平移矩阵

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

重要知识回顾

唐老狮系列教程-平移矩阵

重要知识回顾

1.三维空间中的点或向量，我们使用齐次坐标进行矩阵运算

(x , y , z , w)，其中 w = 1 时 代表是一个点，w = 0 时 代表一个向量

2.在Unity的Shader开发中

我们采用列矩阵的形式进行向量计算，利用结合律，我们可以从右往左阅读

CBAv = C(B(Av))

唐老狮系列教程-平移矩阵

主要讲解内容

1.基础变换矩阵的构成规则

2.平移矩阵的构成

3.平移矩阵的计算

4.平移矩阵是否是正交矩阵

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

基础变换矩阵的构成规则

基础变换矩阵的构成规则

通过上节课齐次坐标的学习，我们知道：

4x4的矩阵为仿射矩阵

它不仅可以表示出线性变换（缩放、旋转等），还可以表示出平移变换。

因此，我们将要学习的平移、缩放、旋转相关的变换

将会使用4x4的矩阵来进行计算

基础变换矩阵的构成规则

4x4矩阵的基本构成规则为：

$$\begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 & t1 \\ M21 & M22 & M23 & t2 \\ M31 & M32 & M33 & t3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} M11 & M12 & M13 \\ M21 & M22 & M23 \\ M31 & M32 & M33 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t1 \\ t2 \\ t3 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{1} \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} M^{3x3} & t^{3x1} \\ 0^{1x3} & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的 M^{3x3} 部分用于表示旋转和缩放变换

矩阵的 t^{3x1} 部分用于表示平移

矩阵的 0^{1x3} 部分始终为零矩阵

矩阵的 右下角元素 始终为 1

平移矩阵的构成

平移矩阵的构成

平移矩阵的构成遵循 **基础变换矩阵的构成规则**

$$\begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 & t1 \\ M21 & M22 & M23 & t2 \\ M31 & M32 & M33 & t3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} M^{3x3} & t^{3x1} \\ 0^{1x3} & 1 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平移矩阵的构成规则为：

矩阵的 M^{3x3} 部分 为 3x3 单位矩阵

矩阵的 t^{3x1} 部分用于表示 x,y,z 平移多少单位

平移矩阵的计算

唐老狮系列教程-平移矩阵

平移矩阵的计算

与点之间的计算（使用向量的齐次坐标进行计算，w为1，代表是一个点）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{x} + \mathrm{tx} \\ \mathrm{y} + \mathrm{ty} \\ z + \mathrm{tz} \\ 1 \end{matrix}$$

从该计算便可以看出为什么3x3的矩阵无法表示平移，而需要使用齐次坐标4x4的矩阵

点的x，y，z分量分别增加了一个位置偏移，在几何图像中的效果就是，

将点 (x,y,z) 在3D空间中平移了了(tx,ty,tz)个单位

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-平移矩阵

平移矩阵的计算

与向量之间的计算（使用向量的齐次坐标进行计算，w为0，代表是一个向量）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ z \\ 0 \end{matrix}$$

从该计算可以发现，向量的平移结果是不会有任何变化的。

原因是因为向量其实没有位置属性，向量是由方向和大小组合的几何对象，不管它在空间当中如何移动，它代表的方向和大小都是不会变化的，相当于在任意位置都是彼此平行的，长度不变的。

因此，对向量进行平移变换，不会改变向量。

平移矩阵是否是正交矩阵

平移矩阵是否是正交矩阵

肉眼可见，平移矩阵并不是正交矩阵（参见正交矩阵课程中讲解的判断方式）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为什么要判断它是否是正交矩阵呢?

因为正交矩阵的 $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}^{-1}$

如果它是正交矩阵，我们可以很快地得到它的逆矩阵

得到逆矩阵，我们就可以用于得到变换的逆向变换

（把平移过的点再通过和逆矩阵相乘将其平移回去）

平移矩阵是否是正交矩阵

因为平移矩阵不是正交矩阵，所以我们需要计算它的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆矩阵 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -tx \\ 0 & 1 & 0 & -ty \\ 0 & 0 & 1 & -tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

从该逆矩阵的结构，我们便可以得知可以利用逆矩阵来计算逆向变换

总结

唐老狮系列教程-平移矩阵

主要讲解内容

1.基础变换矩阵的构成规则

$$\begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 & t1 \\ M21 & M22 & M23 & t2 \\ M31 & M32 & M33 & t3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.平移矩阵的构成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.平移矩阵的计算

通过和点以及向量进行矩阵乘法得到结果（点会平移，向量不变）

4.平移矩阵是否是正交矩阵

不是正交矩阵，它的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -tx \\ 0 & 1 & 0 & -ty \\ 0 & 0 & 1 & -tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Thank

谢谢您的聆听

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY