NỘI DUNG CHÍNH

- **Phân loại các hệ thống liên tục**
- **Hệ tuyến tính bất biến (Linear time-invariant system - LTI)**
- **Các tính chất của hệ LTI**
- **Các hệ thống biểu diễn bởi phương trình vi phân**

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÂN LOẠI: ĐỊNH NGHĨA HỆ THỐNG

- **Hệ thống là gì**
  - Hệ thống là quá trình biến đổi (những) tín hiệu đầu vào thành (những) tín hiệu đầu ra
    - Nhận tín hiệu vào
    - Xử lí tín hiệu vào
    - Xuất tín hiệu ra (cũng gọi là đáp ứng của hệ với tín hiệu vào)
  - Ví dụ về hệ thống:
    - Radio: đầu vào: tín hiệu điện trong không khí
      đầu ra: âm thanh
    - Robot: đầu vào: tín hiệu điều khiển (điện)
      đầu ra: chuyển động hoặc hành động
- **Hệ thống liên tục**
  - Là một thế thống bao gồm những tín hiệu vào và ra là các tín hiệu liên tục theo thời gian
- **Hệ thống rời rạc**
  - Là một thế thống bao gồm những tín hiệu vào và ra là các tín hiệu không liên tục theo thời gian

$x(t) \longrightarrow$ **Hệ thống liên tục** $\longrightarrow y(t)$

$x(n) \longrightarrow$ **Hệ thống rời rạc** $\longrightarrow y(n)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÂN LOẠI: ĐỊNH NGHĨA HỆ THỐNG

- **Phân loại**
  - Hệ tuyến tính và Hệ phi tuyến
  - Hệ bất biến và Hệ biến thiên (theo thời gian)
  - Hệ có nhớ và Hệ không nhớ (hệ động và hệ tĩnh)
  - Hệ Nhân quả và Hệ Phi nhân quả
  - Hệ khả nghịch và Hệ không khả nghịch
  - Hệ ổn định và Hệ không ổn định

PHÂN LOẠI: HỆ TUYẾN TÍNH VÀ HỆ PHI TUYẾN

- **Hệ tuyến tính**
  - Đặt $y_1(t)$ là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x_1(t)$
  - Đặt $y_2(t)$ là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x_2(t)$
  - Hệ là tuyến tính nếu Nguyên lý xếp chồng được thỏa mãn:
    - 1. Đáp ứng của $x_1(t)+x_2(t)$ là $y_1(t)+y_2(t)$
    - 2. Đáp ứng của $\alpha x_1(t)$ là $\alpha y_1(t)$

$$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Hệ tuyến tính}} \longrightarrow \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

- **Hệ phi tuyến**
  - Nếu nguyên lý xếp chồng không thỏa mãn, thì hệ thống là một hệ phi tuyến

PHÂN LOẠI: HỆ TUYẾN TÍNH VÀ HỆ PHI TUYẾN

- **Ví dụ: Kiểm tra những hệ sau có tuyến tính không**
  - Hệ thống 1: $y(t) = \exp[x(t)]$
  - Hệ thống 2: Nạp điện cho tụ. Đầu vào: $i(t)$, Đầu ra $v(t)$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

  - Hệ thống 3: Cuộn cảm. Đầu vào: $i(t)$, Đầu ra $v(t)$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

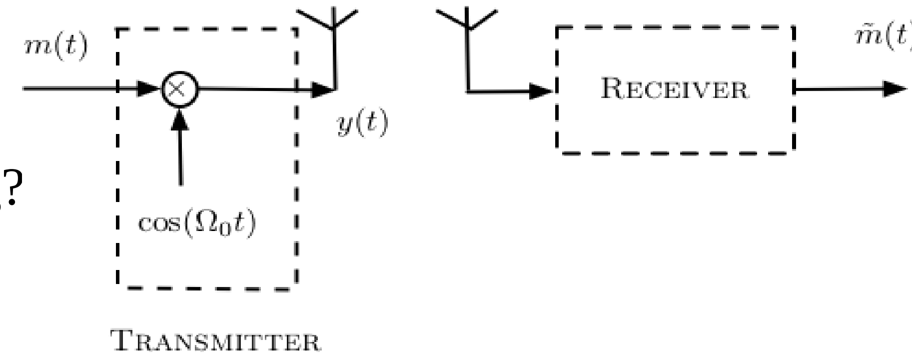
PHÂN LOẠI: HỆ TUYẾN TÍNH VÀ HỆ PHI TUYẾN

- **Ví dụ**
  - Hệ thống 4: $$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau + B$$
  - Hệ thống 5: $$y(t) = |x(t)|$$
  - Hệ thống 6: $$y(t) = x^2(t)$$

PHÂN LOẠI: HỆ TUYẾN TÍNH VÀ HỆ PHI TUYẾN

Ví dụ:

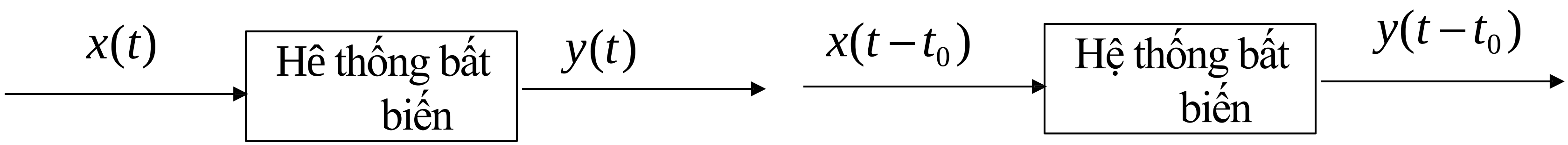
- Điều chế biên độ:
  - Tuyến tính hay không?



UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÂN LOẠI: HỆ BẤT BIẾN VÀ HỆ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN

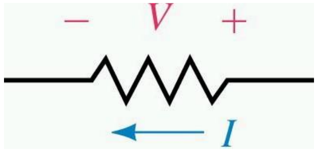
- **Hệ bất biến**
  - Hệ thống bất biến theo thời gian là hê thống nếu tín hiệu vào bị dịch đi T (bất kỳ) đơn vị thời gian thì tín hiệu ra cũng bị dịch đi T đơn vị thời gian



- **Ví dụ:**
  - $y(t) = \cos(x(t))$
  - $y(t) = \int_0^t x(v)dv$

PHÂN LOẠI: HỆ CÓ NHỚ VÀ HỆ KHÔNG NHỚ

- **Hệ không nhớ**
  - Nếu giá trị của tín hiệu ra tại thời điểm *t0* (bất kỳ) chỉ phụ thuộc vào giá trị của tín hiệu vào tại thời điểm *t0*, thì hệ đó được gọi là hệ không nhớ (hệ tĩnh)
  - Ví dụ: Đầu vào x(t): Cường độ dòng điện chạy qua điện trở, đầu ra y(t): Điện áp qua điện trở



$$y(t) = Rx(t)$$

  - Giá trị của tín hiệu ra tại thời điểm *t* phụ thuộc duy nhất vào tín hiệu vào tại thời điểm *t*.
- **Hệ có nhớ**
  - Nếu giá trị của tín hiệu ra tại thời điểm *t0* (bất kỳ) không những phụ thuộc vào giá trị của tín hiệu vào tại thời điểm *t0*, mà còn phụ thuộc vào những giá trị khác thời điểm *t0* , thì hệ đó được gọi là hệ nhớ
  - Ví dụ: Tụ điện, Dòng điện đầu vào: x(t), Điện áp đầu ra: y(t)

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHÂN LOẠI: HỆ CÓ NHỚ VÀ HỆ KHÔNG NHỚ

- **Ví dụ: Xác định hệ thống sau có nhớ hay không nhớ**
  - $y(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(t - T_i)$
  - $y(t) = \sin(2x^2(t) + \theta)x(t)$

PHÂN LOẠI: HỆ NHÂN QUẢ VÀ HỆ PHI NHÂN QUẢ

- **Hệ nhân quả**
  - Hệ có tính nhân quả nếu tín hiệu ra ở thời điểm t0 (bất kỳ) chỉ phụ thuộc vào các giá trị của tín hiệu vào với $t \le t0$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

- **Hệ phi nhân quả**
  - Hệ thống là Hệ phi nhân quả nếu tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào ở tương lai (dự đoán)
  - Ví dụ:

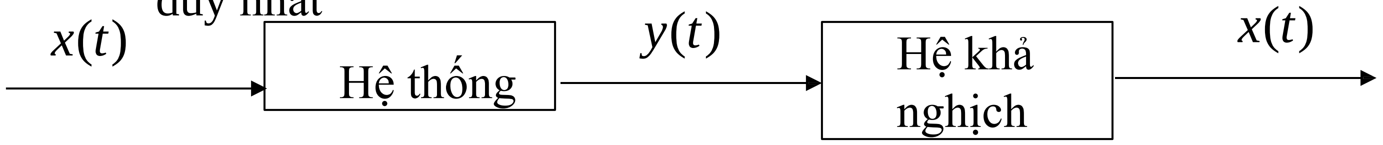
$$y(t) = x(t+a) \qquad a > 0$$

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)d\tau$$

  - Giá trị của tín hiệu ra tại t phụ thuộc vào giá trị của tín hiệu vào tại $t + a$ (from future)
  - Tất cả những hệ thống thực tế đều là Hê nhân quả

PHÂN LOẠI: HỆ KHẢ NGHỊCH

- **Hệ khả nghịch**
  - Một hệ thống là khả nghịch nếu
    - Quan sát tín hiệu ra. Ta có thể xác định được tín hiệu vào một cách duy nhất



  - Câu hỏi là: Xét 1 hệ thống, 2 tín hiệu vào khác nhau cho ra cùng 1 tín hiệu ra, thì hệ này có khả nghịch hay không?
- **Ví dụ**

$$y(t) = 2x(t)$$

$$y(t) = \cos[x(t)]$$

  - Nếu 2 tín hiệu vào khác nhau cho ra cùng 1 tín hiệu ra, thì đây là hệ không khả nghịch

PHÂN LOẠI: HỆ ỔN ĐỊNH

Tín hiệu bị chặn

– Định nghĩa: Tín hiệu $x(t)$ được gọi là tín hiệu bị chặn nếu

$$|x(t)| < B < \infty \qquad \forall t$$

- **Hệ ổn định vào - ra bị chặn (BIBO)**
  – Định nghĩa: Hệ thống là Hệ ổn định BIBO, nếu với mỗi tín hiệu bị chặn vào $x(t)$, thì đáp ứng $y(t)$ cũng là tín hiệu bị chặn.

$$|x(t)| < B_1 < \infty \Rightarrow |y(t)| < B_2 < \infty \qquad \forall t$$

- **Ví dụ: Xác định những hệ sau ổn định BIBO hay không**

$$y(t) = \exp\left[x(t)\right]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

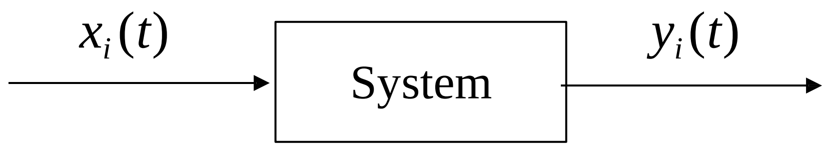
UNIVERSITY OF ARKANSAS

NỘI DUNG CHÍNH

- Phân loại các hệ thống liên tục
- **Hệ tuyến tính bất biến (Linear time-invariant system - LTI)**
- Các tính chất của hệ LTI
- Hệ thống biểu diễn bởi phương trình vi phân

HỆ TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN: ĐỊNH NGHĨA

- **Hệ tuyến tính bất biến (LTI)**
  - Định nghĩa: Một hệ gọi là hệ tuyến tính bất biến (LTI) nếu nó tuyến tính và bất biến theo thời gian



  - Tuyến tính

Đầu vào: $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \cdots + a_N x_N(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)$

Đầu ra: $y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \cdots + a_N y_N(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t)$

  - Bất biến

Đầu vào: $x(t) = x_i(t - t_0)$

Đầu ra: $y(t) = y_i(t - t_0)$

HỆ LTI: ĐÁP ỨNG XUNG

- **Đáp ứng xung của hệ LTI**
  - ĐN: tín hiệu ra (đáp ứng) cả hệ thống khi tín hiệu vào là xung đơn vị (hàm delta).
    - Thường được kí hiệu là $h(t)$

$$x(t)=\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)=h(t)$$

- **Đối với hệ thống có tín hiệu vào tùy ý *x*(*t*), ta muốn tìm tín hiệu ra *y*(*t*).**
  - Phương pháp 1: Phương trình vi phân
  - Phương pháp 2: Tích chập
  - Phương pháp 3: Biến đổi Fouries, biến đổi Laplace

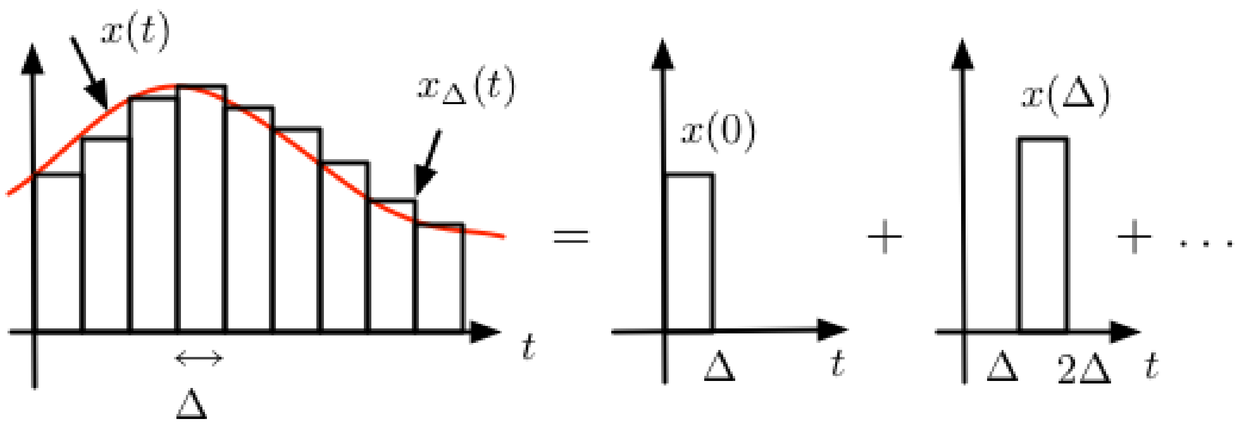
HỆ LTI: TÍCH CHẬP

- **Dẫn giải**

Mọi tín hiệu có được xấp xỉ thành tổng của một dãy liên tục các hàm delta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)d\tau = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(n\Delta)\Delta$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$



HỆ LTI: TÍCH CHẬP

Dẫn giải

– Mọi tín hiệu có được xấp xỉ thành tổng của một dãy liên tục các hàm delta

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$

$$\delta(t)\longrightarrow\boxed{\text{System}}\longrightarrow h(t)$$

– Bất biến

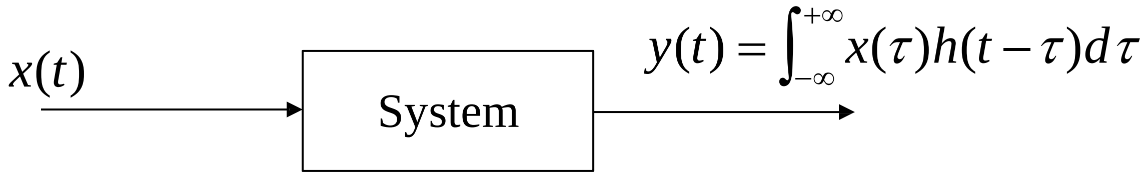
$$\delta(t-n\Delta)\longrightarrow\boxed{\text{System}}\longrightarrow h(t-n\Delta)$$

– Tuyến tính

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta\longrightarrow\boxed{\text{System}}\longrightarrow\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)h(t-n\Delta)\Delta$$

HỆ LTI: TÍCH CHẬP

- **Tích chập**

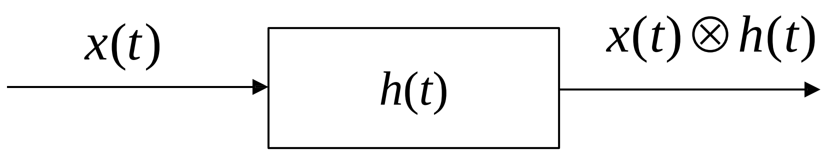


– Định nghĩa: Tích chập của 2 tín hiệu $x(t)$ và $h(t)$ được định nghĩa là

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

– Tích chập thường được kí hiệu là $\otimes$

$$y(t)=x(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Đối với hệ tuyến tính bất biến, nếu ta biết tín hiệu vào $x(t)$ thì tín hiệu ra được xác định là $y(t)=x(t)\otimes h(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

HỆ LTI: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ**

$$x(t)\otimes\delta(t)$$

$$x(t)\otimes\delta(t-t_0)$$

$$x(t)\otimes u(t)$$

HỆ LTI: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ**

$$\exp(-bt)u(t) \longrightarrow \boxed{\exp(-at)u(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

HỆ LTI: TÍCH CHẬP

- **Ví dụ**

–Hãy tìm đáp ứng xung của tụ điện và sử dụng nó để tìm đáp ứng bước nhảy bằng cách sử dụng tích chập. Giả sử tín hiệu vào là dòng điện và tín hiệu ra là điện áp. Đặt C = 1F.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

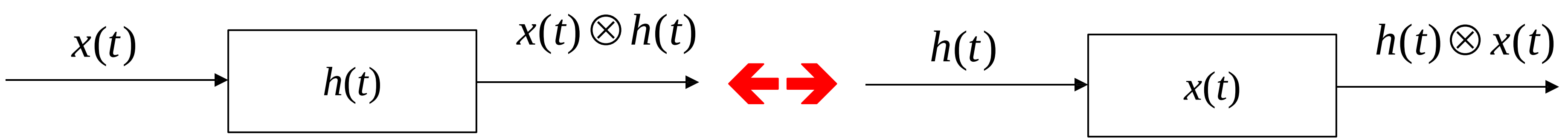
HỆ LTI: CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH CHẬP

- **Giao hoán**

$$x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

– Chứng minh:

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

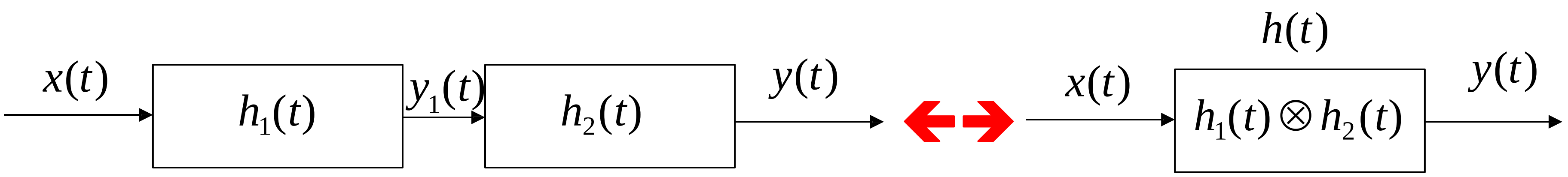


UNIVERSITY OF ARKANSAS

HỆ LTI: CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH CHẬP

- **Kết hợp**

$$x(t)\otimes h_1(t)\otimes h_2(t)=\left[x(t)\otimes h_1(t)\right]\otimes h_2(t)=x(t)\otimes\left[h_1(t)\otimes h_2(t)\right]$$

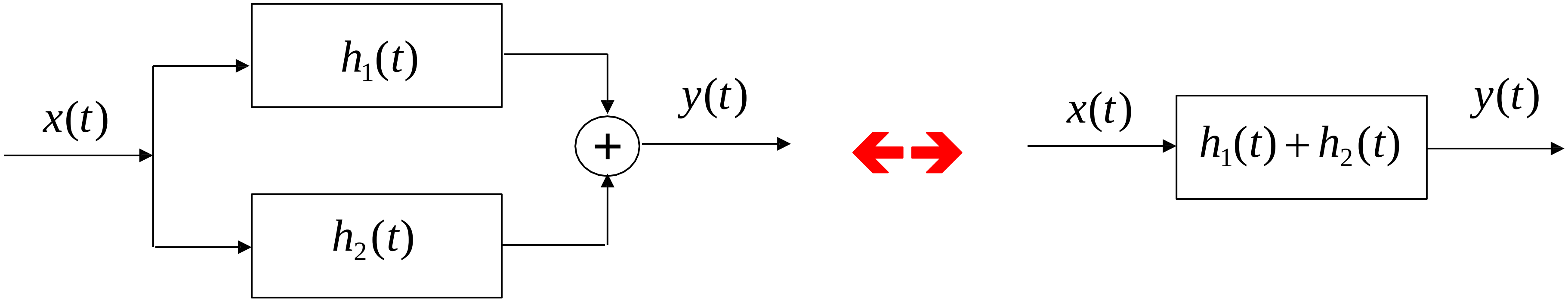


UNIVERSITY OF ARKANSAS

HỆ LTI: CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH CHẬP

Phân phối

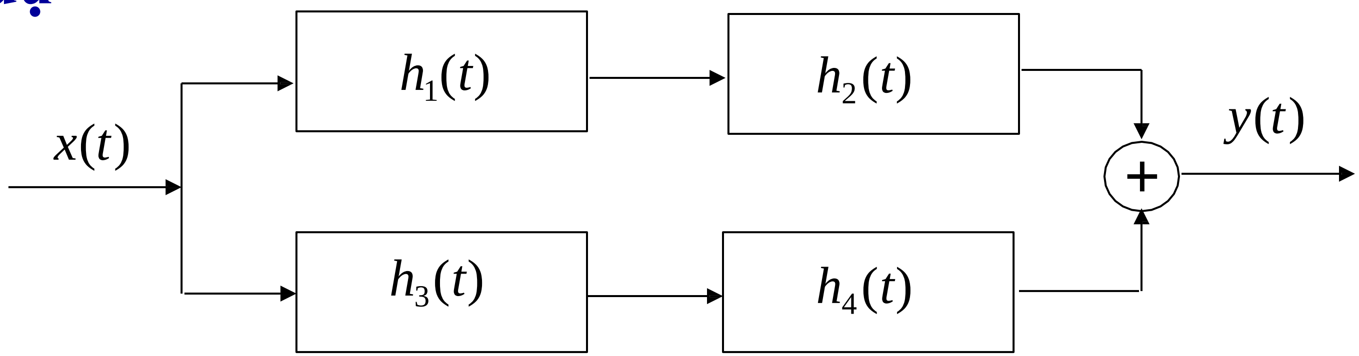
$$x(t)\otimes\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=\left[x(t)\otimes h_1(t)\right]+\left[x(t)\otimes h_1(t)\right]$$



UNIVERSITY OF ARKANSAS

HỆ LTI: CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH CHẬP

- **Ví dụ**



$$h_1(t) = \exp(-2t)u(t)$$

$$h_2(t) = 2\exp(-t)u(t)$$

$$h_3(t) = \exp(-3t)u(t)$$

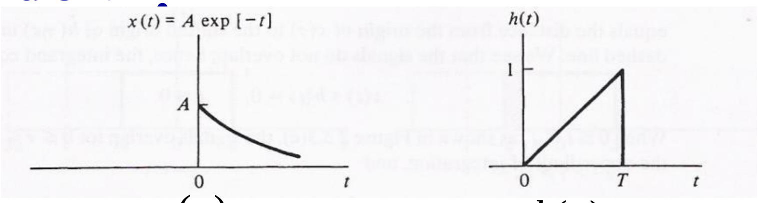
$$h_4(t) = 4\delta(t)$$

$$h(t) = ?$$

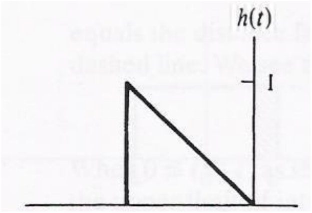
HỆ LTI: TÍNH TÍCH CHẬP BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

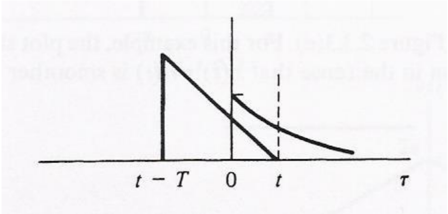
- **Giải thích tích chập qua đồ thị**

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



$x(\tau)$ $h(\tau)$

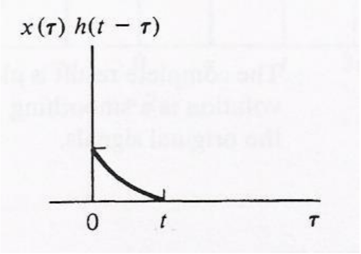




– 1. Phép đảo: $g(\tau)=h(-\tau)$

– 2. Phép dịch:

$$g(\tau-t_0)=h(-(\tau-t_0))=h(t_0-\tau)$$



– 3. Phép nhân: $x(\tau)h(t_0-\tau)$

– 4. Tích phân $y(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t_0-\tau)d\tau$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

HỆ LTI: TÍNH TÍCH CHẬP BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

- **Ví dụ**

$$y(t) = [2a \cdot p_{2a}(t)] \otimes [2a \cdot p_{2a}(t-a)]$$

NỘI DUNG CHÍNH

- Phân loại các hệ thống liên tục
- Hệ tuyến tính bất biến (Linear time-invariant system - LTI)
- **Các tính chất của hệ LTI**
- Hệ thống biểu diễn bởi phương trình vi phân

CÁC TÍNH CHẤT CỦA HỆ LTI

- **Hệ LTI tĩnh (Hệ không nhớ)**

-Nhắc lại :tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào ở cùng thời điểm

$$y(t) = Kx(t)$$

– Đáp ứng xung của hệ LTI tĩnh là

$$h(t) = K\delta(t)$$

- **Hệ LTI nhân quả**
  - Nhắc lại: Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở các thời điểm hiện tại và quá khứ
  - Đáp ứng xung của Hệ LIT phải thỏa mãn

$$h(t) = 0 \qquad \text{for } t < 0$$

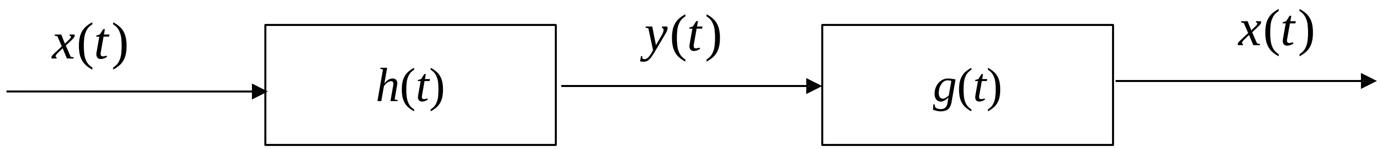
  - Tại sao?

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT CỦA HỆ LTI

- **Hệ LTI khả nghịch**

– Nhắc lại: một hệ thống được gọi là nghịch đảo khi và chỉ khi nó có hệ thống nghịch đảo mà khi được ghép nối tiếp với hệ thống ban đầu, tạo nên tín hiệu ra bằng tín hiệu vào ban đầu.



$$x(t)\otimes h(t)\otimes g(t)=x(t)$$

– Cho hệ thống LTI khả nghịch với đáp ứng xung h(t), tồn tại một hệ khả nghịch g(t) sao cho:

$$g(t)\otimes h(t)=\delta(t)$$

– Ví dụ: Tìm hệ nghịch đảo của hệ thống LTI: $h(t)=\delta(t-t_0)$

CÁC TÍNH CHẤT CỦA HỆ LTI

- **Tính ổn định**

- Nhắc lại: một hệ thống được gọi là ổn định nếu bất cứ tín hiệu vào bị chặn cũng tạo ra tín hiệu ra cũng bị chặn

  – Hệ thống LTI: Một hệ thống LTI ổn định khi và chỉ khi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

  - Chứng minh:

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT CỦA HỆ LTI

- **Ví dụ**
  - Hãy xác định: tính nhân quả hay không nhân quả, nhớ hay có nhớ, ổn định hay không ổn định
  - 1. $h_1(t) = t\exp(-2t)u(t) + \exp(3t)u(-t) + \delta(t-1)$
  - 2. $h_2(t) = -3\exp(2t)u(t)$
  - 3. $h_3(t) = 5\delta(t+5)$

NỘI DUNG CHÍNH

- Phân loại các hệ thống liên tục
- Hệ tuyến tính bất biến (Linear time-invariant system - LTI)
- Các tính chất của hệ LTI
- **Hệ thống biểu diễn bởi phương trình vi phân**

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

- **Hệ thống LTI có thể được biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân**

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \ldots + a_N y^{(N)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + b_M x^{(M)}(t)$$

– Điều kiện ban đầu:

$$\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

– Kí hiệu: đạo hàm cấp n:

$$y^{(n)}(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

- **Ví dụ:**
  - Xét mạch điện có điện trở R=1 Ohm và một cuộn cảm có độ tự cảm L=1H, với điện áp nguồn là v(t)=Bu(t) và I_o là dòng điện ban đầu trong cuộn cảm. Tín hiệu ra của hệ là dòng điện đi qua cuộn cảm.
    - Biểu diễn hệ thống dưới dạng phương trình vi phân.
    - Tìm tín hiệu ra của hệ thống khi $I_o = 0$ and $I_o = 1$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \ldots + a_N y^{(N)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \ldots + b_M x^{(M)}(t)$$

$$\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

- **Đáp ứng trạng thái bằng không**
  - Tín hiệu ra của hệ thống khi các điều kiện ban đầu bằng 0
  - Kí hiệu là $y_{zs}(t)$
- **Đáp ứng đầu vào bằng không**
  - Tín hiệu ra của hệ thống khí tín hiệu vào bằng không
  - Kí hiệu là $y_{zi}(t)$
- **Tín hiệu thực tế của hệ thống**

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

- **Ví dụ:**
  - Hãy đáp ứng trạng thái bằng không và đáp ứng đầu vào bằng không của mạch điện RL trong ví dụ trước