$4. Chuỗi Fourier

1. Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier

1.1 Chuỗi lượng giác

ĐN: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k coskx + b_k sinkx)$ gọi là chuỗi lượng giác

1.2 Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

ĐN: **i)**Giả sử hàm $f(x)$ xác định, khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$, tuần hoafn chu kỳ 2π. Khi đó các hệ số

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxf(x)dx \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sinnxf(x)dx \quad n = 1,2,\cdots$$

gọi là các hệ số Fourier của $f(x)$ và chuỗi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \quad (1)$$

gọi là chuỗi Fourier của $f(x)$.

ii) Nếu chuỗi Fourier (1) của $f(x)$ HT và có tổng bằng $f(x)$ thì hàm số $f(x)$ gọi là khai triển được thành chuỗi Fourier. Khi đó $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)$

Chuỗi Fourier (tiếp)

Nhận xét: Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $b_n = 0 \quad \forall n = 1,2 \ldots$. Khi đó chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ chỉ có các hàm số cosine: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cosnx$ (khai triển Fourier hàm chẵn)

Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $a_n = 0 \;\; \forall n = 0,1,2 \ldots$ Khi đó chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ chỉ có các hàm sin: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sinnx$ (khai triển Fourier hàm lẻ)

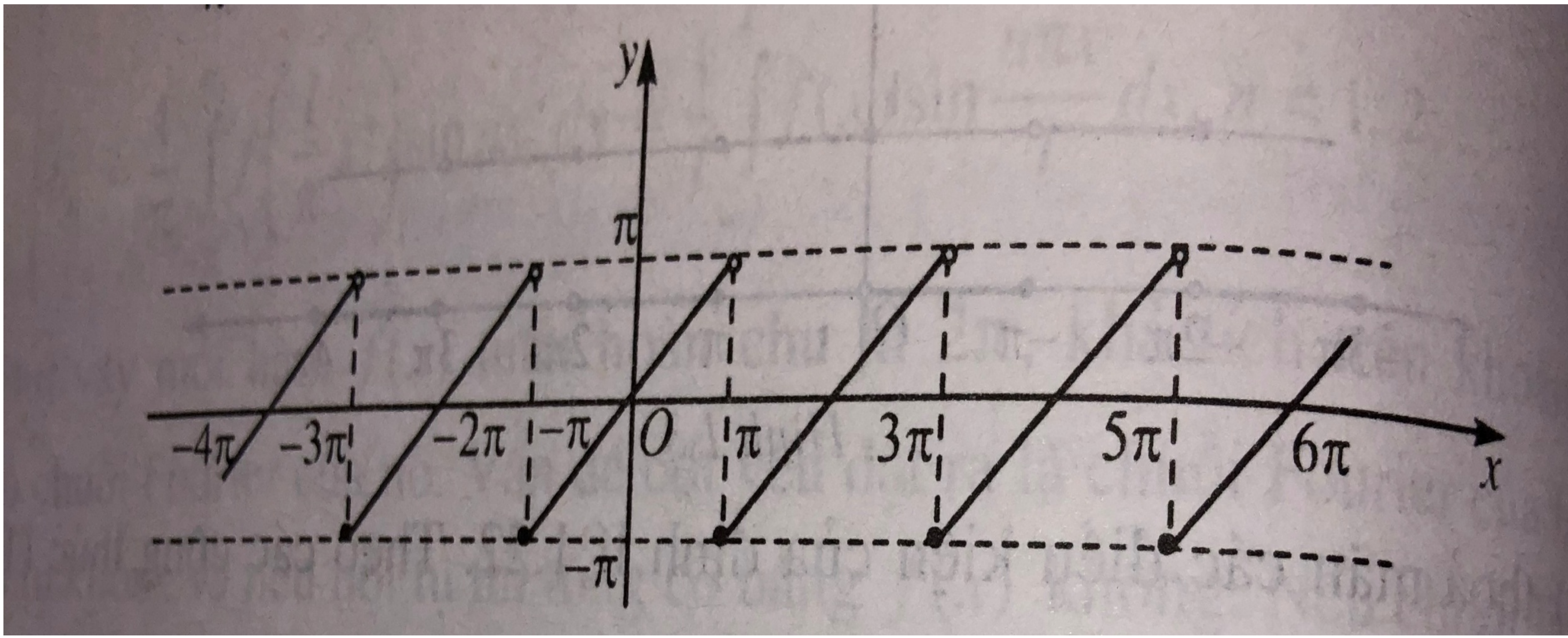
2. Các Định lý

Định lý 1(Dirichlet) : Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $2\pi, f(x)$ và $f'(x)$ liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của $f(x)$ HT trên R và có tổng

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \text{ liên tục tại } x \\ \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & \text{nếu } f(x) \text{gián đoạn loại I tại } x \end{cases}$$

Định lý 2. Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $2\pi, f(x)$ liên tục và $f'(x)$ liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của $f(x)$ HT đều trên R và có tổng đúng bằng $f(x)$.

VD. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π xác định bởi $f(x) = x$ trên khoảng $[-\pi, \pi)$.



VD. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π xác định bởi $f(x) = x$ trên khoảng $[-\pi, \pi)$. Tính $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sin\frac{n}{2}$

Giải: $f(x)$ là hàm lẻ $a_n = 0 \ \forall n = 0,1,2 \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsinnxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}cosnx\left|_{0}^{\pi}\right. + \int_0^{\pi}\frac{cosnx}{n}dx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad n = 1,2 \ldots$$

VD. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π xác định bởi $f(x) = x$ trên khoảng $[-\pi, \pi)$. Tính $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sin\frac{n}{2}$ (tiếp)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = 2\left(sinx - \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}sinnx + \cdots\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sinnx \qquad \to 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sinnx$$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f[(2k+1)\pi - 0] + f[(2k+1)\pi + 0]}{2} = 0 & \text{khi } x = (2k+1)\pi \end{cases} \quad k \in Z$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ ta có $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sin\frac{n}{2} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Nhận xét: $f(-\pi) = -\pi \neq 0 = \frac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$

3. Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$

$f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ khả tích trên $[-l, l]$.

Dùng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{l}x \to f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$. Đặt $g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \to g(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)cosnt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)cosntdt\,; \qquad a_n$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

3. Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$ (tiếp)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)sinnt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) sinntdt;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1,2, \dots.$$

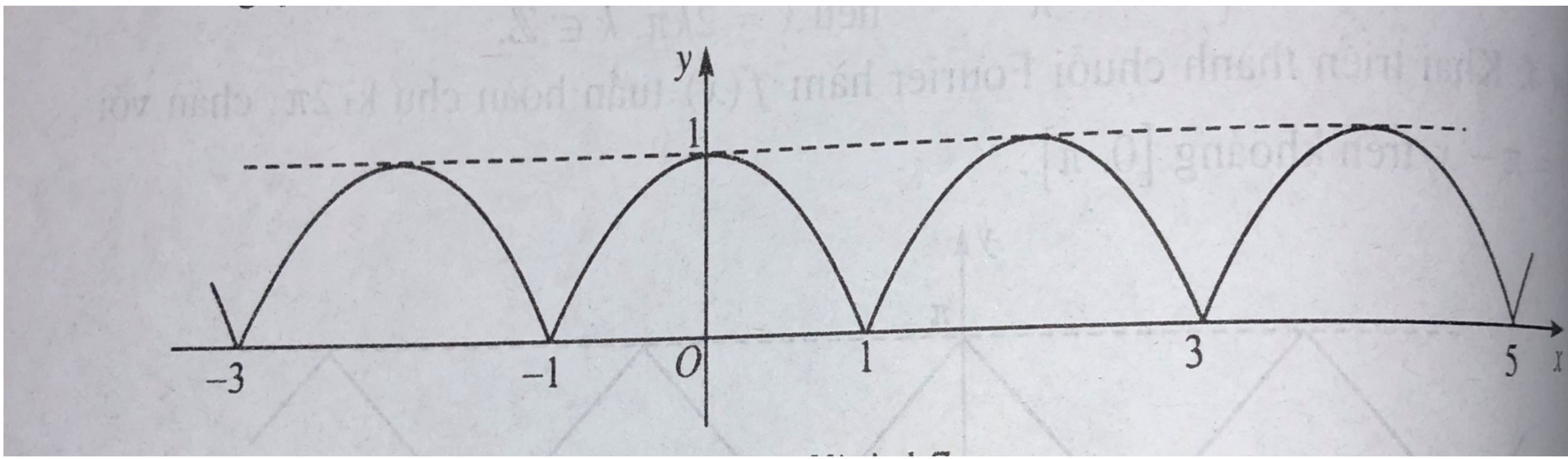
Chuỗi Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cosnt + b_n sinnt)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

VD Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn $2l$ với $l = 1$, biết rằng

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{với} \quad -1 \leq x \leq 1.$$



VD Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn $2l$ với $l = 1,$ biết rằng

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{với} \quad -1 \le x \le 1. \text{ Tính } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$f(x)$ là hàm chẵn $b_n = 0, \ \ n = 1,2, \dots.$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n$$

$$= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)cos\frac{n\pi x}{1}dx = (1 - x^2)\frac{sinn\pi x}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$+ 2\int_{-1}^{1}x\frac{sinn\pi x}{n\pi}dx = \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}xsinn\pi xdx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-x\frac{cosn\pi x}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{cosn\pi x}{n\pi}dx\right] = \frac{-4}{n^2\pi^2}cosn\pi = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$$

VD (tiếp) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn $2l$ với $l = 1$, biết rằng

$f(x) = 1 - x^2$ với $-1 \leq x \leq 1$. Tính $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$f(x) = 1 - x^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{cosn\pi x}{n^2} \qquad \forall x \in R.$$

Thay $x = 1$ vào ta có

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{cosn\pi}{n^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad .$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Chương 2 Phương trình vi phân

- § 1. Khái niệm mở đầu

1. <u>ĐN PTVP:</u> Phương trình vi phân là phương trình có dạng:

- $F\left(x, y, y', y'', \dots\dots, y^{(n)}\right) = 0$ (1)
- trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm phải tìm , $y', y", \dots y^{(n)}$ là đạo hàm các cấp của nó, *F* là hàm có *n+2* biến.
- Dạng khác của PTVP: $y^{(n)} = f(x, y, y', y", \dots\dots, y^{(n-1)})$ (2).
- VD 1) $xyy^{(5)} + y^4 \sin 2x. y" + 6xy = 0$
- 2)$y" = 4e^x y' - (3xy + 1)y - 2xsiny$
- <u>2. Cấp của PTVP</u>: Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của *y(x)* có mặt trong phương trinh
- VD: 1)$xy" - 3xye^x y' = 0$ PTVP cấp 2
- 2)$(3x - y)dx + (2e^x + y^3)dy = 0$ PTVP cấp 1
- <u>Ghi chú</u>:$y' = \frac{dy}{dx}$

$1. Khái niệm mở đầu (tiếp)

3. <u>Nghiệm PTVP</u>: Nghiệm của PTVP (1) trên khoảng *I* là mọi hàm hàm số xác định trên *I* mà khi thay vào (1) ta được đồng nhất thức

VD: 1) CM $y = e^{3x}$ là một nghiệm của PTVP $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Giải:

$y' = 3e^{3x}$; $y''=9e^{3x} \to y'' - 5y' + 6y = 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0$.

2) CM $y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$ trong đó C là hằng số tùy ý là nghiệm của PTVP $y' + 2xy = x$ trên R

Giải:

$$y' = -2xCe^{-x^2} \to y' + 2xy = -2xCe^{-x^2} + 2x\left(\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}\right) = x$$

$2. PTVP cấp I.

1. Đại cương về PTVP cấp 1 .

1.1 ĐN: $F(x, y, y') = 0$ (1) hay $y' = f(x, y)$ (2)

1.2 Bài toán Cauchy (Bài toán giá trị ban đầu): Tìm nghiệm của phương trình (1) hoặc (2) thỏa mãn sơ kiện ban đầu:

$y\Big|_{x = x_0} = y_0$ hay $y(x_0) = y_0$ trong đó x_0, y_0 cho trước.

VD. Tìm nghiệm PTVP $y' = 2y$ thỏa mãn $y(0) = 1$

Giải $\frac{dy}{dx} = 2y \to \frac{dy}{y} = 2dx \to \int \frac{dy}{y} = \int 2dx \to ln|y| = 2x + C$

Thay $x = 0, y = 1$ ta có $ln1 = 2.0 + C \to C = 0$

$\to ln|y| = 2x \to |y| = e^{2x} \to y = \pm e^{2x} \xrightarrow{y(0)=1} y = e^{2x}$

1.3 Định lý:*(về sự tồn tại duy nhất nghiệm)*

Cho PTVP $y' = f(x, y)(1)$. Nếu $f(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong miền D của mặt phẳng (xOy) chứa điểm (x_0, y_0) thì trong lân cận điểm x_0 phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn sơ kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$

1.4 Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng.

Nghiệm tổng quát của phương trình $y' = f(x, y)(1)$ là hàm số $y = \varphi(x, C)$ $\{\phi(x, y, C) = 0\}$trong đó C là hằng số thỏa mãn 2 đk:

i) Nó thỏa mãn (1) với mọi C

ii) Với mọi điểm (x_0, y_0) tại đó ĐK của Định lý trên thỏa mãn thì tồn tại C_0 để hàm số $y = \varphi(x, C_0)\{\phi(x, y, C_0) = 0\}$ thỏa mãn sơ kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

$y = \varphi(x, C_0)$ gọi là nghiệm riêng thỏa mãn sơ kiện ban đầu.

Ghi chú: Nghiệm TQ: $\phi(x, y, C) = 0$ gọi là tích phân TQ

Nghiệm riêng $\phi(x, y, C_0) = 0$ gọi là tích phân riêng

2. Các dạng PTVP cấp 1.

2.1 Phương trình khuyết :

Dạng 1: $F(x, y') = 0$ (vắng *y*)

<u>*Cách giải:*</u>

i) $y' = f(x) \rightarrow y = \int f(x)dx$

ii) $x = g(y')$. Đặt $t = y' \rightarrow x = g(t)$; $t = y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$dy = tdx = tg'(t)dt \rightarrow y = \int tg'(t)dt$$

Nghiệm $\begin{cases} x = g(t) \\ y = \int tg'(t)\,dt \end{cases}$

VD: 1) $y' = xe^x$. Nghiệm $y = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

2) $x = y' + y'^3$

Giải: Đặt $t = y' \rightarrow dy = tdx;\;\; x = t + t^3 \rightarrow dx = (1 + 3t^2)dt$

$$dy = t(1 + 3t^2)dt \rightarrow y = \int (t + 3t^3)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{4}t^4 + C$$

Nghiệm $\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{4}t^4 + C \end{cases}$

Dạng 2: $F(y, y') = 0$ (vắng x)

<u>*Cách giải:*</u>

i) $y' = f(y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \rightarrow dx = \frac{1}{f(y)}dy \rightarrow x = \int \frac{1}{f(y)}dy + C$

ii) $y = f(y')$. Đặt $\mathrm{t = y'} \rightarrow y = f(t) \rightarrow dy = f'(t)dt$

$$t = \frac{dy}{dx} \rightarrow dx = \frac{dy}{t} = \frac{f'(t)}{t}dt \rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{t}dt$$

VD:1)$y' = y^2 + 4$

Giải: $\frac{dy}{dx} = y^2 + 4 \to \frac{1}{y^2+4}dy = dx \to \int \frac{1}{y^2+4}dy = \int dx$

Nghiệm của PTVP là $\frac{1}{2}arctan\frac{y}{2} + C = x$

2) $y = y' + y'^3$

Giải: $t = y' \to y = t + t^3 \to dy = (1 + 3t^2)dt$;

$$\frac{dy}{dx} = t \to dx = \frac{1}{t}dy = \frac{1 + 3t^2}{t}dt$$

$$x = \int \frac{1 + 3t^2}{t}dt = ln|t| + \frac{3}{2}t^2 + C$$

Nghiệm $\begin{cases} x = ln|t| + \frac{3}{2}t^2 + C \\ y = t + t^3 \end{cases}$

2.2 Phương trình biến số phân ly: $M(x)dx = N(y)dy$

<u>*Cách giải*</u>: Tích phân 2 vế.

VD 1. $y' = \frac{y^2-1}{x}$

Giải $* \; y = \pm 1$ là nghiệm

$$* \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x} \to \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{x}dx \to \int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = ln|x| + ln|C| = ln|Cx| \to \frac{y-1}{y+1} = C^2x^2 \to y = \frac{1+C^2x^2}{1-C^2x^2}$$

2. $y' = cos^2(y-x)$

Đặt $z = y - x \to y = z + x \to y' = z' + 1 \to z' + 1 = cos^2 z$

$$\frac{dz}{dx} = cos^2 z - 1 = -sin^2 z \to \frac{dz}{-sin^2 z} = dx$$

$$\int \frac{dz}{-sin^2 z} = \int dx \to cotz = x + C \to \cot(y-x) = x + C$$

2.3 Phương trình thuần nhất (đẳng cấp)

$$y' = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải: Đặt $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = xu \rightarrow y' = u + xu' \rightarrow$ pt biến số phân ly

VD: $(x^3 + xy^2)y' = y^3$.

Giải: * $y = 0$ là nghiệm

* $y' = \frac{y^3}{x^3+xy^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Đặt $u = \frac{y}{x} \rightarrow y' = u + xu' = \frac{u^3}{1+u^2}$

$$xu' = \frac{u^3}{1+u^2} - u = \frac{-u}{1+u^2} \rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{u}{1+u^2}$$

$$\rightarrow \frac{1+u^2}{u}du = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1+u^2}{u}du = -\int \frac{1}{x}dx \rightarrow ln|u| + \frac{u^2}{2} = -ln|x| + ln|C| = ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\rightarrow ln\left|\frac{y}{x}\right| - ln\left|\frac{C}{x}\right| = -\frac{y^2}{2x^2} \rightarrow ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{y^2}{2x^2} \rightarrow y = Ce^{-\frac{y^2}{2x^2}}$$

2.4 Phương trình tuyến tính

$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$

Phương trình thuần nhất $y' + p(x)y = 0 \quad (2)$

Định lý: Nếu $p(x)$ và $q(x)$ liên tục trên (a, b) chứa điểm x_0 thì pt (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $y(x_0) = y_0$ trong đó y_0 là giá trị tùy ý.

Cách giải.

- Bước 1. Giải (2): $\frac{dy}{dx} = -p(x)y \rightarrow \frac{1}{y}dy = -p(x)dx$

$ln|y| = -\int p(x)dx + ln|C| \rightarrow ln|y| - ln|C| = -\int p(x)dx \rightarrow$

$ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx \rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$

Bước 2 (PP biến thiên hằng số Lagrange)

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \to p(x)y = p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = C'(x)e^{-\int pdx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}.\left(-p(x)\right)$$

$$\to y' + p(x)y = C'(x)e^{-\int pdx} = q(x)$$

$$\to C'(x) = q(x)e^{\int pdx} \to C(x) = \int q(x)e^{\int pdx}dx + K$$

$\to$ Nghiệm TQ: $$y = \left[\int q(x)e^{\int pdx}dx + K\right]e^{-\int p(x)dx}$$

VD: $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ (1)

Giải: Thực hiện từng bước

$y' - 2xy = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \rightarrow$

$ln|y| - ln|C| = x^2 \rightarrow y = Ce^{x^2}.$

Đặt $y = C(x)e^{x^2} \rightarrow y' = C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2}2x$ thay vào (1)

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2}2x - 2xC(x)e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

$$\rightarrow C'(x)e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

$\rightarrow C' = 2x \rightarrow C(x) = x^2 + K \rightarrow y = (x^2 + K)e^{x^2}.$

<u>*Ghi chú*</u>: Dùng trực tiếp công thức

$$y = \left[\int q(x)e^{\int pdx}\,dx + K\right]e^{-\int p(x)dx} = \left[\int 2xe^{x^2}e^{\int -2xdx}dx + K\right]e^{\int 2xdx}$$

$$y = \left[\int 2xdx + K\right]e^{x^2} = (x^2 + K)e^{x^2}.$$

2.5 Phương trình Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \in R)$$

Cách giải: Nếu $\alpha = 1 \rightarrow y' + [p(x) - q(x)]y = 0$ (PT TT thuần nhất)

Nếu $\alpha \neq 1 \rightarrow y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ (1).

Đặt $z = y^{1-\alpha} \rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \rightarrow y^{-\alpha}y' = \frac{1}{1-\alpha}z'$ thay vào (1):

$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x) \rightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$ (pttt)

VD: $y' + xy = x^3y^3$ (2)

Giải: $y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3$ $(2')$. Đặt $z = y^{-2} \rightarrow z' = -2y^{-3}y'$

$(2') \rightarrow -\dfrac{1}{2}z' + xz = x^3 \rightarrow z' - 2xz = -2x^3$ (3)

Nghiệm của (3): $z = \left[K + \int (-2x^3)e^{\int -2x dx}\, dx\right]e^{\int 2x dx}$

$z = \left[K - 2\displaystyle\int x^3 e^{-x^2} dx\right]e^{x^2}$. Đổi biến $t = -x^2$ và tp từng phần ta được

$z = \left[K + \left(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}\right)\right]e^{x^2}$

$z = x^2 + 1 + Ke^{x^2} \rightarrow y^{-2} = x^2 + 1 + Ke^{x^2}$ là nghiệm của (2)

2.6 PTVP toàn phần

a) ĐN :$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ thỏa mãn $P'_y = Q'_x$

Cách giải: Nghiệm của PTVP là

$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$ HOẶC

$\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx = C$ trong đó x_0, y_0 tùy chọn.

VD:$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$

Giải: $P(x,y) = x + y + 1 \to P'_y = 1$

$Q(x,y) = x - y^2 + 3 \to Q'_x = 1$ Chọn $x_0 = y_0 = 0$.

Nghiệm $\int_0^x (x + 1)dx + \int_0^y (x - y^2 + 3)dy = C$

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$$

b) Nhân tử tích phân: Phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ không phải PTVP toàn phần. Nếu tồn tại hàm số $h(x,y)$ sao cho

$$h(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0 \text{ là PTVP toàn phần}$$

$[h(x,y)P(x,y)]'_y = [h(x,y)Q(x,y)]'_x$ thì $h(x,y)$ gọi là nhân tử

<u>*Cách tìm nhân tử $h(x,y)$:*</u>

TH1: Nếu $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ chỉ phụ thuộc vào x thì $h(x) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx}$

TH2: Nếu $\frac{P'_y - Q'_x}{-P}$ chỉ phụ thuộc vào y thì $h(y) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{-P} dy}$

VD: Giải PTVP $(3xy - y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ bằng cách tìm nhân tử thích hợp.

$P = 3xy - y^2; Q = x^2 - xy$

$$\rightarrow \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{3x - 2y - (2x - y)}{x^2 - xy} = \frac{x - y}{x^2 - xy} = \frac{1}{x}$$

$\rightarrow h(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x \rightarrow x[(3xy - y^2)dx + (x^2 - xy)dy] = 0$

$(3x^2y - xy^2)dx + (x^3 - x^2y)dy = 0$ là PTVP toàn phần

Chọn $x_0 = y_0 = 0 \rightarrow \int_0^y (x^3 - x^2y)dy = C \rightarrow x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 = C$