Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Temas Selectos de Instrumentación Biomédica

2025-2 | Grupo 3036

Modelado Dinámico de Robot Delta

Rodrigo Salmoran Anzaldo

Alejandro Albarrán Hernández

29 de mayo de 2025

Modelado Dinámico

a) Obtención del modelo dinámico del robot (Euler-Langrange).

b) Cálculo de las relaciones entre fuerzas/torques y aceleraciones articulares.

c) Estimación de parámetros relevantes: masas, inercias, matrices Jacobianas.

Desarrollo

El Robot Delta de 3 grados de libertad tiene tres barras cinemáticas en serie con 3 grados de libertad, que permiten al efector final moverse en un espacio de trabajo tridimensional. Cada barra cinemática consta de dos eslabones rígidos conectados mediante una articulación pasiva giratoria de 2 grados de libertad . El primer eslabón de cada cadena es accionado por un motor eléctrico, fijado a la base superior fija.

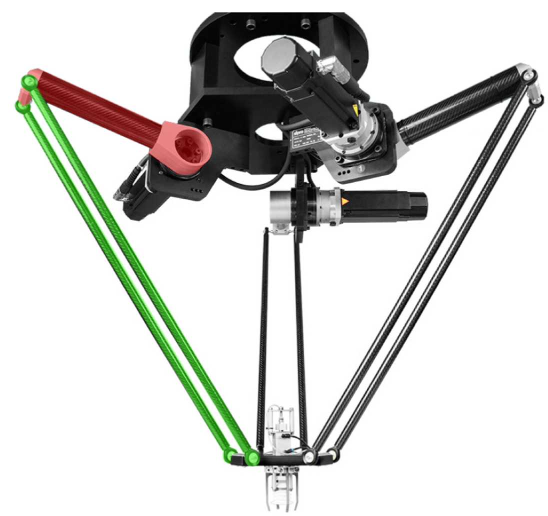

Figura 1: Robot Delta de 3 grados de libertad, con el primer enlace resaltado en rojo y el segundo en verde. [1]

Un robot Delta tiene una plataforma móvil rígida ($\Delta D_1D_2D_3$) llamada efector final, conectada a una base fija ($\Delta A_1A_2A_3$) mediante tres conjuntos de cadenas cinemáticas (véase la Fig. 1). Cada cadena ($\overline{A_iB_i}$ y $\overline{B_iD_i}$, donde $i = 1, 2, 3$) consta de dos uniones rígidas conectadas al punto B_i, que cuenta con dos grados de libertad rotacional. Existen tres actuadores fijos en los puntos A_i de la base fija; cada actuador acciona un eslabón de la cadena cinemática. [2]

Se define un sistema de coordenadas global XYZ con origen en O (el baricentro de $\Delta A_1A_2A_3$), el punto P es el baricentro de la plataforma móvil. El punto D_i tiene dos grados de libertad rotacionales, por lo que el enlace $\overline{B_iD_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ suele estar diseñado como un mecanismo de cuatro barras o los puntos B_i y D_i se colocan mediante dos articulaciones esféricas. Si el robot es rígido, el efector final tiene tres grados de libertad traslaciónales. Esto se puede verificar mediante el criterio de Grubler [24] o el de Kutzbach [25] como:

$$\text{GL} = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i \quad (1)$$

donde GL es el grado de libertad del mecanismo; λ es el grado de libertad del espacio en el que se pretende que funcione un mecanismo; n es el número de eslabones de un mecanismo que incluye el eslabón fijo; j es el número de articulaciones en un mecanismo, asumiendo que todas las articulaciones son binarias; f_i son los grados de movimiento relativo permitidos por la articulación. Al referirnos a la Fig. 1, el mecanismo funciona en un espacio tridimensional, por lo que λ es igual a seis, debido a tres movimientos traslaciónales y tres rotacionales. El mecanismo consta de una base fija, una plataforma móvil, tres eslabones superiores y tres eslabones inferiores, por lo que n igual a ocho. Cada cadena cinemática tiene tres articulaciones, por lo que j es igual a nueve. El punto A_i tiene un movimiento rotacional, el punto B_i tiene dos movimientos rotacionales al igual que el punto D_i, por lo que la suma de f_i igual a quince. Sustituyendo todos los valores en la ecuación (1), el grado de libertad es igual a tres.

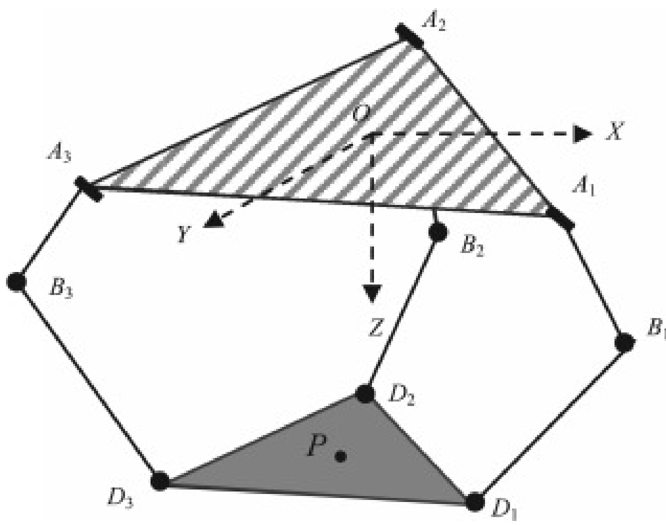

Figura 2: Manipulador espacial paralelo. (Los triángulos superior e inferior se refieren a la base fija y al efector final, respectivamente).

a) Obtención del modelo dinámico del robot (Euler-Lagrange)

Cinemática

Se asume que el tamaño de cada cadena cinemática es idéntico y se muestra en la Fig. 2, donde L_1, L_2, r_A, y r_B representan las longitudes de $\overline{B_iD_i}, \overline{A_iB_i}, \overline{OA_i}$, y $\overline{D_iP}$, respectivamente; ϕ_{1i} es el ángulo de rotación del eslabón $\overline{A_iB_i}$, y ϕ_{2i} y ϕ_{3i} representan los ángulos de rotación del eslabón $\overline{B_iD_i}$; el ángulo θ_i define las posiciones del punto A_i, porque la distancia desde el origen al punto A_i se expresa como r_A. El el ángulo θ_i tiene como valores $\theta_i = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Las coordenadas del efector final las definimos como:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \tag{1}$$

Para determinar las coordenadas del efector final, observamos que el punto $\boldsymbol{p}$ corresponde a la intersección de tres esferas imaginarias, cada una centrada en B_1, B_2 y B_3, respectivamente, y con un radio común L_2. A continuación, se calcularán las coordenadas de los centros B_i de dichas esferas con respecto al sistema de coordenadas global XYZ.

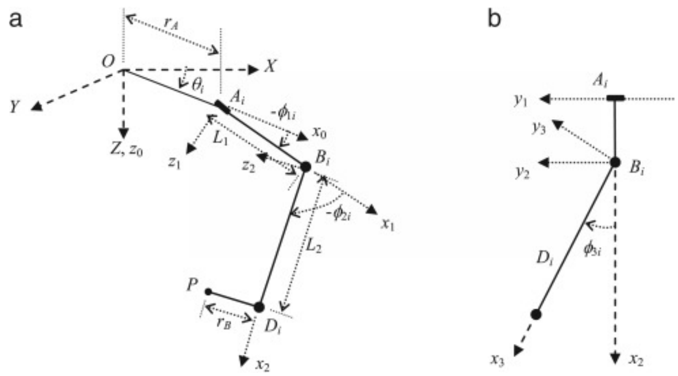

Figura 3: Manipulador espacial paralelo. (Los triángulos superior e inferior se refieren a la base fija y al efector final, respectivamente).

Las coordenadas del centro B_i pueden obtenerse mediante matrices de transformación homogénea. Para ello, consideremos que el marco de referencia global XYZ:

1. Gira un ángulo θ_i alrededor del eje Z,
2. Se traslada una distancia $r = r_a - r_b$ a lo largo del eje x,
3. Luego gira un ángulo ϕ_i alrededor del eje Y, y
4. Finalmente, se traslada una distancia L_1 a lo largo del eje x para alcanzar el punto B_i.

Aplicando las correspondientes matrices de rotación y traslación, se obtiene la matriz de transformación que permite calcular las coordenadas de los centros B_i de las esferas.

$$\mathbf{M_{B_i}} = \mathbf{A_{R_Z}}(\theta_i)\mathbf{A_{T_X}}(r)\mathbf{A_{R_Y}}(\phi_{1i})\mathbf{A_{T_X}}(L_1) \tag{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_{B_i}} = \begin{bmatrix} c(\theta_i) & -s(\theta_i) & 0 & 0 \\ s(\theta_i) & c(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\phi_{1i}) & 0 & -s(\phi_{1i}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s(\phi_{1i}) & 0 & c(\phi_{1i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_{B_i}} = \begin{bmatrix} c\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) c\left(\theta_i\right) & -s\left(\theta_i\right) & c\left(\theta_i\right) s\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) & r\, c\left(\theta_i\right) + L_1\, c\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) c\left(\theta_i\right) \\ c\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) s\left(\theta_i\right) & c\left(\theta_i\right) & s\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) s\left(\theta_i\right) & r\, s\left(\theta_i\right) + L_1\, c\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) s\left(\theta_i\right) \\ -s\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) & 0 & c\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) & -L_1\, s\left(\phi_{1\mathrm{i}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Por lo que la posición del centro B_i está dada por la parte cinemática de la matriz, la cual es $\mathbf{B_i} = \mathbf{M_{B_i}}[1:3,4]$ con $i = 1, 2, 3$.

$$\Rightarrow \mathbf{B_i} = \begin{bmatrix} (r + L_1 c\phi_{1i})\, c\theta_i \\ (r + L_1 c\phi_{1i})\, s\theta_i \\ -L_1 s\phi_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahora, si usamos que el punto $\boldsymbol{p}$ es el resultado de la intersección de las tres esferas con centros B_i y radio L_2, obtenemos las siguientes tres ecuaciones a partir de la forma analítica de la ecuación de la esfera.

$$(X_p - X_1)^2 + (Y_p - Y_1)^2 + (Z_p - Z_1)^2 = L_2^2 \tag{6}$$

$$(X_p - X_2)^2 + (Y_p - Y_2)^2 + (Z_p - Z_2)^2 = L_2^2 \tag{7}$$

$$(X_p - X_3)^2 + (Y_p - Y_3)^2 + (Z_p - Z_3)^2 = L_2^2 \tag{8}$$

Con las tres ecuaciones 54, 55 y 56 es posible obtener las tres incógnitas X_p, Y_p y Z_p, y por lo tanto, determinar la posición $\boldsymbol{p}$ del efector final en función de los ángulos de los motores ϕ_{11}, ϕ_{12} y ϕ_{13}, así como de los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3, los cuales están asociados a los puntos A_1, A_2 y A_3, respectivamente.

Dinámica

Ahora vamos a derivar el modelo dinámico del robot con las ecuaciones de Euler-Lagrange. El lagrangiano del sistema está dado por

$$\mathcal{L}_m(q, \dot{q}) = \mathcal{T} - \mathcal{V} \tag{9}$$

La ecuación de Euler-Lagrange es la siguiente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial q} = \tau_g + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}\left(q\right)}{\partial q} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = \tau_g + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}\left(q\right)}{\partial q}. \tag{11}$$

Donde $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T$son los multiplicadores de Lagrange, τ_g es el vector de fuerza generalizada que actúa sobre el sistema, $\mathcal{F}\left(\mathbf{q}\right)$ es la restricción $\|\mathbf{p} - \mathbf{B}_i\|^2 = L_2^2$, es decir,

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p} - \mathbf{B}_1\|^2 - L_2^2 \\ \|\mathbf{p} - \mathbf{B}_2\|^2 - L_2^2 \\ \|\mathbf{p} - \mathbf{B}_3\|^2 - L_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_p - X_1)^2 + (Y_p - Y_1)^2 + (Z_p - Y_1)^2 - L_2^2 \\ (X_p - X_2)^2 + (Y_p - Y_2)^2 + (Z_p - Y_2)^2 - L_2^2 \\ (X_p - X_3)^2 + (Y_p - Y_3)^2 + (Z_p - Y_3)^2 - L_2^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

y $\mathbf{q} = [X_p \quad Y_p \quad Z_p \quad \phi_{11} \quad \phi_{12} \quad \phi_{13}]^T$, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{X}_p \quad \dot{Y}_p \quad \dot{Z}_p \quad \dot{\phi}_{11} \quad \dot{\phi}_{12} \quad \dot{\phi}_{13}]^T$ son las coordenadas y velocidades generalizadas.

Para calcular el Lagrangiano del sistema, es necesario determinar la función de energía cinética $T(q, \dot{q})$, la cual está dada por:

$$T(q, \dot{q}) = m\,\mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{v} + \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{13}$$

donde $\mathbf{v}$ y ω representan la velocidad lineal y angular, respectivamente, de los eslabones del robot. La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas del efector final (T_0), de los eslabones activos (T_1) y pasivos (T_2).

La energía potencial del sistema es la suma de las energías potenciales del efector final (V_0), de los eslabones activos (V_1) y pasivos (V_2). Esta se calcula, en general, mediante la expresión:

$$V(q) = mgh(q), \tag{14}$$

donde $h(q)$ representa la altura del eslabón con respecto al marco de referencia.

A continuación, se calcularán las energías cinéticas de los eslabones y del efector final. Estas se expresan de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{2}m_p(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2), \tag{15}$$

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}I_1\dot{\phi}_{1i}^2\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\frac{m_1L_1^2}{3}\dot{\phi}_{1i}^2\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{m_1L_1^2}{6}\dot{\phi}_{1i}^2\right), \tag{16}$$

$$\mathcal{T}_2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}m_2(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}_{1i}^2\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}m_2(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2) + \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\phi}_{1i}^2\right), \tag{17}$$

La energía cinética del sistema está dado por la suma de las energías cinéticas.

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \tag{18}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{2}m_p(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2) + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{m_1L_1^2}{6}\dot{\phi}_{1i}^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}m_2(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2) + \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\phi}_{1i}^2\right) \tag{19}$$

La energía potencial de los eslabones y del efector final los calculamos como:

$$\mathcal{V}_1 = m_1g\frac{L_1}{2}\sum_{i=1}^{3}s\phi_{1i}, \tag{20}$$

$$\mathcal{V}_2 = m_2g\left(Z_p + L_1\sum_{i=1}^{3}s\phi_{1i}\right), \tag{21}$$

$$\mathcal{V}_0 = m_pgZ_p, \tag{22}$$

Por lo que la energía potencial del sistema está dada por

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V} = m_pgZ_p + m_1g\frac{L_1}{2}\sum_{i=1}^{3}s\phi_{1i} + m_2g\sum_{i=1}^{3}(Z_p + L_1s\phi_{1i}) \tag{24}$$

Por lo que el Lagrangiano del sistema está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m = \mathcal{T} - \mathcal{V} &= \frac{1}{2}m_p(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2) + \frac{m_1L_1^2}{6}\sum_{i=1}^{3}\dot{\phi}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2 + L_1^2\dot{\phi}_{1i}^2\right) \\ &- m_pgZ_p - m_1g\frac{L_1}{2}\sum_{i=1}^{3}s\phi_{1i} - m_2g\sum_{i=1}^{3}(Z_p + L_1s\phi_{1i})\end{aligned} \tag{25}$$

Vamos a calcular cada termino de la ecuación de Euler-Lagrange para cada variable.

- Para X_p

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{X}_p} = \frac{1}{2}m_p(2\dot{X}_p) + \frac{1}{2}m_2\sum_{i=1}^{3}\left(2\dot{X}_p\right) = (m_p + 3m_2)\dot{X}_p \tag{26}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{X}_p} = (m_p + 3m_2)\ddot{X}_p \tag{27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial X_p} = 0 \tag{28}$$

$$\lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_p} = \frac{\partial}{\partial X_p}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left((X_p - X_i)^2 + (Y_p - Y_i)^2 + (Z_p - Z_i)^2 - L_2^2\right) \tag{29}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_p} = \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(X_p - X_i\right) = \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(X_p - \left(r + L_1 c\phi_{1i}\right)c\theta_i\right) \tag{30}$$

Por lo que la ecuación 10 para X_p nos queda como:

$$(m_p + 3m_2)\ddot{X}_p - 0 = F_{px} + \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(X_p - \left(r + L_1 c\phi_{1i}\right)c\theta_i\right) \tag{31}$$

- Para Y_p

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{Y}_p} = \frac{1}{2}m_p(2\dot{Y}_p) + \frac{1}{2}m_2\sum_{i=1}^{3}\left(2\dot{Y}_p\right) = (m_p + 3m_2)\dot{Y}_p \tag{32}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{Y}_p} = (m_p + 3m_2)\ddot{Y}_p \tag{33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial Y_p} = 0 \tag{34}$$

$$\lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y_p} = \frac{\partial}{\partial Y_p}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left((X_p - X_i)^2 + (Y_p - Y_i)^2 + (Z_p - Z_i)^2 - L_2^2\right) \tag{35}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y_p} = \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(Y_p - Y_i\right) = \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(Y_p - \left(r + L_1 c\phi_{1i}\right)s\theta_i\right) \tag{36}$$

Por lo que la ecuación 10 para Y_p nos queda como:

$$(m_p + 3m_2)\ddot{Y}_p - 0 = F_{py} + \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(Y_p - \left(r + L_1 c\phi_{1i}\right)s\theta_i\right) \tag{37}$$

- Para Z_p

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{Z}_p} = \frac{1}{2}m_p(2\dot{Z}_p) + \frac{1}{2}m_2\sum_{i=1}^{3}\left(2\dot{Z}_p\right) = (m_p + 3m_2)\dot{Z}_p \tag{38}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{Z}_p} = (m_p + 3m_2)\ddot{Z}_p \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial Z_p} = -m_p g - 3m_2 g = -(m_p + 3m_2)g \tag{40}$$

$$\lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z_p} = \frac{\partial}{\partial Z_p}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left((X_p - X_i)^2 + (Y_p - Y_i)^2 + (Z_p - Z_i)^2 - L_2^2\right) \tag{41}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z_p} = \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(Z_p - Z_i\right) = \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(Z_p - (-L_1 s\phi_{1i})\right) \tag{42}$$

Por lo que la ecuación 10 para Z_p nos queda como:

$$(m_p + 3m_2)\ddot{Z}_p + (m_p + 3m_2)g = F_{pz} + \sum_{i=1}^{3}2\lambda_i\left(Z_p + L_1 s\phi_{1i}\right) \tag{43}$$

- Para ϕ_{1i}:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\phi}_{1i}} = \frac{m_1 L_1^2}{3}\dot{\phi}_{1i} + m_2 L_1^2\dot{\phi}_{1i} \tag{44}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\phi}_{1i}} = \frac{m_1 L_1^2}{3}\ddot{\phi}_{1i} + m_2 L_1^2\ddot{\phi}_{1i} \tag{45}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi_{1i}} = -m_1 g\frac{L_1}{2}c\phi_{1i} - m_2 g L_1 c\phi_{1i} \tag{46}$$

$$\lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_{1i}} = \frac{\partial}{\partial \phi_{1i}}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left((X_p - X_i)^2 + (Y_p - Y_i)^2 + (Z_p - Z_i)^2 - L_2^2\right) \tag{47}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_{1i}} = -\lambda_i\left(2(X_p - X_i)\frac{\partial X_i}{\partial \phi_{1i}} + 2(Y_p - Y_i)\frac{\partial Y_i}{\partial \phi_{1i}} + 2(Z_p - Z_i)\frac{\partial Z_i}{\partial \phi_{1i}}\right) \tag{48}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_{1i}} = -\lambda_i\left(2(X_p - X_i)\frac{\partial((r + L_1 c\phi_{1i})\, c\theta_i)}{\partial \phi_{1i}} + 2(Y_p - Y_i)\frac{\partial((r + L_1 c\phi_{1i})\, s\theta_i)}{\partial \phi_{1i}} + 2(Z_p - Z_i)\frac{\partial(-L_1 s\phi_{1i})}{\partial \phi_{1i}}\right) \tag{49}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_{1i}} = -2\lambda_i\left[(X_p - X_i)(-L_1 s\phi_{1i} c\theta_i) + (Y_p - Y_i)(-L_1 s\phi_{1i} s\theta_i) + (Z_p - Z_i)(-L_1 c\phi_{1i})\right] \tag{50}$$

Sustituyendo X_i, Y_i y Z_i de (5)

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_{1i}} = 2\lambda_i \left[(X_p - (r + L_1 c\phi_{1i})\, c\theta_i)(L_1 s\phi_{1i} c\theta_i) + (Y_p - (r + L_1 c\phi_{1i})\, s\theta_i)(L_1 s\phi_{1i} s\theta_i) + (Z_p + L_1 s\phi_{1i})(L_1 c\phi_{1i}) \right] \tag{51}$$

Desarrollando términos y usando que $c^2\theta + s^2\theta = 1$, llegamos a que:

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_{1i}} = 2\lambda_i L_1 \left[(X_p c\theta_i + Y_p s\theta_i - r) s\phi_{1i} + Z_p L_1 c\phi_{1i} \right] \tag{52}$$

Por lo que la ecuación 10 para ϕ_{1i} nos queda como:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) L_1^2 \ddot{\phi}_{1i} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L_1 c\phi_{1i} = \tau_i + 2\lambda_i L_1 \left[(X_p c\theta_i + Y_p s\theta_i - r) s\phi_{1i} + Z_p L_1 c\phi_{1i} \right] \tag{53}$$

Sistema de ecuaciones

En resumen, el sistema de ecuaciones a resolver está compuesto por las nueve ecuaciones (54)–(62), cuyas incógnitas son X_p, Y_p, Z_p, λ_1, λ_2, λ_3, ϕ_{11}, ϕ_{12} y ϕ_{13}.

$$(X_p - X_1)^2 + (Y_p - Y_1)^2 + (Z_p - Z_1)^2 = L_2^2 \tag{54}$$

$$(X_p - X_2)^2 + (Y_p - Y_2)^2 + (Z_p - Z_2)^2 = L_2^2 \tag{55}$$

$$(X_p - X_3)^2 + (Y_p - Y_3)^2 + (Z_p - Z_3)^2 = L_2^2 \tag{56}$$

$$(m_p + 3m_2)\ddot{X}_p = F_{px} + \sum_{i=1}^{3} 2\lambda_i \left(X_p - (r + L_1 c\phi_{1i})\, c\theta_i \right) \tag{57}$$

$$(m_p + 3m_2)\ddot{Y}_p = F_{py} + \sum_{i=1}^{3} 2\lambda_i \left(Y_p - (r + L_1 c\phi_{1i})\, s\theta_i \right) \tag{58}$$

$$(m_p + 3m_2)\ddot{Z}_p + (m_p + 3m_2) g = F_{pz} + \sum_{i=1}^{3} 2\lambda_i \left(Z_p + L_1 s\phi_{1i} \right) \tag{59}$$

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) L_1^2 \ddot{\phi}_{11} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L_1 c\phi_{11} = \tau_1 + 2\lambda_1 L_1 \left[(X_p c\theta_1 + Y_p s\theta_1 - r) s\phi_{11} + Z_p L_1 c\phi_{11} \right] \tag{60}$$

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) L_1^2 \ddot{\phi}_{12} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L_1 c\phi_{12} = \tau_2 + 2\lambda_2 L_1 \left[(X_p c\theta_2 + Y_p s\theta_2 - r) s\phi_{12} + Z_p L_1 c\phi_{12} \right] \tag{61}$$

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) L_1^2 \ddot{\phi}_{13} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L_1 c\phi_{13} = \tau_3 + 2\lambda_3 L_1 \left[(X_p c\theta_3 + Y_p s\theta_3 - r) s\phi_{13} + Z_p L_1 c\phi_{13} \right] \tag{62}$$

b) Cálculo de las relaciones entre fuerzas/torques y aceleraciones articulares.

La relación entre los torques del motor y las aceleraciones articulares de los motores se pueden obtener por medio de las ecuaciones 60, 61 y 62, despejando los torques.

$$\tau_1 = \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) L_1^2 \ddot{\phi}_{11} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L_1 c\phi_{11} - 2\lambda_1 L_1 \left[(X_p c\theta_1 + Y_p s\theta_1 - r) s\phi_{11} + Z_p L_1 c\phi_{11} \right] \tag{63}$$

$$\tau_2 = \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) L_1^2 \ddot{\phi}_{12} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L_1 c\phi_{12} - 2\lambda_2 L_1 \left[(X_p c\theta_2 + Y_p s\theta_2 - r) s\phi_{12} + Z_p L_1 c\phi_{12} \right] \tag{64}$$

$$\tau_3 = \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) L_1^2 \ddot{\phi}_{13} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L_1 c\phi_{13} - 2\lambda_3 L_1 \left[(X_p c\theta_3 + Y_p s\theta_3 - r) s\phi_{13} + Z_p L_1 c\phi_{13} \right] \tag{65}$$

La relación entre fuerzas aplicadas en el efector final y la aceleración del efector final se puede determinar por medio de las ecuaciones 66, 67 y 68.

$$F_{px} = (m_p + 3m_2)\ddot{X}_p - \sum_{i=1}^{3} 2\lambda_i \left(X_p - (r + L_1 c\phi_{1i})\, c\theta_i \right) \tag{66}$$

$$F_{py} = (m_p + 3m_2)\ddot{Y}_p - \sum_{i=1}^{3} 2\lambda_i \left(Y_p - (r + L_1 c\phi_{1i})\, s\theta_i \right) \tag{67}$$

$$F_{pz} = (m_p + 3m_2)\ddot{Z}_p + (m_p + 3m_2) g - \sum_{i=1}^{3} 2\lambda_i \left(Z_p + L_1 s\phi_{1i} \right) \tag{68}$$

Las fuerzas ficticias que actúan sobre el efector final, $\mathcal{F}$, están relacionados por los torques aplicados por los actuadores en las articulaciones utilizando la relación

$$\boldsymbol{\tau} = J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\phi})\, \mathcal{F}, \tag{69}$$

donde el Jacobiano, $J(\boldsymbol{\phi})$, está expresado en el mismo marco que $\mathcal{F}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$. [3] La ecuación de movimiento respecto a las articulaciones de los motores lo podemos ver de manera general como:

$$\tau = M(\phi)\ddot{\phi} + V(\phi, \dot{\phi}) + G(\phi). \tag{70}$$

Podemos derivar una nueva relación (70) y los de (69) de la siguiente manera. Primero, premultiplicamos (69 por la inversa de la transpuesta del Jacobiano para obtener

$$J^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau} = J^{-\mathrm{T}} M(\boldsymbol{\phi})\, \ddot{\boldsymbol{\phi}} + J^{-\mathrm{T}} V(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}) + J^{-\mathrm{T}} G(\boldsymbol{\phi}), \tag{71}$$

o bien,

$$\mathcal{F} = J^{-\mathrm{T}} M(\boldsymbol{\phi})\, \ddot{\boldsymbol{\phi}} + J^{-\mathrm{T}} V(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}) + J^{-\mathrm{T}} G(\boldsymbol{\phi}). \tag{72}$$

A continuación, desarrollamos una relación entre el espacio articular y la aceleración cartesiana, comenzando con la definición del Jacobiano:

$$\dot{\mathbf{x}} = J\, \dot{\boldsymbol{\phi}}, \tag{73}$$

y diferenciando para obtener:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{J}\, \dot{\boldsymbol{\phi}} + J\, \ddot{\boldsymbol{\phi}}. \tag{74}$$

Resolviendo (74) para la aceleración en el espacio articular se obtiene:

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}} = J^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - J^{-1}\dot{J}\,\dot{\boldsymbol{\phi}}. \tag{75}$$

Sustituyendo (75) en (71), obtenemos:

$$\mathcal{F} = J^{-\mathrm{T}}M(\boldsymbol{\phi})J^{-1}\ddot{\mathbf{x}} - J^{-\mathrm{T}}M(\boldsymbol{\phi})J^{-1}\dot{J}\,\dot{\boldsymbol{\phi}} + J^{-\mathrm{T}}V(\boldsymbol{\phi},\dot{\boldsymbol{\phi}}) + J^{-\mathrm{T}}G(\boldsymbol{\phi}). \tag{76}$$

c) Estimación de parámetros relevantes: masas, inercias, matrices Jacobianas.

Los siguientes valores provienen del diseño del robot.

Parámetro	Símbolo	Valor
Longitud del eslabón superior	L_1	0.5m
Longitud del eslabón inferior	L_2	0.6m
$d(O, A_i)$	r_A	0.1m
$d(P, D_i)$	r_B	0.05m
Masa del efector final	m_p	0.5Kg
Espesor del efector final	h_p	0.05Kg

Masas

Para el calculo de masas utilizamos las dimensiones de cada uno de los eslabones donde: $L_1 = 0{,}5m$, $L_2 = 0{,}6m$ son las longitudes del eslabón superior e inferior respectivamente y $\omega = 5{,}3 \times 10^{-3}m$, $h = 5 \times 10^{-3}$ son el ancho y el espesor, ambos eslabones comparten estas dos ultimas dimensiones. El material escogido fue el acero, con una densidad $\rho = 7{,}8 \times 10^3$.

$$m_i = V \times \rho = (h\omega L_i) \times \rho \tag{77}$$

sustituyendo estos valores en (69)

$$m_1 = (5{,}3 \times 10^{-3}m)(5 \times 10^{-3}m)(5 \times 10^{-1}m)(7{,}8 \times 10^3 kg/m^3) = 0{,}103kg$$
$$m_2 = (5{,}3 \times 10^{-3}m)(5 \times 10^{-3}m)(6 \times 10^{-1}m)(7{,}8 \times 10^3 kg/m^3) = 0{,}124kg$$

Habiendo calculado la estimación de la masa de cada eslabón podemos calcular la inercia I_1, I_2 para cada uno de ellos.

$$I_1 = \frac{m_1 L_1^2}{3} = \frac{(0{,}103Kg)(0{,}5m)^2}{3} = 8{,}5 \times 10^{-3} Kgm^2 \tag{78}$$
$$I_2 = m_2 L_1^2 = (0{,}124Kg)(0{,}5m)^2 = 3{,}1 \times 10^{-2} Kgm^2 \tag{79}$$

Control del Robot Delta

1. Al realizar la planificación de trayectoria del efector final, se puede obtener su posición (X_P, Y_P, Z_P).
2. Al aplicar la cinemática dinámica los ángulos de las uniones activas ϕ_{1i} $(i = 1, 2, 3)$ pueden obtenerse, así como los ángulos de las uniones pasivas ϕ_{i2} y ϕ_{i3} $(i = 1, 2, 3)$.
3. Derivando las ecu. (6)-(8) las variables $\dot{X}_P, \dot{Y}_p, \dot{Z}_P, \dot{\phi_{i1}}, \dot{\phi_{i1}}, \dot{\phi_{i1}}$, $(i = 1, 2, 3)$ pueden ser calculadas.
4. Sustituyendo $X_P, Y_P, Z_P, \phi_{1i}, \phi_{2i}, \phi_{3i}$ así también como $\dot{X}_P, \dot{Y}_p, \dot{Z}_P, \dot{\phi_{i1}}, \dot{\phi_{i1}}, \dot{\phi_{i1}}$ en las ecuaciones (66)-(68) los multiplicadores de Lagrange λ_i $(i = 1, 2, 3)$ pueden ser calculados, donde las fuerzas aplicadas son tratadas como cantidades dadas.

5. Calculando las ecu. (63)-(65) los torques aplicados τ_i ($i = 1, 2, 3$) pueden ser determinados.

Aplicando este procedimiento, ecu. (66)-(68) pueden ser usadas para un control a tiempo real del robot Delta.

Referencias

[1] F. Falezza, F. Vesentini, A. Di Flumeri et al., "A novel inverse dynamic model for 3-DoF delta robots", *Mechatronics*, vol. 83, pág. 102 752, 16 de feb. de 2022. DOI: `10.1016/j.mechatronics.2022.102752`. dirección: `https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2022.102752`.

[2] Y. Kuo, "Mathematical modeling and analysis of the Delta robot with flexible links", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 71, n.º 10, págs. 1973-1989, 11 de abr. de 2016. DOI: `10.1016/j.camwa.2016.03.018`. dirección: `https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.03.018`.

[3] J. Craig, "Introduction to Robotics: Mechanics and Control by John J. Craig Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, USA, 2005, (student hardback edition).", *Robotica*, n.º 2, 1 de ene. de 2005. DOI: `10.1017/s0263574700004045`. dirección: `https://doi.org/10.1017/s0263574700004045`.