Trường điện từ

Giảng viên: TS. Trần Thị Thảo
Viện Điện, ĐH Bách khoa Hà Nội
thao.tranthi@hust.edu.vn
https://sites.google.com/site/thaott3i/

Trường điện từ

- Số đvht: 3
- Mục đích: Giúp SV nắm được:
  + Các khái niệm cơ bản của trường điện từ (TĐT)
  + Vận dụng TĐT để giải các bài toán thường gặp trong kỹ thuật điện
- Yêu cầu:
  + Kiến thức về giải tích toán học, vật lý điện học
  + Giờ giảng trên lớp, làm bài tập ở nhà

-Tài liệu:

+ Cơ sở lý thuyết trường điện từ - Nguyễn Bình Thành

+ Engineering Electromagnetics - W.H. Hayt, J.A. Buck – McGraw-Hill

+ Electromagnetic Fields and Waves, Magdy F. Iskander, Prentice Hall

Ứng dụng của trường điện từ

- Kỹ thuật điện: máy điện, màn chắn điện, cảm biến Hall,..
- Điện tử viễn thông: Antenna,
- Đời sống: CRT, laser, bếp từ,…
- An ninh quốc phòng: RF, máy dò kim loại,
- Kỹ thuật y sinh: máy chụp MRI, noninvasive ECG,

Nội dung

- Khái niệm, giải tích vector
- Định luật Coulomb và cường độ điện trường
- Luật Gauss và dịch chuyển điện
- Năng lượng và điện thế
- Vật dẫn và điện môi
- Tụ điện và điện dung
- Dòng điện không đổi
- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Trường điện từ dừng
- Lực từ, vật liệu từ, điện cảm
- Hệ phương trình Maxwell-Trường điện từ biến thiên

Khái niệm trường điện từ (1)

- Là một dạng vật chất cơ bản, chuyển động với vận tốc c trong mọi hệ quy chiếu quán tính trong chân không.

- Thể hiện sự tồn tại và vận động qua tương tác với một dạng vật chất khác là những hạt hoặc những môi trường mang điện.

- Điện từ trường lan truyền trong chân không với vận tốc ánh sáng

$$c = 299\,792\;458 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \text{ m/s}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}851 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

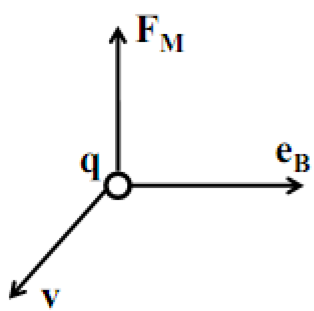
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Khái niệm trường điện từ (2)

- Trong một hệ quy chiếu có quán tính, trường điện từ có hai mặt tương tác lực (lực Lorentz) với hạt (vật nhỏ) mang điện tùy theo cách chuyển động của vật trong hệ.

-Lực điện $\mathbf{F}_E$: Thay đổi theo vị trí của vật, không phụ thuộc vào vận tốc của vật

-Lực từ $\mathbf{F}_M$: Chỉ tác động khi vật chuyển động



Khái niệm trường điện từ (3)

- Vector cường độ điện trường **E**:

- Xét một vật nhỏ mang điện tích dq, đặt tĩnh trong một hệ quy chiếu có quán tính, chịu một lực d$\mathbf{F}_E$. Khi đó ta có thể nói ở lân cận vật mang điện có một điện trường.

- Vector trạng thái về cường độ điện trường là biến trạng thái đo và biểu diễn năng lực tác động của lực Lorenx về điện ở lân cận vật mang điện trong trường điện từ: d**F** = dq.**E**

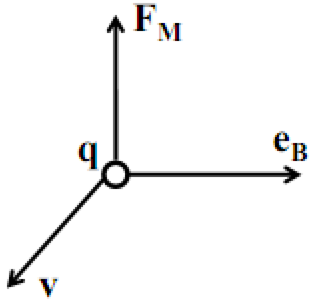
$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Cm}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Khái niệm trường điện từ (4)

- Vector cường độ từ cảm **B**:

- Xét một vật nhỏ mang điện tích dq, chuyển động trong một hệ quy chiếu có quán tính, chịu một lực d$\mathbf{F}_M$. Khi đó ta có thể nói ở lân cận vật mang điện có một từ trường.

-Lực d$\mathbf{F}_M$ hướng theo chiều e_F, vuông góc với vận tốc **v** của hạt mang điện, và vuông góc với một chiều e_B xác định trong mỗi điểm trong hệ quy chiếu.



$$d\mathbf{F}_M = dq.(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = dq.vB\mathbf{e}_v\times\mathbf{e}_B$$

$$dq.v = dq.\frac{dl}{dt} = idl$$

$$d\mathbf{F}_M = iBdl\mathbf{e}_v\times\mathbf{e}_B \quad [\mathrm{T}]$$

Khái niệm trường điện từ (5)

- Trường điện từ tĩnh

-Trường gắn với môi trường mang những phân bố tĩnh tại trong một hệ quy chiếu $$\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

- Trường điện từ dừng

-Trường có kèm theo một phân bố dòng điện không đổi trong các môi trường dẫn đứng yên trong hệ quy chiếu quan sát.

-Là một trường hợp riêng của trường điện từ khi các trạng thái trường không biến thiên theo thời gian nhưng vẫn có quá trình dòng và tiêu tán trong môi trường dẫn $$\frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

- Trường điện từ biến thiên

-Trường có các đại lượng đặc trưng biến đổi theo không gian & thời gian.

$$\frac{\partial I}{\partial t} \neq 0$$

Giải tích vector

- Trường vô hướng- có hướng
- Các phép toán trên vector
  - Tích có hướng
  - Tích vô hướng
- Các hệ tọa độ
  - Tọa độ Đề-các
  - Tọa độ Trụ
  - Tọa độ cầu

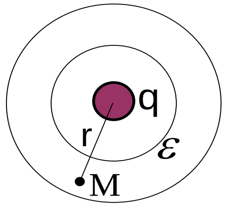
Vô hướng và vector

- Vô hướng (scalar): Đại lượng đặc trưng bởi *độ lớn*, ví dụ nhiệt độ, điện thế tại một điểm $\varphi(x, y, z, t)$
- Vector: Đại lượng đặc trưng bởi cả *độ lớn* và *hướng*, ví dụ vận tốc, lực, cường độ điện trường/từ trường

  Ký hiệu: $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ hoặc $\vec{E}, \vec{B}$

▪ Trường vô hướng: trong miền không gian V có một trường vô hướng khi: tại mỗi điểm M thuộc không gian ấy có một giá trị xác định của đại lượng vô hướng φ. Nếu hàm này không phụ thuộc vào thời gian, ta có trường dừng

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\varepsilon_0 = 8{,}851\times10^{-12} = \frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\,\text{F/m}$$

Vector (1)

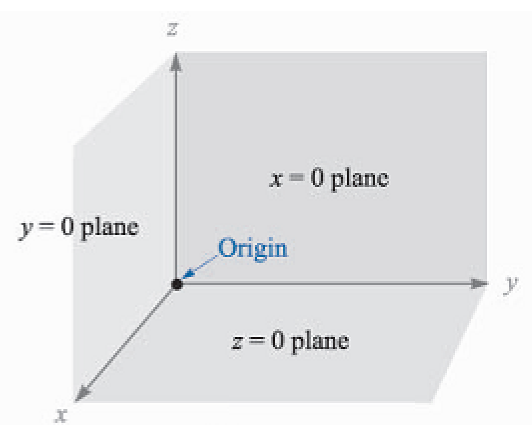
- Trường vector: trong miền không gian V có một trường vector nếu tại mỗi điểm M thuộc không gian đó xác định một vector
- Một vector có thể phân tích thành các thành phần theo các trục tọa độ. Ký hiệu: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x\mathbf{a}_x + F_y\mathbf{a}_y + F_z\mathbf{a}_z$

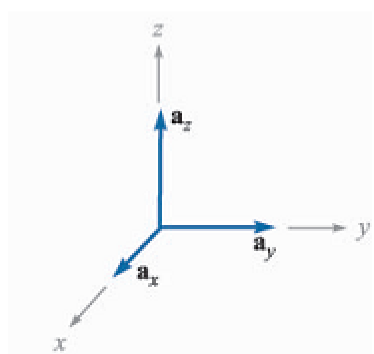
  hoặc: $\mathbf{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$

  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ là các vector đơn vị theo các trục x,y,z (độ lớn bằng 1)

- Độ lớn của một vector: $F = |\mathbf{F}| = |F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z \qquad |\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$



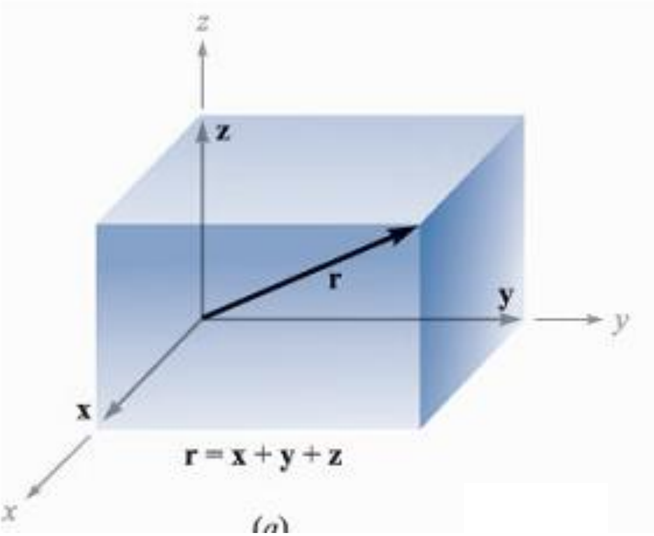


Vector (2)

- Biểu diễn một vector theo đơn vị của nó:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$$

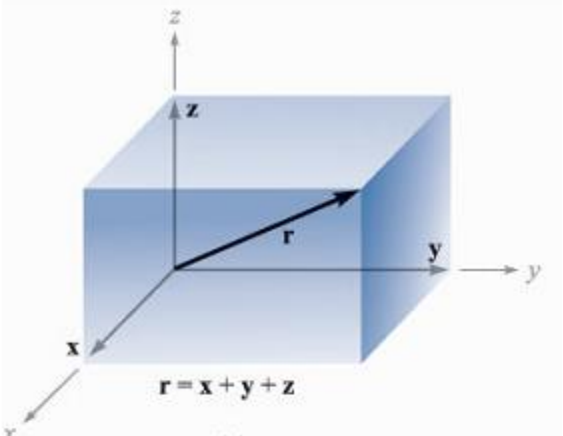
$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$



$$\mathbf{r} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = 3$$

$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y + \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$



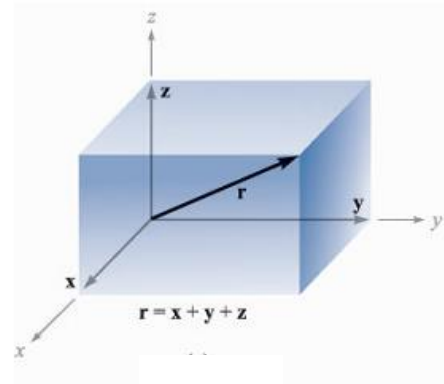
(a)

$$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

Vector (3)



- Biểu diễn một vector theo đơn vị của nó:

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z \qquad |\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$

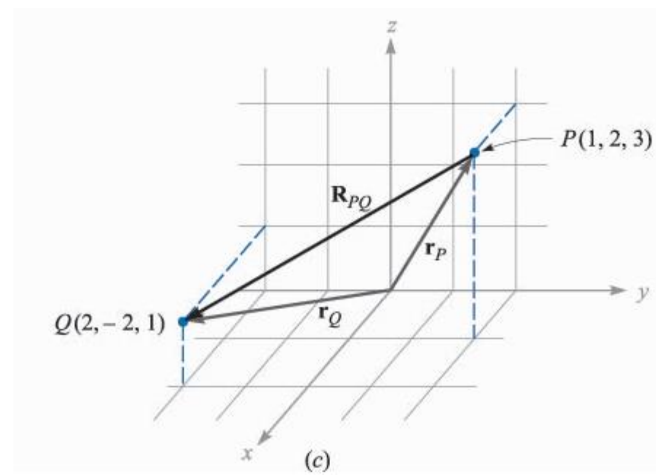
$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x - \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

- Vector khoảng cách giữa hai điểm: $P(x_0, y_0, z_0); Q(x_1, y_1, z_1)$

$$\mathbf{R}_{PQ} = (x_1 - x_0)\mathbf{a}_x + (y_1 - y_0)\mathbf{a}_y + (z_1 - z_0)\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (2-1)\mathbf{a}_x + (-2-2)\mathbf{a}_y + (1-3)\mathbf{a}_z$$

$$= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$



Giải tích vector

- Trường vô hướng- có hướng
- Các phép toán trên vector
  - Tích vô hướng
  - Tích có hướng
- Các hệ tọa độ
  - Tọa độ Đề-các
  - Tọa độ Trụ
  - Tọa độ cầu

Các phép toán trên vector

- Cho hai vector: $\mathbf{A} = A_1\mathbf{a}_1 + A_2\mathbf{a}_2 + A_3\mathbf{a}_3$ $\quad\mathbf{B} = B_1\mathbf{a}_1 + B_2\mathbf{a}_2 + B_3\mathbf{a}_3$

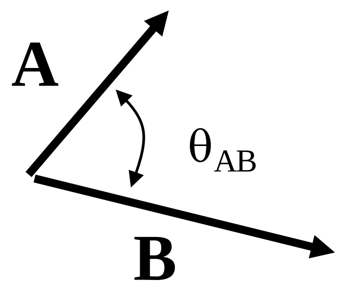
- Cộng/trừ vector:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left(A_1 \pm B_1\right)\mathbf{a}_1 + \left(A_3 \pm B_3\right)\mathbf{a}_2 + \left(A_3 \pm B_3\right)\mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) + \mathbf{C}$$

- Tích vô hướng: $\mathbf{A.B} = \left|A\right| \cdot \left|B\right| \cdot \cos\left(\theta_{AB}\right)$



$$\mathbf{A.B} = \mathbf{B.A}$$

$$\mathbf{A.}\left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right) = \mathbf{A.B} + \mathbf{A.C}$$

$$k\left(\mathbf{A.B}\right) = \left(k\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \mathbf{A}\left(k\mathbf{B}\right)$$

$$\text{Work} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

Tích vô hướng

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \left(A_1\mathbf{a}_1 + A_2\mathbf{a}_2 + A_3\mathbf{a}_3\right).\left(B_1\mathbf{a}_1 + B_2\mathbf{a}_2 + B_3\mathbf{a}_3\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}.\mathbf{B} = {} & \left(A_1 \cdot B_1\right)\left(\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1\right)+\left(A_2 \cdot B_2\right)\left(\mathbf{a}_2.\mathbf{a}_2\right)+\left(A_3 \cdot B_3\right)\left(\mathbf{a}_3.\mathbf{a}_3\right) \\ & +\left(A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1\right)\left(\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\right)+\left(A_1 \cdot B_3 + A_3 \cdot B_1\right)\left(\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_3\right)+\left(A_2 \cdot B_3 + A_3 \cdot B_2\right)\left(\mathbf{a}_2.\mathbf{a}_3\right)\end{aligned}$$

- Nếu $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ theo thứ tự vuông góc với nhau:

$$\left(\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1\right)=1 \quad \left(\mathbf{a}_2.\mathbf{a}_2\right)=1 \quad \left(\mathbf{a}_3.\mathbf{a}_3\right)=1 \quad \left(\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\right)=0 \quad \left(\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_3\right)=0 \quad \left(\mathbf{a}_2.\mathbf{a}_3\right)=0$$

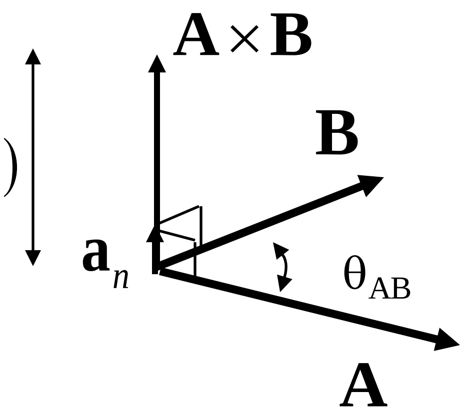
$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \left(A_1 \cdot B_1\right)+\left(A_2 \cdot B_2\right)+\left(A_3 \cdot B_3\right)$$

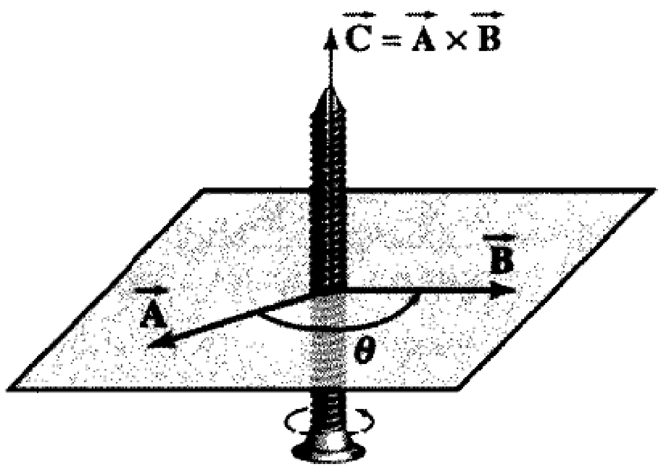
Tích có hướng (1)

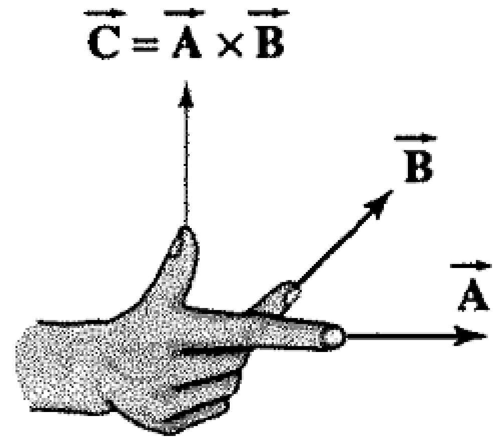
- Tích có hướng:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = |A|\cdot|B|\cdot\sin\left(\theta_{AB}\right)\mathbf{a}_n$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |A|\cdot|B|\cdot\mathbf{sin}\left(\theta_{AB}\right)$$

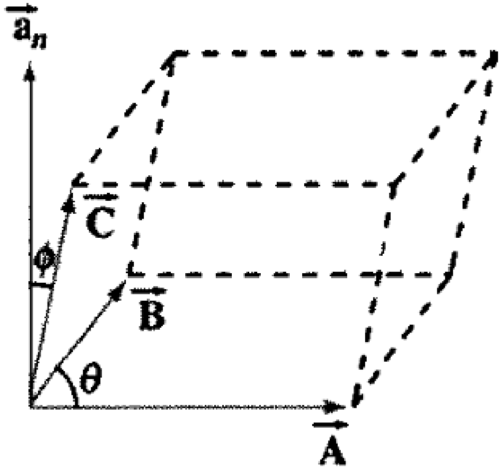






Tích có hướng (2)

- Ví dụ:



$$\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

Hệ tọa độ Đề-các

- Tọa độ A(x,y,z)
- Vector đơn vị: $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$

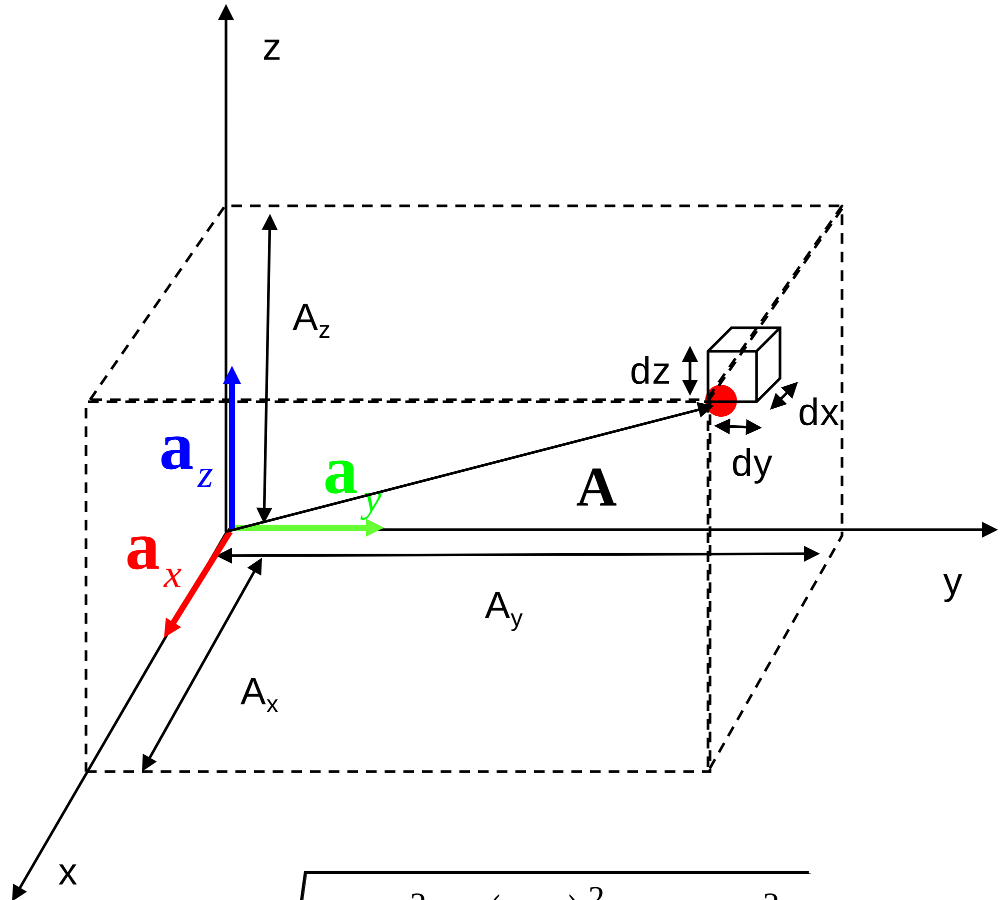
  $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$

- Vector vị trí:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$



$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Vi phân trong hệ tọa độ Đề-các

Vi phân khối:

$$dv = dxdydz$$

Vi phân diện tích các mặt:

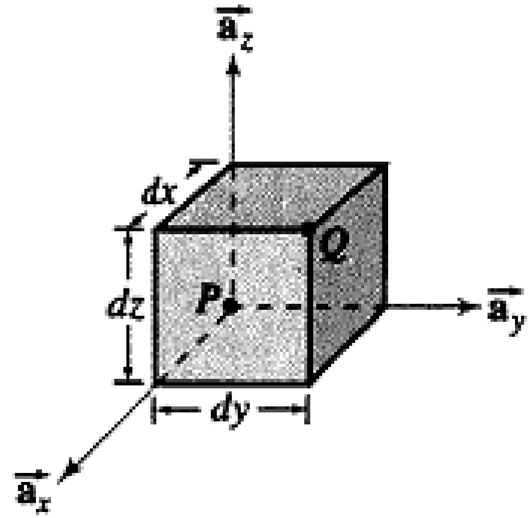
$$d\mathbf{s}_x = dydz\mathbf{a}_x$$

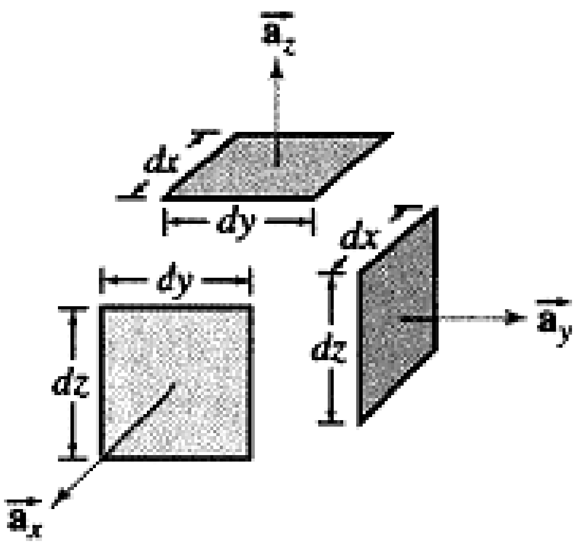
$$d\mathbf{s}_y = dxdz\mathbf{a}_y$$

$$d\mathbf{s}_z = dxdy\mathbf{a}_z$$

Vi phân đường:

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$$





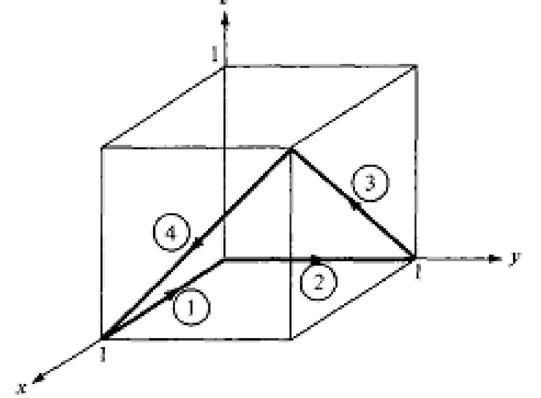
$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$$

Tích phân đường-Ví dụ

Cho $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - y^2\mathbf{a}_z$

Tính tích phân đường của **F** theo đường kín 1-2-3-4 như hình vẽ

Ta có tích phân theo đường kín:



$$\oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4\right)\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

Theo đường 1: y=0; z=0

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x, \qquad d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{a}_x \Rightarrow \int_1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 x^2dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

Theo đường 2: x=0; z=0 $\quad \mathbf{F} = -y^2\mathbf{a}_z,\ d\mathbf{l} = dy\,\mathbf{a}_y,\ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = 0.$

$$\int_2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

Theo đường 3: y=1; z=x (→ dx=dz)

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{a}_x + dz\,\mathbf{a}_z,$$

$$\Rightarrow \int_3 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int (x^2dx - dz)$$

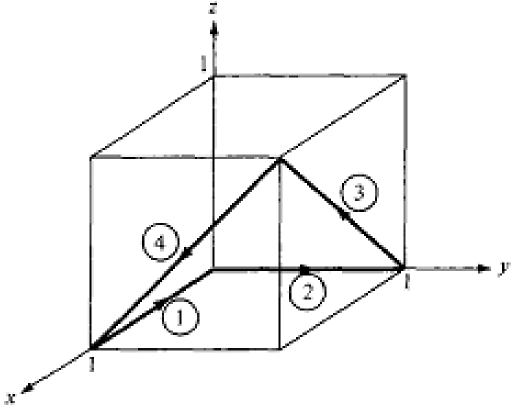
$$\Leftrightarrow \int_3 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (x^2-1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x\bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Tích phân đường-Ví dụ

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - y^2\mathbf{a}_z$$

Theo đường 4: x=1; z=y (→ dz=dy)



$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_x - z\mathbf{a}_y - y^2\mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{l} = dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z.$$

$$\Rightarrow \int_4 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int (-z\,dy - y^2 dz)$$

$$\Leftrightarrow \int_4 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 (-y - y^2)\,dy = -\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{5}{6}$$

Tổng hợp: tích phân theo đường kín:

$$\oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

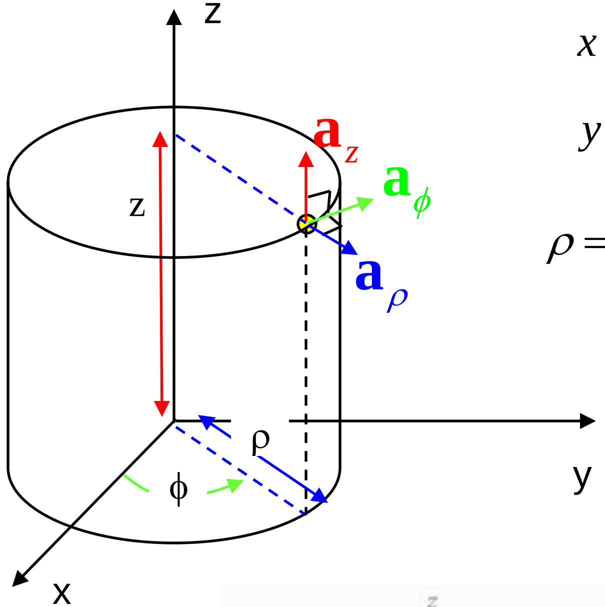
Hệ tọa độ trụ

- Tọa độ $P(\rho,\phi,z)$
- Vector đơn vị: $\mathbf{a}_\rho,\mathbf{a}_\phi,\mathbf{a}_z$

  - Vector vị trí:

$$\mathbf{P} = P_\rho \mathbf{a}_\rho + P_\phi \mathbf{a}_\phi + P_z \mathbf{a}_z$$

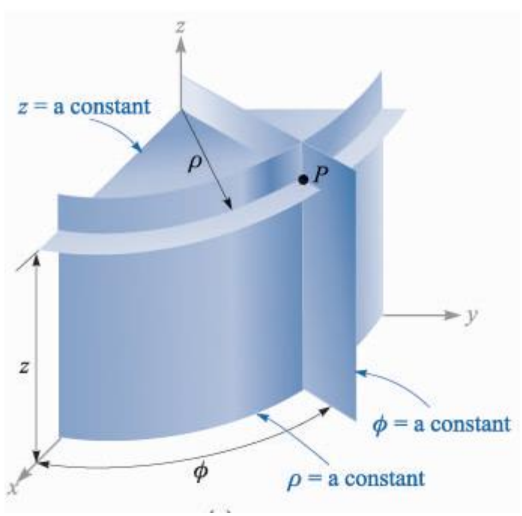
$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$$

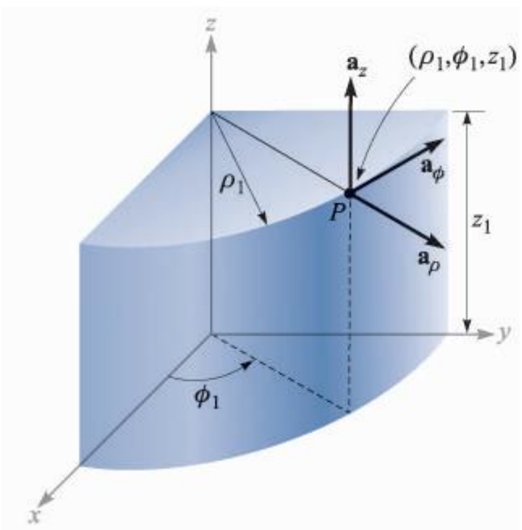


$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



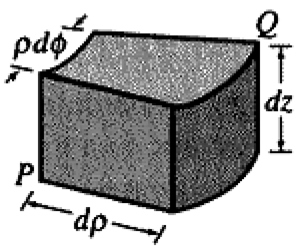


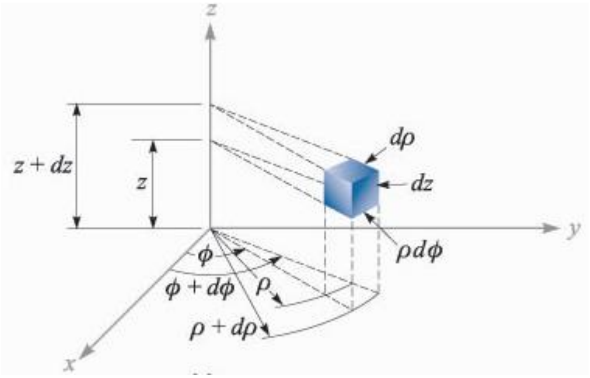
Vi phân trong hệ tọa độ trụ

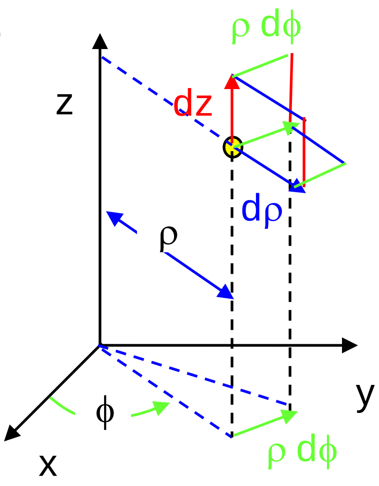
Vi phân khối:

$$dv = \rho . d\rho . d\phi . dz$$

dV=dz · dρ · (ρ dϕ)





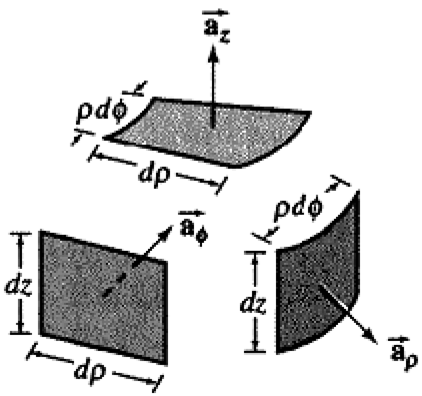


Vi phân diện tích các mặt:

$$d\mathbf{s}_{\rho} = \rho d\phi dz \mathbf{a}_{\rho}$$

$$d\mathbf{s}_{\phi} = d\rho dz \mathbf{a}_{\phi}$$

$$d\mathbf{s}_{z} = \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_{z}$$



Vi phân đường:

$$d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_{\rho} + \rho d\phi \mathbf{a}_{\phi} + dz \mathbf{a}_{z}$$

Vi phân trong hệ tọa độ trụ-Ví dụ

- Tìm thể tích trụ bán kính a, chiều cao h

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho d\rho d\phi dz$$

$$= \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz$$

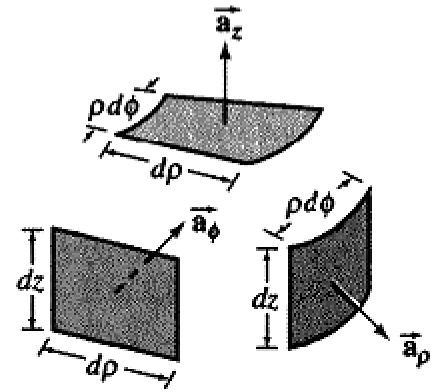
$$= \frac{a^2}{2} h.2\pi = \pi a^2 h$$

$$ds_\rho = \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$$

Vi phân trong hệ tọa độ trụ-Ví dụ

- Tìm diện tích của mặt cong giới hạn bởi

$$\rho = 3\text{ m}; h = 5\text{ m}; 30^o \le \phi \le 120^o$$



Vi phân diện tích mặt cong: $dS = \rho d\phi dz$

$$dS = \rho d\phi dz = 3 d\phi dz$$

$$S_\rho = \int_0^5 \int_{30^o}^{120^o} 3 d\phi dz \; = \int_0^5 dz \int_{30^o}^{120^o} 3 d\phi = 3.5\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 7{,}5\pi \text{ m}^2$$

Tổng quát: $S_\rho = \rho . h . (\phi_2 - \phi_1)$

Diện tích của toàn mặt trụ bán kính ρ :

$$\phi_2 = 2\pi; \phi_1 = 0 \Rightarrow S_\rho = 2\pi\rho h$$

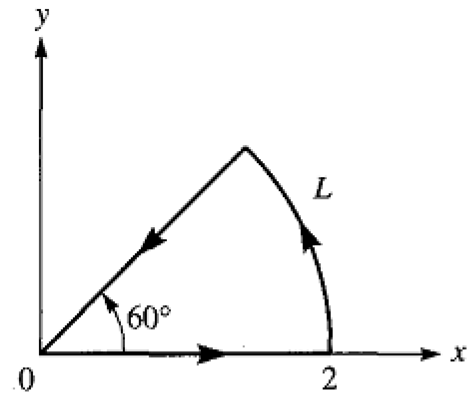
$$d\mathbf{L} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$$

Vi phân hệ tọa độ trụ-Ví dụ

Cho $\mathbf{A} = \rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho + z\sin\phi\mathbf{a}_z$

Tính tích phân đường của **A** theo đường L như hình vẽ

$$0 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \phi \le 60^0, z = 0$$



$$\oint_L \bar{A}\bullet d\bar{l} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3\right)\bar{A}\bullet d\bar{l} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$(1),\ C_1 = \int \bar{A}\bullet d\bar{l} = \int_0^2 \rho\cos\phi\, d\rho|_{\phi=0} = \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 = 2.$$

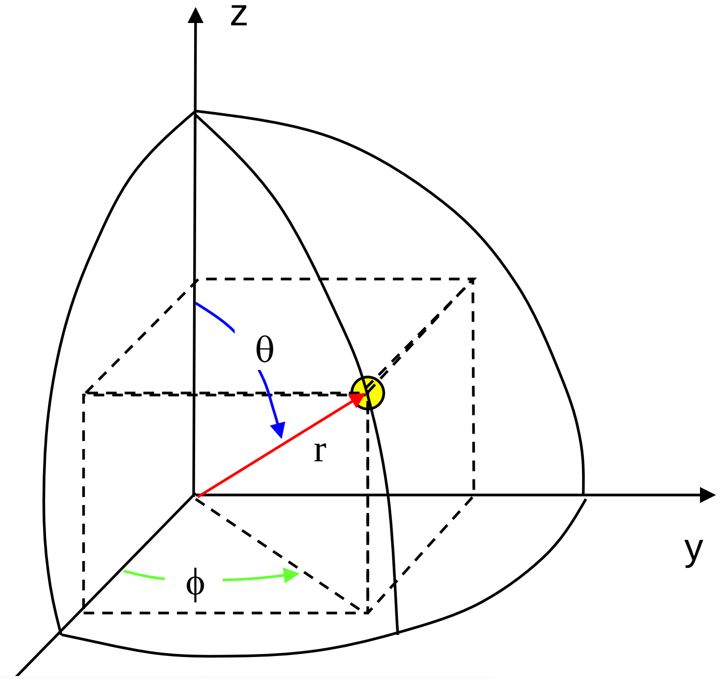
$$(2),\ d\bar{l} = \rho\, d\phi\, \bar{a}_\phi,\ \bar{A}\bullet d\bar{l} = 0,\ \ C_2 = 0$$

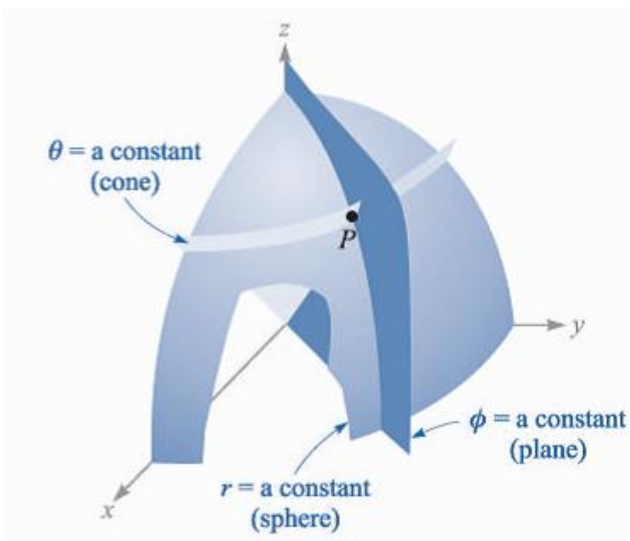
$$(3),\ C_3 = \int_2^0 \rho\cos\phi\, d\rho_{\phi=60°} = \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

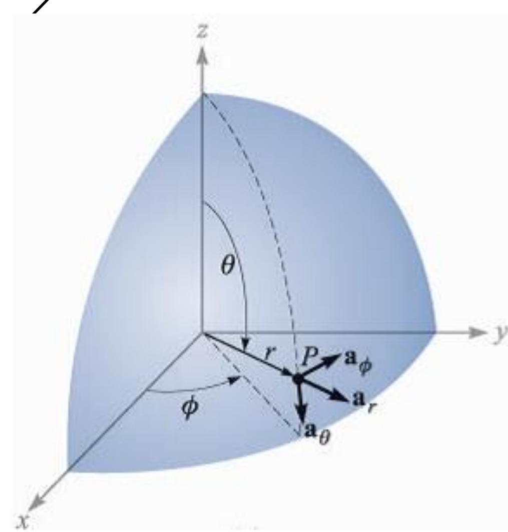
$$\Rightarrow \oint_l \bar{A}\bullet d\bar{l} = C_1 + C_2 + C_3 = 2 + 0 - 1 = \underline{\underline{1}}$$

Hệ tọa độ cầu

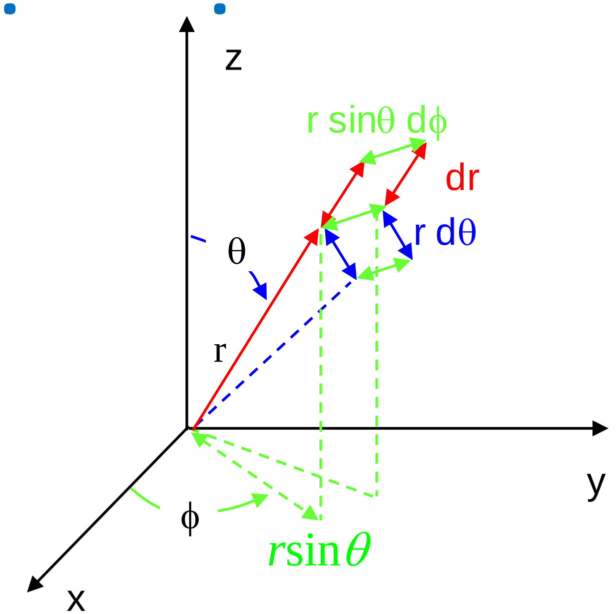
- Tọa độ $P(r,\theta,\phi)$
- Vector đơn vị: $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi$
- Vector vị trí: $\mathbf{P} = P_r\mathbf{a}_r + P_\theta\mathbf{a}_\theta + P_\phi\mathbf{a}_\phi$





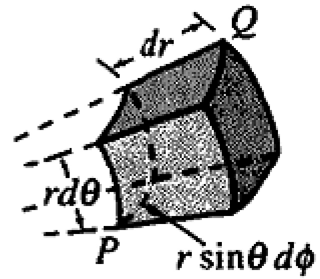


Vi phân trong hệ tọa độ cầu



Vi phân khối: dr· (r dθ) · ((r sinθ) dϕ)

$$dv = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

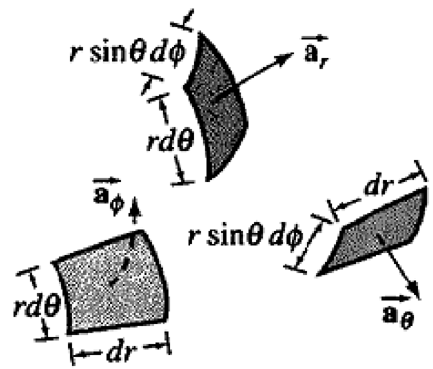


Vi phân diện tích các mặt:

$$d\mathbf{s}_\theta = r dr \sin\theta d\phi \mathbf{a}_\theta$$

$$d\mathbf{s}_\phi = r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{s}_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$



Vi phân đường:

$$d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$dv = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

Vi phân các hệ tọa độ-Ví dụ

- Tìm thể tích mặt cầu bán kính a

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\int_0^{a} r^2 dr = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Vi phân hệ tọa độ cầu-Ví dụ

- Tìm diện tích mặt cầu bán kính a, bao bởi $\alpha \le \theta \le \beta$

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

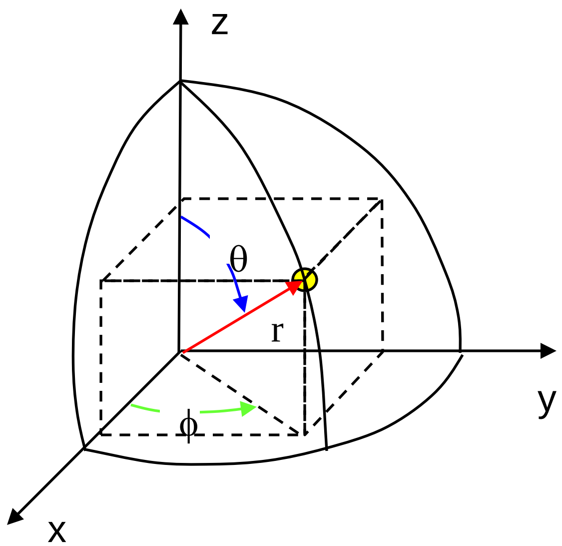
$$S_a = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

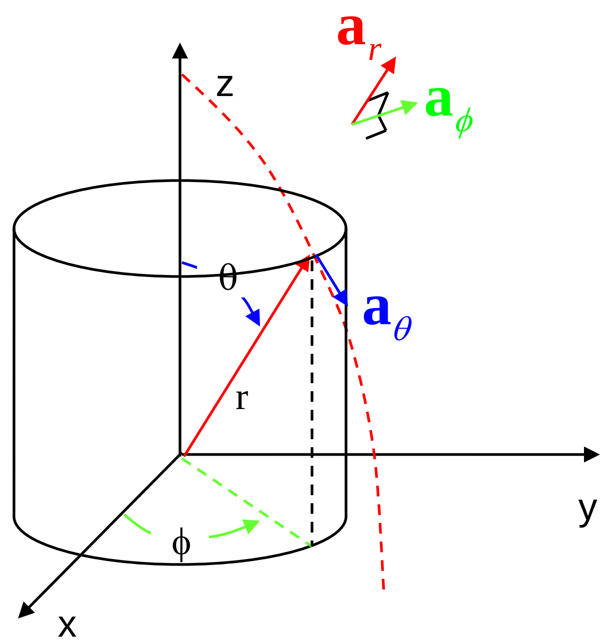
$$= a^2 \left(\cos\alpha - \cos\beta\right) 2\pi$$

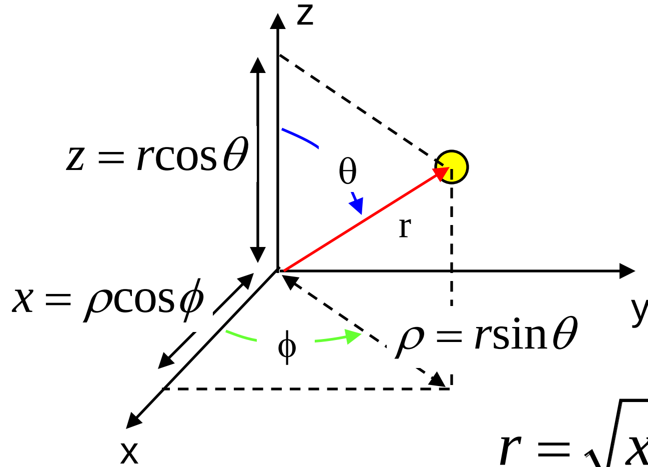
Với $\alpha = 0; \beta = \pi$

$\rightarrow S_a = 4\pi a^2$ diện tích toàn bộ mặt cầu.

Liên hệ các hệ tọa độ







$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Trụ và Đề-các

- Trụ sang Đề-các:

$$A_\rho = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\rho = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho$$

$$A_\phi = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\phi = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi$$

$$A_z = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_z = A_z\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_z = A_z$$

$$\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho = \cos\phi$$

$$\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$$

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x\cdot$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\mathbf{a}_y\cdot$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\mathbf{a}_z\cdot$	0	0	1

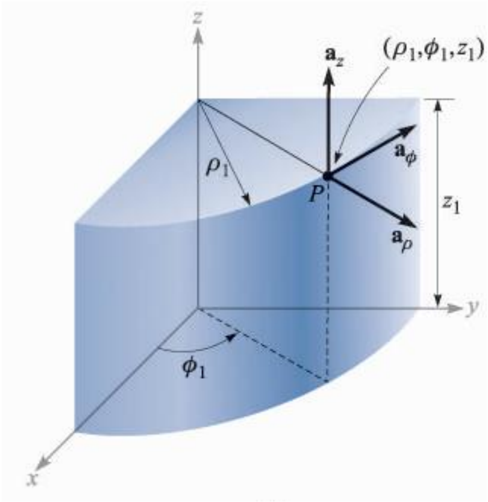
- Ví dụ: chuyển vector **B** sang hệ tọa độ trụ: $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$

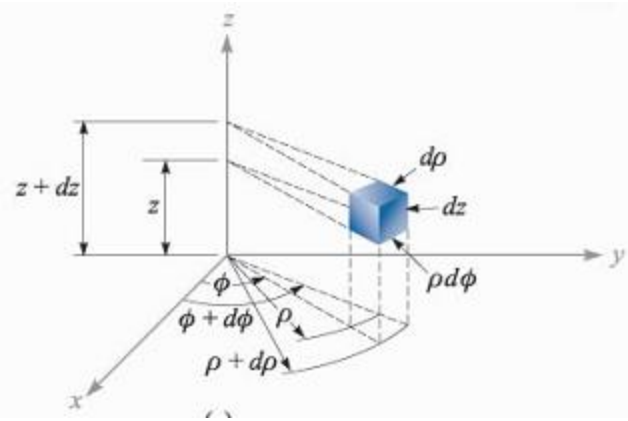
$$B_\rho = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho)$$
$$= y\cos\phi - x\sin\phi = \rho\sin\phi\cos\phi - \rho\cos\phi\sin\phi = 0$$

$$\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

$$B_\phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi)$$
$$= -y\sin\phi - x\cos\phi = -\rho\sin^2\phi - \rho\cos^2\phi = -\rho$$

Trụ và Đề-các



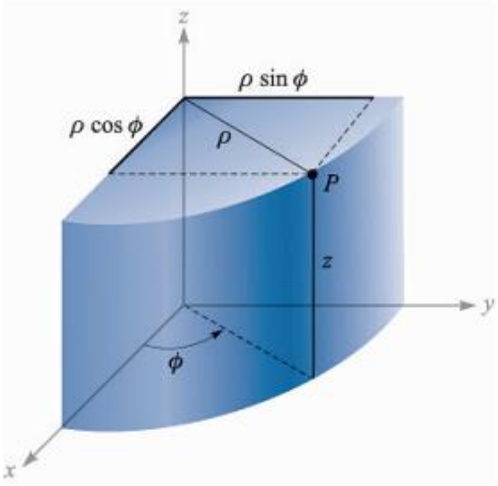


- Liên hệ với hệ Đề-các:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi$$
$$z = z$$

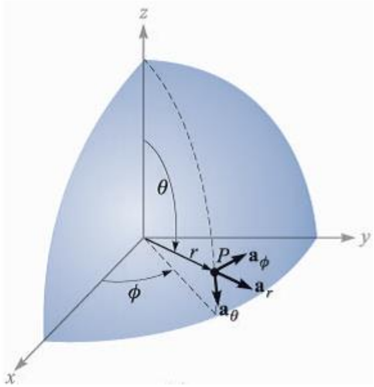


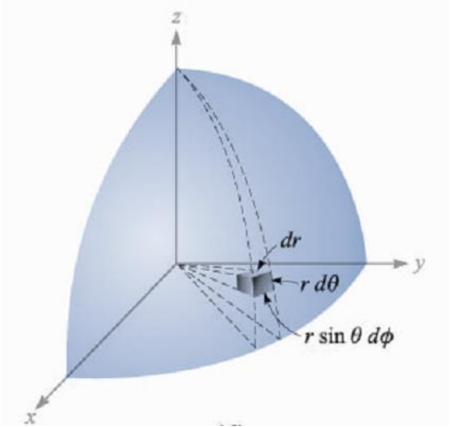
$$A_\rho = \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_\rho \qquad A_\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_\phi$$

$$A_\rho = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\rho = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho$$
$$A_\phi = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\phi = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi$$

$$A_z = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_z = A_z\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_z = A_z$$

Cầu và Đề-các





- Liên hệ với hệ Đề-các:

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x\cdot$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\mathbf{a}_y\cdot$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\mathbf{a}_z\cdot$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (r \geq 0)$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos\theta$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin\theta$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

Cầu và Đề-các

- Ví dụ: chuyển vector **G** sang hệ tọa độ cầu: $\mathbf{G} = (xz/y)\mathbf{a}_x$

$$G_r = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\sin\theta\cos\phi$$
$$= r\sin\theta\cos\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

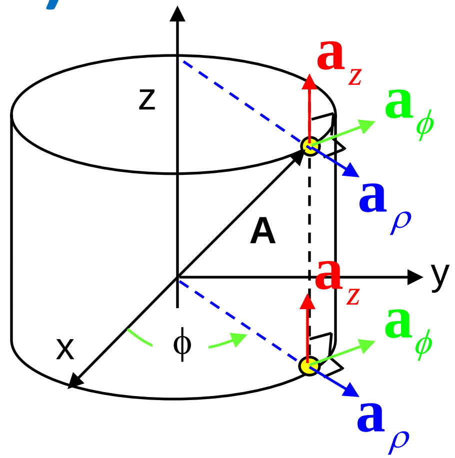
	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x\cdot$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\mathbf{a}_y\cdot$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\mathbf{a}_z\cdot$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

$$G_\theta = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\cos\theta\cos\phi$$
$$= r\cos^2\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G\phi = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}(-\sin\phi)$$
$$= -r\cos\theta\cos\phi$$

$$\mathbf{G} = r\cos\theta\cos\phi\,(\sin\theta\cot\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\cot\phi\,\mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$

Đề-các sang Trụ (1)



$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

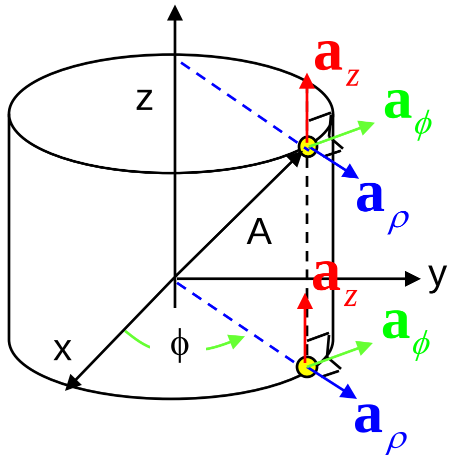
$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$

$$A_\rho = \mathbf{A}.\mathbf{a}_\rho \qquad A_\phi = \mathbf{A}.\mathbf{a}_\phi \qquad A_z = \mathbf{A}.\mathbf{a}_z$$

$$A_\rho = \left(A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z\right).\mathbf{a}_\rho = A_x\underbrace{\left(\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_\rho\right)}_{\cos\phi} + A_y\underbrace{\left(\mathbf{a}_y.\mathbf{a}_\rho\right)}_{\sin\phi} + A_z\underbrace{\left(\mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\rho\right)}_{0}$$

$$A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \qquad \phi = \arctan\frac{A_y}{A_x}$$

Đề-các sang Trụ (2)



$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \Rightarrow \mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_\rho = \cos\phi \qquad \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_\rho = \sin\phi \qquad \mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\rho = 0$$

$$A_\rho = \mathbf{A}.\mathbf{a}_\rho \qquad A_\phi = \mathbf{A}.\mathbf{a}_\phi \qquad A_z = \mathbf{A}.\mathbf{a}_z$$

$$A_\phi = \left(A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z\right).\mathbf{a}_\phi = A_x\underbrace{\left(\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_\phi\right)}_{-\sin\phi} + A_y\underbrace{\left(\mathbf{a}_y.\mathbf{a}_\phi\right)}_{\cos\phi} + A_z\underbrace{\left(\mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\phi\right)}_{0}$$

$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_\phi = -\sin\phi \qquad \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_\phi = \cos\phi \qquad \mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\phi = 0$$

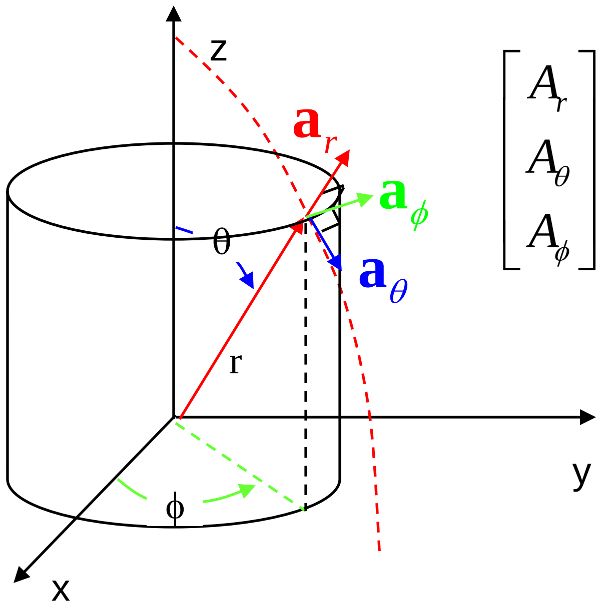
$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Đề-các sang cầu

$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_r = \sin\theta\cos\phi \qquad \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_r = \sin\theta\sin\phi \qquad \mathbf{a}_z.\mathbf{a}_r = \cos\theta$$

$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi \qquad \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_\theta = \cos\theta\sin\phi \qquad \mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\theta = -\sin\theta$$

$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_\phi = -\sin\phi \qquad \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_\phi = \cos\phi \qquad \mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\phi = 0$$



$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Quan hệ giữa θ và ϕ theo x, y, z?

$$\frac{z}{r} = \cos\theta \qquad \frac{y}{x} = \tan\phi$$

Giải tích vector

- Trường vô hướng- có hướng
- Các phép toán trên vector
  - Tích có hướng
  - Tích vô hướng
- Các hệ tọa độ
  - Tọa độ Đề-các
  - Tọa độ Trụ
  - Tọa độ cầu
  - Chuyển đổi giữa các hệ tọa độ
  - Yếu tố vi phân các hệ tọa độ
  - Một số công thức trong giải tích vector

Gradient

$$\mathrm{grad}V \triangleq \nabla V \triangleq \vec{\nabla} V$$

- Gradient trong các hệ tọa độ:

-Đề-các: $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

-Trụ: $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

- Cầu: $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

Divergence

- Độ tản (div) của một trường véc tơ $\mathrm{div}\mathbf{F} \triangleq \nabla \cdot \mathbf{F} \triangleq \vec{\nabla}.\mathbf{F}$

-Đề-các:

$$div\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

-Trụ:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho F_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(F_\phi\right)}{\partial \phi} + \frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial z}$$

-Cầu:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 F_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta F_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(F_\phi\right)}{\partial \phi}$$

Công thức Laplace

$$\nabla^2 V = \nabla.\nabla V$$

- Đề-các:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

-Trụ:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

-Cầu:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Công thức Curl (rot)

- Lưu số (curl / rot) của một trường véc tơ $\text{rot}\mathbf{F} \triangleq \text{curl}\,\mathbf{F} \triangleq \nabla\times\mathbf{F}$

-Đề-các:

$$curl\ \mathbf{F} \equiv \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$curl\ \mathbf{F} \equiv \nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

-Trụ:

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho F_\phi\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\mathbf{a}_z$$

Công thức Curl (rot)

- Lưu số (curl / rot) của một trường véc tơ $\mathrm{rot}\mathbf{F} \triangleq \mathrm{curl}\mathbf{F} \triangleq \nabla \times \mathbf{F}$

-Cầu:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & (r)\mathbf{a}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & (r\sin\theta)F_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(F_\phi \sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rF_\phi\right)}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rF_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{a}_\phi$$

Divergence- Ví dụ (1)

Ví dụ: Tính div của các trường vector:

a) $$\mathbf{F}_1 = \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{a}_x - 2xy\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

b) $$\mathbf{F} = \rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho - \rho\sin\phi\mathbf{a}_\phi$$

c) $$\mathbf{F} = r^2\mathbf{a}_r - r\sin\theta\mathbf{a}_\theta$$

a) $$\mathbf{F}_1 = \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{a}_x - 2xy\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}_1 = div\mathbf{F}_1 = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2x - 2x + 0 = 0$$

Divergence- Ví dụ (2)

b) $\mathbf{F} = \rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho - \rho\sin\phi\mathbf{a}_\phi$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho F_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(F_\phi\right)}{\partial\phi} + \frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho^2\cos\phi\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(-\rho\sin\phi\right)}{\partial\phi} = \frac{1}{\rho}2\rho\cos\phi - \cos\phi = \cos\phi$$

c) $\mathbf{F} = r^2\mathbf{a}_r - r\sin\theta\mathbf{a}_\theta$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 F_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta F_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(F_\phi\right)}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^4\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(-\mathrm{r}\sin^2\theta\right)}{\partial\theta} = 4r - 2\cos\theta$$

Curl – Ví dụ (1)

Ví dụ: Tính curl của các trường vector:

a) $\mathbf{F} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y$

b) $\mathbf{F} = 2\rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho + \rho\mathbf{a}_\phi$

c) $\mathbf{F} = \dfrac{e^{-r}}{r}\mathbf{a}_\theta$

a) $\mathbf{F} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y$

$$curl\ \mathbf{F} \equiv \nabla\times\mathbf{F}$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

$$curl\ \mathbf{F} \equiv \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{a}_z \equiv= -2\mathbf{a}_z$$

Curl –Ví dụ (2)

b) $$\mathbf{F} = 2\rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho + \rho\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho F_\phi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{a}_z$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2\rho\cos\phi & \rho^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\rho + 2\rho\sin\phi}{\rho}\mathbf{a}_z = 2\left(1+\sin\phi\right)\mathbf{a}_z$$

Curl –Ví dụ (3)

c) $\mathbf{F} = \dfrac{e^{-r}}{r}\mathbf{a}_\theta$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & (r)\mathbf{a}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & (r\sin\theta)F_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(F_\phi \sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rF_\phi\right)}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rF_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & (r)\mathbf{a}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & r\dfrac{e^{-r}}{r} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta} r\sin\theta\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r}\right) = -\frac{e^{-r}}{r}\mathbf{a}_\phi$$

Định lý Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}).d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{E}.d\mathbf{L} \qquad \int_S (\nabla \times \mathbf{E}).d\mathbf{S} \triangleq \int_S \mathrm{curl}\mathbf{E}.d\mathbf{S}$$

Ví dụ: Cho trường vector: $\mathbf{E} = k\rho^2 z\mathbf{a}_\phi$ với k là hằng số
Tính:

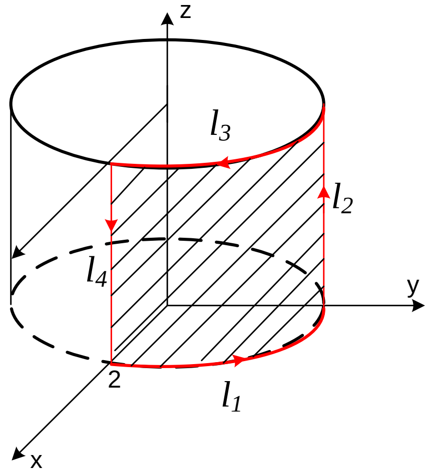
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}).d\mathbf{S} \qquad \int_L \mathbf{E}.d\mathbf{L}$$

Với S là mặt bên của hình trụ, bán kính a=2, chiều cao z=3, trong góc phần tư thứ nhất, *L* là đường cong bao lấy S

Định lý Stokes-Ví dụ (1)

$$\mathbf{E} = k\rho^2 z\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$



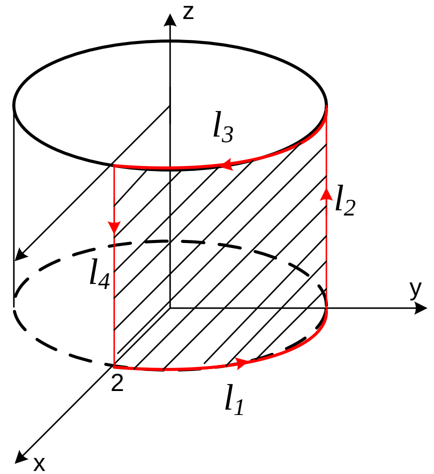
$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho k\rho^2 z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho}k\rho^3 + \frac{\mathbf{a}_z}{\rho}3\rho^2 kz = -k\rho^2\mathbf{a}_\rho + 3k\rho z\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\mathbf{a}_\rho$$

Định lý Stokes-Ví dụ (2)

$$\nabla\times\mathbf{E} = -k\rho^2\mathbf{a}_\rho + 3k\rho z\mathbf{a}_z$$



$$\int_S \nabla\times\mathbf{E}.d\mathbf{S} = \int_0^3\int_0^{\pi/2}\left(-k\rho^2\mathbf{a}_\rho + 3k\rho z\mathbf{a}_z\right).\left(\rho d\phi dz\mathbf{a}_\rho\right)$$

$$= \int_0^3\int_0^{\pi/2} -k\rho^3 d\phi dz + \int_0^3\int_0^{\pi/2} 3k\rho^2 z\,\underbrace{\mathbf{a}_z.\mathbf{a}_\rho}_{=0}\,d\phi = \int_0^3\int_0^{\pi/2} -ka^3 d\phi dz$$

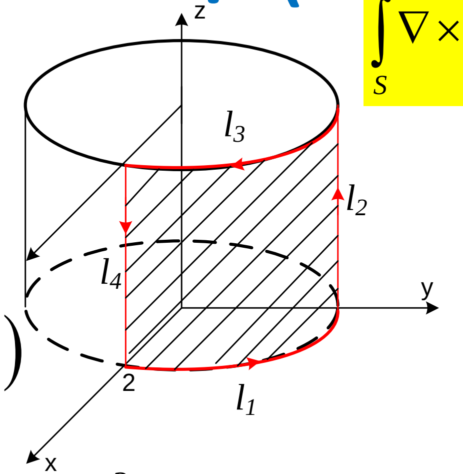
$$= -8k\int_0^3 dz\int_0^{\pi/2} d\phi = -12\pi k$$

Định lý Stokes-Ví dụ (3)

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E}.d\mathbf{S} = -12\pi k$$

$$\int_L \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \int_{l_1} \mathbf{E}.\left(\rho d\phi \mathbf{a}_\phi\right) + \int_{l_2} \mathbf{E}.\left(dz\mathbf{a}_z\right)$$

$$+\int_{l_3} \mathbf{E}.\left(-\rho d\phi \mathbf{a}_\phi\right) + \int_{l_4} \mathbf{E}.\left(-dz\mathbf{a}_z\right)$$



Ta thấy trên l_1, biến độc lập z=0,do đó $E = k\rho^2 z = 0$

Ta thấy trên l_2, l_4 vi phân $d\boldsymbol{L}$ vuông góc với $\mathbf{E}$ nên tích phân lấy theo l_2, l_4 sẽ bằng 0

$$\int_L \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \int_{l_3} \mathbf{E}.\left(\rho d\phi \mathbf{a}_\phi\right) = \int_{\pi/2}^{0} k\rho^2 z \rho d\phi = -8.3.k.\frac{\pi}{2} = -12k\pi$$