

Bài tập chương 4. Trường hấp dẫn

A. Tóm tắt lý thuyết:

1. Lực hấp dẫn:

- của 2 chất điểm:

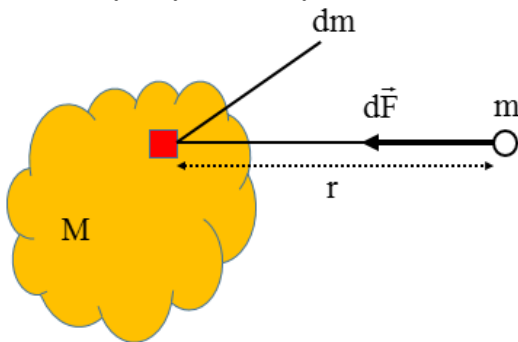
$$F_{hd} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G: Hằng số hấp dẫn ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI)

m_1, m_2 : Khối lượng của hai chất điểm

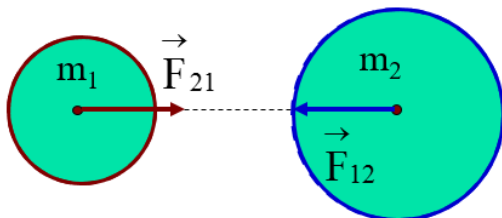
r: khoảng cách giữa chúng

- của một vật lên một chất điểm:



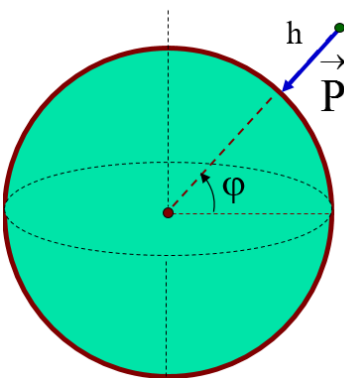
$$\vec{F}_{hd} = -G \int_{(M)} \frac{mdM}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Chú ý:



Lực hấp dẫn giữa 2 quả cầu đồng chất được tính giống như 2 chất điểm đặt tại tâm của chúng.

2. Gia tốc rơi tự do



Là gia tốc rơi của các vật trong chân không, chỉ dưới tác dụng của trọng lực.

Ở sát bề mặt trái đất:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} \approx 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Ở độ cao h:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

3. Ứng dụng tính khối lượng của các thiên thể:

- Khối lượng của Trái Đất: $M = \frac{gR^2}{G}$

R – bán kính Trái Đất, $R = 6370(\text{km}) \approx 6,370.10^6(\text{m})$

g – là gia tốc trọng trường trên mặt đất, $g \approx 9,8(\text{m} / \text{s}^2)$

$$M = \frac{9,8(6,370.10^6)^2}{6,67.10^{-11}} \approx 6.10^{24}(\text{kg})$$

- Khối lượng của Mặt Trời

Khi Trái Đất quay quanh Mặt Trời là do lực hấp dẫn của Mặt Trời đối với Trái Đất, lực này đóng vai trò lực hướng tâm:

$$F = G \frac{MM'}{R'^2} = M \cdot \frac{v^2}{R'} = \frac{M}{R'} \left(\frac{2\pi R'}{T} \right)^2 \rightarrow M' = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{R'^3}{G},$$

M' - khối lượng của Mặt Trời, R' - khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, T – chu kỳ quay của Trái Đất quanh Mặt Trời.

$$M' \approx 2.10^{30}(\text{kg})$$

4. Thế năng của trường hấp dẫn

$$W_t = -G \frac{Mm}{r} + C, \text{ C là hằng số chọn tùy ý chọn từ giá trị thế năng tại vô cùng.}$$

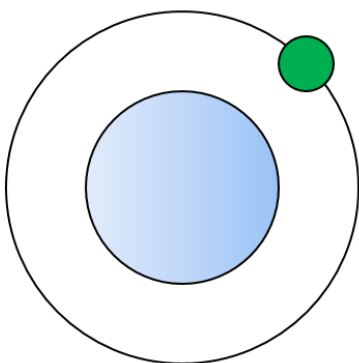
5. Bảo toàn cơ năng trong trường hấp dẫn

Trong trường hấp dẫn, cơ năng được bảo toàn:

$$W = W_d + W_t = \frac{mv^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \text{const}, \text{ để đơn giản, chọn: } W_t(\infty) = 0$$

6. Chuyển động của vệ tinh.

- Khi vận tốc $v_I = 7,9 \text{ km/s}$: Vận tốc vũ trụ cấp 1 \rightarrow Quỹ đạo tròn.



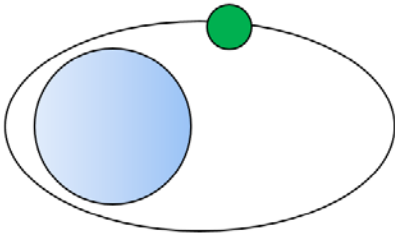
Tính vận tốc vũ trụ cấp 1:

Để vật trở thành vệ tinh nhân tạo chuyển động tròn quanh Trái Đất thì lực hấp dẫn của nó đóng vai trò là lực hướng tâm:

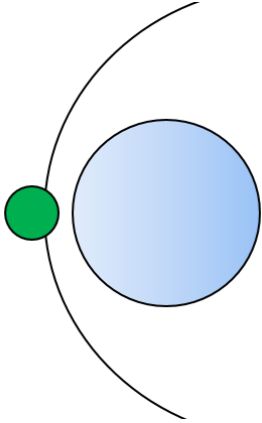
$$F_{hd} = \frac{GMm}{(R+h)^2} = mg = \frac{mv^2}{R+h}, \text{ h} \ll R, \text{ ta có:}$$

$$mg \approx mg_0 = \frac{mv^2}{R}, \text{ suy ra: } v_I = \sqrt{g_0 R}$$

- Khi vận tốc $11,2 \text{ km/s} > v > 7,9 \text{ km/s}$: Quỹ đạo là elip.



- Khi vận tốc $v_{II} = 11,2 \text{ km/s}$: Vận tốc vũ trụ cấp II \rightarrow Quỹ đạo parabol.

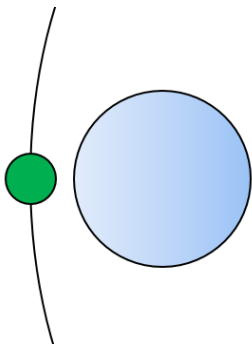


Tính vận tốc vũ trụ cấp 2:

Vận tốc vũ trụ cấp 2 gọi là vận tốc thoát ly, là giá trị vận tốc tối thiểu một vật cần có để có thể thoát ra khỏi trường hấp dẫn của một hành tinh. Vật chuyển động quanh Mặt Trời. Định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = 0 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_0 R} = 11,2 (\text{km/s})$$

- Khi vận tốc $v_{III} = 16,7 \text{ km/s}$: Vận tốc vũ trụ cấp III \rightarrow Vệ tinh có thể thoát ra khỏi hệ Mặt Trời.



Bài tập cần làm: 5.1, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12

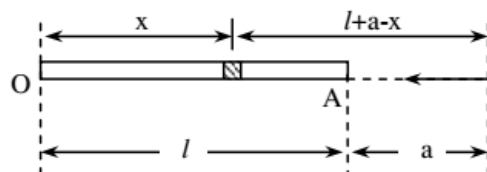
5-1. Tìm lực hút của Mặt Trời lên một vật có khối lượng $m = 1 \text{ g}$ nằm trên mặt Trái Đất, biết rằng khối lượng của Mặt Trời $M = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ và khoảng cách trung bình từ mặt đất đến tâm Mặt Trời là $r = 149 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Bài giải:

Áp dụng công thức của định luật vạn vật hấp dẫn:

$$F = G \frac{mM}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{10^{-3} \cdot 1,97 \cdot 10^{30}}{(149 \cdot 10^9)^2} \approx 5,9 \cdot 10^{-6} (N)$$

5-3. Một quả cầu khối lượng m_1 đặt cách đầu một thanh đồng chất một đoạn thẳng a trên phương kéo dài của thanh. Thanh có chiều dài l , khối lượng m_2 . Tìm lực hút của thanh lên quả cầu:



Bài giải:

Dạng thanh nên chia thanh thành từng đoạn nhỏ có kích thước dx và có khối lượng dm , cách đầu O của thanh một khoảng x .

Giờ xác định dm theo dx , nhớ là đối với thanh dài thì ta chú ý đến khối lượng trên một đơn vị độ dài λ .

$$dm = \lambda dx = \frac{m_2}{\ell} dx$$

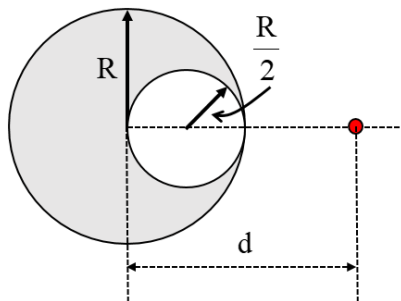
Bài yêu cầu xác định lực hút, tức là sẽ phải sử dụng công thức liên quan tới lực hấp dẫn giữa quả cầu và đoạn dm .

$$dF = G \frac{m_1 dm}{(\ell + a - x)^2} = G \frac{m_1 m_2 dx}{\ell (\ell + a - x)^2}$$

Giờ lấy tích phân và tìm cận để xác định lực hút của thanh lên quả cầu. Khi quét từ trái sang phải biến x thay đổi từ 0 đến ℓ . Đó chính là cận trên và cận dưới khi tính tích phân.

$$F = \int_0^\ell G \frac{m_1 m_2 dx}{\ell (\ell + a - x)^2} = \frac{G m_1 m_2}{\ell (\ell + a - x)^2} \Big|_0^\ell = \frac{G m_1 m_2}{\ell} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell + a} \right) = \frac{G m_1 m_2}{a(\ell + a)}$$

5-5. Trong một quả cầu bằng chì bán kính R người ta khoét một lỗ hình cầu. Mặt của lỗ tiếp xúc với mặt của quả cầu chì và đi qua tâm của nó. Khối lượng quả cầu chì trước khi khoét lỗ bằng M . Trên phương nối các tâm của quả cầu và lỗ, người ta đặt một hòn bi nhỏ khối lượng m cách tâm quả cầu một đoạn d (hình 5-2). Tìm lực hấp dẫn mà quả cầu chì (đã khoét lỗ) tác dụng lên hòn bi.



Hình 5-2.

Bài giải:

Lực hấp dẫn của quả cầu chì đã khoét lỗ đúng bằng hiệu của lực hấp dẫn gây ra bởi quả cầu chì chưa khoét lỗ và phần chì bị khoét đi.

Lực hấp dẫn của quả cầu chì chưa khoét lỗ lên hòn bi:

$$F_1 = G \frac{Mm}{d^2}$$

Lực hấp dẫn của phần chì bị khoét đi lên hòn bi:

$$F_2 = G \frac{M'm}{r^2} = G \cdot \frac{m \cdot \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{2}\right)^3}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = G \frac{m}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} \cdot \rho \frac{4\pi}{3} R^3 = G \frac{Mm}{2(2d - R)^2}$$

Vậy, lực hấp dẫn của quả cầu chì đã khoét lỗ lên hòn bi:

$$F = F_1 - F_2 = GMm \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2(2d - R)^2} \right] = GMm \frac{7d^2 - 8dR + 2R^2}{2(2d - R)^2}$$

5-6. Tìm vận tốc dài của Trái Đất quay quanh Mặt Trời, biết rằng khối lượng của Mặt Trời là $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ và khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời $d = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Bài giải:

Lực hướng tâm trong chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời chính là lực hấp dẫn:

$$\begin{aligned} F_{hd} &= F_{ht} \\ \Rightarrow G \frac{M_E M_S}{d^2} &= M_E \frac{v^2}{d} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{GM_S}{d}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,5 \cdot 10^{11}}} \approx 3 \cdot 10^4 (\text{m/s}) = 30 (\text{km/s}) \end{aligned}$$

5-7. Tìm vận tốc dài của một vệ tinh nhân tạo của Trái Đất biết rằng quỹ đạo của vệ tinh là tròn. Vệ tinh ở độ cao trung bình $h = 1000 \text{ km}$. Coi vệ tinh chỉ chịu ảnh hưởng lực hút của Trái Đất và ở độ cao trên, lực cản của không khí không đáng kể. Cho bán kính của Trái Đất $R = 6370 \text{ km}$.

Bài giải:

Lập luận tương tự như bài 5-6 cho chuyển động của vệ tinh nhân tạo quanh Trái Đất, ta có:

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{d}} = \sqrt{\frac{GM_E}{R+h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{10^6 + 6,37 \cdot 10^6}} \approx 7,344 \cdot 10^3 (\text{m/s}) = 7,34 (\text{km/s})$$

5-8. Hai hành tinh quay xung quanh Mặt Trời với các quỹ đạo coi gần đúng là những vòng tròn bán kính lần lượt bằng $R_1 = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, (Trái Đất) và $R_2 = 108 \cdot 10^6 \text{ km}$ (Sao kim). Tìm tỷ số vận tốc dài của các hành tinh đó.

Bài giải:

Sử dụng cách lập luận và tính toán như bài 5-6, ta có:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{GM_S}{d_1}}; & v_2 &= \sqrt{\frac{GM_S}{d_2}} \\ \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} &= \sqrt{\frac{GM_S}{d_1}} \cdot \sqrt{\frac{d_2}{GM_S}} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} = \sqrt{\frac{108 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6}} \approx 0,85 \end{aligned}$$

5-9. Khối lượng Mặt Trăng nhỏ hơn khối lượng Trái Đất 81 lần, đường kính Mặt Trăng bằng 3/11 đường kính Trái Đất. Hỏi một người trên mặt đất nặng 600 niuton lên Mặt Trăng sẽ nặng bao nhiêu.

Bài giải:

Theo định luật vạn vật hấp dẫn:

$$P = G \frac{M_E m}{R_E^2}$$

$$P' = G \frac{M_M m}{R_M^2} = G \frac{k_1 M_E m}{(k_2 R_E)^2} = \frac{k_1}{k_2^2} G \frac{M_E m}{R_E^2} = \frac{k_1}{k_2^2} P$$

$$\Rightarrow P' = \frac{1/81}{(3/11)^2} \cdot 600 \approx 100(N)$$

5-10. Để có thể truyền hình bằng vô tuyến điện (vô tuyến truyền hình) đi khắp mọi nơi trên mặt đất người ta phóng lên các vệ tinh “cố định” (đứng trên mặt đất thấy vệ tinh không chuyển động đối với mặt đất). Muốn vậy phải cho các vệ tinh này chuyển động trong mặt phẳng xích đạo từ Tây sang Đông với vận tốc góc bằng vận tốc của Trái Đất quay xung quanh trục của nó.

Hãy tính vận tốc dài và độ cao của vệ tinh đó. Biết chu kì của Trái Đất quay xung quanh trục của nó là $T = 23$ giờ 56 phút 4 giây. Bán kính xích đạo Trái Đất là $R = 6378\text{km}$.

Bài giải:

Gọi khoảng cách từ vệ tinh đến tâm Trái Đất là d , vận tốc dài của vệ tinh là:

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{d}} \Rightarrow T = \frac{2\pi d}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{GM_E}}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_E}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(86164)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} \approx 42,126 \cdot 10^6 (m) = 42126 (km)$$

Vậy, vận tốc dài và độ cao của vệ tinh là:

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{d}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_E}{T}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{86164}} \approx 3,07 \cdot 10^3 (m/s)$$

$$h = d - R = 42126 - 6378 = 35748 (km)$$

5-11. Tìm vận tốc vũ trụ cấp II đối với Mặt Trăng (nghĩa là vận tốc của một tên lửa phóng từ bề mặt Mặt Trăng cần phải có để nó có thể thoát khỏi sức hút của Mặt Trăng).

Bài giải:

Gia tốc trọng trường trên bề mặt Mặt Trăng:

$$g_M = G \frac{M_M}{R_M^2}$$

Vận tốc vũ trụ cấp hai được tính theo công thức:

$$v_M = \sqrt{2g_M R_M} = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3/11) \cdot 6,37 \cdot 10^6}} \approx 2,38 \cdot 10^3 (m/s)$$

5-12. Nhờ một tên lửa, vệ tinh nhân tạo đầu tiên của Trái Đất được mang lên độ cao 500km.

a) Tìm gia tốc trọng trường ở độ cao đó;

b) Phải phóng vệ tinh tới vận tốc bằng bao nhiêu theo phương vuông góc với bán kính của Trái Đất để quỹ đạo của nó quanh Trái Đất là một đường tròn. Khi đó chu kỳ quay của vệ tinh quanh Trái Đất bằng bao nhiêu?

Lấy bán kính của Trái Đất bằng 6500km, gia tốc trọng trường trên bề mặt của Trái Đất bằng $9,8\text{m/s}^2$. Bỏ qua sức cản của không khí.

Bài giải:

a) Gia tốc trọng trường được tính theo công thức:

$$g = G \frac{M}{r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot G \frac{M}{R^2} = g_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 9,8 \cdot \left(\frac{6500}{6500+500}\right)^2 \approx 8,45(\text{m/s}^2)$$

b) Để quỹ đạo vệ tinh là đường tròn, lực hấp dẫn đúng bằng lực hướng tâm:

$$F_{hd} = F_{ht}$$

$$\Rightarrow G \frac{M_E m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM_E}{R^2} \cdot \frac{R^2}{R+h}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 6500^2 \cdot 10^6}{7000 \cdot 10^3}} \approx 7,69 \cdot 10^3 (\text{m/s}) = 7,69 (\text{km/s})$$

Chu kỳ quay của vệ tinh là:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0 R^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{7^3 \cdot 10^{18}}{9,8 \cdot 6,5^2 \cdot 10^{12}}} \approx 5720(\text{s}) \approx 1\text{h}35'$$