Định lý Abel(tiếp)

<u>Hệ quả</u>. Nếu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ FK tại $x = x_1$ thì FK tại $\forall x$ thỏa mãn $|x| > |x_1|$

CM: Nếu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ HT tại $x = x_2$ với $|x_2| > |x_1|$

Theo Định lý thì $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (1)$ HT tuyệt đối tại $\forall x$ thỏa mãn $|x| < |x_2| \to (1)$ HT tại $x_1 \to$ trái gt.

Bán kính HT

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = \rho.|x| = D < 1$

- Nếu $\rho = 0 \to (1)$ HT tại $\forall x \to$ Miền HT $(-\infty, +\infty)$
- Nếu $\rho = +\infty \to (1)$chỉ HT tại $x = 0$.
- Nếu $0 < \rho < +\infty \to |x| < \frac{1}{\rho} = R$

R gọi là bán kính HT và $(-R, R)$ gọi là khoảng HT.

$$\left(\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ hoặc } \rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

2. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ có bán kinh HT là $R > 0$.

- TC1: Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ HT đều trên $[a, b]$: $-R < a < b < R$
- TC2: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$ liên tục trên $(-R, R)$.
- TC3: Với mọi $[a, b]$nằm trong khoảng $(-R, R)$ thì

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

- TC4: Tại mọi $x \in (-R, R)$ ta có

$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

3. Ứng dụng tính tổng của chuỗi

VD: Tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n} = S$ (1)

Giải: Đặt $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{x^n}\right| = |x| < 1$

Khoảng HT $(-1,1)$.

- $x = -1 \to \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ HT theo Leibnitz.
- $x = 1 \to \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n},$ FK$\to$ Miền HT $[-1,1)$

$$[f(x)]' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \to f(x) = \int\frac{1}{1-x}dx = -ln|1-x| + C$$

$f(0) = 0 \to \mathrm{C} = 0 \to f(\mathrm{x}) = -\ln|1-\mathrm{x}| \to \mathrm{S} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$

$4. Chuỗi Taylor, chuỗi Maclaurent

1. Chuỗi Taylor

1.1. ĐN. i) Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm vô hạn lần trong lận cận x_0 $\{U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$ khi đó chuỗi

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ (1)$$

Gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ lân cận $U_\delta(x_0)$của x_0

ii) Nếu (1) HT và có tổng đúng bằng $f(x)$ thì hàm $f(x)$ gọi là khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận $U_\delta(x_0)$của x_0.

Ta biết công thức Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

trong đó μ là điểm nằm giữa x và x_0.

Đặt $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

1.2 Điều kiện khai triển được thành chuỗi Taylor

Định lý 1. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm vô hạn lần trong lân cận $U_\delta(x_0)$của x_0, khi đó hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor lân cận đó khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$

Định lý 2. Nếu trong lân cận $U_\delta(x_0)$của x_0 hàm $f(x)$ có đạo hàm vô hạn lần và tồn tại $M > 0$ sao cho $\left|f^{(n)}(x)\right| < M,\ \forall x \in U_\delta(x_0), \forall n \geq 0$ thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong $U_\delta(x_0)$.

2. Chuỗi Maclaurent

Khi $x_0 = 0$ thì chuỗi Taylor gọi là chuỗi Maclaurent

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ (2)$$

3. Khai triển một số hàm sơ cấp cơ bản thành chuỗi lũy thừa (khai triển Maclaurent)

3.1 Hàm $f(x) = e^x$

Với $A > 0$ ta có $f^{(n)}(x) = e^x\ \ \forall n \in N$ và $\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| < e^A\ \ \forall x \in (-A, A) \forall n \geq 0$. Vậy

$f(x) = e^x$ có thể khai triển thành chuỗi Maclaurent trong khoảng $(-A, A)$ mà $A > 0$ tùy ý nên $f(x) = e^x$ có thể khai triển thành chuỗi Maclaurent trên R.

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \to e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \text{ với } \forall x \in R$$

3. Khai triển một số hàm sơ cấp cơ bản thành chuỗi lũy thừa (tiếp)

3.2 Hàm $\boldsymbol{f(x) = sinx}$; $\quad f^{(n)}(x) = sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 \ \ \forall n \geq 0; \ \ \forall x \in R$

$f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Maclaurent trên R.

Ta có $f^{(n)}(0) = sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2k \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+1 \\ -1 & \text{nếu } n = 4k-1 \end{cases}$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{với } x \in R$$

3.3 Hàm $\boldsymbol{f(x) = cosx}$; $\quad f^{(n)}(x) = cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 \ \ \forall n \geq 0; \ \ \forall x \in R$

$f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Maclaurent trên R

Ta có $f^{(n)}(0) = cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2k-1 \\ 1 & \text{nếu } n = 4k \\ -1 & \text{nếu } n = 4k+2 \end{cases}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ với } x \in R$$

3.4 Hàm số $\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

không thỏa mãn đk của Đinh lý 2.

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ với $-1 < x < 1$

$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ với $-1 < x < 1$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$ với $-1 < x < 1$

3.5 Hàm số $\boldsymbol{f(x) = arctanx}$

$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ với $-1 < x < 1$

$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ với $-1 < x < 1$

3. Khai triển một số hàm sơ cấp cơ bản thành chuỗi lũy thừa (tiếp)

3.6 Hàm số $\boldsymbol{f(x) = (1+x)^{\alpha}}$, α ∈ R, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \cdots$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

Chuỗi Maclaurent của $f(x)$ HT về $f(x)$:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \text{ với } -1 < x < 1$$

VD: Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{3-x}$ thành chuỗi lũy thừa của $x+5$

Giải: $f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{8-[(x+5)]} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{x+5}{8}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{x+5}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+5)^n}{8^{n+1}}$ với $\left|\frac{x+5}{8}\right| < 1 \leftrightarrow$ $-13 < x < 3$

Các VD về chuỗi lũy thừa

I. Tìm miền HT các chuỗi lũy thừa

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln n$ 2) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$ 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n x^n$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n$

II. Khai triển chuỗi Maclaurent của

5) $f(x) = \sin^2 x$ 6) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ 7) $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ 9) $f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1)$

III. Khai triển Taylor của

10) $f(x) = e^x$ lân cận $x = 3$ 11) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ lân cận $x = 4$

IV. Tìm bán kính HT và tính tổng

12) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n}$ 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} (3n+1) x^{3n}$

Lời giải bài 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n lnn$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{\ln n} \frac{\ln(n+1)}{x^n}\right| = |x| < 1 \ .$$

- $x = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} lnn$ FK vì $\lim\limits_{n\to+\infty} lnn = \infty$
- $x = -1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n lnn$ FK như trên

Miền HT: $-1<x<1$

Lời giải bài 2. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{lnn}{n} x^n$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\text{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{nln(n+1)}{(\text{n}+1)\ln n} \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1$.

- $x = 1 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lnn}{n}$ Ta có $\frac{lnn}{n} > \frac{1}{n}$. Mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ FK nên $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lnn}{n}$ FK
- $x = -1 \to \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{lnn}{n}$. Chuỗi đan dấu

$f(x) = \frac{lnx}{x} \to f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2} < 0\ \forall x \geq 3 \to f(x)$ giảm nên $u_n = \frac{lnn}{n}$ giảm

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ nên HT vậy miền HT là $[-1,1)$

Lời giải bài 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n x^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n x^n\right|} = \lim \frac{n}{n^2+1}|x| = 0$ → HT → Miền HT $(-\infty, +\infty)$

$\underset{=}{n\to+\infty}$

Lời giải bài 4. $\sum_{n=1}^{+\infty}(2^n + 3^n)x^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2^{n+1}+3^{n+1})x^{n+1}}{(2^n+3^n)x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2.\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}|x| = 3|x| < 1\ .$$

- Khoảng HT $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
- $x = -\frac{1}{3} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n\right]$. Ta có$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ HT còn $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ FK nên HT
- $x = \frac{1}{3} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]$ FK

Vậy miền HT$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Lời giải bài 5 . Khai triển Maclaurent $f(x) = sin^2x$

$$f(x) = \frac{1 - cos2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2x)^n}{n!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}2^{n-1}\frac{(x)^n}{n!}$$

Lời giải bài 6 . Khai triển Maclaurent $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{2}{3}x} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n}x^n$$

Với $\left|\frac{2}{3}x\right| < 1 \leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}$

Lời giải bài 7 . Khai triển Maclaurent $f(x)=\frac{1}{-x^2+x+2}$

$$f(x)=\frac{1}{-x^2+x+2}=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$

Ta có

- $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ với $|x|<1$
- $\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n$ với $\left|\frac{x}{2}\right|<1\leftrightarrow|x|<2$

Vậy

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3}+\frac{1}{3.2^{n+1}}\right]x^n$$

Lời giải bài 8 . Khai triển Maclaurent $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2.\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}.\left[1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Ta có $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}$

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!8^n}x^n\right]$

Với $\left|\frac{x}{4}\right| < 1 \leftrightarrow |x| < 4$

Lời giải bài 9 . Khai triển Maclaurent $f(x) = ln(-2x^2 + x + 1)$

Miền xác định $-\frac{1}{2} < x < 1 \rightarrow \ln(-2x^2 + x + 1) = ln[(1 - x)(2x + 1)]$

$= \ln(1 - x) + \ln(2x + 1)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1+(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n$ với $-\frac{1}{2} < x < 1$

Lời giải bài 10. Khai triển thành chuỗi Taylor $f(x) = e^x$ lân cận $x = 3$

$$f^{(n)}(x) = e^x \to f^{(n)}(3) = e^3 \to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n$$

Lời giải bài 11. Khai triển thành chuỗi Taylor

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} \text{ lân cận } x = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Ta có

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{4-(-x+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{4-x}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4-x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{4^{n+1}} \text{ với } \left|\frac{x-4}{4}\right| < 1$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{6-(-x+4)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{4-x}{6}} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4-x}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{6^{n+1}} \text{ với } \left|\frac{x-4}{6}\right| < 1$$

Vậy $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}\right)(x-4)^n$ với $\begin{cases} \left|\frac{x-4}{4}\right| < 1 \\ \left|\frac{x-4}{6}\right| < 1 \end{cases} \leftrightarrow |x-4| < 4$

Lời giải bài 12. Tìm bán kính HT và tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$

$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to \rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \to R = 1$

Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} \to xS(x) =$
$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} \to [xS(x)]' = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$

Từ đây ta có $xS(x) = \ln(1+x) + C$. Thay $x = 0 \to C = 0$.

Vậy $S(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$ với S(0)=0

Lời giải bài 13. Tìm bán kính HT và tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty}(3n+1)x^{3n}$

Ta có $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{3n+1} = 1$. Vậy R=1

Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{3n+1} \to S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(3n+1)x^{3n}$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{3n+1} = x\left[-1+\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n\right] = x\left[-1+\frac{1}{1-x^3}\right] = -x + \frac{x}{1-x^3}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}(3n+1)x^{3n} = S'(x) = -1 + \frac{1-x^3+3x^3}{(1-x^3)^2} = \frac{4x^3-x^6}{(1-x^3)^2}$ với -1<x<1