\$3. Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

1. Các quy tắc tịnh tiến.

1.1 Quy tắc tịnh tiến trong miền *s*

Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ xác định với $s > a$ thì

$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \leftrightarrow L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\,L^{-1}\{F(s)\} = e^{at}f(t)$

Chứng minh: Ta có

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(e^{at}f(t))dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

VD:

1. $\mathrm{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \ (s > 0) \rightarrow L\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad (s > a)$

2. $L\{cosbt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \rightarrow L\{e^{-3t}cosbt\} = \frac{s+3}{(s+3)^2+b^2} \qquad (s > -3)$

Ta có kq tổng quát như sau:

KQ tổng quát

1. $L\{e^{at}\cos bt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \qquad (s > a)$
2. $L\{e^{at}\sin bt\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2} \qquad (s > a)$
3. $L\{e^{at}\cosh bt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2} \qquad (s > a)$
4. $L\{e^{at}\sinh bt\} = \dfrac{b}{(s-a)^2-b^2} \qquad (s > a)$

1.2 Quy tắc tịnh tiến trong miền t.

Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ với $s > 0$ thì khi $c \geq 0$ ta có

1. $L\{f(t-c)u(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \leftrightarrow L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = f(t-c)u(t-c)$

2. $L\{f(t)u(t-c)\} = e^{-cs}L\{f(t+c)\} \leftrightarrow L^{-1}\left\{e^{-cs}L\{f(t+c)\}\right\} = f(t)u(t-c)$

Chứng minh

1. $L\{f(t-c)u(t-c)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t-c)u(t-c)dt = \int_c^{+\infty} e^{-st}f(t-c)dt$

Đặt $\tau = t - c \rightarrow t = \tau + c \rightarrow dt = d\tau$ ta có

$$L\{f(t-c)u(t-c)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+c)}f(\tau)d\tau = e^{-sc}\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = e^{-sc}F(s)$$

2. Đặt $g(t) = f(t+c) \rightarrow g(t-c) = f(t)$. Do đó

$L\{f(t)u(t-c)\} = L\{g(t-c)u(t-c)\} = e^{-sc}L\{g(t)\} = e^{-sc}L\{f(t+c)\}$

Một số ví dụ

1. Tìm phép biến đổi Lalace ngược của

$a)\ F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 9}$

b) $F(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+5}$

c) $F(s) = \frac{s}{s^2+6s+1}$

2. Tìm phép biến đổi Laplace của các hàm sau

a) $f(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{khi} \quad 0 \le t < 2 \\ e^{3t} \quad \text{khi} \quad 2 \le t \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{khi} \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ sint \quad \text{khi} \quad \frac{\pi}{2} \le t \end{cases}$

VD (tiếp)

3. Tìm biến đổi Laplace ngược các hàm số sau:

a) $F(s) = \frac{5e^{-6s} - 3e^{-11s}}{(s^2+9)(s+2)}$

b) $F(s) = e^{-s}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$

c) $F(s) = \frac{s\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+\pi^2}$

Lời giải

1.a $F(s)=\frac{1}{s^2+4s+9}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(s+2)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\to L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-2t}sin\sqrt{5}t$

1.b $F(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+5}=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{1}{(s+2)^2+1}$

$\to L^{-1}\{F(s)\}=e^{-2t}cost+e^{-2t}sint=e^{-2t}(cost+sint)$

1.c $F(s)=\frac{s}{s^2+6s+1}=\frac{s+3-3}{(s+3)^2-8}=\frac{s+3}{(s+3)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}-\frac{3}{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{8}}{(s+3)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}$

$$\to L^{-1}\{F(s)\}=e^{-3t}\cosh\left(\sqrt{8}t\right)-\frac{3}{\sqrt{8}}e^{-3t}sinh\left(\sqrt{8}t\right)$$

2.a $f(t)=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad 0\le t<2\\ e^{3t} & \text{khi} \quad 2\le t\end{cases}\to f(t)=e^{3t}u(t-2)$

$$L\{u(t-2)\}=\frac{e^{-2s}}{s}\to L\{e^{3t}u(t-2)\}=\frac{e^{-2(s-3)}}{s-3}=\frac{e^{-2s+6}}{s-3}$$

Giải tiếp

2.b $f(t)=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ sint & \text{khi} \quad \frac{\pi}{2}\le t\end{cases} \to f(t)=sint.u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

$$L\{f(t)\}=L\left\{sint.u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=e^{-\frac{\pi s}{2}}L\left\{sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=e^{-\frac{\pi s}{2}}L\{cost\}=e^{-\frac{\pi s}{2}}\frac{s}{s^2+1}$$

3.a $F(s)=\frac{5e^{-6s}-3e^{-11s}}{(s^2+9)(s+2)}$

Ta có $\frac{1}{(s^2+9)(s+2)}=-\frac{1}{13}\frac{s}{s^2+9}+\frac{2}{39}\frac{3}{s^2+9}+\frac{1}{13}\frac{1}{s+2}$. Từ đây ta có

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)(s+2)}\right\}=-\frac{1}{13}cos3t+\frac{2}{39}sint3t+\frac{1}{13}e^{-2t}=f(t)$. Suy ra

$$L^{-1}\left\{5\frac{e^{-6s}}{(s^2+9)(s+2)}-3\frac{e^{-11s}}{(s^2+9)(s+2)}\right\}$$
$$=5f(t-6)u(t-6)-3f(t-11)u(t-11)$$

Giải tiếp

3.b $F(s) = e^{-s}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$

Ta có $\frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}$

$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\} = e^{-t}\left[cos2t + \frac{1}{2}sin2t\right] = f(t)$. Từ đây ta có

$$L^{-1}\left\{e^{-s}\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\} = f(t-1)u(t-1)$$

3.c $F(s) = \frac{s\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+\pi^2} = \frac{s}{s^2+\pi^2} - e^{-2s}\frac{s}{s^2+\pi^2}$. Do đó

$$L^{-1}\left\{\frac{s(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2}\right\} = \cos(\pi t) - cos[\pi(t-2)]u(t-2)$$

2. Phân thức hữu tỷ

$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ với bậc của $P(s)$ nhỏ hơn bậc của $Q(s)$

TH1: $Q(s) = (s - a)^n \rightarrow R(s) = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$

TH2: $Q(s) = (s^2 + as + b)^n \rightarrow R(s) = \frac{A_1 s + B_1}{s^2+as+b} + \cdots + \frac{A_n s + B_n}{(s^2+as+b)^n}$

VD: Tìm phép biến đổi Laplace của

1. $F(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s^3}$

2. $F(s) = \frac{s+6}{s^2(s+2)}$

3. $F(s) = \frac{s^2+s-1}{s(s^2-1)}$

4. $F(s) = \frac{1}{(s-2)^2(s^2+s+1)}$

Giải

1.a $F(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} = \frac{As^2+Bs+C}{s^3} = \frac{s^2-1}{s^3} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases}$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^3} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^3}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = 1 - \frac{1}{2}t^2$$

1.b $F(s) = \frac{s+6}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{As(s+2)+B(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)}$

$$= \frac{(A+C)s^2 + (2A+B)s + 2B}{s^2(s+2)} \rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 1 \\ 2B = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s+2} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = -1 + 3t + e^{-2t}$$

Giải (tiếp)

3. $F(s) = \frac{s^2+s-1}{s(s^2-1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-1} = \frac{A(s^2-1)+s(Bs+C)}{s(s^2-1)} = \frac{(A+B)s^2+Cs-A}{s(s^2-1)}$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ C=1 \\ -A=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2-1}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2-1}\right\} = 1 + sinht$$

4. $F(s) = \frac{1}{(s-2)^2(s^2+s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$

$$= \frac{A(s-2)(s^2+s+1) + B(s^2+s+1) + (Cs+D)(s-2)^2}{(s-2)^2(s^2+s+1)}$$

$$=$$

$$= \frac{(A+C)s^3+(-A+B-4C+D)s^2+(-A+B+4C-4D)s-2A+B+4D}{(s-2)^2(s^2+s+1)}$$

Tiếp câu 4

$$\rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 4C + D = 0 \\ -A + B + 4C - 4D = 0 \\ -2A + B + 4D = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{49} \\ B = -\dfrac{7}{49} \\ C = -\dfrac{5}{49} \\ D = -\dfrac{8}{49} \end{cases} \rightarrow F(s) = \frac{1}{49}\left[\frac{5}{s-2} - \frac{7}{(s-2)^2} - \frac{5s+8}{s^2+s+1}\right]$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{49} L^{-1}\left\{5.\frac{1}{s-2} - 7.\frac{1}{(s-2)^2} - 5.\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{21}{\sqrt{3}}.\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \frac{1}{49}\left[5e^{2t} - 7te^{2t} - 5e^{-\frac{1}{2}t} cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{21}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$