NỘI DUNG GIẢI TÍCH 3

Chương I. Chuỗi

Chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \;\; (u_n \epsilon R)$ khi nào tồn tại tổng?

Chuỗi hàm : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$: Với x nào thì tồn tại tổng?

(kiến thức sử dụng: giới hạn)

Chương 2: PTVP.

Tìm hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$

(kiến thức sử dụng:tích phân)

Chương 3: Phương pháp toán tử Laplace

$$\text{PTVP} \xrightarrow{L} \text{PTĐS} \rightarrow \text{Nghiệm PTĐS} \xrightarrow{L^{-1}} \text{Nghiệm PTVP}$$

Chương I. CHUỖI

$1 Chuỗi số

1.Đại cương về chuỗi số

1.1 Các khái niệm

- Chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1), $u_n \in R$. VD $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+2}{(n^2+2)3^n}$
- Số hạng tổng quát u_n=$\frac{3n+2}{(n^2+2)3^n}$
- Tổng riêng thứ n: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$=$\sum_{k=1}^{n} u_k$
- Phần dư thứ n: $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S \neq \infty$ thì (1) gọi là HT và : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ hoặc $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ thì (1) FK

VD 1.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (1); $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \to (1) HT$$

VD 2

$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^n$ (2) $(a \neq 0)$; $u_n = aq^n$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$

- $q = 1 \rightarrow S_n = na \rightarrow \lim_{n\rightarrow+\infty} S_n = \infty \rightarrow (2)FK$
- $q = -1 \rightarrow S_n = -a + a - a + \cdots + (-1)^n a$

$$= \begin{cases} -a\ khi\ n = 2k+1 \\ 0\ khi\ n = 2k \end{cases} \rightarrow \nexists \lim_{\mathrm{n}\rightarrow+\infty} S_n \rightarrow (2)\mathrm{FK}$$

- $|q| \neq 1 \rightarrow S_n = aq(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$

$$= aq\frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \begin{cases} \lim_{n\rightarrow+\infty} S_n = \dfrac{aq}{1-q} khi\ |q| < 1 \\ \lim_{n\rightarrow+\infty} S_n = \infty\ khi\ \ |q| > 1 \end{cases}$$

KL: $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^n$ HT $\leftrightarrow$ $|q|<1, \sum_{n=1}^{+\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$

1.2 Điều kiện cần của chuỗi HT

Định lý: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) HT→ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Chứng minh: $u_n = S_n - S_{n-1}$

$\to \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

Hệ quả: Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \to (1)FK$

VD $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^3+2n+5}{5n^3-2n^2+6n+1}$ PK vì

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3+2n+5}{5n^3-2n^2+6n+1} = \frac{3}{5} \neq 0$

Ghi chú: Đây chỉ là điều kiện cần chứ không đủ.

VD. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (1).

$S_{2n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}$

$\to S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) \neq 0 \to \nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \to (1)FK$

(1) gọi là chuỗi điều hòa

1.3 Tính chất của chuỗi HT

<u>TC1</u>: i) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S \to \sum_{n=1}^{+\infty} au_n = aS$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ FK $\to \sum_{n=1}^{+\infty} au_n$ FK với $a \neq 0$.

<u>TC2</u>. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sigma$

thì $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$.

<u>TC3</u>.Tính HT hay FK của một chuỗi không thay đổi khi ta thêm vào hay bớt đi một số hữu hạn số hạng.

2.Chuỗi số dương

2.1 Định nghĩa

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) gọi là chuỗi số dương nếu $u_n > 0 \ \ \forall n$

2.2. Các tiêu chuẩn xét sự HT chuỗi số dương

a) TC so sánh: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) ;$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$(2) là 2 chuỗi số dương

Tiêu chuẩn 1. i) Nếu $u_n \le v_n \forall n$;(2)HT thì (1) HT

ii) Nếu $u_n \le v_n \forall n$;(1)FK thì (2) FK

CM: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$\rightarrow \{S_n\}, \{\sigma_n\}$ là 2 dãy tăng và $S_n \le \sigma_n \ \forall n$

i) (2) HT$\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma \rightarrow S_n \le \sigma_n \ \le \sigma$

$\rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S \le \sigma \rightarrow (1)HT$

ii) (1)FK$\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty \rightarrow$(2) FK

a) TC so sánh (tiếp) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) ;$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(2)$

Tiêu chuẩn 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases} k: 0 < k < +\infty \to \ (1), (2) \text{ cùng HT hoặc cùng FK} \\ k = 0; (2)\text{HT} \to (1)\text{HT} \\ k = +\infty; (2)\text{FK} \to (1)\text{FK} \end{cases}$$

Ghi chú: Nếu u_n và v_n là 2 VCB cùng bậc thì

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) ;$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(2)$ cùng HT hoặc cùng FK

2.2. Các tiêu chuẩn xét sự HT chuỗi số dương (tiếp

b) T/C D'Alembert: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) là chuỗi số dương

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$=D ta có $\begin{cases} D < 1 \to (1)\text{HT} \\ D > 1 \to (1)\text{FK} \\ D = 1 \text{ chưa KL} \end{cases}$

$\underline{\textit{Chứng minh tiêu chuẩn D'Alembert}}$

i) D $< 1 \to \exists \varepsilon > 0: q = D + \varepsilon < 1.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \to \exists n_0$: n>$n_0$ thì $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - D\right| < \epsilon$

$\to \frac{u_{n+1}}{u_n} - D < \varepsilon \to u_{n+1} < (D+\varepsilon)u_n \quad \forall n > n_0$

$\to u_{n_0+1} < (D+\varepsilon)u_{n_0} \to u_{n_0+2} < (D+\varepsilon)u_{n_0+1} < (D+\varepsilon)^2 u_{n_0}$

$\to \cdots \to u_{n_0+k} < (D+\varepsilon)^k u_{n_0} \;\; \forall k \geq 1$

$\sum_{k=1}^{+\infty} (D+\varepsilon)^k u_{n_0}$HT vì $q = D + \varepsilon < 1 \to \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n_0+k}$ HT $\to (1)$ HT

ii) Tương tự khi D $> 1 \to \exists \varepsilon > 0: q = D - \varepsilon > 1.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \to \exists n_0$: n>$n_0$ thì $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - D\right| < \varepsilon \to \frac{u_{n+1}}{u_n} - D > -\varepsilon$

$\to u_{n+1} > (D-\varepsilon)u_n \quad \forall n > n_0$

$\to u_{n_0+1} > (D-\varepsilon)u_{n_0} \to u_{n_0+2} > (D-\varepsilon)u_{n_0+1} > (D-\varepsilon)^2 u_{n_0}$

$\to \cdots \to u_{n_0+k} > (D-\varepsilon)^k u_{n_0} \;\; \forall k \geq 1$

$\sum_{k=1}^{+\infty} (D-\varepsilon)^k u_{n_0}$ FK vì q=$D - \varepsilon > 1 \to \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n_0+k}$ FK $\to \to (1)$ FK

2.2. Các tiêu chuẩn xét sự HT chuỗi số dương (tiếp)

c) **Tiêu chuẩn Cauchy**: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n (1)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = C \text{ khi đó } \begin{cases} C < 1 \to (1)\text{HT} \\ C > 1 \to (1)\text{FK} \\ C = 1 \text{ chưa KL} \end{cases}$$

d) **Tiêu chuẩn tích phân**: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1)

Nếu tồn tại $f(x)$ thỏa mãn:

i) xđ, lt, giảm, dương trên $[n_o; +\infty)$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

iii) $f(n) = u_n \forall n \geq n_0$

Khi đó chuỗi (1) và tp $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ cùng HT hoặc FK

VD: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \in R)$.

Khi $s \leq 1 \rightarrow 0 < n^s \leq n \rightarrow \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}$ mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad FK$
$\rightarrow (1)FK$

Khi $s > 1$ đặt $f(x) = \frac{1}{x^s}$. Hàm $f(x)$ thỏa mãn các yêu cầu của tiêu chuẩn TP.

- $f(x)x$đ, lt, dương, giảm trên $[1; +\infty)$
- $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- $f(n) = \frac{1}{n^s} = u_n$

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx$ HT khi $s > 1$

Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ HT $\leftrightarrow s > 1$ (chuỗi Rieman)

VD về chuỗi

VD1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2+2n+7}{3n^3+5n^2+6}$ (1)

$$u_n = \frac{4n^2+2n+7}{3n^3+5n^2+6} > \frac{4n^2}{3n^3+5n^3+6n^3} = \frac{4n^2}{14n^3} = \frac{2}{7}\frac{1}{n} = v_n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{7}\frac{1}{n}$ PK→ (1) PK

VD2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{5n^2+6}$ (2)

$$u_n = \frac{\sqrt{2n+3}}{5n^2+6} < \frac{\sqrt{2n+3n}}{5n^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ HT → (2)HT

VD về chuỗi (tiếp)

VD3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(3n+7)}{n!\,(n^2+2n+4)} \quad (3) \quad u_n = \frac{3^n(3n+7)}{n!\,(n^2+2n+4)} \rightarrow$$

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}[3(n+1)+7]}{(n+1)!\,[(n+1)^2+2(n+1)+4]}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}[3(n+1)+7]}{(n+1)!\,[(n+1)^2+2(n+1)+4]} \cdot \frac{n!\,(n^2+2n+4)}{3^n(3n+7)}$$

$$= \frac{3(3n+10)\left(n^2+2n+4\right)}{(n+1)(3n+7)(n^2+4n+7)} = \frac{3}{n+1} \cdot \frac{3n+10}{3n+7} \cdot \frac{n^2+2n+4}{n^2+4n+7} \rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \rightarrow (3\ )\ \text{HT}$$

VD về chuỗi (tiếp)

VD4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n^2}$ (4) $\left(\text{Ghi chú: } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e\right)$

$$u_n = \left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n^2} \to \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n} = \left(1+\frac{-2}{2n+7}\right)^{\frac{2n+7}{-2}\left(\frac{-2}{2n+7}.n\right)}$$

Ta có $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+7}\right)^{\frac{2n+7}{-2}} = e$ và

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{2n+7}.n\right) = -1 \to \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = e^{-1} < 1$

Nên (4) HT

VD về chuỗi (tiếp)

VD5. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(lnn)^2}$ (5).

Đặt $f(x) = \frac{1}{x(lnx)^2}$ với $x \geq 2$.

$f(x)$ xđ, lt, dương, giảm trên $[2, +\infty)$ và

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $f(n) = \frac{1}{n(lnn)^2} = u_n$. Ta có $\mathrm{I} = \int_2^{+\infty} f(x)dx =$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(lnx)^2} dx \xRightarrow{t=lnx} I = \int_{ln2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{ln2}^{+\infty} = \frac{1}{ln2} \to \text{TP HT} \to (5)\text{HT}$

VD6. $\sum_{n=1}^{+\infty} sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (6). (Ghi chú $\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$)

Ta có $u_n = sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} = v_n$

$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ HT$\to$ $(6)\text{HT}$

3. Chuỗi có dấu bất kỳ

3.1 Chuỗi đan dấu

a) **Định nghĩa**: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ (1) với u_n>0 $\forall n$.

VD: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+5)}{(n+2)3^n}$

b) **Tiêu chuẩn Leibnitz**: Nếu chuỗi đan dấu (1) thỏa mãn :

i) $u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \geq n_0 \in N$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$=0

thì (1) HT

Chứng minh tiêu chuẩn Leibnitz

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2n-2} + u_{2n-1} - u_{2n}$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$\rightarrow \{S_{2n}\}$ tăng.

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

$\rightarrow S_{2n} < u_1 \;\; \forall n \qquad \rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Mặt khác

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - u_{2n}) = S - 0 = S$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S \rightarrow (1)$ HT

Các VD về chuỗi đan dấu

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$;

- Chuỗi đan dấu
- $u_n=\frac{n}{n^2+1}$. Đặt $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ với $x\geq 1\rightarrow f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\leq 0\rightarrow f(x)$ giảm $\rightarrow u_n$ giảm

- $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}u_n=0\rightarrow$ HT

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cosn\pi}{\sqrt{n}}$

$$u_n=\frac{cosn\pi}{\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\rightarrow\begin{cases}\text{đan dấu}\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\text{ giảm}\\ \lim\limits_{n\rightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\end{cases}\rightarrow \text{HT}$$

3.2 Chuỗi HT tuyệt đối, bán HT

ĐN: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) với $u_n \in R$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ (2) gọi là chuỗi trị tuyệt đối của (1)

Định lý: (2) HT→ (1)HT. Khi đó (1) gọi là HT tuyệt đối
Nếu (1) HT mà (2) FK thì (1) gọi là bán HT hay HT có ĐK.

Chứng minh: Ta có $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$
$\rightarrow 0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$.
Đặt $0 \leq v_n = u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. Vậy nếu $(2) HT \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ HT
$\rightarrow u_n = v_n - |u|_n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ HT.

Ghi chú:

i) (2) FK thì (1) có thể vẫn HT.

VD: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ HT theo TC Leibnitz còn $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ FK

ii) Nếu (2) FK theo tiêu chuẩn D'Alembert hay theo tiêu chuẩn Cauchy thì (1) FK

3.3 Một số TC của chuỗi HT tuyệt đối

TC1. Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$ (1) (HT tuyệt đối) thì thay đổi thứ tự hay nhóm tùy ý một số số hạng lại cũng được chuỗi HT tuyệt đối và có tổng bằng S. Nếu (1) HT có ĐK thì có thể thay đổi thứ tự các số hạng hoặc nhóm tùy ý một số số hạng được chuỗi mới HT có tổng khác S hoặc FK.

ĐN: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1)$; $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(2) \to \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(3)$ trong đó $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ gọi là tích của (1) và (2).

TC2. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S_1(1)$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = S_2(2)$ HT tuyệt đối thì (3) HT tuyệt đối và $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = S_1 S_2$

Một số Ví dụ

I. Xét sự HT của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-sin\frac{1}{n}\right)$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(arctan\frac{1}{n}\right)^{n}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)!}{n!10^n}$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty}sin\left(\frac{\pi}{n}+n\pi\right)$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$

Lời giải

1.. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-sin\frac{1}{n}\right)$ (1);

$CM: x-sinx \leq \frac{x^3}{6}\ \ \forall x \geq 0.$ Đặt $f(x)=\frac{x^3}{6}-x+sinx \rightarrow$ $f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{x^2}{2}-1+cosx \rightarrow f'(0)=0$$

$f''(x)=x-sinx \geq 0\ \forall x \geq 0\ \rightarrow f'(x)tăng \rightarrow f'(x) \geq 0$

$\rightarrow f(x)tăng \rightarrow f(x) \geq 0$

Vậy $\frac{1}{n}-sin\frac{1}{n} \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{6}=\frac{1}{6n^3}$. Mà $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6n^3}\ \ HT \rightarrow (1)HT$

Bài 2.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ (2); $\left(\text{Ghi chú: } \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e\right)$

$$u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \to \sqrt[n]{u_n} = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$= \left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}.n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)}$$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}} = e$ và

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[-2n^2\left(\sin\frac{1}{2n}\right)^2\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = e^{-\frac{1}{2}} < 1 \to (2)\text{HT}$$

Lời giải(tiếp)

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$ (3). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

$\to e^{x} - 1 \sim x$ khi $x \to 0 \to \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \to +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ HT$\to$ (3) HT.

Bài 4

4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(arctan\frac{1}{n}\right)^n$ (4).

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(arctan\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}arctan\frac{1}{n}=0$$

$\to$ (4) HT.

Lời giải(tiếp)

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{n!10^n}$ (5).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+3)!}{(n+1)!10^{n+1}} \frac{n!10^n}{(n+2)!} = \frac{1}{10} < 1 \to (5)$ HT

Bài 6

. $\sum_{n=1}^{+\infty} sin\left(\frac{\pi}{n} + n\pi\right)$ (6)

$$u_n = sin\left(\frac{\pi}{n} + n\pi\right)$$

$$= sin\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + cos\frac{\pi}{n}\sin(n\pi) = (-1)^n sin\frac{\pi}{n}$$

$$\begin{cases} u_n \text{ đan dấu} \\ sin\frac{\pi}{n+1} < sin\frac{\pi}{n} \rightarrow (6) \text{ HT.} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} sin\frac{\pi}{n} = 0 \end{cases}$$

Lời giải(tiếp)

7.$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$ (7)

$$u_n=\frac{\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}}$$

$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}}$. Đây là chuỗi đan dấu. $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}}$

- $u_{2k}=\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}}=u_{2k+1}>u_{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{2k+3}+\sqrt{2k+2}}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}}=0$

$\to$ (7) HT

VD (tiếp)

Xét sự HT tuyệt đối và bán hội tụ các chuỗi số sau

1. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ (1)

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n lnn}{n}$ (2)

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ (3)

4. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ (4)

5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}sin\frac{n\pi}{2}$ (5)

Bài 1. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ (1)

- Đan dấu
- $u_n=\frac{n}{n^2+1}$ giảm vì đặt $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$\rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\leq 0\quad \forall x\geq 1$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$

Vậy (1) HT nhưng $\sum_{n=1}\left|(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$

$$\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$$

FK. Vậy (1) bán HT

Bài 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n lnn}{n}$ (2)

Giải $u_n = \frac{lnn}{n}$ Đặt $f(x) = \frac{lnx}{x}$ với $x \geq 3$

- $f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2} < 0$ khi $x > e \rightarrow f(x)$giảm khi $x \geq 3$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Vậy (2) là chuỗi đan dấu thỏa mãn Leibnitz nên HT

- *f(x)* xđ liên tục, dương trên $[3, +\infty)$
- $f(n) = \frac{lnn}{n} = u_n$
- $\int_3^{+} f(x)dx = \int_3^{+\infty} \frac{lnx}{x} dx = \frac{t^2}{2}\Big|_{ln3}^{+\infty}$ $FK \rightarrow$

  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n lnn}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lnn}{n}$ $FK. Vậy$ (2) bán HT

Bài3. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ (3)

Giải: $|u_n| = \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$

$\rightarrow$ (3)HT tuyệt đối

Bài 4 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ (4)

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}$$

$$= \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

Ta có $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ HT theo Leibnitz vì $\begin{cases} \text{Đan dấu} \\ v_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \text{ giảm} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$

và $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$ FK

Vậy (4) FK

Bài 5 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}sin\frac{n\pi}{2}$ (5)

Ta có $u_n = \frac{1}{n}sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n = 2k \\ \frac{1}{2k+1}sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{(-1)^k}{2k+1} \end{cases}$

Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{2\mathrm{k}+1} \rightarrow \begin{cases} \text{đan dấu} \\ \mathrm{v_k} = \frac{1}{2\mathrm{k}+1} \text{ giảm} \rightarrow \\ \lim_{\mathrm{k}\to+\infty}\mathrm{v_k} = 0 \end{cases}$

(5) HT theo Leibnitz

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k+1} \quad FK \rightarrow \text{(5) bán HT}$$