# Nội dung

- Khái niệm, giải tích vector
- Định luật Coulomb và cường độ điện trường
- Luật Gauss và dịch chuyển điện
- Năng lượng và điện thế
- Dòng điện và vật dẫn
- Điện môi và điện dung
- Dòng điện không đổi
- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Trường điện từ dừng
- Lực từ, vật liệu từ, điện cảm
- Hệ phương trình Maxwell-Trường điện từ biến thiên

# Các công thức trong trường tĩnh/dừng

| | Dạng tích phân | Dạng vi phân |
|---|---|---|
| Gauss | $\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int_V \rho_v dV$ | $\nabla.\mathbf{D} = \rho_v$ |
| Trường thế | $\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = 0$ | $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ |
| Ampere | $\oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{L} = I = \oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ | $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ |
| Từ thông qua mặt kín | $\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$ | $\nabla.\mathbf{B} = 0$ |

Định lý dive (định lý divergence): $\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{F}dv$

Định lý Stokes: $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}).d\mathbf{S}$

# Các công thức trong trường tĩnh/dừng

Khi không có sự biến đổi theo thời gian:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla . \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\mathbf{D} = \underset{\varepsilon_r \varepsilon_o}{\varepsilon}\, \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \nabla . \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \underset{\mu_r \mu_o}{\mu}\, \mathbf{H}$$

- Nếu một hoặc nhiều đại lượng biến đổi theo thời gian?

# Định luật Faraday

- Khi từ thông qua một vòng dây biến đổi theo thời gian sẽ sinh ra một hiệu điện thế cảm ứng.

  -Hiệu điện thế này có:

  Độ lớn tỉ lệ với tốc độ thay đổi theo thời gian của thông lượng qua vòng dây;

  Và có dấu sao cho nó cảm ứng ra một dòng điện trong vòng dây mà dòng điện này sẽ sinh ra một từ thông chống lại sự thay đổi của từ thông qua vòng dây (luật Lenz)

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}.d\mathbf{S}$$

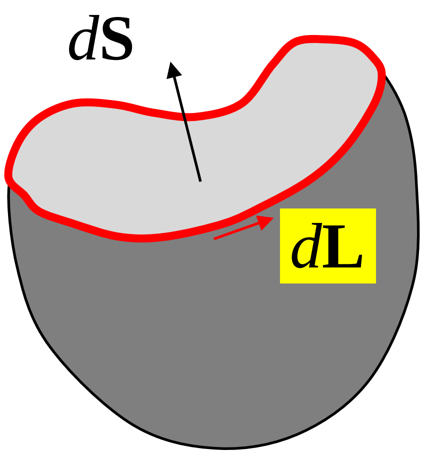
- Định luật Faraday dạng tích phân:

$$V_{cam\ ung} = \oint_{\substack{duong\\ kin\ P}} \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_{\substack{mat\\ bao\ boi\ P}} \mathbf{B}.d\mathbf{S}$$

- Sự biến đổi theo thời gian có thể do sự di chuyển của vòng dây hay do sự biến đổi theo thời gian của cảm ứng từ **B**

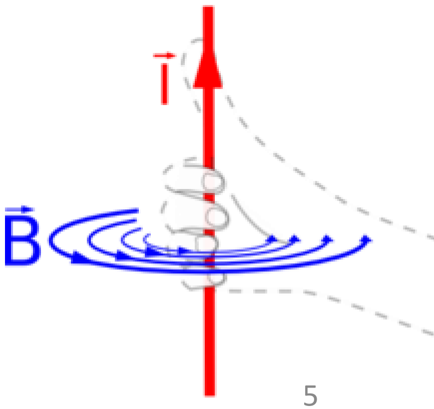
# Định luật Faraday

- Định luật Faraday: điện thế cảm ứng có dấu sao cho nó cảm ứng ra một dòng điện trong vòng dây mà dòng điện này chống lại sự thay đổi của từ thông qua vòng dây (luật Lenz)




$$V_{cam\ ung} = \oint_{\substack{duong \\ kin\ P}} \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_{\substack{mat \\ bao\ boi\ P}} \mathbf{B}.d\mathbf{S}$$

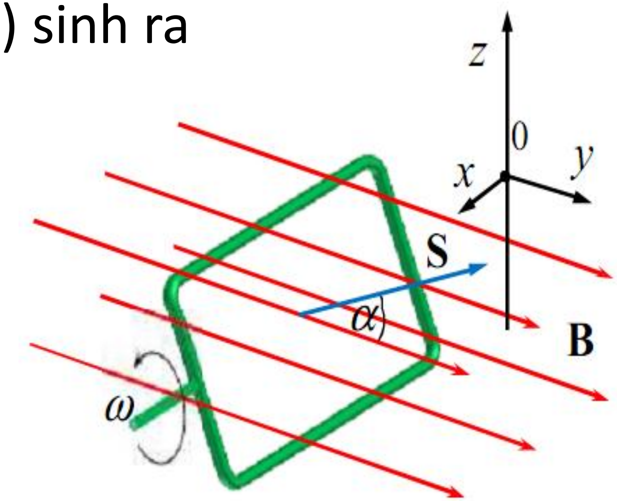
- Quy ước: dấu được xác định sao cho nếu ta đi quanh đường cong *P* theo một hướng cho trước thì hướng của vector pháp tuyến của bề mặt bao bởi *P* thỏa mãn quy tắc bàn tay phải

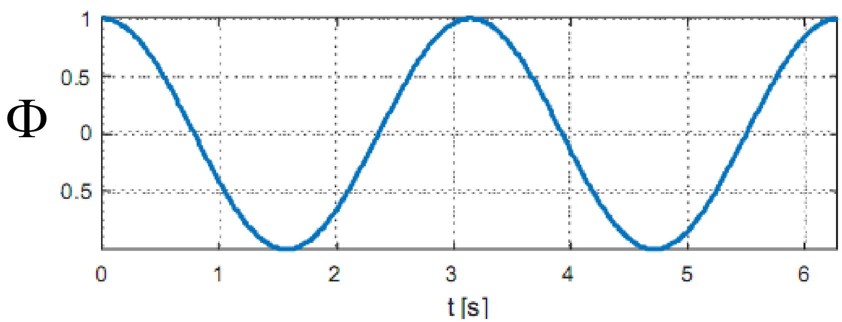


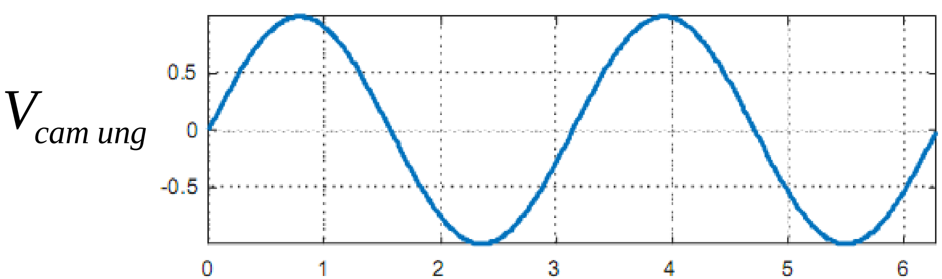
- Ví dụ 1: Tính tổng từ thông chảy qua khung dây chữ nhật diện tích *S* khi nó quay với vận tốc $\omega$ trong từ trường đều **B**. Tính điện áp cảm ứng (sức điện động cảm ứng) sinh ra

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}.d\mathbf{S} = BS\cos\omega t$$

$$V_{cam\ ung} = -\frac{d}{dt}\Phi = BS\omega\sin\omega t$$



# Dạng vi phân của định luật Faraday

- Giả sử rằng dây không di chuyển, và từ trường biến đổi theo thời gian, ta có:

$$\oint_{\substack{duong \\ kin\ P}} \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_{\substack{mat \\ bao\ boi\ P}} \mathbf{B}.d\mathbf{S} = -\int_{\substack{mat \\ bao\ boi\ P}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.d\mathbf{S}$$

- Mặt khác theo định lý Stokes:

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{L} = \int_{\substack{mat\ S \\ bao\ boi \\ duong\ kin\ P}} \left(\nabla\times\mathbf{F}\right).d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\substack{duong \\ kin\ P}} \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \int_{\substack{mat \\ bao \\ boi\ P}} \left(\nabla\times\mathbf{E}\right).d\mathbf{S}$$

$$\int_{\substack{mat \\ bao \\ boi\ P}} \left(\nabla\times\mathbf{E}\right).d\mathbf{S} = -\int_{\substack{mat \\ bao \\ boi\ P}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Ví dụ 2: Một điện trường biến thiên có dạng:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_m \sin(\omega t - \beta z)$$

Hãy tìm từ trường B gắn với nó

Do E chỉ có thành phần theo trục x và phụ thuộc riêng z

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_y \frac{\partial E}{\partial z}$$

$$= -\mathbf{a}_y \beta E_m \sin\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{a}_y \frac{\beta}{\omega} E_m \sin(\omega t - \beta z) + C(x, y, z)$$

Với C(x,y,z) là hàm vector tùy ý không phụ thuộc vào thời gian.

Nếu C(x,y,z)=0: $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y \frac{\beta}{\omega} E_m \sin(\omega t - \beta z)$

# Dạng vi phân của định luật Faraday

- Nếu bài toán xét là tĩnh điện thì hiệu điện thế quanh một vòng kín bằng 0 do điện trường là một trường bảo toàn

$$\int_{\substack{mat \\ bao\ boi}} (\nabla \times \mathbf{E}).d\mathbf{S} \underset{\substack{d/ly \\ Stoke}}{=} \overbrace{\oint_{\substack{duong \\ kin\ P}} \mathbf{E}_{tĩnh}.d\mathbf{L}}^{hiệu\ điện\ thế'} \underset{tĩnh}{=} 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \xRightarrow{\frac{\partial \mathbf{B}_{tĩnh}}{\partial t} = 0} \quad \nabla \times \mathbf{E}_{tĩnh} = 0$$

# Sửa luật Ampere cho điều kiện động

- Định luật Ampere cho điều kiện tĩnh: $\nabla \times \mathbf{H}_{tĩnh} = \mathbf{J}$

Lấy divergence cả hai vế: $\nabla . \nabla \times \mathbf{H}_{tĩnh} = \nabla . \mathbf{J}$

$$\rightarrow 0 = \nabla . \mathbf{J}$$

Theo phương trình liên tục,divergence của mật độ dòng điện:

$$\nabla . \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Định luật này cho biết tốc độ thay đổi của mật độ dòng điện theo không gian phải cân bằng với tốc độ thay đổi theo thời gian của nồng độ hạt mang điện.

# Sửa luật Ampere cho điều kiện động (2)

- Kết hợp lại ta có trong điều kiện tĩnh:

$$0 = \nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

- Trong điều kiện động, ta sửa lại bằng cách cộng thêm một vector **G**

$$\nabla \times \mathbf{H} \overset{?}{=} \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

- Để xác định **G**, lấy divergence cả hai vế và sử dụng công thức: div•curl = 0

$$0 = \nabla.\mathbf{J} + \nabla.\mathbf{G} \quad \xrightarrow[\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}]{} \quad 0 = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla.\mathbf{G} \quad \Rightarrow \quad \nabla.\mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

- Mặt khác ta biết điện tích tự do là divergence của **D**

$$\boxed{\nabla.\mathbf{D} = \rho_v}$$

# Sửa luật Ampere cho điều kiện động

- Vậy dưới các điều kiện động ta có:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G} \qquad \nabla.\mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad \nabla.\mathbf{D} = \rho_v$$

Hoặc:

$$\nabla.\mathbf{G} = \frac{\partial\left(\nabla.\mathbf{D}\right)}{\partial t} = \nabla.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Kết hợp lại ta có:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ Được gọi là mật độ dòng điện dịch

- Ví dụ 3: Một từ trường trong hệ tọa độ trụ: $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi k\rho$

Trường có tính chất thế?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\phi & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \rho k\rho & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{a}_z \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(k\rho^2\right)}{\partial\rho} = 2k\mathbf{a}_z \neq 0$$

-> Trường không có tính chất thế (có tính chất xoáy)

Trong vùng xét có phân bố một dòng điện với mật độ dòng **J**=2*k***a**$_z$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

# Hệ phương trình Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879)

Faraday $$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla . \mathbf{D} = \rho_v}$$ Gauss

Ampere $$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla . \mathbf{B} = 0}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon_r \varepsilon_o$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mu_r \mu_o$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Maxwell 1: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$

Maxwell 2: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Maxwell 3: $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Maxwell 4: $\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$

Hệ hương trình Maxwell là một trong những phương trình được ưa thích nhất của mọi thời đại

I. Đồng hạng nhất - lý thuyết điện từ của Clerk Maxwell

1. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$
2. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
3. $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
4. $\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$

II. Đồng hạng nhất - Phương trình của Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$

III. Định luật thứ hai của Newton: *F=ma*

IV. Định lý Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$

V. Phương trình của Schrödinger: $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t)$

$i$ là đơn vị ảo

$\Psi(\mathbf{r}, t)$ là hàm sóng, biên độ xác suất cho các cấu hình khác nhau của hệ

$\hbar$ là hằng số Planck thu gọn (thường được chuẩn hóa về đơn vị trong các hệ đơn vị tự nhiên)

$\hat{H}$ là toán tử Hamilton.

VI. Phương trình của Einstein: $E = mc^2$

# Hệ phương trình Maxwell dạng tích phân

- Lấy tích phân hai vế biểu thức định luật Faraday (Maxwell 3):

$$\int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left[ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] .d\mathbf{S}$$

$$\int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left( \nabla \times \mathbf{E} \right) .d\mathbf{S} \underset{Stoke}{=} \oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L}$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \bullet d\mathbf{S}$$

Maxwell 3

- Lấy tích phân hai vế biểu thức định luật Ampere (Maxwell 4): :

$$\int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left[ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] .d\mathbf{S}$$

$$\int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left( \nabla \times \mathbf{H} \right) .d\mathbf{S} \underset{Stoke}{=} \oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{L}$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{L} = \int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) .d\mathbf{S}$$

Maxwell 4

# Hệ phương trình Maxwell dạng tích phân

- Thực hiện tương tự cho luật Gauss và divergence của B

$$\int_{\substack{the\,tich\\ bao\,boi\,S}} \left(\nabla.\mathbf{D} = \rho_v\right) dv$$

Maxwell 1

$$\int_{\substack{the\,tich\\ bao\,boi\,S}} \left(\nabla.\mathbf{D}\right) dv = \oint_{\substack{mat\\ kin\ S}} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} \Rightarrow \oint_{\substack{mat\\ kin\ S}} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = \int_{\substack{the\,tich\\ bao\,boi\,S}} \rho_v dv$$

$$\int_{\substack{the\,tich\\ bao\,boi\,S}} \left(\nabla.\mathbf{B} = 0\right) dv$$

Maxwell 2

$$\int_{\substack{the\,tich\\ bao\,boi\,S}} \left(\nabla.\mathbf{B}\right) dv = \oint_{\substack{mat\\ kin\ S}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{S} \Rightarrow \oint_{\substack{mat\\ kin\ S}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{S} = 0$$

# Hệ phương trình Maxwell dạng tích phân

Maxwell 1:

- Gauss $$\oint_{\substack{mat\\ kin\ S}} \mathbf{D}\bullet d\mathbf{S} = \int_{\substack{the\,tich\\ bao\,boi\,S}} \rho_v dv$$

Maxwell 2:

$$\oint_{\substack{mat\\ kin\ S}} \mathbf{B}\bullet d\mathbf{S} = 0$$

Maxwell 3:

- Faraday $$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right).d\mathbf{S}$$

Maxwell 4:

- Ampere $$\oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{L} = \int_{\substack{mat\,S\\ bao\,boi\\ duong\,kin\,C}} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right).d\mathbf{S}$$

# Dòng chảy công suất

- Đối với các tín hiệu cao tần, việc đo các giá trị điện áp hay dòng điện rất phức tạp. Khi đó ta thường xác định công suất

- Từ phương trình Maxwell 4:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Thực hiện phép tính tích vô hướng hai vế với E:

$$\mathbf{E}.\left[\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]$$

- Và dựa vào đẳng thức vector:

$$\mathbf{E}.(\nabla \times \mathbf{H}) \underset{\substack{vector\\ID}}{=} \mathbf{H}.(\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla.(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

- Ta có thể viết:

$$\mathbf{H}.\underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} - \nabla.(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E}.\mathbf{J} + \mathbf{E}.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Maxwell 3

# Dòng chảy công suất

- Áp dụng phương trình Maxwell 3:

$$-\mathbf{H}.\frac{\partial(\mu\mathbf{H})}{\partial t}-\nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}.\mathbf{J}+\mathbf{E}.\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}$$

Hay:

$$-\nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}.\mathbf{J}+\varepsilon\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu\mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

- Xét đạo hàm của:

$$\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad \mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}.\mathbf{E})=\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right).\mathbf{E}+\mathbf{E}.\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right)=2\mathbf{E}.\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right)$$

$$\mathbf{E}.\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}.\mathbf{E})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2\right)$$

- Ta được công thức:

$$-\nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}.\mathbf{J}+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2\right)+\mu\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(H^2\right)$$

# Dòng chảy công suất

- Lấy tích phân hai vế trên một thể tích không gian bất kỳ:

$$-\nabla.\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\mathbf{E}.\mathbf{J}+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{2}\right)+\mu\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(H^{2}\right)$$

$$-\int_{v}\nabla.\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)dv=\int_{v}\mathbf{E}.\mathbf{J}dv+\frac{\partial}{\partial t}\int_{v}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}+\frac{1}{2}\mu H^{2}\right)dv$$

- Áp dụng định lý divergence:

$$-\oint_{\substack{be\ mat\\ bao\ the\ tich\ V}}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right).d\mathbf{S}=\underbrace{\int_{v}\mathbf{E}.\mathbf{J}dv}_{\substack{cong\ suat\\ tieu\ tan\ Ohm}}+\frac{\partial}{\partial t}\int_{v}\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}}_{\substack{nang\ luong\\ duoc\ tich\,tru\\ trong\ truong\ E}}+\underbrace{\frac{1}{2}\mu H^{2}}_{\substack{nang\ luong\\ duoc\ tich\,tru\\ trong\ truong\ H}}dv$$

*Đây là biểu thức toán học của định lý Poynting:*
*Tổng công suất chảy vào một mặt kín tại một thời điểm bất kỳ bằng tổng tốc độ tích lũy năng lượng điện trường, năng lượng từ trường và công suất tiêu tán Ohm trong thể tích đó.*

# Dòng chảy công suất-vector Poynting

$$-\oint_{\substack{be\ mat\\ bao\ the\ tich\ V}} (\mathbf{E}\times\mathbf{H}).d\mathbf{S} = \underbrace{\int_v \mathbf{E}.\mathbf{J}dv}_{\substack{cong\ suat\\ tieu\ tan\ Ohm}} + \frac{\partial}{\partial t}\int_v \Bigg( \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon E^2}_{\substack{nang\ luong\\ duoc\ tich\ tru\\ trong\ truong\ E}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu H^2}_{\substack{nang\ luong\\ duoc\ tich\ tru\\ trong\ truong\ H}} \Bigg) dv$$

- Do vế phải biểu diễn dòng công suất, vế trái mang ý nghĩa tương tự.
  - Nếu biểu thức: $-\oint_{\substack{surface\\ enclosing\\ V}} (\mathbf{E}\times\mathbf{H}).d\mathbf{S}$

    là dòng năng lượng đi vào khối thể tích
  - Khi đó, nếu bỏ đi dấu âm, biểu thức: $\oint_{\substack{surface\\ enclosing\\ V}} (\mathbf{E}\times\mathbf{H}).d\mathbf{S}$

    sẽ là dòng năng lượng đi ra khỏi khối thể tích
  - Đặt vector:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

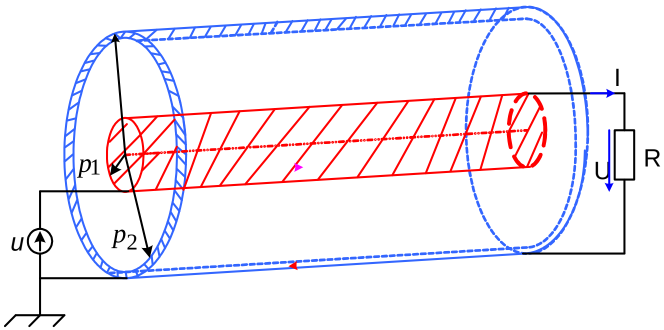
là vector Poynting (Watt/m$^2$)

- Ví dụ 4 : Cho dây cáp đồng trục bán kính trong $\rho_1$ , bán kính ngoài $\rho_2$ cung cấp cho một tải. Điện áp đặt vào dây là $u=U_m\cos\omega t$, dòng điện đưa vào $i=I_m\cos(\omega t-\varphi)$

Ứng với dòng điện và điện áp đó, điện trường và từ trường trong lớp điện môi là:

$$\mathbf{E}=\frac{E_m}{\rho}\cos\omega t.\mathbf{a}_\rho \qquad \mathbf{H}=\frac{H_m}{\rho}\cos\left(\omega t-\varphi\right).\mathbf{a}_\phi$$

Hãy tìm công suất truyền tải năng lượng qua tiết diện cáp?



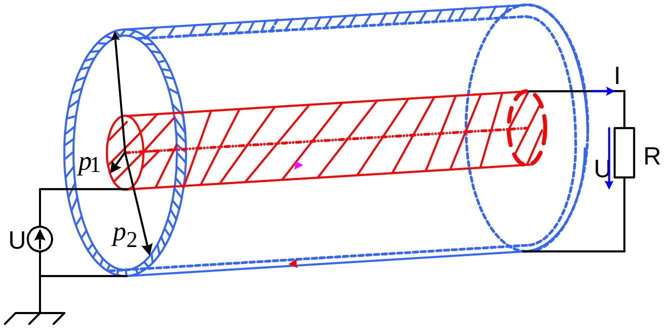

$$\int_s[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]d\mathbf{S}=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[\left(\frac{E_m}{\rho}\cos\omega t.\mathbf{a}_\rho\right)\times\frac{H_m}{\rho}\cos\left(\omega t-\varphi\right).\mathbf{a}_\phi\right].(2\pi\rho d\rho).\mathbf{a}_z$$

$$=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[2\pi E_m H_m\cos\omega t.\cos\left(\omega t-\varphi\right)\frac{d\rho}{\rho}\right]$$

$$=\pi E_m H_m\left[\cos\varphi+\cos\left(2\omega t-\varphi\right)\right]\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

- Ví dụ 5 : Tìm công suất được truyền đi trong lớp điện môi, vùng từ $\rho_1$ đến $\rho_2$. Biết:

$$\mathbf{E} = \frac{U}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \mathbf{a}_\rho; \qquad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$




Sới $S$ là tiết diện ngang của dây cáp:

$$\int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[ \left(\frac{U}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \mathbf{a}_\rho\right) \times \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \right] .(2\pi\rho d\rho).\mathbf{a}_z$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[ \left(\frac{U}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right) \frac{I}{2\pi\rho} \left(\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_\rho\right) \right] .(2\pi\rho d\rho).\mathbf{a}_z \quad = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[ \left(\frac{U}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right) \frac{I(2\pi\rho)}{2\pi\rho} (\mathbf{a}_z) \right] .d\rho.\mathbf{a}_z$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{UI}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} (\mathbf{a}_z \mathbf{a}_z) d\rho \quad = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{UI}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} d\rho = \frac{UI}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \cdot \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\rho} d\rho \quad = \frac{UI}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \left(\ln \rho \Big|_{\rho_1}^{\rho_2}\right) = UI$$

# Hệ phương trình Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879)

Faraday $\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$

$\boxed{\nabla . \mathbf{D} = \rho_v}$ Gauss

Ampere $\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$

$\boxed{\nabla . \mathbf{B} = 0}$

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

$\varepsilon_r \varepsilon_o$

Maxwell 1: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$\mu_r \mu_o$

Maxwell 2: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

Maxwell 3: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Maxwell 4: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$



# Nghiệm của hệ phương trình Maxwell

Hệ phương trình Maxwell đúng cho trường phụ thuộc thời gian có dạng bất kỳ. Tuy nhiên nếu ta chỉ quan tâm tới các trường là các hàm điều hòa của thời gian

$$\mathbf{E} \stackrel{?}{=} \mathbf{E}_s(x, y, z)e^{j\omega t} \qquad \mathbf{H} \stackrel{?}{=} \mathbf{H}_s(x, y, z)e^{j\omega t}$$

- Thế các nghiệm này vào hệ phương trình Maxwell 3, ta có:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Biến đổi vế trái:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}_s(x, y, z)e^{j\omega t}\right) = e^{j\omega t}\nabla \times \left(\mathbf{E}_s(x, y, z)\right)$$

# Nghiệm của hệ phương trình Maxwell

- Biến đổi vế phải của: $\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ $\qquad \mathbf{H}\overset{?}{=}\mathbf{H}_s\left(x,y,z\right)e^{j\omega t}$

$$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\left(\mu_r\mu_o\mathbf{H}\right)}{\partial t}=-\mu_r\mu_o\frac{\partial\left(\mathbf{H}_s\left(x,y,z\right)e^{j\omega t}\right)}{\partial t}$$

$$=-\mu_r\mu_o\mathbf{H}_s\left(x,y,z\right)\frac{\partial\left(e^{j\omega t}\right)}{\partial t}=-j\omega\mu_r\mu_o\underbrace{\mathbf{H}_s\left(x,y,z\right)e^{j\omega t}}_{\mathbf{H}}$$

- Thế vào phương trình Maxwell 3 trên:

$$e^{j\omega t}\nabla\times\left(\mathbf{E}_s\left(x,y,z\right)\right)=-j\omega\mu_r\mu_o\mathbf{H}_s\left(x,y,z\right)e^{j\omega t}$$

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}_s\left(x,y,z\right)\right)=-j\omega\mu_r\mu_o\mathbf{H}_s\left(x,y,z\right)$$

- Nếu $\mathbf{E}_s$ và $\mathbf{H}_s$ thỏa mãn phương trình này, chúng sẽ thỏa mãn phương trình Maxwell 3,

# Nghiệm của hệ phương trình Maxwell

$$\mathbf{E} \overset{?}{=} \mathbf{E}_s(x,y,z)e^{j\omega t} \qquad\qquad \mathbf{H} \overset{?}{=} \mathbf{H}_s(x,y,z)e^{j\omega t}$$

- Thế **E** và **H** vào phương trình Maxwell 4

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

- Vế trái:

$$\nabla\times\left(\mathbf{H}_s(x,y,z)e^{j\omega t}\right) = e^{j\omega t}\nabla\times\left(\mathbf{H}_s(x,y,z)\right)$$

- Vế phải:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \underbrace{\sigma\mathbf{E}_s(x,y,z)}_{\mathbf{J}_s}e^{j\omega t}$$

Chú ý: ta đưa hằng số điện môi ra khỏi đạo hàm theo t

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_r\varepsilon_o\mathbf{E})}{\partial t} = \varepsilon_r\varepsilon_o\frac{\partial\left(\mathbf{E}_s(x,y,z)e^{j\omega t}\right)}{\partial t} = j\omega\varepsilon_r\varepsilon_o\mathbf{E}_s(x,y,z)e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) + j\omega\varepsilon_r\varepsilon_o\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$$

# Hệ phương trình Maxwell dạng điều hòa theo t

- Giả thiết tính chất các vật liệu không thay đổi theo thời gian, các trường $E_s$ và $H_s$ thỏa mãn:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}_s\left(\mathbf{r}\right)\right) = -j\omega\mu_r\mu_o\mathbf{H}_s\left(\mathbf{r}\right)$$

$$\mathbf{E}\left(x, y, z, t\right) = \mathbf{E}_s\left(x, y, z\right)e^{j\omega t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s\left(\mathbf{r}\right) = \mathbf{J}_s\left(\mathbf{r}\right) + j\omega\varepsilon_r\varepsilon_o\mathbf{E}_s\left(\mathbf{r}\right)$$

$$\mathbf{H}\left(x, y, z, t\right) = \mathbf{H}_s\left(x, y, z\right)e^{j\omega t}$$

Khi nhân các nghiệm *Es*, *Hs* với exp($j\omega t$), ta thu được các nghiệm của **E** và **H** phụ thuộc vào thời gian và thỏa mãn hệ phương trình Maxwell

# Hệ phương trình Maxwell dạng điều hòa theo *t*

- Giả thiết trường biến đổi theo thời gian dưới dạng các hàm điều hòa, và áp dụng định luật Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}_s\left(\mathbf{r}\right)\right) = -j\omega\mu \mathbf{H}_s\left(\mathbf{r}\right)$$

$$\nabla . \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s\left(\mathbf{r}\right) = \left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)\mathbf{E}_s\left(\mathbf{r}\right)$$

$$\nabla . \mathbf{B} = 0$$

- Với các tính chất của vật liệu không phụ thuộc thời gian:

$$\mathbf{D} = \underset{\varepsilon_r \varepsilon_o}{\varepsilon}\ \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \underset{\mu_r \mu_o}{\mu}\ \mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

# Phương trình Maxwell, điều hòa theo *t*, ngang đối với *z*

- Dựa vào các giả thiết và điều kiện sau:
  - Nghiệm điều hòa theo thời gian
  - Sử dụng luật Ohm
  - **E** và **H** không có thành phần theo phương *z*

Hệ phương trình Maxwell trở thành:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)E_x \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} = (\sigma + j\omega\varepsilon)E_y \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho_v$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mu_r\mu_o$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon_r\varepsilon_o$$

# Phương trình Maxwell, điều hòa theo *t*, ngang đối với *z*

- Curl của trường vector ngang đối với *z*:

$$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{\partial \overset{0}{F_z}}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\underset{0}{\partial z}}\right)\mathbf{a}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\underset{0}{\partial z}}-\frac{\partial \overset{0}{F_z}}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

- Các điểm cần lưu ý:

$E_y$ liên hệ với $H_x$ qua *d/dz* và $\omega$
$E_x$ liên hệ với $H_y$ qua *d/dz* và $\omega$
$H_y$ liên hệ với $E_x$ qua d/*dz* và $\omega$
$H_x$ liên hệ với $E_y$ qua *d/dz* và $\omega$
$E_y$ và $E_x$ liên hệ nhau qua *d/dx* và *d/dy*
$H_y$ và $H_x$ liên hệ nhau qua *d/dx* và *d/dy*