MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Gv: Ts Đỗ Đức Tâm.

Chuẩn của vector

Định nghĩa 1

Chuẩn của vector cột $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ ký hiệu bởi $\|x\|$ là số thực không âm thỏa mãn các điều kiện sau:

- $\|x\| \geq 0$, dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$.
- $\|kx\| = |k|\|x\|$, $k-$ const.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ví dụ:
1) $\|x\|_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
2) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
3) $\|x\|_2 = (x^t x)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ (chuẩn Euclide).

Chuẩn của ma trận

Định nghĩa 2

Chuẩn của ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ký hiệu bởi $\|A\|$ cảm sinh từ chuẩn của vector $x \in \mathbf{R}^n$ được xác định bởi hệ thức

$$\|A\| = sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Ví dụ:
1) $\|A\|_\infty = max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (theo hàng).
2) $\|A\|_1 = max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (theo cột).
3) $\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ (chuẩn Euclide).

Tính chất:
$\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$.
$\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Sự hội tụ của dãy vector

Định nghĩa 3

Dãy vector $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_m^{(k)}\right)^T$ gọi là hội tụ đến vector $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ và ký hiệu là $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, nếu

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \; \forall i = \overline{1, m} \text{ (hội tụ theo phần tử)}$$

hoặc

$$\|x^{(k)} - x\|_p \longrightarrow 0 \text{ khi } k \longrightarrow \infty, \; p = \infty, 1, 2 \text{ (hội tụ theo chuẩn).}$$

Sự hội tụ của dãy ma trận

Định nghĩa 4

Dãy ma trận $A^{(k)} = \left\{a_{ij}^{(k)}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\right\}_{k=1,2,\cdots}$ gọi là hội tụ đến ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$ và ký hiệu là $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$, nếu

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \text{ (hội tụ theo phần tử)}$$

hoặc

$$\|A^{(k)} - A\| \longrightarrow 0 \text{ khi } k \longrightarrow \infty \text{ (hội tụ theo chuẩn).}$$

Nhận xét: Hội tụ theo phần tử và hội tụ theo chuẩn là tương đương.

Hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$A * x = b \tag{1}$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

và

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$; $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$. Để giải đúng hệ trên có phương pháp Cramer, phương pháp Gauss, phương pháp Gauss-Jordan.

1) Nội dung phương pháp

Bước 1: Viết lại hệ (1) dưới dạng

$$x = \alpha x + \beta, \tag{2}$$

trong đó α là ma trận vuông cấp n.

Bước 2: Chọn xấp xỉ đầu $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$.

Bước 3: Nghiệm xấp xỉ tiếp theo được tính theo công thức

$$x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta,\ k = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

2) Điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn

Định lý 1

Nếu một chuẩn nào đó của ma trận α thỏa mãn điều kiện

$$\|\alpha\|_{(p)} \leq q \; (p = 1, 2, \infty), \tag{4}$$

trong đó $0 < q < 1$, thì hệ (2) có nghiệm duy nhất x^* và dãy vector $x^{(k)}$ được tính theo công thức lặp (3) hội tụ tới x^* theo chuẩn tương ứng, tức là

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{(p)} \longrightarrow 0 \text{ khi } k \longrightarrow \infty \; (p = 1, 2, \infty).$$

Phương pháp lặp đơn

3) Đánh giá sai số

Công thức đánh giá sai số của phương pháp lặp đơn tại bước thứ k:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{(p)} \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{(p)}, \ (p = 1, 2, \infty) \tag{5}$$

hoặc

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{(p)} \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{(p)}, \ (p = 1, 2, \infty). \tag{6}$$

3) Đánh giá sai số

Công thức đánh giá sai số của phương pháp lặp đơn tại bước thứ k:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{(p)} \le \frac{q}{1-q}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{(p)}, \ (p = 1, 2, \infty) \tag{5}$$

hoặc

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{(p)} \le \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{(p)}, \ (p = 1, 2, \infty). \tag{6}$$

Nhận xét: Để sai số giữa nghiệm đúng x^* và nghiệm gần đúng $x^{(k)}$ nhỏ hơn $\varepsilon > 0$ cho trước thì cần có

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{(p)} < \frac{1-q}{q}\varepsilon = \delta. \ (p = 1, 2, \infty)$$

hay

$$k \ge \log_q \frac{(1-q)\varepsilon}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{(p)}}.$$

Định nghĩa 5

Ma trận $A = (a_{ij})_1^n$ được gọi là ma trận chéo trội nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

$$1) \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1, m} \text{ (chéo trội hàng);}$$

$$2) \sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall j = \overline{1, n} \text{ (chéo trội cột).}$$

Nhận xét: Nếu ma trận A là chéo trội thì có thể đưa hệ phương trình $Ax = b$ về dạng (2) với ma trận α có chuẩn nhỏ hơn 1.

Viết lại phương trình $Ax = b$ dưới dạng tọa độ:

$$a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j = b_i \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

Chia cả hai vế cho $a_{ii} \neq 0$ và chuyển vế tổng theo $j \neq i$ qua phải ta nhận được phương trình:

$$x_i = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

Nếu đặt $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ và

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } j = i \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ nếu } j \neq i, \end{cases}$$

thì ta nhận được hệ phương trình dạng (2) với$\|\alpha\|_\infty < 1$.

Ví dụ giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Jacobi

Ví dụ 1: Giải gần đúng hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

sao cho sai số tuyệt đối không vượt quá 0,02.

Ví dụ giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Jacobi

Lời giải

Bước 1 Viết lại hệ trên dưới dạng $x = \alpha x + \beta$ trong đó

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix};\ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ta có: $\|\alpha\|_\infty = max(0,08; 0,08; 0,03) = 0,08 < 1$ Do đó dãy vector $x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta$ hội tụ đến nghiệm đúng x^* của hệ.

Bước 2 Chọn xấp xỉ đầu $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Dễ thấy $x^{(1)} = \beta = (2,3,5)^T$. Ta có

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{(\infty)} = max(2,3,5) = 5.$$

Số phép lặp cần thiết là

$$k \geq \log_{0,08} \frac{(1-0,08)0,02}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_{(\infty)}} = \log_{0,08} 0,00368 = 2,2190 \Rightarrow k = 3.$$

Bước 3 Tính các nghiệm xấp xỉ $x^{(2)}$ và $x^{(3)}$ theo công thức (3)

$$x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta = (1,92; 3,19; 5,04)^T;$$

$$x^{(3)} = \alpha x^{(2)} + \beta = (1,9094; 3,1944; 5,0446)^T;$$

Kết luận: Vậy nếu lấy $x^* \asymp x^{(3)}$ thì ta có sai số $\|x^{(3)} - x^*\|_\infty < 0,02$.

Phương pháp lặp Jacobi cho ma trận chéo trội cột

Xét phép đổi biến tuyến tính dạng:

$$x_i = \frac{z_i}{a_{ii}}.$$

Thay vào (7) ta nhận được hệ phương trình dạng:

$$z_i = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j + bi \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n. \tag{8}$$

Nếu đặt $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ và

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } j = i \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} \text{ nếu } j \neq i, \end{cases}$$

thì ta nhận được hệ phương trình dạng (2 với $\|\alpha\|_1 < 1$

Phương pháp lặp Seidel

Hệ phương trình $Ax = b$ đưa về dạng tương đương

$$x = \alpha x + \beta$$

hay

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i.$$

Chọn vector xấp xỉ đầu x_0 nào đó rồi xây dựng dãy $x^{(k)}$ như sau:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)};$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)}$$

Phương pháp lặp Seidel

Dãy $x^{(k)}$:

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)};$$

$$\dots$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp Seidel giống phương pháp lặp đơn.

Sai số của phương pháp Seidel

Sai số giữa nghiệm gần đúng $x^{(k)}$ và nghiệm đúng x^* được tính bởi công thức:
Đối với chuẩn $\|.\|_\infty$:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\mu}{1-\mu}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \tag{9}$$

hoặc

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\mu^k}{1-\mu}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \tag{10}$$

trong đó

$$\mu = max\frac{q_i}{1-q_i}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1}|\alpha_{ij}|; q_i = \sum_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|; p_1 = 0.$$

Sai số của phương pháp Seidel

Đối với chuẩn $\|.\|_1$:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_1 \leq \frac{\rho}{(1-\rho)(1-s)}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_1 \qquad (11)$$

hoặc

$$\|x^{(k)} - x^*\|_1 \leq \frac{\rho^k}{(1-\rho)(1-s)}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 \qquad (12)$$

$$s = max \sum_{i=j+1}^{n} |\alpha_{ij}|; \rho = max \frac{t_j}{1-s_j}, j = 1, 2, \cdots, n$$

$$t_j = \sum_{i=1}^{j} |\alpha_{ij}|; s_j = \sum_{i=j+1}^{n} |\alpha_{ij}|, j = 1, 2, \cdots, n-1;$$

$$s_n = 0; t_n = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{in}|.$$

Chương trình Matlab

```
function [x,numites]=jacobi(a,b,x0,tol,max1)
%input          -A is an nxn strictly diagonally dominant matrix
%                 -B is an nx1 matrix
%                 -x0 is an nx1 matrix: the initial guess
%                 -tol is the tolerance for x
%                 - max1 is the maximum of number of interation
%output          -x is the jacobi approximation to the solution
%                 -numites is number of interations
```

Chương trình Matlab

```
if nargin<5
        max1=100;
end
if nargin<4
        tol=1e-5;
end
n=length(b);
x=x0; numites=0;
for k=1:max1
        for i=1:n
                x(i)=(b(i)-a(i,[1:i-1 i+1:n])*x0([1:i-1 i+1:n]))/a(i,i);
        end
        err=abs(norm(x-x0,Inf));
        x0=x; numites=numites+1;
        if err<tol
                break
        end
```