$4. Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

1. Quy tắc đạo hàm ttrong miền *s* (Đạo hàm của phép biến đổi Laplace).

Nếu hàm $f(t)$ liên tục từng khúc, có cấp mũ trên khoảng $[0,+\infty)$ và $L\{f(t)\}=F(s)$ thì

$$L\{(-1)^n t^n f(t)\}=F^{(n)}(s)\quad (s>0)\leftrightarrow L^{-1}\{F^{(n)}(s)\}=(-1)^n t^n f(t)$$

Chứng minh: Ta có

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt\to F'(s)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-st}[-tf(t)]dt=-L\{tf(t)\}$$

Chứng minh (tiếp)

$$F''(s) = (F'(s))' = \frac{d}{ds}\left(\int_0^{+\infty} e^{-st}[-tf(t)]dt\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}[-tf(t)])dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}(-t)[-tf(t)]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}t^2 f(t)dt = L\{t^2 f(t)\}$$

Cứ thế tiếp tục ta được công thức cần chứng minh

Ghi chú.

$L^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)\ (t > 0) \leftrightarrow f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}$ (t>0)

Hay $L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}$

Các VD

1. Tính $L\{t^2cos3t\}$. Ta có

$$L\{cos3t\} = \frac{s}{s^2+9} \to L\{t^2cos3t\} = \left(\frac{s}{s^2+9}\right)'' = \left[\frac{9-s^2}{(s^2+9)^2}\right]'$$

$$= \frac{-2s(s^2+9)^2 - (9-s^2).4s(s^2+9)}{(s^2+9)^4} = \frac{2s^3-54s}{(s^2+9)^3}$$

2. Tính $L^{-1}\left\{ln\frac{s+a}{s+b}\right\} = f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\left(ln\frac{s+a}{s+b}\right)'\right\}$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\{[\ln(s+a) - \ln(s+b)]'\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$$

VD (tiếp)

3. $L^{-1}\left\{arctan\frac{1}{s}\right\}$

Đặt $F(s) = arctan\frac{1}{s} \to F'(s) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{1}{1+s^2}$

$$L^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\} \to L^{-1}\left\{arctan\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\}$$

$$= \frac{sint}{t}$$

2. Quy tắc đạo hàm ttrong miền t

(Phép bđ Laplace của đạo hàm)

Nếu $y(t)$ liên tục và có cấp mũ , $y'(t)$ liên tục từng khúc trên $[0, +\infty)$ thì tồn tại $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - y(0)$.

Nếu $y(0) = 0 \rightarrow L^{-1}\{sY(s)\} = y'(t)$.

Hệ quả: Nếu $y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)$ liên tục và có cấp mũ, $y^{(n)}(t)$ liên tục từng khúc trên $[0, +\infty)$ thì

$$L\{y^{(n)}(t)\} = s^n L\{y(t)\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

VD: Tính

$$L\left\{e^{2t}[e^{-t}(1 - cost)]''\right\}$$

VD: Tính

$$L\left\{e^{2t}\left[e^{-t}(1-cost)\right]''\right\}$$

Giải. Đặt $f(t) = e^{-t}(1-cost) \to f(0) = 0$

$$f'(t) = -e^{-t}(1-cost) + e^{-t}sint \to f'(0) = 0$$

Ta có $L\{1-cost\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$

$$\to L\,\{f(t)\} = L\{e^{-t}(1-cost)\} = \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+1]}$$

Từ đây ta có

$$L\{f''(t)\} = L\left\{\left[e^{-t}(1-cost)\right]''\right\} = \frac{s^2}{(s+1)[(s+1)^2+1]}$$

Do đó

$$L\{e^{2t}f''(t)\} = L\left\{e^{2t}\left[e^{-t}(1-cost)\right]''\right\} = \frac{(s-2)^2}{(s-1)[(s-1)^2+1]}$$

3. Phép biến đổi Laplace của tích phân

Định lý. Nếu $f(t)$ liên tục từng khúc và có cấp mũ $c \geq 0$ trên khoảng $[0, +\infty)$ và nếu $F(s) = L\{f(t)\}$ thì

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (s > c) \leftrightarrow L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Chứng minh. Đặt $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \to g'(t) = f(t), g(0) = 0$ trừ tại những điểm gián đoạn của $f(t)$.

Ta có $|g(t)| = \left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \leq \int_0^t |f(\tau)|d\tau \leq \int_0^t Me^{c\tau}d\tau = M\left.\frac{e^{c\tau}}{c}\right|_0^t$

$$= \frac{M}{c}(e^{ct} - 1) \leq \frac{M}{c}e^{ct} \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

Vậy $g(t)$ có bậc mũ trên $[0, +\infty)$. Vậy ta có

$$L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) = sL\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$$

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{L\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Các ví dụ

1. $L\left\{\int_0^t e^{a\tau} cosb\tau d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{e^{at} cosbt\} = \frac{1}{s} . \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right\} = \frac{1}{a} L^{-1}\left\{\frac{a}{s(s^2+a^2)}\right\} = \frac{1}{a} L^{-1}\left\{\frac{\frac{a}{s^2+a^2}}{s}\right\}$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}(\tau)d\tau = \frac{1}{a}\int_0^t sina\tau d\tau = \frac{1}{a^2}(1-cosat)$$

Bài tập

1. Tìm phép biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = tcos^2 2t$ b) $f(t) = te^{-t}cos5t$

c) $f(t) = \int_0^t sina\tau cosb\tau d\tau$ d) $f(t) = e^t \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$

2. Tìm phép biến đổi Laplace ngược các hàm số sau:

a) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$ b) $F(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+9)}$

Lời giải

1a. $f(t) = tcos^2 2t = t\,\frac{1+cos4t}{2} \rightarrow L\left\{t\,\frac{1+cos4t}{2}\right\} = -\left(L\left\{\frac{1+cos4t}{2}\right\}\right)'$

$$= -\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+16}\right)' = -\left(-\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2}\frac{s^2+16-2s^2}{(s^2+16)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}\right)$$

1.b $f(t) = te^{-t}cos5t$. Ta có $L\{cos5t\} = \frac{s}{s^2+25} \rightarrow L\{e^{-t}cos5t\}$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+25} \rightarrow L\{te^{-t}cos5t\} = -\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+25}\right]'$$

$$= -\frac{(s+1)^2+25-2(s+1)^2}{[(s+1)^2+25]^2}$$

Lời giải (tiếp)

1c. $f(t) = \int_0^t sin a\tau cos b\tau d\tau \to L\left\{\int_0^t sin a\tau cos b\tau d\tau\right\} = \frac{L\{sinatcosbt\}}{s}$

$$= \frac{1}{2s} L\{\sin(a+b)\,t + \sin(a-b)\,t\} = \frac{1}{2s}\left[\frac{a+b}{s^2+(a+b)^2} + \frac{a-b}{s^2+(a-b)^2}\right]$$

1d. $f(t) = e^t \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$

Đặt $g(t) = t^n e^{-t} \to g(0) = 0, g'(t) = nt^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t}$

$\to g'(0) = 0 \ldots.\ L\{g(t)\} = L\{t^n e^{-t}\} = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$

$L\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\} = \frac{1}{n!}\mathrm{L}\left\{g(t)^{(n)}\right\} = \frac{1}{n!}.s^n L\{g(t)\} = \frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}$

$$\to L\left\{e^t \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\} = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

Lời giải tiếp

2a. $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} \to L^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\} = \int_0^t L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} d\tau$

$= \int_0^t sin\tau d\tau = -cos\tau\,\Big|_0^t = 1 - cost$

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s\,(s^2+1)}}{s}\right\}$$

$$= \int_0^t L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} d\tau = \int_0^t (1 - cos\tau) d\tau = t - sint$$

b) $F(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+9)}$

Ta có

$$L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+9}\right\} = 2cos3t + \frac{1}{3}sin3t \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{2s+1}{s^2+9}}{s}\right\}$$

$$= \int_0^t \left(2cos3\tau + \frac{1}{3}sin3\tau\right) d\tau = \frac{2}{3}sin3t - \frac{1}{9}cos3t + \frac{1}{9}$$

4. Tích chập của 2 hàm số

4.1 Định nghĩa. Giả sử 2 hàm $f(t), g(t)$ liên tục từng khúc trên $[0, +\infty)$. Tích chập của chúng được xác định bởi công thức

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

4.2 Tính chất. Tích chập của 2 hàm số có tính chất:

a) Giao hoán: $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

b) Kết hợp: $[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]$

c) Phân phối : $h(t) * [f(t) + g(t)] = h(t) * f(t) + h(t) * g(t)$

Chứng minh tính giao hoán

Ta có

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Đặt $u = t - \tau \rightarrow d\tau = -du$

$$\rightarrow f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-u)g(u)du = g(t) * f(t).$$

Ghi chú. $f(t) * g(t) \neq f(t).g(t)$

Ví dụ:$f(t) = t^2, g(t) = t \rightarrow f(t).g(t) = t^3$. Trong khi đó

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \tau^2(t-\tau)d\tau = \left(t\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4}\right)\Big|_0^t = \frac{t^4}{12} \neq t^3$$

Định lý Nếu $f(t), g(t)$ liên tục từng khúc và có cấp mũ trên $[0,+\infty)$ thì tích chập của chúng $f(t) * g(t)$ cũng liên tục từng khúc và có bậc mũ trên $[0,+\infty)$ và

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\}L\{g(t)\} = F(s).G(s)$$

$$\leftrightarrow L^{-1}\{F(s)G(s)\} = L^{-1}\{F(s)\} * L^{-1}\{G(s)\} = f(t) * g(t)$$

Chứng minh $L\{f(t) * g(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]dt$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty} e^{-st}g(t-\tau)dt\right]d\tau \qquad (1)$$

Đặt $u = t - \tau \to t = u + \tau \to dt = du$ thay vào (1) ta được

$$L\{f(t) * g(t)\} = \int_0^{+\infty} f(\tau)\left[\int_0^{+\infty} e^{-s(t+\tau)}g(u)du\right]d\tau$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}f(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-su}g(u)du = F(s)G(s)$$

VD. $f(t) = cost, g(t) = sint$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t cos\tau \sin(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [sint - \sin(2\tau - t)]d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tau sint + \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right]\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left[tsint + \frac{1}{2}(cost - cost)\right]$$

$$= \frac{1}{2}tsint$$

$$\to L\{f(t) * g(t)\} = \frac{1}{2}L\{tsint\} = -\frac{1}{2}(L\{sint\})' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$$

$$= \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1} = L\{cost\}.L\{sint\}$$