$3. PTVP cấp 2

1. Đại cương về PTVP cấp 2.

1.1 ĐN $F(x, y, y', y") = 0$ (1); $y" = f(x, y, y')$ (2).

1.2 Sơ kiện ban đầu: $y\Big|_{x = x_0} = y_0$ và $y'\Big|_{x = x_0} = y'_0$

hay $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$ (3) với x_0, y_0, y'_0 cho trước

Bài toán Cauchy (bài toán giá trị ban đầu): Tìm nghiệm của PTVP (1) hoặc (2) thỏa mãn sơ kiện ban đầu (3).

1.3 Định lý (sự tồn tại và duy nhất nghiệm). Nếu $f(x, y, y'); \dfrac{\partial f}{\partial y}$ $và$ $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong miền Ω chứa điểm (x_0, y_0, y'_0) thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất thỏa mãn sơ kiện (3).

1.4 Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng

Nghiệm TQ của PTVP (2) là hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ trong đó C_1, C_2 là các hàng số tùy ý sao cho:

1) Nó thỏa mãn PTVP (2) với mọi C_1, C_2
2) Với bộ 3 số (x_0, y_0, y'_0) cho trước sao cho điều kiện

Định lý trên thỏa mãn thì tồn tại $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}$ để hàm số $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02})$ thỏa mãn sơ kiện ban đầu (3).

Hệ thức $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm TQ của (2) gọi là TP TQ của nó.

Hệ thức $\phi(x, y, C_{01}, C_{02}) = 0$ gọi là TP riêng

2. Một số PT khuyết.

2.1 PT khuyết y, y': $F(x, y") = 0.$

<u>*Cách giải:*</u>Đặt $p = y' \to p' = y'' \to F(x, p') = 0$ đây là PTVP cấp 1.

<u>VD</u>. Giải PTVP $y" = sin^2x$ thỏa mãn $y(0) = 0; y'(0) = 0$

Giải: Đặt $p = y' \to p' = y'' = sin^2x$

$$\to p = \int sin^2x dx = \int \frac{1 - cos2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4} + C_1$$

$$y'(0) = p(0) = C_1 = 0 \to p = \frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4} \to y = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{sin2x}{4}\right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{cos2x}{8} + C_2$$

$$y(0) = \frac{1}{8} + C_2 = 0 \to C_2 = -\frac{1}{8} \to y = \frac{x^2}{4} + \frac{cos2x}{8} - \frac{1}{8}$$

2.2 PT khuyết y: $F(x, y'. y'') = 0$.

Cách giải: Đặt $y' = p(x) \to y'' = p' \to F(x, p, p') = 0$ PTVP cấp1

VD. $(x^2 + 1)y'' + xy' = 0$

Giải. Đặt $y' = p(x) \to y'' = p' \to (x^2 + 1)p' + xp = 0$

$$(x^2 + 1)p' = -xp$$

$*p = 0$ là nghiệm $\to y = C$.

$* \text{ p} \neq 0 \to (x^2 + 1)\frac{dp}{dx} = -xp \to \frac{dp}{p} = -\frac{x}{x^2+1}dx$

$\to ln|p(x)| = -\frac{1}{2}ln(x^2 + 1) + ln|C_1| = ln\left|\frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right|$

$\to y' = p = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\to y = \int \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = C_1 ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right| + C_2$

2.3 PT khuyết x: $F(y, y', y") = 0.$

Cách giải: Đặt $y' = p(y) \rightarrow y" = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p.\frac{dp}{dy} \rightarrow$
$F(y, p, \frac{dp}{dy}) = 0$. PTVP cấp 1 ẩn là p, biến là y.

VD. Giải phương trình $2yy" - 1 = y'^2$.

Giải: Đặt $y' = p(y) \rightarrow y" = p\frac{dp}{dy} \rightarrow 2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$

$\frac{2p}{p^2+1}dp = \frac{dy}{y} \rightarrow \int \frac{2\text{p}}{\text{p}^2+1}\text{dp} = \int \frac{1}{y}dy \rightarrow ln(p^2 + 1) + ln|C_1| = ln|y|$

$\rightarrow ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = ln(p^2 + 1) \rightarrow y = C_1(p^2 + 1)$ với C_1 là hằng số

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow dx = \frac{dy}{p} = \frac{2C_1 pdp}{p} = 2C_1 dp \rightarrow \frac{dx}{2C_1} = dp$$

$$p = \frac{x}{2C_1} + C_2 \rightarrow y = C_1(p^2 + 1) = C_1\left[\left(\frac{x}{2C_1} + C_2\right)^2 + 1\right]$$

3. PT tuyến tính cấp 2

3.1 ĐN: PTVP tuyến tính cấp 2 là PT

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)(1)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$xđ trên I

3.2 Bài toán Cauchy đối với PTVP TT cấp 2.

Tìm nghiệm của (1) thỏa mãn sơ kiện ban đầu

$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0$ với $x_0 \in I; y_0$ và y'_0 cho trước

<u>Định lý:</u> Nếu $p(x), q(x), f(x)$ liên tục trên khoảng mở I thì PT

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

có nghiệm duy nhất trên I với $x_0 \in I$ và y_0, y'_0 cho trước.

3.3 PTVP tuyến tính thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

Định lý 1. Nếu $y_1(x); y_2(x)$ là 2 nghiệm của (2) thì

$\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với $C_{1,}C_2$ là 2 hằng số tùy ý là nghiệm của (2)

Chứng minh:

$\overline{y'} = C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x); \overline{y''} = C_1y''_1(x) + C_2y''_2(x)$

$\overline{y''} + p(x)\overline{y'} + q(x)\bar{y} = C_1y''_1(x) + C_2y''_2(x)$

$+p(x)\left[C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x)\right] + q(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]$

$= C_1\left[y''_1(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1\right] + C_2\left[y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2\right] = 0$

Định nghĩa 1. Hai hàm số $y_1(x); y_2(x)$ gọi là độc lập tuyến tính trên I nếu $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$. ($k$ là hằng số, trái lại gọi là pttt)

VD: $y_1(x) = \sin x; y_2(x) = \cos(x)$ độc lập tuyến tính trên R

$y_1(x) = 3e^{5x}; y_2(x) = -7e^{5x}$ phụ thuộc tuyến tính trên R.

3.3 PTVP tuyến tính thuần nhất (tiếp)

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

ĐN2. Hai hàm số $y_1(x); y_2(x)$ khả vi trên I. Khi đó định thức $\mathrm{W(x)} = \mathrm{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$ gọi là định thức Wronski.

Định lý 2. Nếu hai hàm số $y_1(x); y_2(x)$ pttt trên I thì $\mathrm{W}(y_1, y_2)=0\ \forall x \in I$.

CM: $y_1(x); y_2(x)$ pttt$\rightarrow y_2(x) = ky_1(x) \rightarrow y'_2(x) = ky'_1(x)$

$$\rightarrow \mathrm{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y'_1 & ky'_1 \end{vmatrix} = 0$$

3.3 PTVP tuyến tính thuần nhất (tiếp)

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

<u>Định lý 3(Định lý Abel)</u>. Nếu $y_1(x); y_2(x)$ là 2 nghiệm của (2), $p(x); q(x)$ liên tục trên khoảng mở I và $x_0 \in I$ thì

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \qquad \forall x \in I$$

<u>Hệ quả</u>: $W(x) = 0 \ \forall x \in I$ hoặc $W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

<u>CM</u>: $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$. Nếu $W(x_0)$=0 thì $W(x) = 0 \ \forall x \in I$. Nếu $W(x_0)$ ≠0 thì $W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

<u>Định lý 4</u>. Giả sử $y_1(x); y_2(x)$ là 2 nghiệm của (2), $p(x); q(x)$ liên tục trên khoảng mở I. Khi đó $y_1(x); y_2(x)$ đltt khi và chỉ khi $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

<u>Định lý 5</u>. Nếu $y_1(x); y_2(x)$ là 2 nghiệm đltt trên I của (2), $p(x); q(x)$ liên tục trên I thì $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ là nghiệm TQ của (2) trên I.

<u>*CM*</u>: Theo Định lý 1 thì $\bar{y}$ là nghiệm của (2) $\forall C_1; C_2$ là các hằng số

Giả sử sơ kiện ban đầu $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0$ cho trước. Ta có

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \bar{y}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_o & \text{(i)} \\ \bar{y}'(x_0) = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_o & \text{(ii)} \end{cases}$$

Ta có $W(x) \neq 0$ (Định lý 4)

Hệ pt có $D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0$ (Hệ quả Đlý 3) $\rightarrow$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất (ẩn là $C_1; C_2$).

Bài toán: *Giải pt thuần nhất.* Tìm 2 nghiệm đltt của (2)

Biết $y_1(x)$. Tìm $y_2(x) = u(x)y_1(x) \rightarrow$ PT khuyết

VD. Giải PT $y" + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0$ (1) biết nghiệm $y_1 = x^2$

Giải: $y_2(x) = u(x)y_1(x) = x^2u(x) \rightarrow y'_2 = 2xu + x^2u'$

$y"_2 = 2u + 2xu' + 2xu' + x^2u" = 2u + 4xu' + x^2u"$ thay vào (1):

$2u + 4xu' + x^2u" + \frac{2}{x}(2xu + x^2u') - \frac{6}{x^2}x^2u = 0$

$x^2u" + x6u' = 0$. Đặt $p = u' \rightarrow p' = u" \rightarrow xp' + 6p = 0 \rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} p = 0 \ (u = C) \text{ loại} \\ \qquad p \neq 0 \end{array}\right.$

$$\rightarrow x\frac{dp}{dx} = -6p \rightarrow \frac{dp}{p} = -6\frac{dx}{x} \rightarrow ln|p| = -6ln|x| \rightarrow p = \frac{1}{x^6} = u'$$

$$u = \int \frac{1}{x^6}dx = -\frac{1}{5x^5} \rightarrow y_2(x) = -\frac{1}{5x^5}x^2 = -\frac{1}{5x^3}$$

Vậy nghiệm TQ của (1) $\bar{y} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^3}$ trong đó $C_1; C_2$ là 2 hằng số tùy ý

Ghi chú: Cách tìm nghiệm $y_2(x)$ của PT thuần nhất (trực tiếp)

Giả sử $y_1(x)$ là nghiệm của $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2).

$$y_2 = u(x)y_1 \to y'_2 = u'y_1 + uy'_1; y''_2 = u''y_1 + 2u'y'_1 + uy''_1$$

$$y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2 = u''y_1 + 2u'y'_1 + uy''_1$$
$$+p(x)\left(u'y_1 + uy'_1\right) + q(x)uy_1$$
$$= u\left(y''_1 + py'_1 + qy_1\right) + u''y_1 + (2y'_1 + py_1)u' = 0$$

$$u''y_1 + (2y'_1 + py_1)u' = 0 \xrightarrow{v=u'} y_1v' + (2y'_1 + py_1)v = 0$$

$$y_1\frac{dv}{dx} = -\left(2y'_1 + py_1\right)v \to \frac{dv}{v} = -\left(2\frac{y'_1}{y_1} + p\right)dx$$

$$ln|v| = -2ln|y_1| - \int pdx = ln\frac{1}{(y_1)^2} - \int pdx$$

$$v = \frac{e^{-\int pdx}}{(y_1)^2} = u' \to u = \int \frac{e^{-\int pdx}}{(y_1)^2}dx \to y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int pdx}}{(y_1)^2}dx$$

3.4 PT tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3)$$

Định lý 6. Nghiệm TQ của (3) là tổng nghiệm TQ $\bar{y}$ của PT thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2) với một nghiệm riêng bất kỳ y^* của (3):

$$y = \bar{y} + y^*$$

Cách giải (3): (Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange):

Giả sử $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm TQ của (2) $C_1; C_2$ là các hằng số

Tìm $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, trong đó $C_1(x); C_2(x)$ là hàm số

$$(y^*)' = C'_1y_1 + C_1y'_1 + C'_2y_2 + C_2y'_2$$

Chọn $C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0$ (i) $\rightarrow (y^*)' = C_1y'_1 + C_2y'_2$

$$(y^*)'' = C_1(y_1)'' + C_2(y_2)'' + (C_1)'(y_1)' + (C_2)'(y_2)'$$

thay vào (3):

$$C_1\left[(y_1)'' + p(y_1)' + qy_1\right] + C_2\left[(y_2)'' + p(y_2)' + qy_2\right]$$
$$+(C_1)'(y_1)' + (C_2)'(y_2)' = f(x)$$

$$\rightarrow (C_1)'(y_1)' + (C_2)'(y_2)' = f(x) \quad \text{(ii)}$$

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 & (i) \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) & (ii) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W(x) \neq 0;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}$$

$$C_1(x) = \int C'_1(x)dx = \int \frac{D_1}{D} dx;$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)dx = \int \frac{D_2}{D} dx;$$

VD: $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2$ (1) biết $y_1 = x$ là một nghiệm của PT thuần nhất

$$(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$$

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0 \ (2).$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{(y_1)^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx}}{x^2} dx$$

$$= x \int \frac{x^2-1}{x^2} dx = \mathrm{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 1$$

$$\bar{y} = C_1 x + C_2(1 + x^2)$$

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2 \rightarrow y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 1$$

$y^* = C_1(x)x + C_2(x)(1+x^2)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} C'_1(x)x + C'_2(x)(1+x^2) = 0 \\ C'_1(x) + C'_2(x).2x = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} x & 1+x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 - 1;\ D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1+x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = -(1+x^2); D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x$$

$$C_1 = \int C'_1(x)dx = \int -\frac{1+x^2}{x^2-1}dx = -\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx = -x - ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$C_2 = \int C'_2(x)dx = \int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}ln|x^2-1|$$

$$y^* = -x\left(x + ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + \frac{1}{2}(1+x^2)ln|x^2-1|$$

Nghiệm TQ:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1x + C_2(1+x^2) - x\left(x + ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + \frac{1}{2}(1+x^2)ln|x^2-1|$$

Ghi chú: Nếu $y1^*; y2^*$ là 2 nghiệm của pt không thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)thì $y_1 = y1^* - y2^*$ là một nghiệm của pt thuân nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

Ta có : $y'_1 = (y1^*)' - (y2^*)'; y''_1 = (y1^*)'' - (y2^*)''$

$$(y1^*)'' + p(x)(y1^*)' + q(x)y1^* = f(x) \quad (i)$$

$$(y2^*)'' + p(x)(y2^*)' + q(x)y2^* = f(x) \quad (ii)$$

$$(i) - (ii) \rightarrow (y1^*)'' - (y2^*)'' + p(x)[(y1^*)' - (y2^*)'] + q(x)(y1^* - y2^*) = 0$$

$$\rightarrow y''_1 + p(x)y'_1 + q(x)y_1 = 0$$

$\rightarrow$ $y_1 = y1^* - y2^*$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2)

VD: Giải phương trình $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2\,y = -2$ (1)

biết $y1^* = x$ và $y2^* = 1$ là 2 nghiệm riêng của nó.

Giải: $Y_1 = y1^* - y2^* = x - 1$ là nghiệm của pt thuần nhất

$$y'' + \frac{2x-2}{2x-x^2}y' - \frac{2}{2x-x^2}y = 0$$

$$Y_2 = Y_1\int \frac{e^{-\int \frac{2x-2}{2x-x^2}dx}}{(Y_1)^2}dx = (x-1)\int \frac{e^{ln|2x-x^2|}}{(x-1)^2}dx = (x-1)\int \frac{2x-x^2}{(x-1)^2}dx$$

$$= (x-1)\int \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx = (x-1)\left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) = x^2$$

Vậy nghiệm TQ của (1):

$$y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + y2^* = C_1(x-1) + C_2x^2 + 1$$

Định lý 7 (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Cho pt: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ (1) với $p(x), q(x), f_1(x), f_2(x)$ liên tục trong khoảng I.

Nếu $y1^*$ là nghiệm riêng của $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ (2)
và $y2^*$ là nghiệm riêng của $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ (3)
thì $y^* = y1^* + y2^*$ là nghiệm riêng của (1).

CM: $(y^*)' = (y1^*)' + (y2^*)'$; $(y^*)'' = (y1^*)'' + (y2^*)''$

$(y^*)'' + p(x)(y^*)' + q(x)y^* = [(y1^*)'' + p(x)(y1^*)' + q(x)y1^*]$
$+[(y2^*)'' + p(x)(y2^*)' + q(x)y2^*] = f_1(x) + f_2(x)$ (đpcm)

4. PTVT tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1) \text{ với } p, q \text{ là hằng số}$$

4.1 Công thức Euler:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{i\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots.\right)$$

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

4.2 PT thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0$ (2)

Nghiệm $y = e^{kx} \rightarrow y' = ke^{kx} \rightarrow y'' = k^2 e^{kx}$ thay vào (2)

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$\rightarrow k^2 + pk + q = 0 \quad \text{Phương trình đặc trưng}$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

Nghiệm của PT thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0$

TH1. $\Delta > 0 \rightarrow k_1 \neq k_2 \rightarrow y_1 = e^{k_1 x}; y_2 = e^{k_2 x}$ đltt $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

TH2. $\Delta = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \rightarrow y_1 = e^{k_1 x};$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{(y_1)^2} dx = e^{k_1 x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{(e^{k_1 x})^2} dx = e^{k_1 x} \int \frac{e^{2k_1 x}}{(e^{k_1 x})^2} dx$$

$$y_2 = e^{k_1 x} \int dx = x e^{k_1 x}$$

$$\rightarrow \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

TH3: $\Delta < 0 \rightarrow k_1 = \alpha + i\beta;\ k_2 = \alpha - i\beta$

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

$$\xrightarrow{\text{Định lý 1}} Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x; Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

là 2 nghiệm đltt của (2)

$$\rightarrow \bar{y} = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

Là nghiệm TQ của (2)

VD. Tìm nghiệm tổng quát:

1) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Giải: $k^2 - 2k + 5 = 0 \rightarrow k_1 = 1 + 2i$; $k_2 = 1 - 2i$

$\bar{y} = e^x(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$

2) $y'' - 5y' + 6y = 0$

Giải: $k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow k_1 = 2; k_2 = 3$

$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$

Giải: $k^2 + 6k + 9 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = -3$

$$\bar{y} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$$

4.3 PT tuyến tính không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$

Nguyên tắc chung: Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Khi $f(x)$ có dang đặc biệt

Dạng 1. $f(x) = e^{kx}P_n(x)$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

TH1: $k \neq k_1; k \neq k_2 \to y^* = e^{kx}Q_n(x)$; $Q_n(x)$ đa thức cùng bậc với $P_n(x)$

TH2: $k = k_1 \neq k_2 \to y^* = xe^{kx}Q_n(x)$

TH3: $k = k_1 = k_2 \to y^* = x^2e^{kx}Q_n(x)$

VD. 1) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ (1)

Giải: $k^2 - 3k + 2 = 0 \to k_1 = 1; k_2 = 2 \to \bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$

$$f(x) = x^2 = e^{0x}x^2 \to k = 0 \to y^* = e^{0x}(Ax^2 + Bx + C)$$

$(y^*)' = 2Ax + B$; $(y^*)'' = 2A$ thay vào (1):

$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$

$$\to \begin{cases} 2A = 2 \\ -6A + 2B = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = \frac{7}{2} \end{cases} \to y^* = x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

Nghiệm $y = \bar{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$

VD2: $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 6x - 5$ (1)

Giải: $k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow k_1 = 2; k_2 = 3 \rightarrow \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

- $f_1(x) = 1.e^{2x} \rightarrow k = 2 = k_1 \neq k_2 \rightarrow y1^* = xAe^{2x} = Axe^{2x}$

$$(y1^*)' = A(e^{2x} + 2xe^{2x}) = A(1+2x)e^{2x}$$

$$(y1^*)'' = A[2e^{2x} + (2+4x)e^{2x}] = A(4+4x)e^{2x}$$

$$(y1^*)'' - 5(y1^*)' + 6(y1^*) = e^{2x}$$

$$A(4+4x)e^{2x} - 5A(1+2x)e^{2x} + 6xAe^{2x} = e^{2x}$$

$$-Ae^{2x} = e^{2x} \rightarrow A = -1 \rightarrow y1^* = -xe^{2x}$$

$$* \ f_2(x) = 6x - 5 = e^{0x}(6x - 5)$$

$$\rightarrow k = 0 \rightarrow y2^* = Ax + B \rightarrow (y2^*)' = A \rightarrow (y2^*)'' = 0$$

$$(y2^*)'' - 5(y2^*)' + 6(y2^*) = -5A + 6(Ax + B) = 6x - 5$$

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ -5A + 6B = -5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow y2^* = x$$

$$y^* = y1^* + y2^* = -xe^{2x} + x$$

Nghiệm TQ:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + -xe^{2x} + x.$$

VD :$y'' - 2y' + y = e^x$

Giải: $k^2 - 2k + 1 = 0 \to k_1 = k_2 = 1 \to \bar{y} = e^x(C_1 + C_2x)$

$$f(x) = 1.e^x \to k = 1 = k_1 = k_2 \to y^* = x^2e^xA.$$

$$(y^*)' = A(2xe^x + x^2e^x) = A(x^2 + 2x)e^x$$

$$(y^*)'' = A\left((2x + 2)e^x + (x^2+2x)e^x\right) = A(x^2 + 4x + 2)e^x$$

$$A(x^2 + 4x + 2)e^x - 2A(x^2 + 2x)e^x + x^2e^xA = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \to A = \frac{1}{2} \to y^* = \frac{1}{2}x^2e^x$$

$$y = \bar{y} + y^* = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}x^2e^x$$

Dạng 2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x]$

$$k = \alpha + i\beta$$

TH1: $k \neq k_1; k \neq k_2: y^* = e^{\alpha x}[R_l(x)cos\beta x + S_l(x)sin\beta x]; l = max\{m, n\}$

TH2: $k = k_1 \neq k_2: y^* = xe^{\alpha x}[R_l(x)cos\beta x + S_l(x)sin\beta x]; l = max\{m, n\}$

VD: $y'' + y = 2sinx$ (1)

Giải: $k^2 + 1 = 0 \to k_{1,2} = \pm i = 0 \pm i \to \bar{y} = C_1cosx + C_2sinx$

$$f(x) = e^{0x}(0.cosx + 2.sinx) \to k = 0 + i = k_1$$

$$y^* = xe^{0x}(Acosx + Bsinx) = x(Acosx + Bsinx)$$

$$(y^*)' = Acosx + Bsinx + x(-Asinx + Bcosx)$$

$$(y^*)' = (Bx + A)cosx - (Ax - B)sinx$$

$$(y^*)'' = Bcosx - (Bx + A)sinx - Asinx - (Ax - B)cosx$$

$$(y^*)'' = (2B - Ax)cosx - (Bx + 2A)sinx$$

$$(y^*)'' + y^* = (2B - Ax)cosx - (Bx + 2A)sinx + x(Acosx + Bsinx) = 2sinx$$

$$2Bcosx - 2Asinx = 2sinx \to \begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 2 \end{cases} \to \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases} \to y^* = -xcosx$$

Nghiệm $y = \bar{y} + y^* = C_1cosx + C_2sinx - xcosx.$

Ghi chú: $f(x)$ không có dạng đặc biệt: sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

VD: $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1}$. Giải: PT đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \to k_1 = 1; k_2 = -1$

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{-x} \to \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{-x} = 0 \\ C'_1 e^x - C'_2 e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2;\ D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{e^x}{e^x+1} & e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^x+1}; D_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

$$C_1(x) = \int C'_1(x)dx = \int \frac{D_1}{D}dx = \int \frac{1}{2(e^x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \frac{1}{2}[x - \ln(e^x+1)]$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)dx = \int \frac{D_2}{D}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

$$y^* = \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

Nghiệm TQ:

$$y = \bar{y} + y^*$$

$$= C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x+1)]$$

5. PTVP Euler: $x^2y" + axy' + by = 0$ (1); a, b là hằng số

Cách giải: Đặt $|x| = e^t \to t = ln|x| \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

$y" = \frac{d}{dx}(y') = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$ thay vào (1):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$$

VD: $x^2y" - xy' + y = cos(lnx)$ (1).

Giải: $x = e^t \to \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = cost$ (2). Đây là ptvp tt cấp 2 hệ số hằng

Nghiệm của (2): $y = e^t(C_1t + C_2) - \frac{1}{2}sint$

Nghiệm của (1): $y = x(C_1lnx + C_2) - \frac{1}{2}sinlnx$

$4. Hệ PTVP

1. Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa: Hệ ptvp cấp 1 chính tắc là hệ

(I): $$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \qquad \cdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}.$$

Trong đó x là biến độc lập; $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các hàm phải tìm, $f_1, f_2, \dots, f_n$ là các hàm xác định trong miền D của R^{n+1}

Hệ (I) gọi là hệ ptvp tuyến tính nếu các hàm số $f_1, f_2, \dots, f_n$ là các hàm số tuyến tính đối với $y_1, y_2, \dots, y_n$.

1.2 Sơ kiện ban đầu:

$$y_1\Big|_{x=x_0}=y_{10};\, y_2\Big|_{x=x_0}=y_{20};\cdots;y_n\Big|_{x=x_0}=y_{n0} \quad (2)$$

trong đó $x_0, y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0}$ cho trước

1.3 Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm của hệ (I) thỏa mãn sơ kiên ban đầu (2)

Định lý (tồn tại vầ duy nhất nghiệm): Nếu các hàm số $f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $k=\overline{1,n}$ và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $k, j=\overline{1,n}$ liên tụ trong miền D chứa điểm $(x_0, y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0})$ thì trong lân cận x_0 hệ (I) có nghiệm duy nhất thỏa mãn sơ kiện ban đầu (2).

1.4 Nghiệm tổng quát: Nghiệm TQ của (I) là bộ n hàm số $y_k=\varphi_k(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$, k $=\overline{1,n}$ trong đó $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các hằng số sao cho

i) Nó thỏa mãn (I) vơi mọi $C_1, C_2, \cdots, C_n$
ii) Với mọi $(x_0, y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0})$ cho trước thỏa mãn điều kiện Định lý trên thì tồn tại $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \cdots, C_n = C_{n0}$ sao cho $\varphi_k(x, C_{10}, C_{20}, \cdots, C_{n0}), k = \overline{1, n}$ thỏa mãn sơ kiện ban đầu (2)

2. Cách giải. Dùng phương pháp khử:

Mọi ptvp cấp n có dạng $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y", \cdots, y^{(n-1)}\right)$ đều có thể đưa về một hệ ptvp cấp 1 chính tắc. Đặt $y = y_1; y' = y_2; y" = y_3; \cdots; y^{(n-1)} = y_n$ ta có

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}$$

Đảo lại: Một hệ ptvp chính tắc cấp 1 có thể đưa về một ptvp cấp cao đối với một hàm chưa biết bằng cách khử $n-1$ hàm chưa biết còn lại từ n phương trinh của hệ. Giải phương trình cao cấp đó rồi tìm các hàm còn lại

VD. 1) Giải hệ ptvp $\begin{cases} y' = 5y + 4z \ \ (1) \\ z' = 4y + 5z \ \ (2) \end{cases}$

Giải: $5y' - 4z' = 9y \to z' = \frac{5y'-9y}{4}$

(1)$\to$ $y" = 5y' + 4z' = 5y' + (5y' - 9y) = 10y' - 9y$

$y'' - 10y' + 9y = 0$ PTVP cấp 2. PT đặc trưng $k^2 - 10k + 9 = 0$

$$k_1 = 1; k_2 = 9 \to y = C_1e^x + C_2e^{9x}$$

$$z = \frac{y' - 5y}{4} = \frac{C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5(C_1e^x + C_2e^{9x})}{4} = -C_1e^x + C_2e^{9x}$$

Nghiệm của hệ :$\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{9x} \\ z = -C_1e^x + C_2e^{9x} \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = y + z & (1) \\ z' = y + z + x & (2) \end{cases}$

Giải: $y' - z' = x \rightarrow z' = y' - x$

(1)→ y=y′+z′=y′+(y′−x)→$y'' - 2y' = x$

$$k^2 - 2k = 0 \rightarrow k_1 = 0; k_2 = 2 \rightarrow \bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$f(x) = x = e^{0x}x \rightarrow k = 0 = k_1 \neq k_2$$

$$\rightarrow y^* = xe^{0x}(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

$$(y^*)' = 2Ax + B; (y^*)'' = 2A \rightarrow 2A - 2(2Ax + B) = x$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \rightarrow A = B = -\frac{1}{4} \rightarrow y^* = -\frac{1}{4}(x^2 + x)$$

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)$$

$$z = y' - y = 2C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 1) - \left[C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)\right]$$

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1)$$