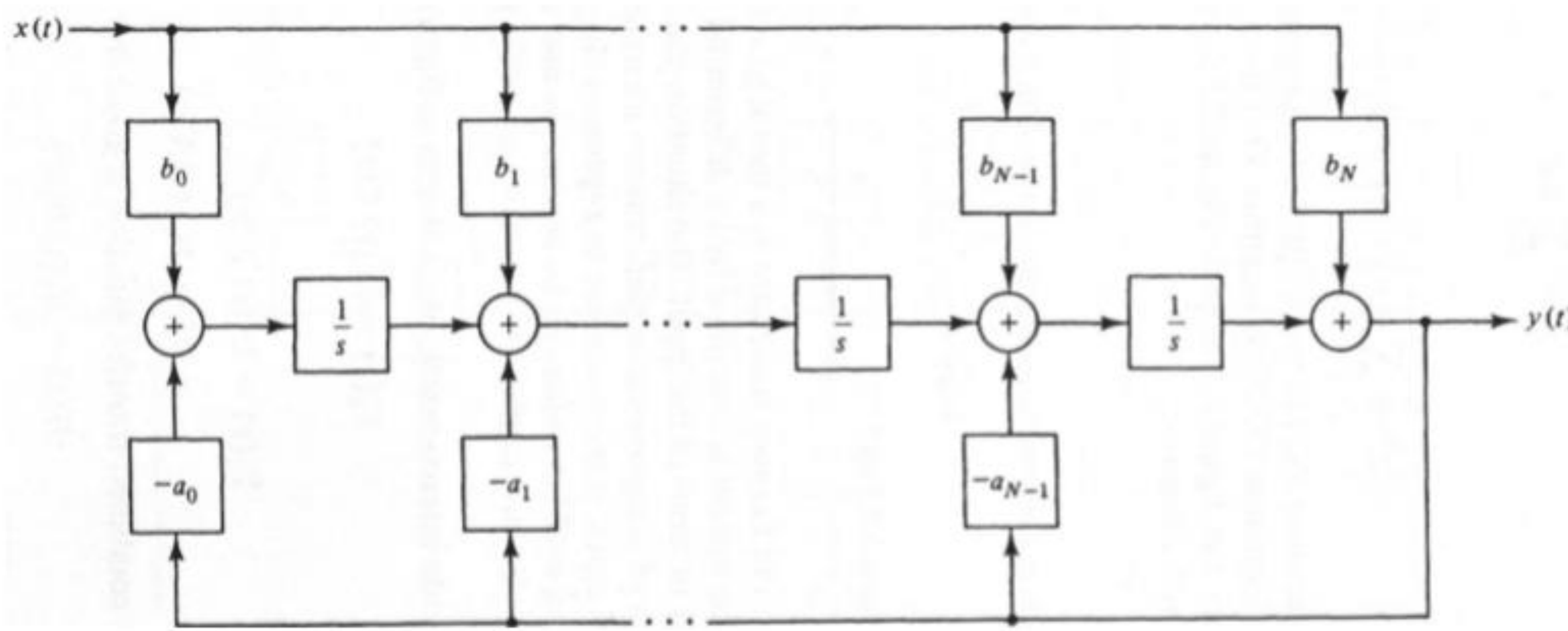
- Hàm truyền:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{s^N + \sum_{n=0}^{N-1} a_n s^n}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI

- Sơ đồ mô phỏng (Dạng chuẩn thứ nhất)



ỨNG DỤNG: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI

- **Ví dụ :**

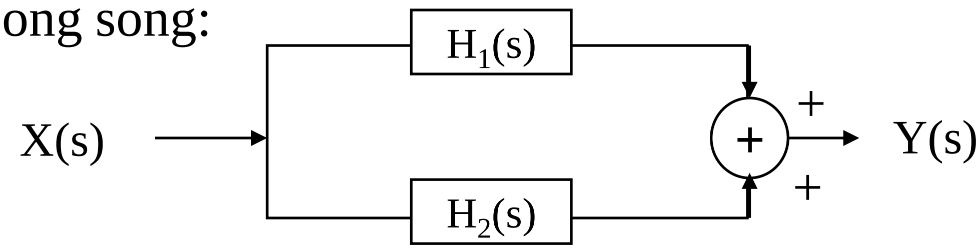
Hãy biểu diễn cách thực hiện hệ thống ở dang chuẩn thứ nhất với hàm truyền sau :

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

ỨNG DỤNG: GHÉP NỐI HỆ THỐNG

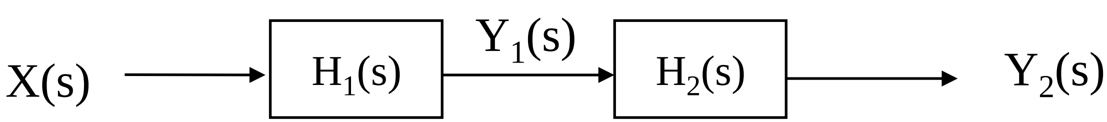
- **Ghép nối hệ thống :**

-Song song:



$$H(S) = H_1(s) + H_2(s)$$

- Nối tiếp:



$$H(S) = H_1(s)H_2(s)$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI

- **Ví dụ :**

-Hãy biểu diễn hệ thống dưới đây thành dạng nối tiếp của các hệ thống con :

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

ỨNG DỤNG: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI

- **Ví dụ :**

  -Hãy tìm hàm truyền của hệ thống:

ỨNG DỤNG: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI

- **Điểm cực và điểm không :**

$$H(s) = \frac{(s - z_M)(s - z_{M-1})\ldots(s - z_1)}{(s - p_N)(s - p_{N-1})\ldots(s - p_1)}$$

- Các điểm không: z_1 , z_2 ,…z_M
- Các điểm cực: p_1 ,p_2 ,…p_N

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: TÍNH ỔN ĐỊNH

- **Nhắc lại : Ổn định BIBO**

  -Đầu vào bị chặn luôn dẫn đến việc đầu ra cũng bị chặn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

- **Vị trí các điểm cực của H(s) trong miền s xác định được nếu hệ thống có ổn định BIBO hay không:**

$$H(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{(s-s_2)^m} + \ldots + \frac{A_N}{s-s_N}$$

-Các điểm cực đơn : Bậc của các cực là 1

-Các điểm cực bội : các cực có bậc cao hơn

ỨNG DỤNG: TÍNH ỔN ĐỊNH

- **Trường hợp 1: Các điểm cực đơn nằm ở nửa bên trái mặt phẳng phức s**

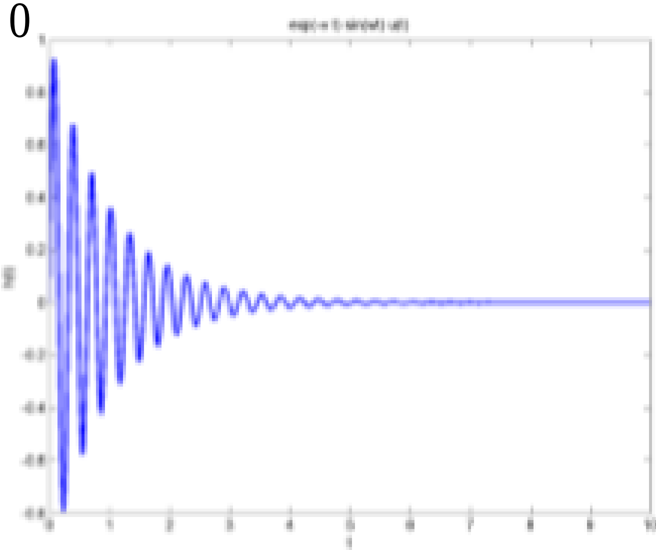
$$\frac{1}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}=\frac{1}{(s-\sigma_k+j\omega_k)(s-\sigma_k-j\omega_k)},\sigma_k<0$$

$$p_1=\sigma_k-j\omega_k$$

$$p_2=\sigma_k+j\omega_k$$

$$h_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\exp(\sigma_k t)\sin(\omega_k t)u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h_k(t)|\,dt=$$



Nếu tất cả các điểm cực của hệ thống nằm ở nửa mặt phẳng bên trái thì hệ là ổn định.

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: TÍNH ỔN ĐỊNH

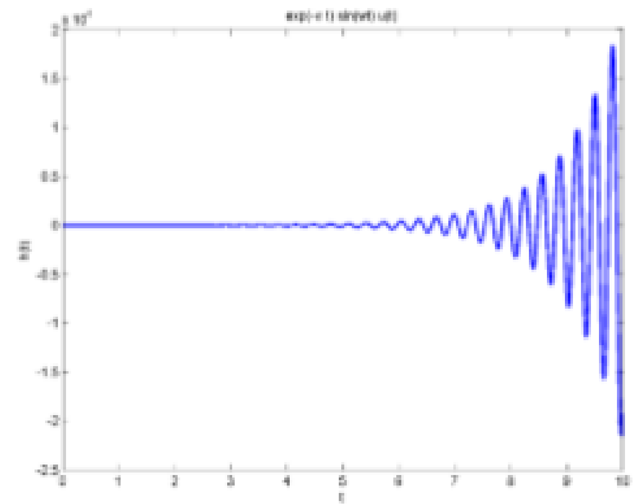
- **Trường hợp 2: các điểm cực đơn nằm ở nửa bên phải mặt phẳng s:**

$$\frac{1}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}=\frac{1}{(s-\sigma_k+j\omega_k)(s-\sigma_k-j\omega_k)},\sigma_k<0$$

$$p_1=\sigma_k+j\omega_k$$

$$p_2=\sigma_k-j\omega_k$$

$$h_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\exp(\sigma_k t)\sin(\omega_k t)u(t)$$



Nếu có ít nhất một điểm cực của hệ thống thuộc nửa mặt phẳng bên phải thì hệ sẽ không ổn định

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: TÍNH ỔN ĐỊNH

- **Trường hợp 3 : Các điểm cực đơn nằm trên trục ảo**

$$\frac{1}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}=\frac{1}{(s-\sigma_k+j\omega_k)(s-\sigma_k-j\omega_k)},\sigma_k=0$$

$$h_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\exp(\sigma_k t)\sin(\omega_k t)u(t)$$

Nếu các điểm cực của hệ thống nằm trên trục ảo, hệ là không ổn định

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: TÍNH ỔN ĐỊNH

- **Trường hợp 4 : Các điểm bội nằm ở nửa bên trái mặt phẳng s**

$$h_k(t) = \frac{1}{\omega_k} t^m \exp(\sigma_k t) \sin(\omega_k t) u(t), \sigma_k < 0$$

Ổn định

- **Trường hợp 5: Các điểm cực nằm ở nửa bên phải mặt phẳng s:**

$$h_k(t) = \frac{1}{\omega_k} t^m \exp(\sigma_k t) \sin(\omega_k t) u(t), \sigma_k > 0$$

Không ổn định

- **Trường hợp 6: Các điểm cực nằm ở trên trục ảo**

$$h_k(t) = \frac{1}{\omega_k} t^m \sin(\omega_k t) u(t)$$

Không ổn định

UNIVERSITY OF ARKANSAS

ỨNG DỤNG: TÍNH ỔN ĐỊNH

- **Ví dụ:**

  - Kiểm tra tính ổn định của hệ sau :

$$H(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 6s + 13}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS