TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG
CHƯƠNG 4: Chuỗi Fourier

NỘI DUNG CHÍNH

- **Mở đầu**
- **Chuỗi Fourier**
- **Các tính chất của chuỗi Fourier**
- **Hệ thống với các tín hiệu tuần hoàn**

MỞ ĐẦU: Ý TƯỞNG

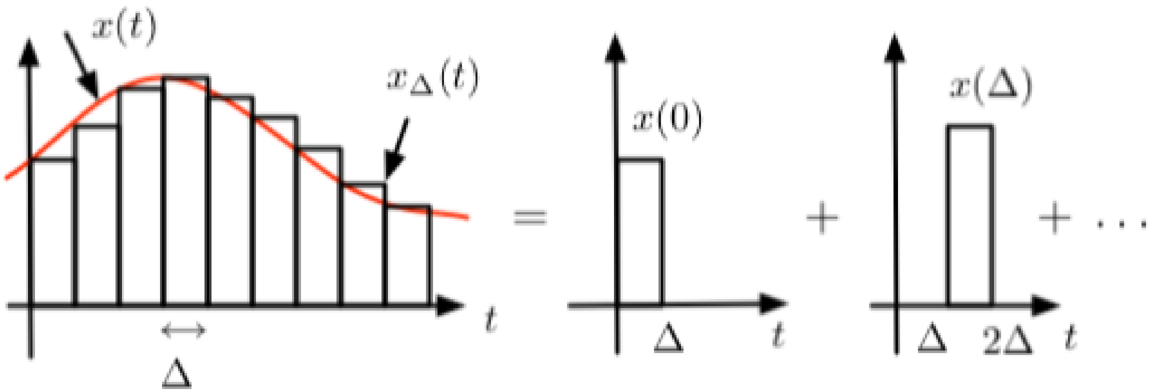
- **Ý tưởng của chuỗi Fourier**

Tích chập được dẫn giải ra từ sự phân tích tín hiệu thành tổng của một chuỗi các hàm delta

❖ Mỗi hàm delta có một độ trễ nhất định trong miền thời gian

❖ Phân tích trên miền thời gian

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta$$



MỞ ĐẦU: Ý TƯỞNG

- **Tín hiệu có thể phân tích được thành tổng của các hàm số khác không?**
  - ❖ **Sao cho việc tính toán trở nên đơn giản ?**

    -Câu trả lời là "Có thể". Chúng ta có thể phân tích tín hiệu tuần hoàn thành tổng của một dãy các tín hiệu mũ phức => **Chuỗi Fourier**

$$e^{j\Omega_0 t} = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

❖ **Tại sao các tín mũ phức lại trở nên đặc biệt?**

1. Mỗi tín hiệu mũ phức đều có một tần số duy nhất.

=>Phân tích theo tần số

2.Tín hiệu mũ phức là tuần hoàn

UNIVERSITY OF ARKANSAS

MỞ ĐẦU: ÔN TẬP

- **Tín hiệu mũ phức**

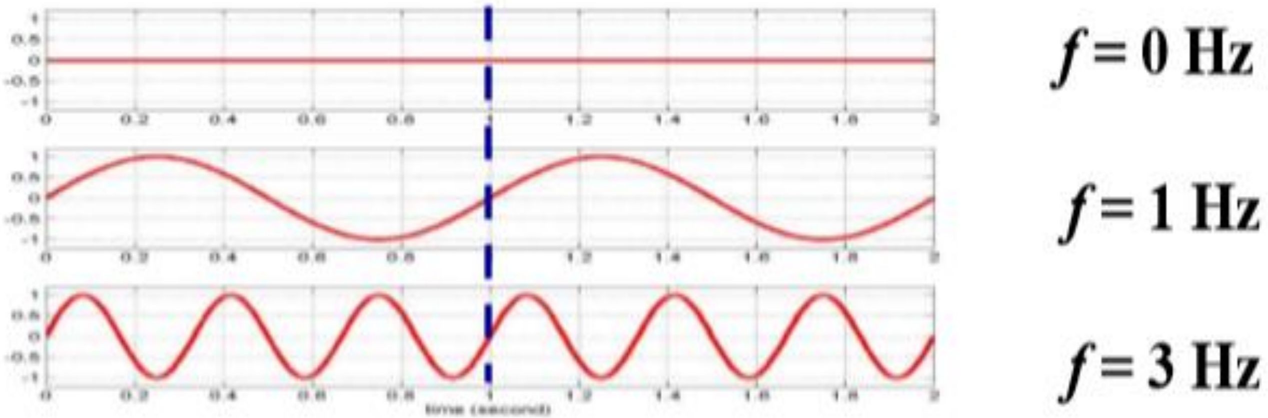
$$e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)$$

-Hàm mũ phức là đơn ánh với các hàm Sin

- Mỗi hàm Sin có một tần số duy nhất: f

- **Khái niệm tần số**

  - Tần số là phép đo sự thay đổi nhanh hay chậm của tin hiệu trong một đơn vị thời gian
    - Tần số càng cao => Tín hiệu càng thay đổi nhanh



MỞ ĐẦU: TẬP TÍN HIỆU TRỰC GIAO

- **Định nghĩa : Tập tín hiệu trực giao**

  - Một tập hợp các tín hiệu , $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots\}$ được gọi là trực giao trong một khoảng (a,b) nếu :

$$\int_a^b \phi_l(t)\phi_k^*(t) = \begin{cases} C, & l \neq k \\ 0, & l = k \end{cases}$$

- **Ví dụ :**

  - Tập tín hiệu : $\phi_k(t) = e^{jk\Omega_0}$,k=1,2,3,… là trực giao trên khoảng $[0,T_0]$,

trong đó $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Chuỗi Fourier
- Các tính chất của chuỗi Fourier
- Hệ thống với các tín hiệu tuần hoàn

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CHUỖI FOURIER

- **Định nghĩa**

- Đối với tín hiệu tuần hoàn bất kỳ có chu kì cơ sở T_0 , nó có thể được phân tích thành tổng của một tập hợp các tín hiệu mũ phức :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$c_n, n = 0, \pm1, \pm2, ...$ là các hệ số chuỗi Fourier

$$c_n = \int_{<T_0>} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CHUỖI FOURIER

- **Chuỗi Fourier**

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

-Tín hiệu tuần hoàn được phân tích thành tổng có trọng số của một tập hợp các các hàm mũ phức trực giao.

-Tần số của hàm số mũ phức thứ-n là : $n\Omega_0$

- Chu kì của hàm số mũ phức thứ -n là : $T_n = \frac{T_0}{n}$

-Giá trị của hệ số $c_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$, phụ thuộc vào x(t)

- Nếu x(t) khác nhau thì c_n cũng khác nhau
- Đây là quan hệ đơn ánh giữa x(t) và c_n

s(t) ⬅ ➡ $[\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots]$

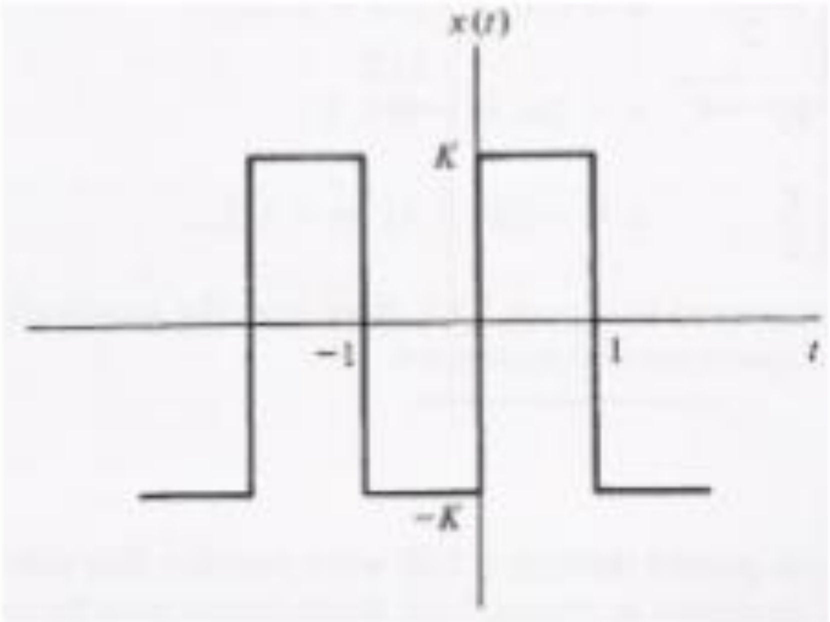
UNIVERSITY OF ARKANSAS

Một tín hiệu tuần hoàn, nó có thể được biểu diễn dưới dạng s(t), dưới dạng c_n

CHUỖI FOURIER

- **Ví dụ**

$$x(t)=\begin{cases}-K, -1<t<0\\ K, 0<t<1\end{cases}$$



UNIVERSITY OF ARKANSAS

CHUỖI FOURIER

- **Biên độ và pha**

- Các hệ số của chuỗi Fourier thường là các số phức :

$$c_n = a_n + jb_n = |c_n|e^{j\theta_n}$$

- Phổ biên độ : Biên độ như là một hàm số của : $n\Omega_0$

$$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

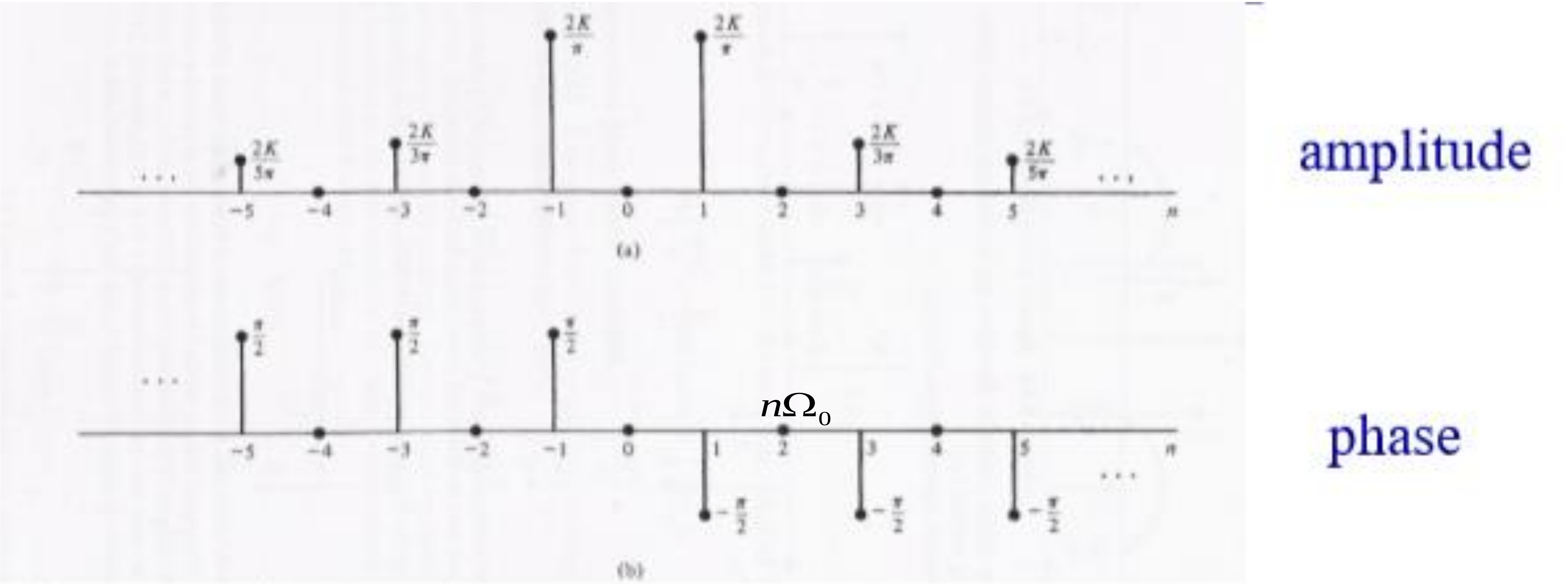
- Pha : Pha như là một hàm số của: $n\Omega_0$

$$\theta_n = \operatorname{a}\tan\frac{b_n}{a_n}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

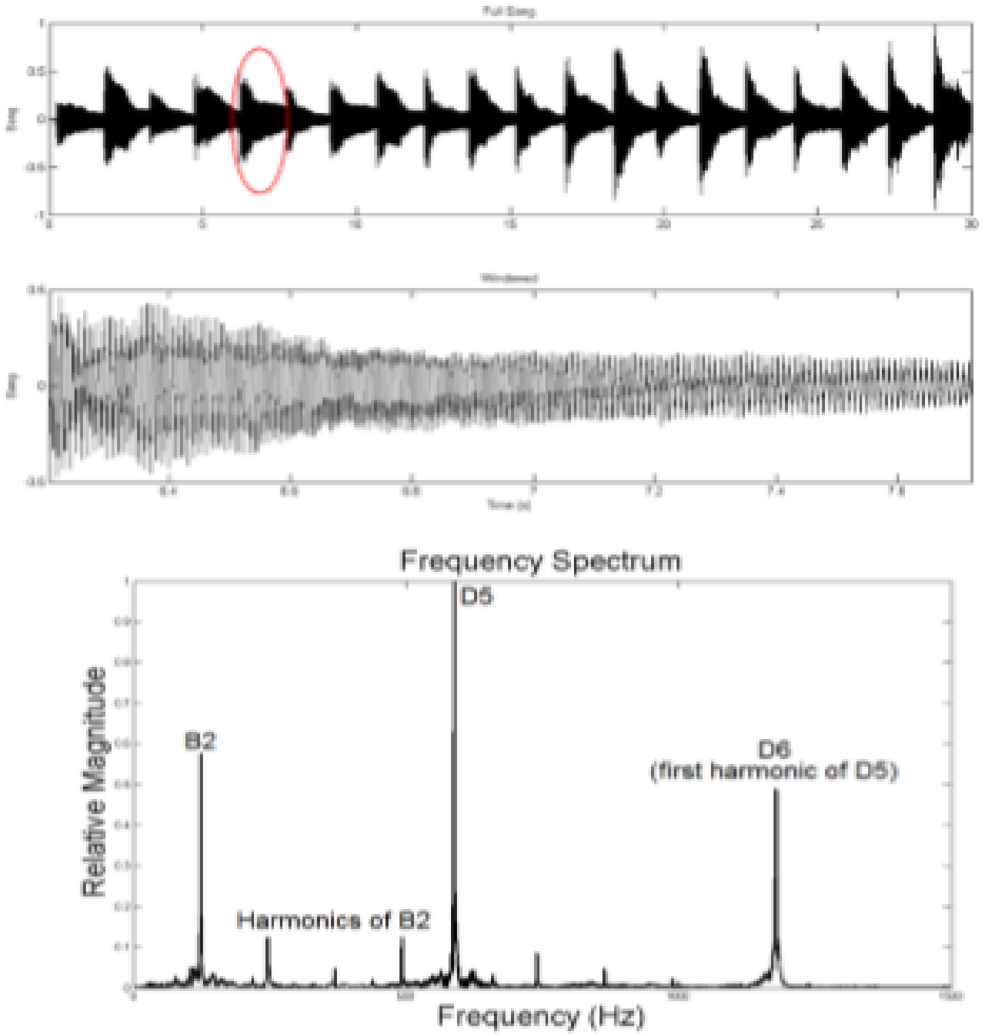
CHUỖI FOURIER: MIỀN TẦN SỐ

- **Tín hiệu được biểu diễn trên miền tần số: Phổ (line spectrum)**



CHUỖI FOURIER: MIỀN TẦN SỐ

- **Ví dụ : Tiếng nốt nhạc đàn Piano**



B2: 123.47 Hz
B3: 246.94 Hz
D5: 587.33 Hz
D6: 1,174.66 Hz

- **Ví dụ**

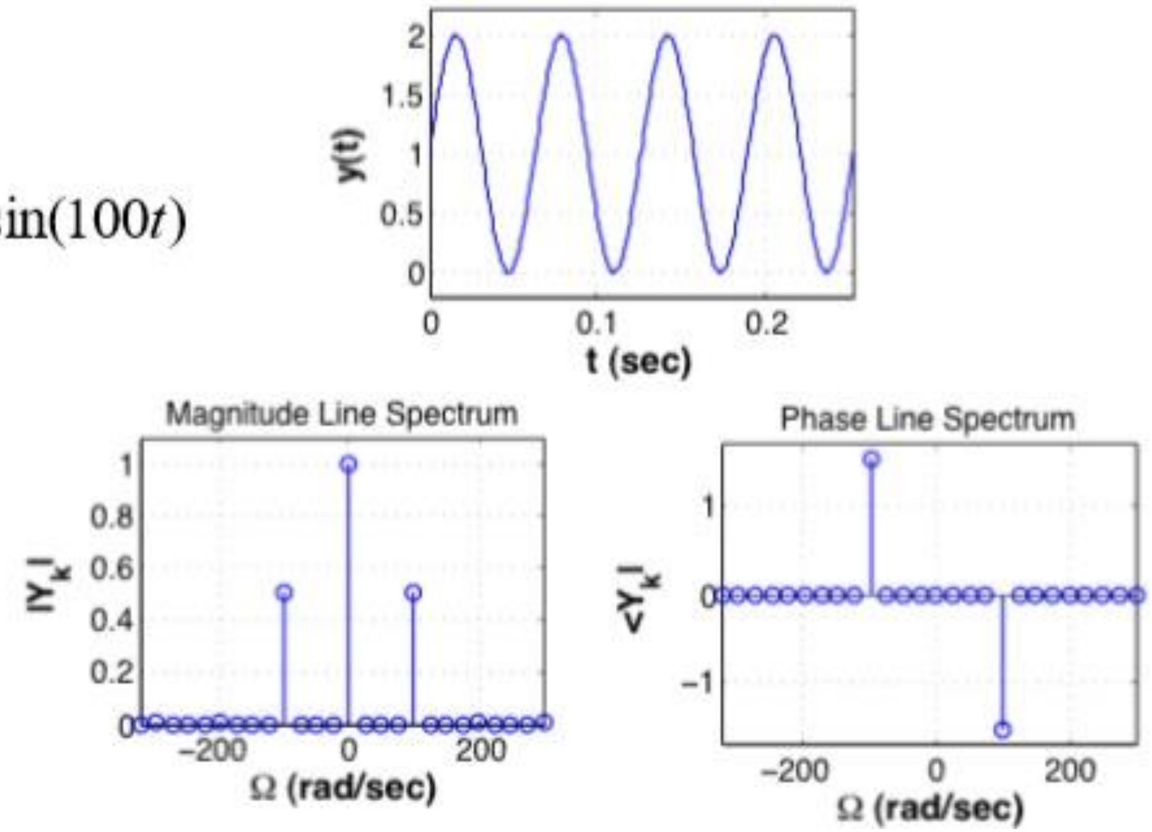
-Tìm chuỗi Fourier của : $s(t) = \exp(j\Omega_0 t)$

CHUỖI FOURIER

- **Ví dụ**

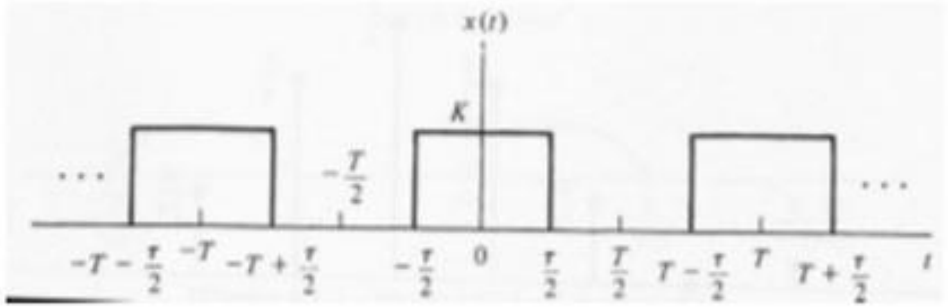
-Tìm chuỗi Fourier của : $s(t)=B+A\cos(\Omega_0 t+\theta)$

$$y(t) = 1 + \sin(100t)$$

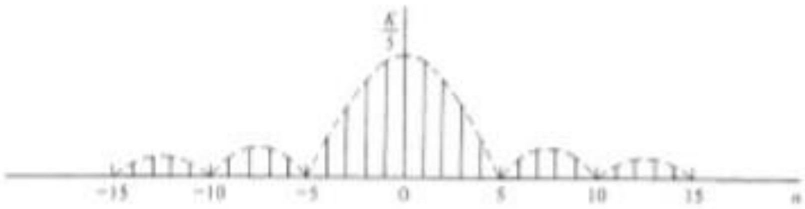


CHUỖI FOURIER

- **Ví dụ** Tìm chuỗi Fourier của : s (t)= $\begin{cases} 0, -T/2 < t < -\tau/2 \\ K, -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, \tau/2 < t < T/2 \end{cases}$



$$c_n = \frac{K\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$



$\tau = 1, T = 5$

$\tau = 1, T = 10$

$\tau = 1, T = 15$

Miền tần số

CHUỖI FOURIER: ĐIỀU KIỆN DIRICHLET

- **Bất kỳ một tín hiệu tuần hoàn nào cũng có thể phân tích thành chuỗi Fourier, điều này có đúng không ?**

  - Chỉ có những tín hiệu thỏa mãn điều kiện Dirichlet mới có chuỗi Fourier

- **Điều kiện Dirichlet**

  1. x(t) khả tích tuyệt đối trong một chu kì

$$\int_{<T>} |x(t)|dt < \infty$$

  2. x(t) chỉ có một số hữu hạn các điểm cực đại và cực tiểu (trong một chu kỳ)
  3. x(t) chỉ có một số hữu hạn các điểm không liên tục (trong một chu kỳ)

MỤC LỤC: NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Chuỗi Fourier
- **Các tính chất của chuỗi Fourier**
- Hệ thống với các tín hiệu tuần hoàn

CÁC TÍNH CHẤT: TUYẾN TÍNH

- **Tính chất tuyến tính**

-Hai tín hiệu tuần hoàn với chu kì giống nhau $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\Omega_0 t} \qquad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{jn\Omega_0 t}$$

- Chuỗi Fourier của xếp chồng của hai tín hiệu là

$$k_1x(t)+k_2y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (k_1 a_n + k_2\beta_n)e^{jn\Omega_0 t}$$

If

$$x(t) \Leftrightarrow \alpha_n \qquad y(t) \Leftrightarrow \beta_n$$

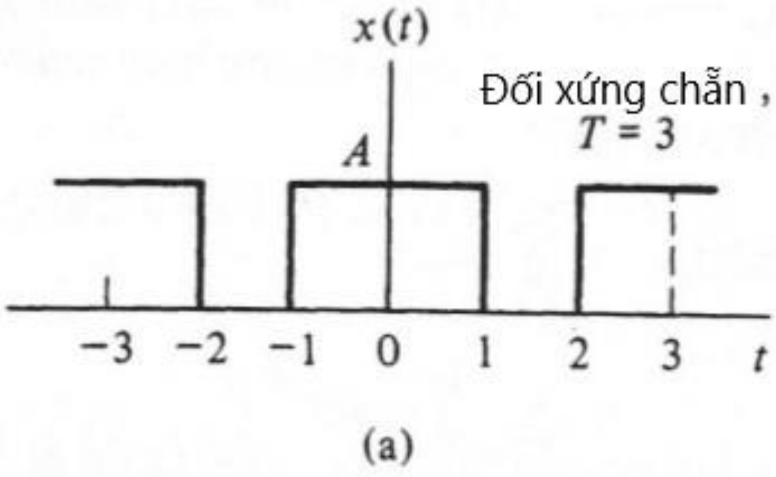
then

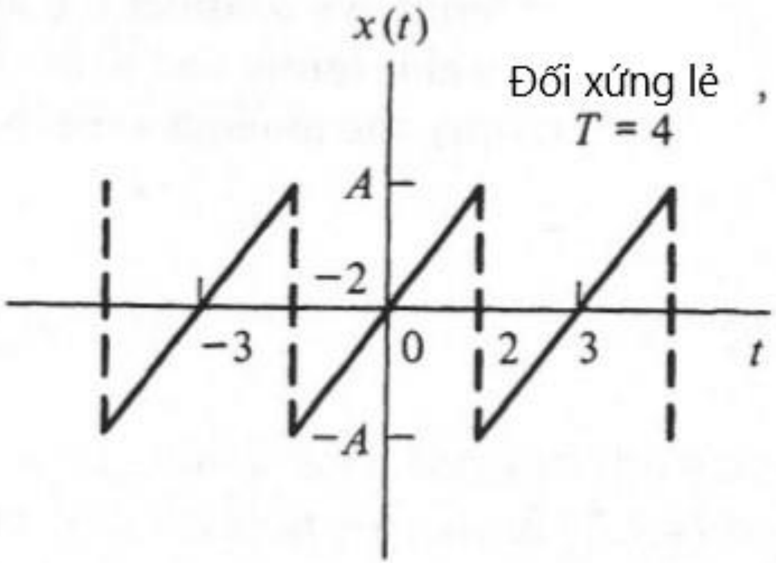
$$k_1x(t)+k_2y(t)= k_1 a_n + k_2\beta_n$$

CÁC TÍNH CHẤT : ĐỐI XỨNG

- **Tín hiệu đối xứng**

  - Một tín hiệu là đối xứng chẵn nếu : x(t) = x(-t)
  - Một tín hiệu là đối xứng lẻ nếu : x(t) = - x(-t)
  - Tính đối xứng làm đơn giản hóa việc tính toán hệ số của chuỗi Fourier





CÁC TÍNH CHẤT : ĐỐI XỨNG

- **Chuỗi Fourier của tín hiệu đối xứng chẵn**

-Nếu tín hiệu là đối xứng chẵn thì :

x(t)= $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cos(n\Omega_0 t)$

$a_n = \int_0^{T_0/2} x(t)\cos(n\Omega_0 t)dt$

- **Chuỗi Fourier của tín hiệu đối xứng lẻ**

- Nếu tín hiệu là đối xứng lẻ thì :

x(t)= $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(n\Omega_0 t)$

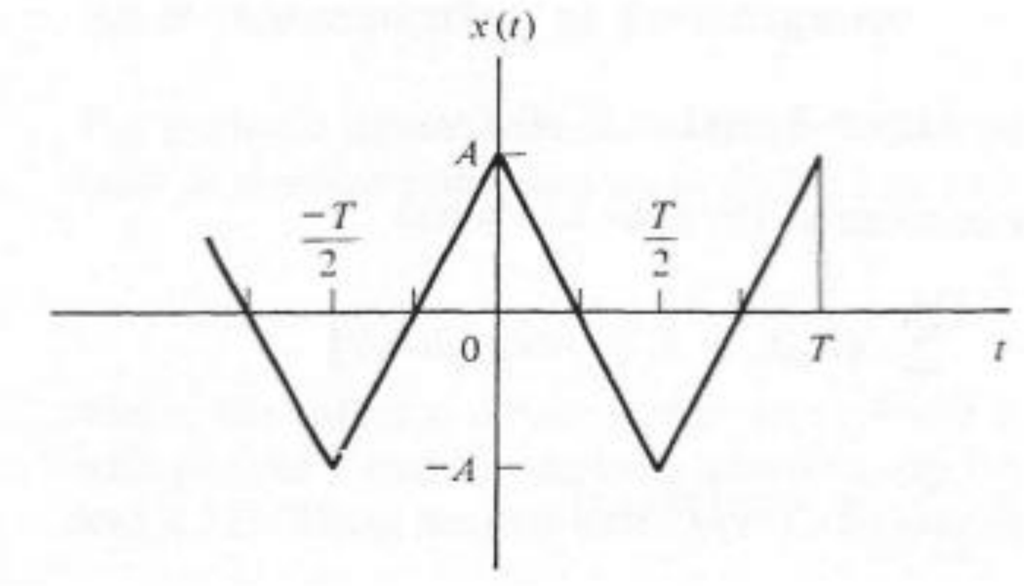
b= $\int_0^{T_0/2} x(t)\sin(n\Omega_0 t)dt$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT : ĐỐI XỨNG

- **Ví dụ :**

$$x(t)=\begin{cases} A-\frac{4A}{T}t, 0<t<T/2 \\ \frac{4A}{T}t-3A, T/2<t<T \end{cases}$$



UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: SỰ DỊCH THỜI GIAN

- **Dịch thời gian**

-Cho x(t) có dạng chuỗi Fourier c_n, thì x(t-t_0) có chuỗi $c_n e^{-jn\Omega_0 t}$

Nếu $x(t) \leftrightarrow c_n$, **thì** $x(t-t_n) \leftrightarrow c_n e^{-jn\Omega_0 t}$

***Chứng minh:**

UNIVERSITY OF ARKANSAS

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ PARSEVAL

- **Nhắc lại : Công suất của tín hiệu tuần hoàn**

$$\mathrm{P} = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$$

- **Định lý Parseval's**

Nếu $\mathrm{x(t)} \leftrightarrow \alpha_m$

thì $\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\alpha_m|^2$

***Chứng minh**

Công suất của tín hiệu có thể được tính toán trong miền tần số

CÁC TÍNH CHẤT: ĐỊNH LÝ PARSEVAL

- **Ví dụ :**

Hãy sử dụng định lí Parseval để tìm công suất của:

$$x(t) = A\sin(\Omega_0 t)$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

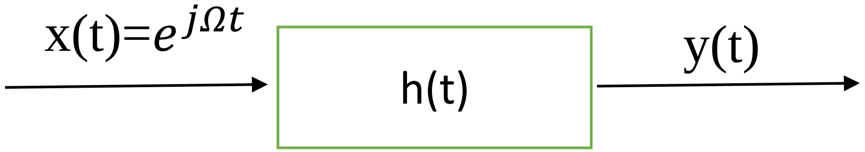
NỘI DUNG CHÍNH

- Mở đầu
- Chuỗi Fourier
- Các tính chất của chuỗi Fourier
- **Hệ thống với các tín hiệu tuần hoàn**

UNIVERSITY OF ARKANSAS

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN: TÍN HIỆU MŨ PHỨC

- **Hệ thống LTI với tín hiệu đầu vào là hàm mũ phức**



y(t)= x(t) ⊗ h(t)=h(t) ⊗x(t)

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\exp(j\Omega t)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\exp(-j\Omega t)d\tau$$

- **Hàm truyền**

$$H(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\exp(-j\Omega t)d\tau$$

-Với hệ thống LTI nếu đầu vào là hàm mũ phức ,đầu ra là :

$$y(t)=H(\Omega)\exp(j\Omega t)$$

-Nó cho thấy hệ thống đáp ứng khác nhau tại các tần số khác nhau

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

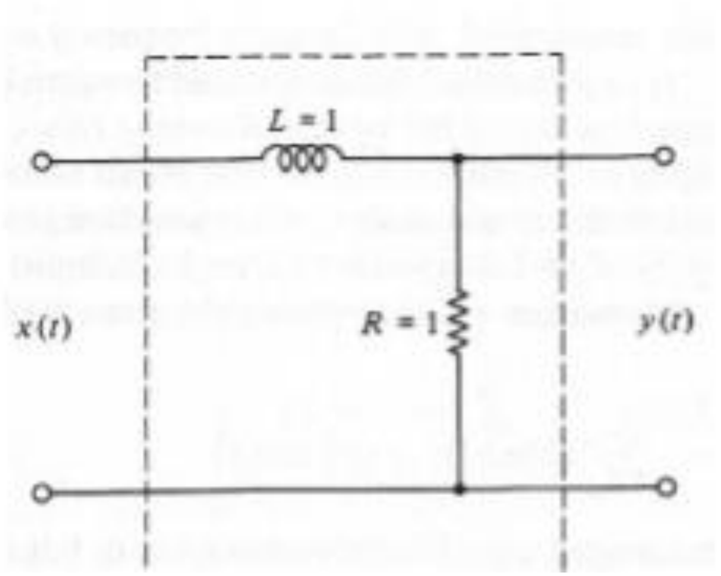
- **Ví dụ**

-Với hệ thống có đáp ứng xung $h(t)=\delta(t-t_0)$. Hãy tìm hàm truyền .

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

- **Ví Dụ**

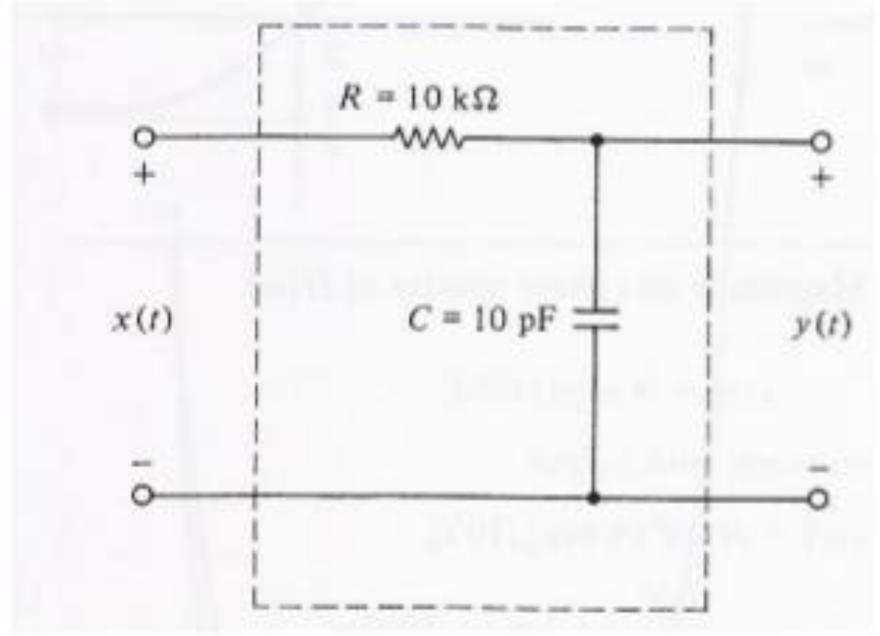
Hãy tìm hàm truyền của hệ thống được mô tả trong hình:



TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

- **Ví dụ**

-Tìm hàm truyền của hệ thống được mô tả trong hình:



TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN: HÀM TRUYỀN

- **Hàm truyền**

-Đối với hệ thống được mô tả bởi phương trình vi phân

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} q_i x^{(i)}(t)$$

$$H(\Omega\,) = \frac{\sum_{i=0}^{m} q_i (j\Omega)^i}{\sum_{i=0}^{n} p_i (j\Omega)^i}$$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

- **Hệ thống LTI với tín hiệu đầu vào tuần hoàn**

-Tín hiệu đầu vào tuần hoàn x(t)=$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(jn\Omega_0 t)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$e^{jn\Omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow e^{jn\Omega_0 t} H(\Omega_0 n)$$

Tuyến tính

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} H(n\Omega_0)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} H(n\Omega_0)$$

Xét hệ thống có tín hiệu đầu vào tuần hoàn , có trọng số và có các hệ số chuỗi Fourier {c_n } ứng với các thành phần tần số $n\Omega_0$, thì các hệ số chuỗi Fourier của tín hiệu ra ứng với các thành phần tần số, đó là { H($n\Omega_0$) c_n}, trong đó H($n\Omega_0$)   là giá trị của hàm truyền được đánh giá tại $\Omega = n\Omega_0$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

- **Phương pháp :**

- Để tìm tín hiệu ra của hệ thống LTI với tín hiệu vào tuần hoàn

1.Tìm các hệ số chuỗi Fourier của tín hiệu vào tuần hoàn x(t)

$$\propto_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{jn\Omega_0 t}\,dt \qquad \Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Chu kỳ của x(t)

2. Tìm hàm truyền của hệ thống LTI: H(*Ω*)

3.Tín hiệu ra của hệ thống là:

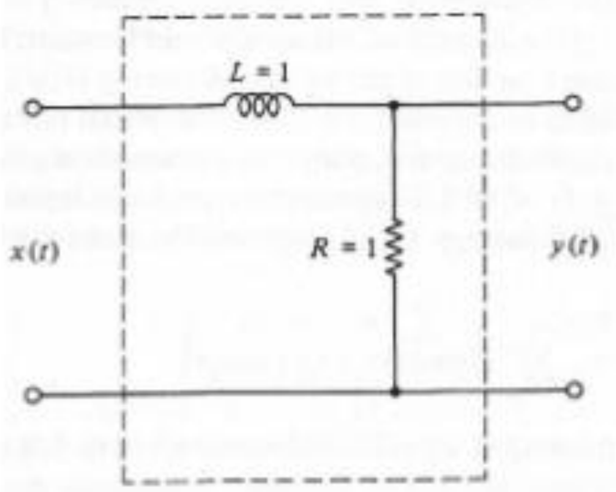
$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} H(n\Omega_0)}$$

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

- **Ví dụ:**

-Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống khi tín hiệu đầu vào là :

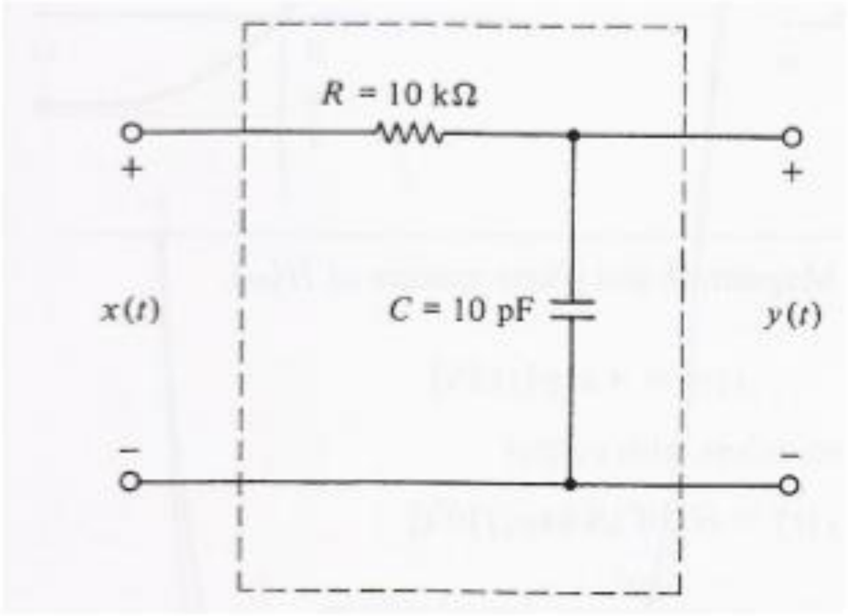
$x(t)= 4\cos(t) – 2\cos(2t)$

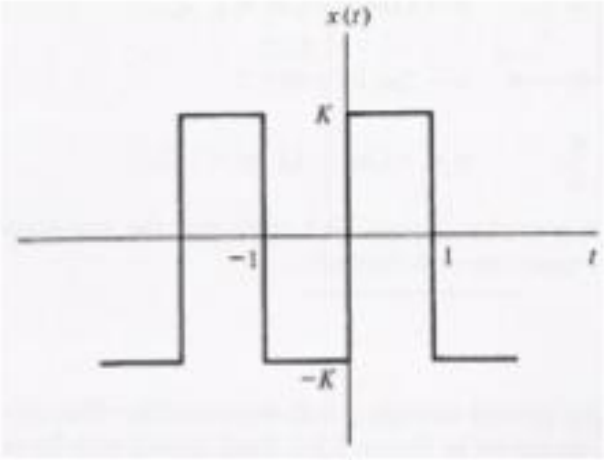


TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN

- **Ví dụ:**

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống khi tín hiệu đầu vào được thể hiện như trong hình :





TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN: HIỆN TƯỢNG GIBBS

- **Hiện tượng Gibbs**

-Hầu hết chuỗi Fourier gồm một số vô hạn các thành phần

băng thông không bị giới hạn

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

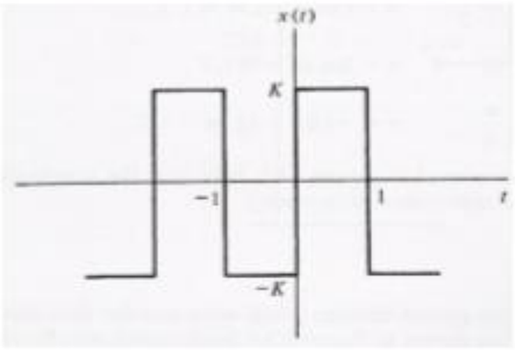
- Vậy điều gì sẽ xảy ra nếu ta "cắt bớt " chuỗi vô hạn chỉ còn hữu hạn số

$$x_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

- Các tín hiệu bị cắt bớt $x_N(t)$ sẽ xấp xỉ với tín hiệu gốc $x(t)$

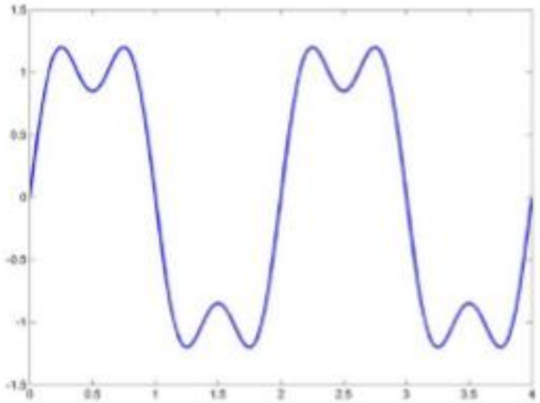
UNIVERSITY OF ARKANSAS

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN: HIỆN TƯỢNG GIBBS

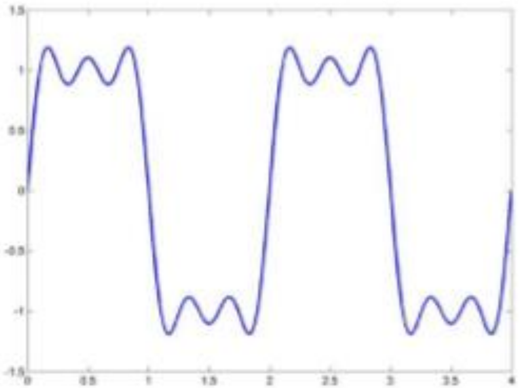


$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2K}{j\pi}\dfrac{1}{n}, & n\ odd, \\ 0, & n\ even, \end{cases}$$

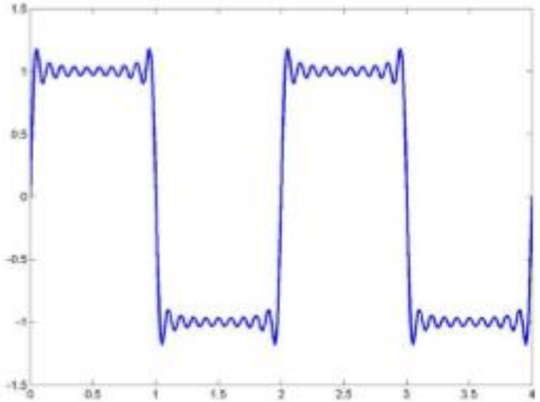
$$x_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$



$x_3(t)$



$x_5(t)$



$x_{19}(t)$

UNIVERSITY OF ARKANSAS

TÍN HIỆU VÀO TUẦN HOÀN: HIỆN TƯỢNG GIBBS

- **Sự tương đồng : Lăng kính**

  - Mỗi màu sắc là một sóng điện từ ứng với một tần số khác nhau