机器学习期末

第二章 线性模型

2.1 线性回归

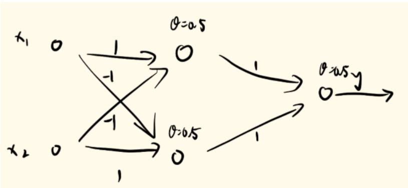
一元线性回归

$$w=\frac{\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)}-\bar{x})(y^{(i)}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)}-\bar{x})^2},\quad b=\bar{y}-w\bar{x}$$

第三章 感知机与神经网络

3.1. 感知机

设计一个两层感知机用于解决异或问题



对训练样例 $(\boldsymbol{x}, y)$，若当前输出为 $\hat{y}$，则按如下方式调整权重：

$$w_i \leftarrow w_i+\Delta w_i, \Delta w_i=\eta(y-\hat{y})x_i$$

第四章 支持向量机

支持向量 距离超平面最近的样本点

间隔 两个异类支持向量到超平面的距离之和 $\gamma=\frac{2}{\|\boldsymbol{w}\|}$

划分超平面 $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}+b=0$ 即找到 $\boldsymbol{w}$ 和 b 使得间隔最大，等价于以下约束最值问题：

$$\min_{\boldsymbol{w},b}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2,\quad s.t.\ y_i(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x_i}+b)\geq 1$$

第五章 贝叶斯分类

符号定义

假设有 K 种可能的类别标记 $y=\{c_1,c_2,...,c_K\}$

输入为 N 个样本 $D=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),...,(x_N,y_N)\}$

样本有 n 维特征：$x_i=\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)},...,x_i^{(n)}\right)$

第 j 维可能的取值有 S_j 种：$x^{(j)}\in\left\{a_{j1},a_{j2},...,a_{jS_j}\right\}$

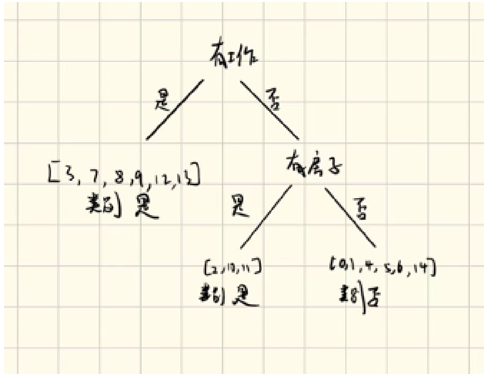
计算方式

1. 计算所有的 $P(Y=c_i),\ i=1,...,K$
2. 对于每个 c_i 计算所有的条件概率 $P\big(X^{(j)}=a_{jk}\mid Y=c_i\big),k=1,...,S_j$
3. 对于样本 $x=\left(x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(n)}\right)$，对每个 c_i 计算：$P(Y=c_i)\prod_{k=1}^{n}P\big(X^{(k)}=x^{(k)}|Y=c_i\big)$
4. 最大的那个即为最终分类。

第六章 决策树

5.1 CLS 算法

通过依次选取特征分裂节点构建决策树：



5.2 ID3 算法

使用 **信息增益** 指导特征的选择过程。

事件 a_i 的信息熵：

$$H(a_i)=-p(a_i)\log_2 p(a_i)$$

对于随机变量 X, 若 $p_i=P(X=x_i)$，则此随机变量的信息熵：

$$H(X)=-\sum_i^n p_i\log_2 p_i,\quad p_i=P(X=x_i)$$

选取某一特征 A 所产生的 **信息增益** 即 D 的信息熵在“得知 A 的各个取值情况下的信息”的条件下，其信息熵减少了多少：

$$g(D,A)=H(D)-H(D|A)$$

此处引入条件熵，设 A 有 m 种取值 $a_1,a_2,...,a_m$ 则上式中的条件熵为：

$$H(D|A)=\sum_i^m P(A=a_i)\cdot H(D|A=a_i)$$

每次选取信息增益最大的特征来构建决策节点即可。

5.3 C4.5 算法

用 **信息增益率** 取代 **信息增益**（其实是做了个归一化）：

$$g_{R(D,A)}=\frac{g(D,A)}{H(A)}$$

第八章 聚类

选取 k 个初始聚类中心，计算所有样本到各个聚类中心的距离，归入最近的类别；重新用类别内样本坐标均值计算聚类中心，进行迭代，直至聚类中心不再变化。

硬聚类 一个样本只能属于一个簇，或簇的交集为空集

软聚类 一个样本可以属于多个簇，或簇的交集不为空集

原型聚类 先对原型进行初始化，再对原型进行迭代更新求解 k 均值、学习向量量化算法、高斯混合聚类算法

密度聚类 从样本密度的角度考察样本的连接性，使密度相连的样本归结到一个簇，更符合直观认知 DBSCAN(Density–Based Spatial Clustering of Applications with Noise)

层次聚类 假设簇之间存在层次结构，将样本聚到层次化的簇中 聚合聚类（自下而上）、分裂聚类（自上而下） 为硬聚类

第九章 降维

9.1 主成分分析

即旋转坐标轴找到方差最大的方向作为新的坐标，并将数据投影到该坐标轴上。

以二维数据为例：

$$X=\begin{bmatrix}2&3&3&4&5&7\\2&4&5&5&6&8\end{bmatrix}$$

首先对其进行标准化：$x_{ij}=\frac{x_{ij}-\bar{x_i}}{\sqrt{s_{ii}}}$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix},s_{11}=3.2,s_{22}=4\sqrt{s_{11}}=\frac{4}{\sqrt{5}},\sqrt{s_{22}}=2$$

$$X^*=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{5}&-\frac{\sqrt{5}}{4}&-\frac{\sqrt{5}}{4}&0&-\frac{\sqrt{5}}{4}&\frac{3}{4}\sqrt{5}\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

然后计算协方差阵 $R=\frac{X^*{X^*}^T}{n-1}$：

$$R=\frac{X^*{X^*}^T}{5}=\begin{bmatrix}1&17\frac{\sqrt{5}}{40}\\17\frac{\sqrt{5}}{40}&1\end{bmatrix}$$

求解 $|R-\lambda I|=0$ 得到 k 个特征值及单位特征向量：

$\lambda_1=1+17\frac{\sqrt{5}}{40},\lambda_2=1-17\frac{\sqrt{5}}{40},\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

计算主成分：$y_i=\alpha_i^T\boldsymbol{x},i=1,2,...,k$

于是有 $Y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)X^*=\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{5}+2}{4\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}},0,\frac{\sqrt{5}+2}{4\sqrt{2}},\frac{3\sqrt{5}+6}{4\sqrt{2}}\right)$