Chương I. CHUỖI

$2 Chuỗi hàm

1.Đại cương về chuỗi hàm

1.1 Định nghĩa chuỗi hàm

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ (1); $u_n(x)$ là hàm số $\forall n$ xác định trên tập I.

Tổng riêng thứ n: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$

Phần dư thứ n:

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

VD 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n+x^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)x^n}{n!3^n}$

1.2 Miền HT của chuỗi hàm

Thay $x = x_0 \in I$ vào $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)(1) \to \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ (2) là chuỗi số, Nếu (2) HT thì x_0 gọi là điểm HT của (1), nếu ko thì x_0 gọi là điểm FK của (1).

Tập hợp tất cả các điểm HT của (1) gọi là miền HT của (1).

VD: Tìm miền HT của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right| = L$$

- Nếu $|x| < 1 \to \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1 \to$ FK
- Nếu $x = 1 \to u_n(x) = \frac{1}{2} \to \lim_{n\to+\infty} u_n(x) \neq 0 \to$ FK
- $x = -1$ không thuộc miền xđ của $u_n(x)$ khi n lẻ.
- Nếu $|x| > 1 \to L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{1}{x^n}+x}\right| = \frac{1}{|x|} < 1 \to$ HT

KL: Miền HT $|x| > 1$

1.3 Tổng của chuỗi hàm.

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)(1)$ hội tụ điểm trên I (I là miền HT của (1))

và $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)\ \forall x \in I$

{Với $x \in I$ $và$ $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x): n > n_0, |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$}

thì $f(x)$ gọi là tổng của chuỗi hàm (1): $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$ trên I.

VD: $\sum_{n=0}^{+\infty} ax^n$ HT khi và chỉ khi $|x| < 1$

$$S_n(x) = a + ax + \cdots + ax^n = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = a\frac{1}{1-x}\ \ \forall|x| < 1 \to \sum_{n=0}^{+\infty} ax^n = a\frac{1}{1-x}\ \ \forall|x| < 1$.

Các VD
I. Tìm miền HT

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$ (1)

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n2^n}$ (2) ;

3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{n+5}$ (3)

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ (4)

5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$ (5)

Ghi chú:

- Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$(2) HT thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) HT
- Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$(2) FK theo D'Alembert hay theo Cauchy thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1) FK

Bài 1 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$ (1);

$u_n(x)=\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n \rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=|x|<1$

$\rightarrow HT\ khi\ \ x\in(-1,1)$

- $x=1\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0\rightarrow FK$

- $x=-1\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n\neq 0\rightarrow FK$

Miền HT của (1): $(-1,1)$

Bài 2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n2^n}$ (2)

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n2^n} \to \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \frac{\mathrm{n}2^{\mathrm{n}}}{(\mathrm{n}+1)2^{\mathrm{n}+1}} |x|$$

$$= \frac{1}{2}|x| < 1$$

khoảng HT $(-2,2)$.

- $\mathrm{x} = 2 \to \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}2^{\mathrm{n}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}} \xrightarrow{\text{Leibnitz}} \mathrm{HT}$
- $x = -2 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \to FK$

Miền HT $(-2, 2]$

Bài 3 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+5} \qquad (3)$

$$u_n(x) = \frac{2^n (x-3)^n}{n+5} \; (3)$$

$$\to \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{n+6} . \frac{n+5}{2^n}\right| |x-3| = 2|x-3| < 1$$

Vậy (3) HT khi $|x-3| < \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$ (khoảng HT)

- $x = \frac{5}{2} \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (\frac{5}{2}-3)^n}{n+5} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+5} \xrightarrow{Leibnitz} \text{HT}$
- $x = \frac{7}{2} \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (\frac{7}{2}-3)^n}{n+5} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+5} \to \text{FK}$

Vậy miền HT $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Bài 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \quad (4)$

$u_n(x) = ne^{-nx} = |u_n(x)| \to \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{n}e^{-x}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}e^{-x} = e^{-x} < 1 \leftrightarrow x > 0$

(ghi chú: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{ln\sqrt[x]{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{lnx}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$)

Khi $x = 0 \to \sum_{n=1}^{+\infty} n \quad FK$

Vậy miền HT: $x > 0$.

Bài 5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$

$$u_n(x)=\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n \to \sqrt[n]{|u_n|}=\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|=\left|\frac{x^2}{n}+x\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{n}+x\right|=|x|<1\leftrightarrow -1<x<1$$

- $x=1\to\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\ FK\ v\grave{\imath}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e\neq 0$
- $x=-1\to\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-n}{n}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\ FK\ v\grave{\imath}$
  $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$

Vậy miền HT:$(-1,1)$

2. Hội tụ đều

2.1 ĐN

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)(1)$ HT đều tới $f(x)$ trên I nếu $\forall \varepsilon > 0$
$\exists n_0(\varepsilon) \in N: n > n_0$ thì $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$.

2.2 Tiêu chuẩn HT đều

TC Cauchy: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)(1)$ HT đều trên $I \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$:

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon, \forall n > n_{0;} \forall p \in N, \forall x \in I.$$

TC Weirstrass: Nếu $|u_n(x)| \le a_n \quad \forall n \in N; \forall x \in I$ và
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ HT$\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)(1)$ HT đều trên I.

CÁC VÍ DỤ về HT đều

1) Chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$ (1) HT đều trên R.
2) Chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ (2) HT đều trên $[a; b]$ với $a > 1$.

Bài 1. Chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin\ nx}{n^2+x^2}$ (1) HT đều trên R.

Giải: $|u_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2}\ \forall n \in N; \forall x \in R$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ HT→ $(1) HT$ đều trên R.

Bài 2. Chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ (2) HT đều trên $[a;b]$ với $a > 1$.

Giải:

$$1 < a \leq x \leq b \rightarrow |u_n(x)| = \left|\frac{1}{1+x^n}\right| < \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n}$ HT $\rightarrow$ (2) HT đều

2.3 Tính chất của chuỗi hàm HT đều

TC1.$u_n(x)$ lt trên $[a;b]$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{HTĐ} f(x)$ trên $[a;b] \to f(x)$ lt trên $[a;b]$.

TC2. $u_n(x)$ lt trên $[a;b]$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{HTĐ} f(x)$ trên $[a;b] \to \int_c^d f(x)dx = \int_c^d (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x))\, dx$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_c^d u_n(x)dx;\ \ a \leq c \leq d \leq b.$

TC3. Nếu $u_n(x)$ khả vi liên tục trên $[a;b] \forall n$;

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{HT} f(x)$ trên $[a;b]$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \xrightarrow{HTĐ} g(x)$ trên $[a;b]$ thì $f(x)$ khả vi trên $[a;b]$ và

$f'(x) = (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = g(x)$

VD

1) Tính $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sinnx}{n^3}\right)'$

Giải: Đặt $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sinnx}{n^3} \qquad (1);$

$$|u_n(x)| = \left|\frac{sinnx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} \ \ \forall x \in R$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ HT → (1) HTĐ trên R.
- $\left(u_n(x)\right)' = \frac{cosnx}{n^2}$; $\left|\left(u_n(x)\right)'\right| = \left|\frac{cosnx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \ \ \forall x \in R$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ HT→ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n(x)\right)'$ HTĐ trên R.

$f(x)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sinnx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{sinnx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cosnx}{n^2}$ trên R

VD (tiếp)

2) Chứng minh $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ (1) liên tục trên $(0, +\infty)$

Giải: $|u_n(x)| = \left|\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in (0, +\infty)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ HT $\rightarrow$ (1) HTĐ trên $(0, +\infty)$

$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ liên tục trên $(0, +\infty)$

Vậy $f(x)$ liên tục trên $(0, +\infty)$

$3. Chuỗi lũy thừa

1. Định nghĩa chuỗi lũy thừa. Định lý Abel

1.1 ĐN: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

VD: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-2}{n!5^n} x^n$ (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{3n+2}}{n^2+n+1} x^n$ (2).

Tổng quát:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$; $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (f(x))^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)(x-5)^n}{2^n(n^3+2n+4)}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n+2}{5^n\sqrt{n+3}} \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^n$

1.2 Định lý Abel. Nếu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ HT tại $x_0 \neq 0$ thì (1) HT tuyệt đối tại mọi x thỏa mãn $|x| < |x_0|$

CM: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x_0)^n$ HT $\rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n (x_0)^n = 0 \rightarrow \exists M > 0$: $|a_n (x_0)^n|$<M $\forall\, n \geq 0$.

$$|a_n x^n| = \left|a_n (x_0)^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n (x_0)^n| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right|$$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} M \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right|$ HT$\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ HT.

Định lý Abel(tiếp)

* **<u>*Hệ quả*</u>**. Nếu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ FK tại $x = x_1$ thì FK tại $\forall x$ thỏa mãn $|x| > |x_1|$

CM: Nếu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ HT tại $x = x_2$ với $|x_2| > |x_1|$

Theo Định lý thì $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ HT tuyệt đối tại $\forall x$ thỏa mãn $|x| < |x_2| \rightarrow (1)$ HT tại $x_1 \rightarrow$ trái gt.

Ta có $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\rightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|$

$= \lim\limits_{n\rightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \rho . |x| = D < 1$

- Nếu $\rho = 0 \rightarrow (1)$ HT tại $\forall x \rightarrow$ Miền HT $(-\infty, +\infty)$
- Nếu $\rho = +\infty \rightarrow (1)$chỉ HT tại $x = 0$.
- Nếu $0 < \rho < +\infty \rightarrow |x| < \frac{1}{\rho} = R$

R gọi là bán kính HT và $(-R, R)$ gọi là khoảng HT.

$\left(\rho = \lim\limits_{n\rightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ hoặc } \rho = \lim\limits_{n\rightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|})\right)$