特殊矩阵——正交矩阵

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

相关知识回顾

相关知识回顾

1.矩阵乘以自己的逆矩阵为单位矩阵

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I$$

2.向量之间点乘的计算公式

向量A (Xa,Ya,Za)

向量B (Xb,Yb,Zb)

A·B = Xa*Xb + Ya*Yb + Za*Zb

两个向量点乘结果为 0， 说明两个向量之间垂直

单位向量计算公式:

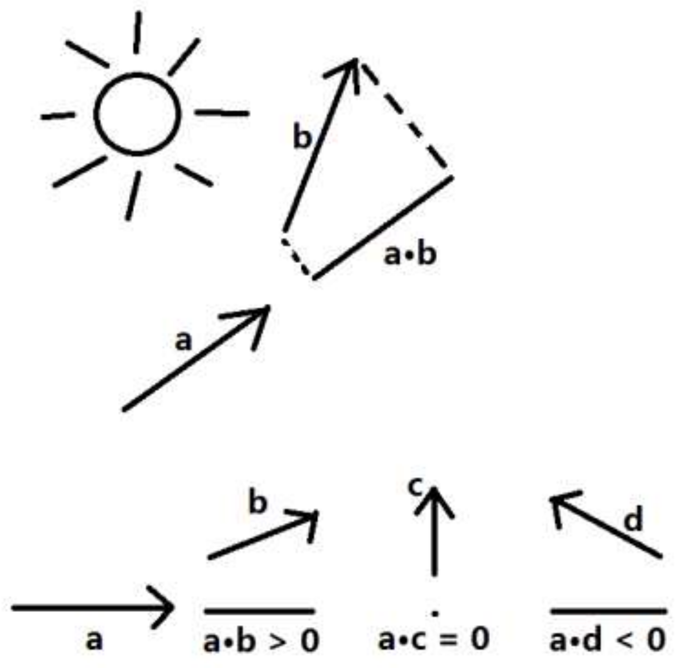
A向量(x,y,z)

模长 = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

单位向量 = (x/模长, y/模长, z/模长)

延伸出：向量和自己的点乘结果为1，说明该向量为单位向量（模长为1）

A·A = $x^2 + y^2 + z^2$ == 1



唐老狮系列教程-正交矩阵

主要讲解内容

1.正交矩阵的基本概念

2.正交矩阵的重要性质

正交矩阵的基本概念

正交矩阵

正交矩阵是一种特殊的方阵，正交的意思是垂直

它的特点是：一个方阵和它的转置矩阵相乘为单位矩阵，那么它就是正交矩阵

$$MM^T = M^TM = I$$

通过正交矩阵的这一性质，再根据上节课学习的逆矩阵的一个重要性质

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I$$

我们可以推导出：如果一个矩阵是正交的，那么它的逆矩阵等于其转置矩阵

$$M^T = M^{-1}$$

如果一个矩阵是正交矩阵，那么它的转置矩阵也是正交矩阵

唐老狮系列教程-正交矩阵

向量之间点乘的计算公式

向量V（v1，v2，v3）

向量U（u1，u2，u3）

V·U = v1*u1 + v2*u2 + v3*u3

两个向量点乘结果为 0， 说明两个向量之间垂直

向量和自己的点乘结果为1，说明该向量为单位向量（模长为1）

正交矩阵

假设一个3x3的正交矩阵 M，根据它的基本性质 $MM^T = M^TM = I$

$$M = \begin{bmatrix} - & \mathrm{I} & - \\ - & \mathrm{II} & - \\ - & \mathrm{III} & - \end{bmatrix} \qquad M^T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$MM^T = \begin{bmatrix} - & \mathrm{I} & - \\ - & \mathrm{II} & - \\ - & \mathrm{III} & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}\cdot\mathrm{I} & \mathrm{I}\cdot\mathrm{II} & \mathrm{I}\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{I} & \mathrm{II}\cdot\mathrm{II} & \mathrm{II}\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{I} & \mathrm{III}\cdot\mathrm{II} & \mathrm{III}\cdot\mathrm{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{I} = \mathrm{II}\cdot\mathrm{II} = \mathrm{III}\cdot\mathrm{III} = 1$$

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{II} = \mathrm{II}\cdot\mathrm{I} = \mathrm{I}\cdot\mathrm{III} = \mathrm{III}\cdot\mathrm{I} = \mathrm{II}\cdot\mathrm{III} = \mathrm{III}\cdot\mathrm{II} = 0$$

=>

1. 正交矩阵的每一行，都是单位向量（自己点乘自己结果为1）
2. 正交矩阵的每一行，都彼此互相垂直（彼此点乘结果为0）
3. 以上结论对正交矩阵的每一列也适用，因为正交矩阵的转置也是正交矩阵

WELCOME TO THE UNITY SPECIALTY COURSE STUDY

如何判断正交矩阵

根据正交矩阵的基本概念，我们可以总结出判断一个矩阵是否是正交矩阵的方式有：

1. 判断$MM^T = M^TM = I$，满足则为正交矩阵
2. 判断矩阵的每一行（列）是否是 单位向量

   n 维向量 $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$， 向量模长$|v| = sqrt(v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2) == 1$

   同时

   判断矩阵的行（列）向量是否彼此正交（垂直）

   $v*u = 0$

   满足则为正交矩阵

正交矩阵的重要性质

正交矩阵的重要性质

如果矩阵 M 为正交矩阵

1. M^T 也为正交矩阵
2. $M^T = M^{-1}$
3. 正交矩阵的行列式为1或-1
4. 正交矩阵的 各行都是单位向量且彼此正交（垂直）
5. 正交矩阵的 各列都是单位向量且彼此正交（垂直）

总结

正交矩阵

正交矩阵为方阵，它和它的转置矩阵的相乘为单位矩阵

它具有以下性质：

假设正交矩阵为 M

1. M^T **也为正交矩阵**
2. $M^T = M^{-1}$
3. **正交矩阵的行列式为1或-1**
4. **正交矩阵的 各行都是单位向量且彼此正交（垂直）**
5. **正交矩阵的 各列都是单位向量且彼此正交（垂直）**

唐老狮系列教程

Thank

谢谢您的聆听

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY