透视投影

唐老狮系列教程-透视投影

主要讲解内容

唐老狮系列教程-透视投影

主要讲解内容

1. 明确目标
2. Unity中透视投影重要参数
3. 透视投影变换矩阵

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

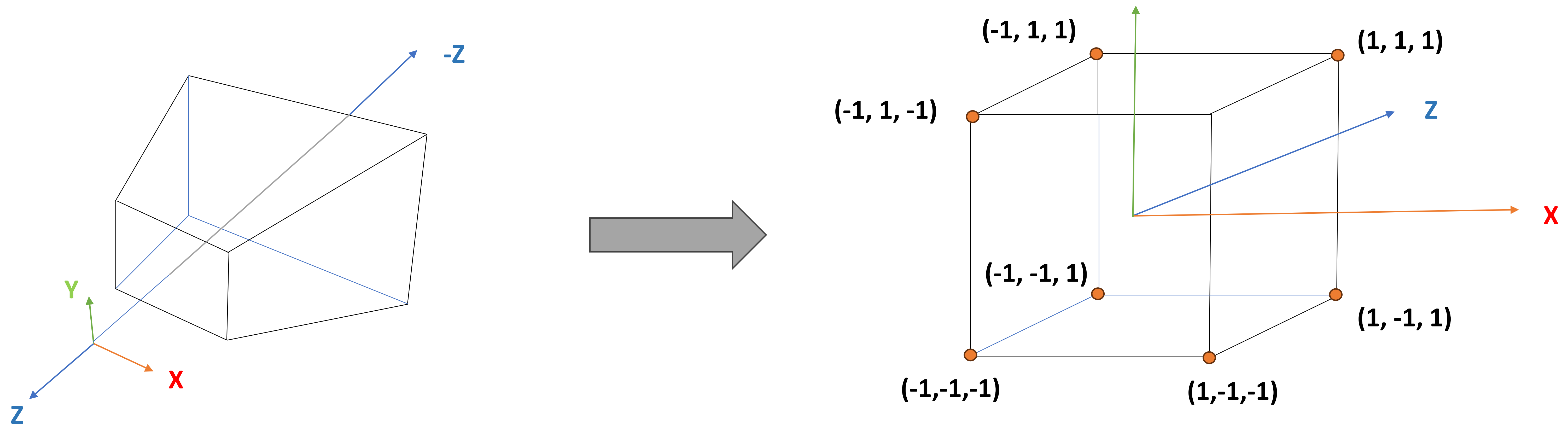
唐老狮系列教程-透视投影

明确目标

明确目标

我们这节课的目标就是要得到

将摄像机视锥体的 透视投影 转换到 齐次坐标系 时的 **变换矩阵**



唐老狮系列教程-透视投影

明确目标

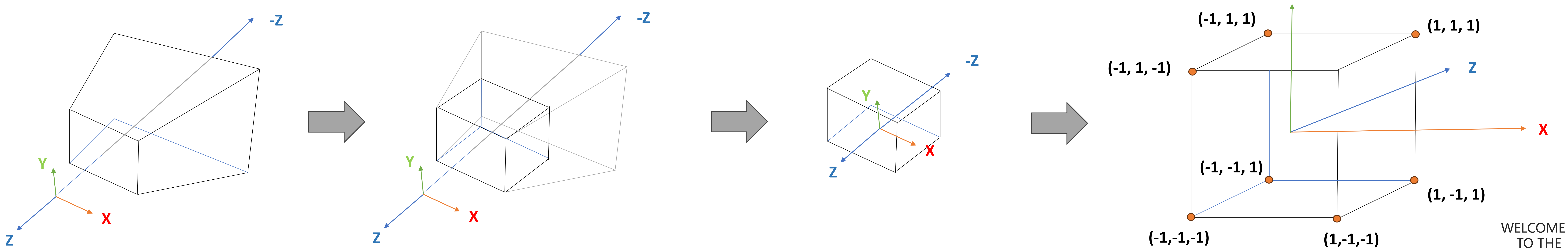
我们可以将其分成三步来完成

1.将透视视锥体变成一个长方体

将该长方体进行正交投影变换的操作

2.将视锥体中心位移到观察空间原点中心

3.将长方体视锥体的xyz坐标范围映射到(-1,1)长宽高为2的正方体中



唐老狮系列教程-透视投影

Unity中透视投影重要参数

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

Unity中透视投影重要参数

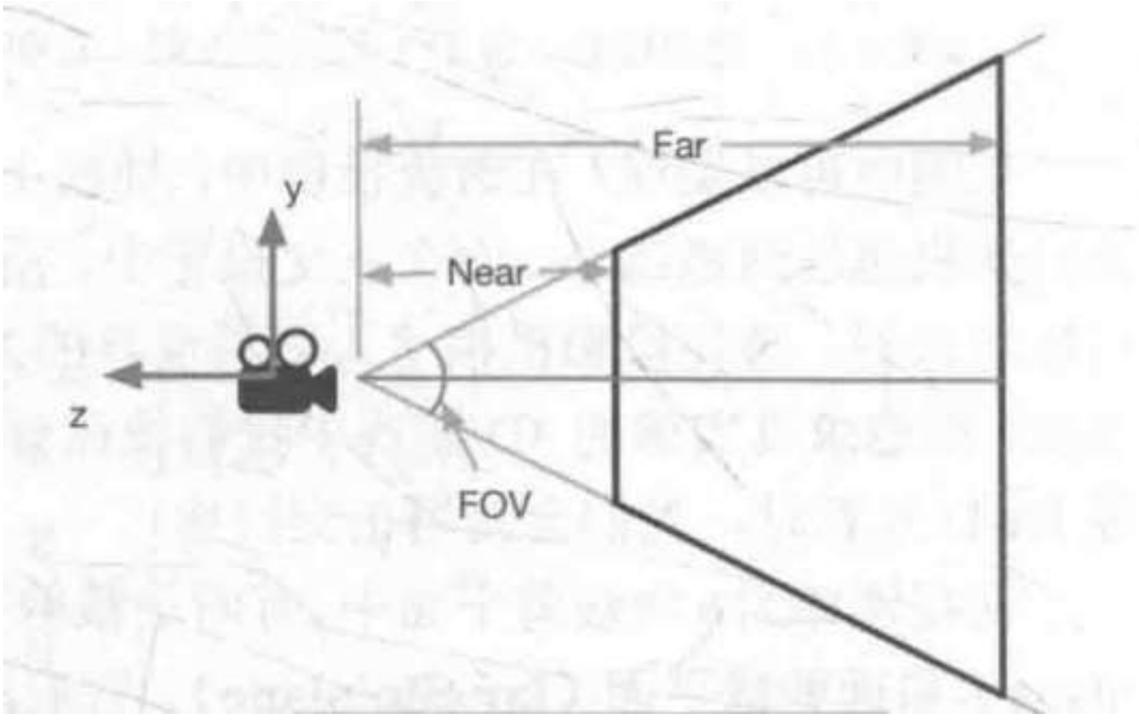
Projection：该参数为Perspective时，为透视摄像机

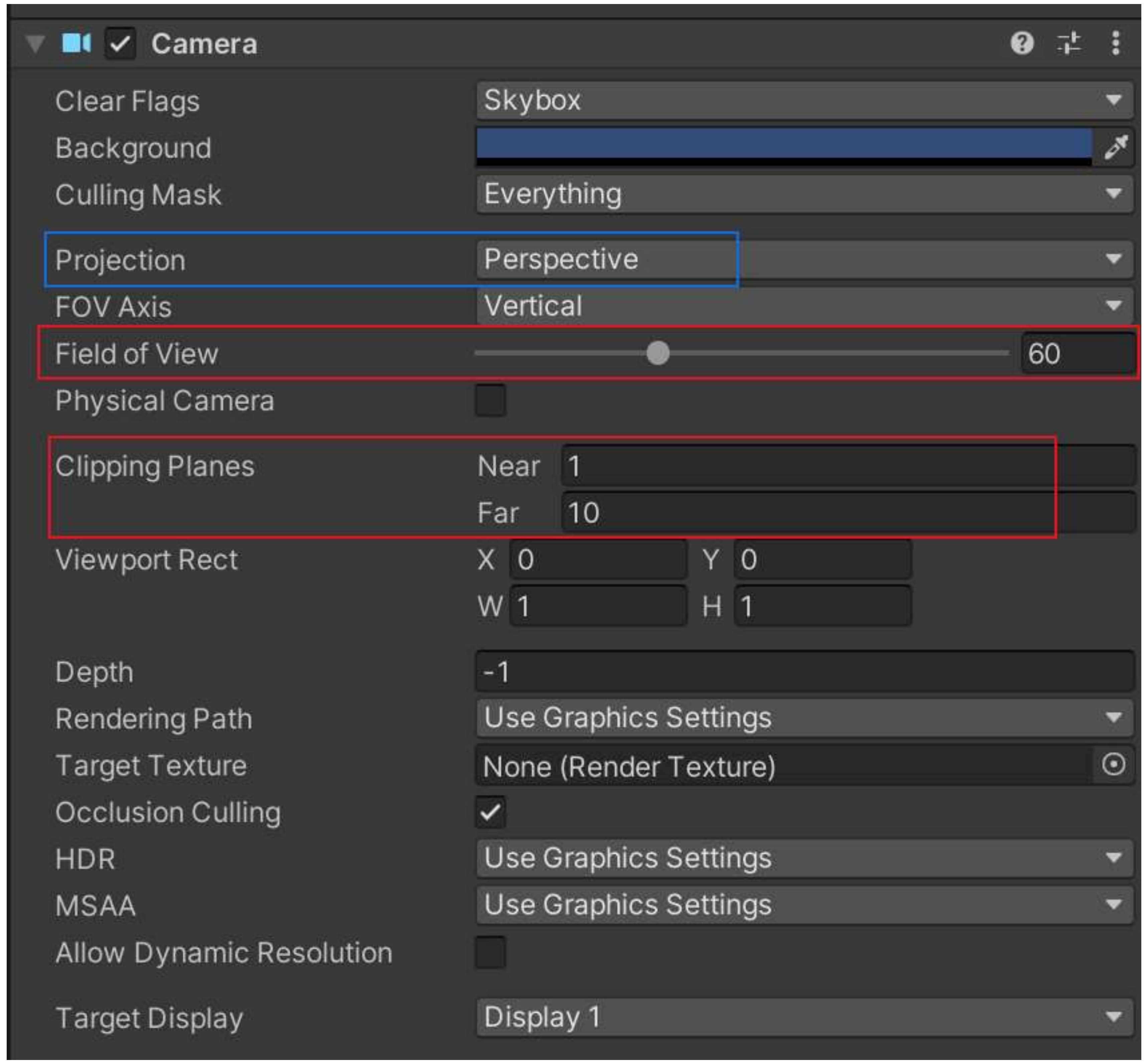
FOV（Field of View）：决定视锥开口角度

Clipping Planes：裁剪平面

Near：近裁剪面离摄像机的距离

Far：远裁剪面离摄像机的距离





WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

Unity中透视投影重要参数

利用已知参数，获取到远近裁剪面的高度

已知：

Near：近裁剪面离摄像机的距离

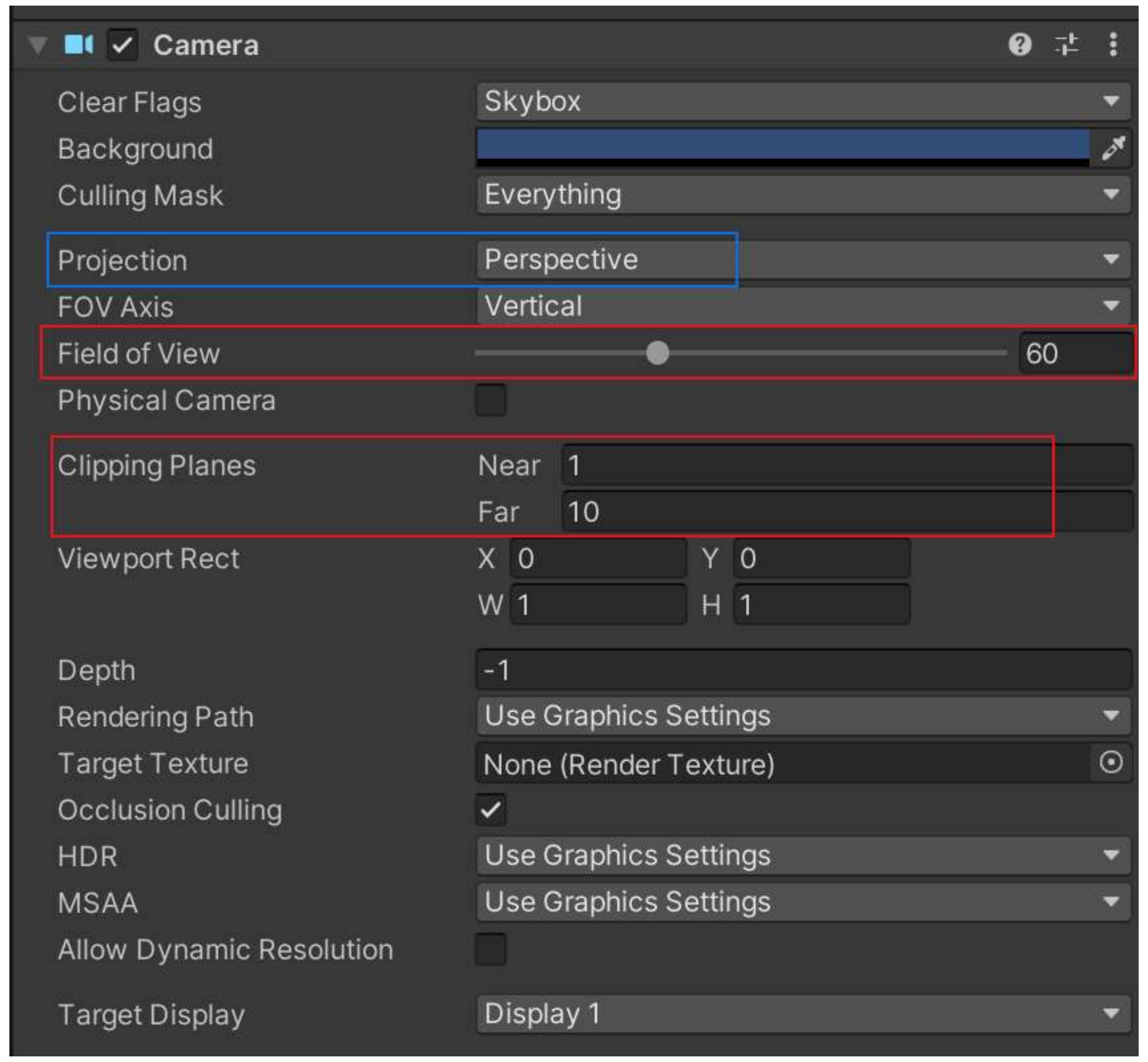
Far：远裁剪面离摄像机的距离

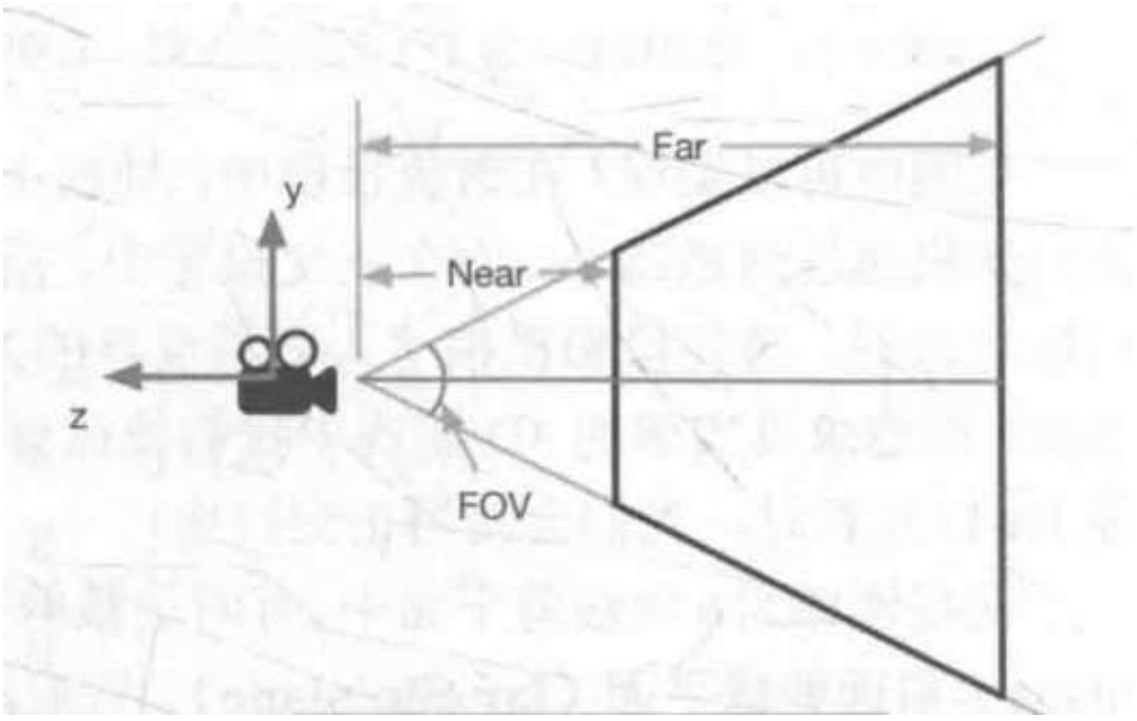
FOV（Field of View）：决定视锥开口角度

可得：

$$近裁剪面高 = 2 * Near * \tan(\frac{FOV}{2})$$

$$远裁剪面高 = 2 * Far * \tan(\frac{FOV}{2})$$





WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

Unity中透视投影重要参数

现在我们已经可以得到

近裁剪面高 = 2 * Near * tan($\frac{FOV}{2}$)

远裁剪面高 = 2 * Far * tan($\frac{FOV}{2}$)

我们还需要知道远近裁剪面的宽，以便之后进行变换矩阵的推导

可以通过摄像机参数得到Game窗口的宽高比

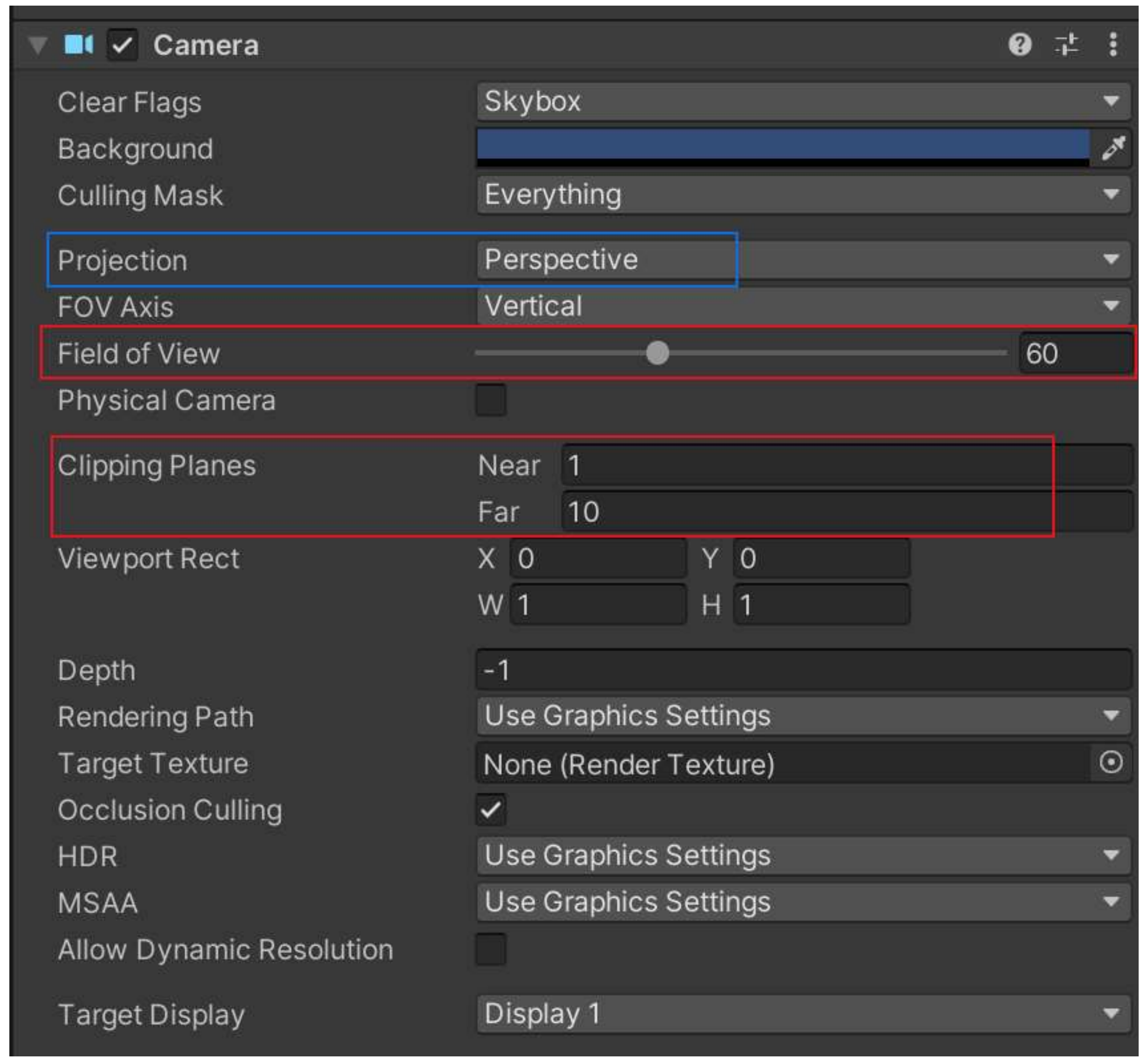
```
print(Camera.main.aspect);
```

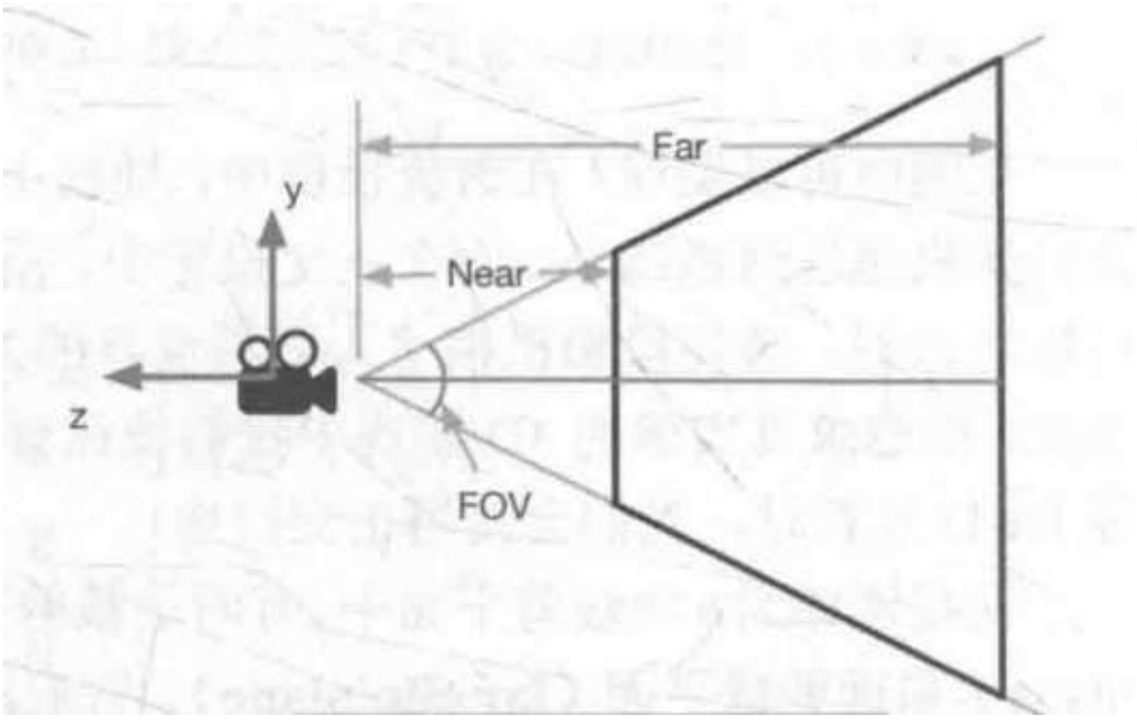
Aspect = 宽 : 高 = 宽 / 高

因此可以得到

近裁剪面宽 = Aspect *近裁剪面高 = Aspect * 2 * Near * tan($\frac{FOV}{2}$)

远裁剪面宽 = Aspect *远裁剪面高 = Aspect * 2 * Far * tan($\frac{FOV}{2}$)





WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

Unity中透视投影重要参数

因此，通过上面的推导，我们获取到了远近裁剪面的宽高信息

近裁剪面

高 = 2 * Near * tan($\frac{FOV}{2}$)

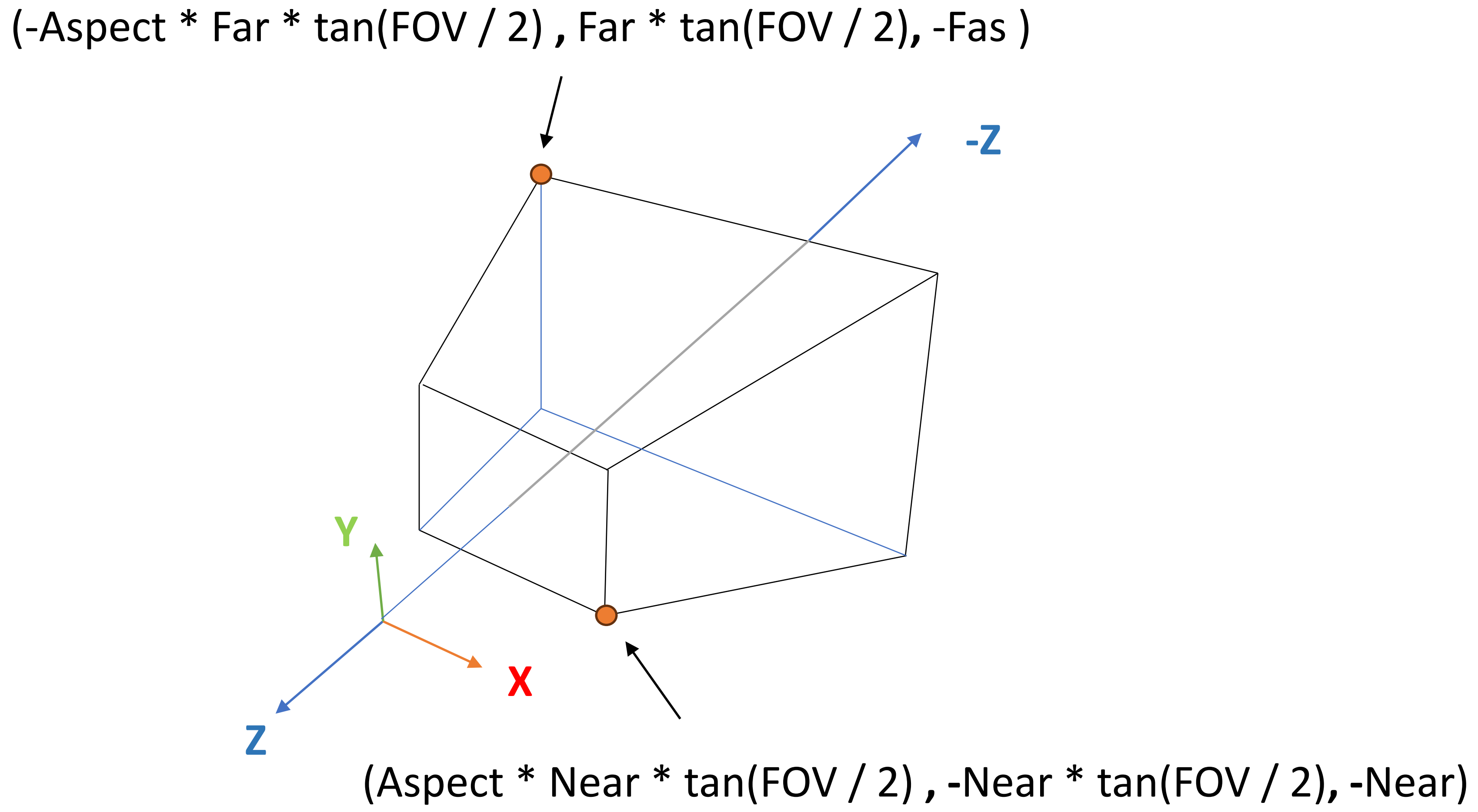
宽 = Aspect *高 = Aspect * 2 * Near * tan($\frac{FOV}{2}$)

远裁剪面

高 = 2 * Far * tan($\frac{FOV}{2}$)

宽 = Aspect *高 = Aspect * 2 * Far * tan($\frac{FOV}{2}$)

有了这些已知参数



WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

透视投影变换矩阵

唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

我们已经知道，我们需要通过以下三步来进行矩阵变换

1.将透视视锥体变成一个长方体

将该长方体进行正交投影变换的操作

2.将视锥体中心位移到观察空间原点中心

3.将长方体视锥体的xyz坐标范围映射到(-1,1)长宽高为2的正方体中

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

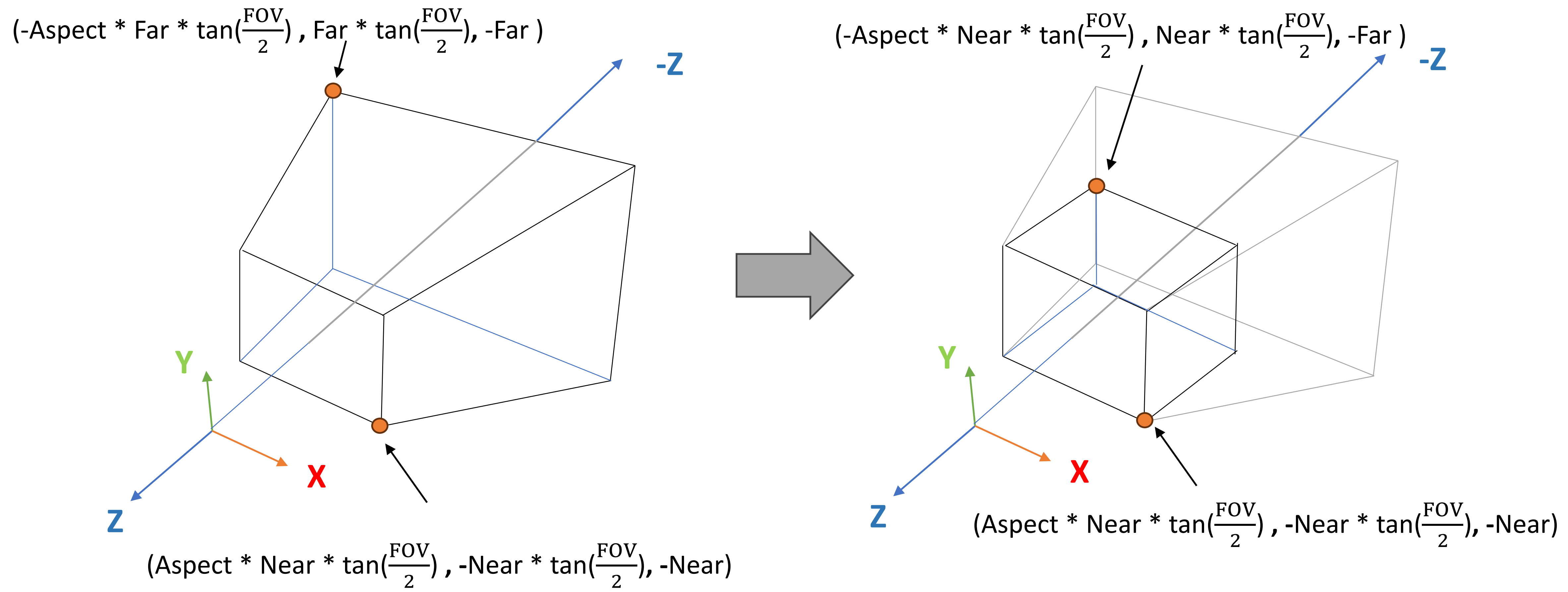
第一步：将透视视锥体变成一个长方体

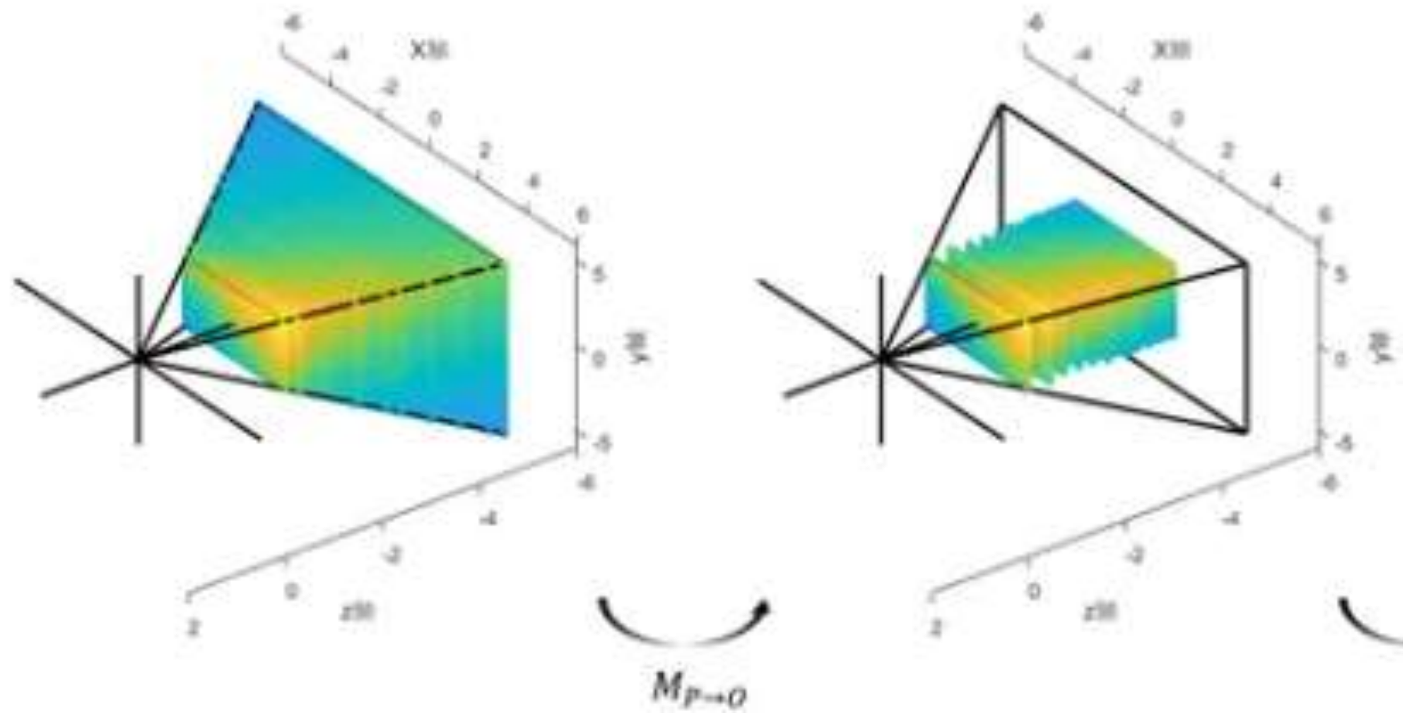
想要从图一变换到图二

我们需要满足3个特性

1. 近裁剪面上的所有点保持不变
2. 远裁剪面的z值不变，远裁剪面的中心点不变
3. 远裁剪面宽高映射成近裁剪面的宽高

我们只需要根据这3个特性得到对应的矩阵变换关系，然后进行推导即可





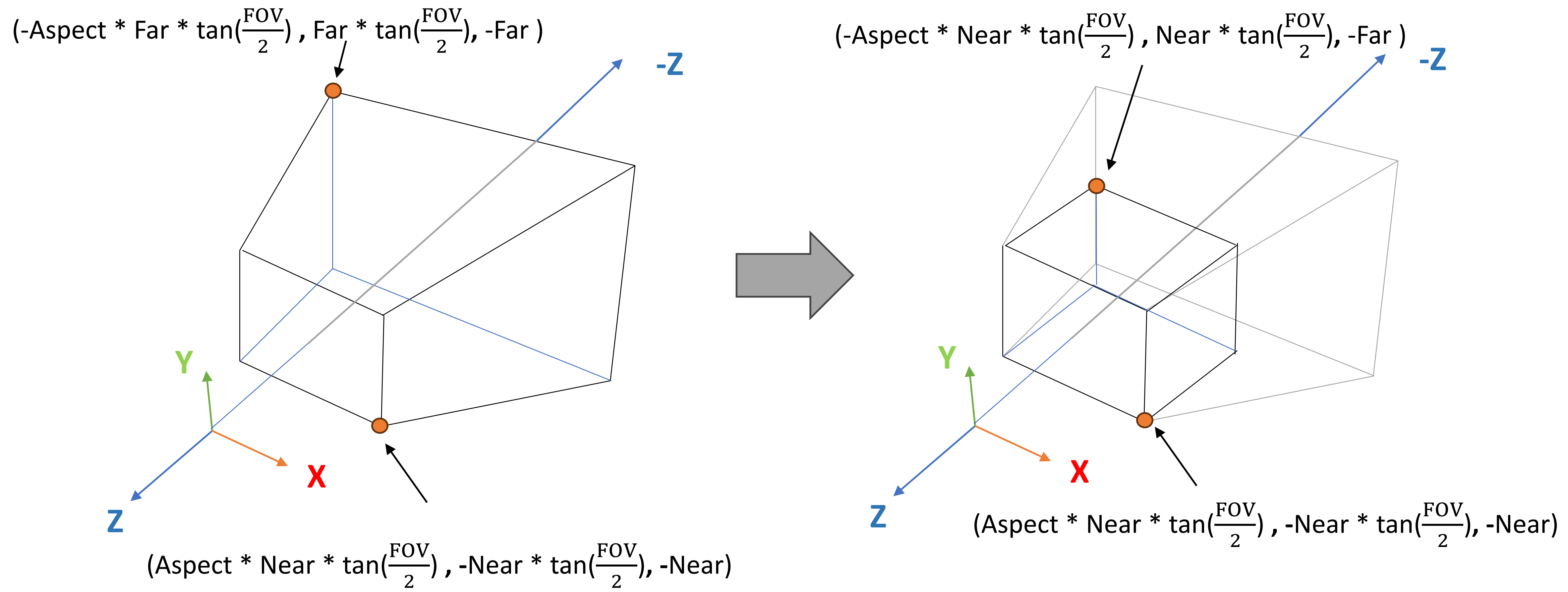
唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

1. 近裁剪面上的所有点保持不变

近裁剪面上的点 (x,y,Near,1) 变换后还是 (x,y,Near,1)



$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} x \\ y \\ -Near \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} x \\ y \\ -Near \\ 1 \end{matrix}$$

其中，x和y等于0时，相当于就是近裁剪面的中心点，也满足下面的等式

$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -Near \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -Near \\ 1 \end{matrix}$$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

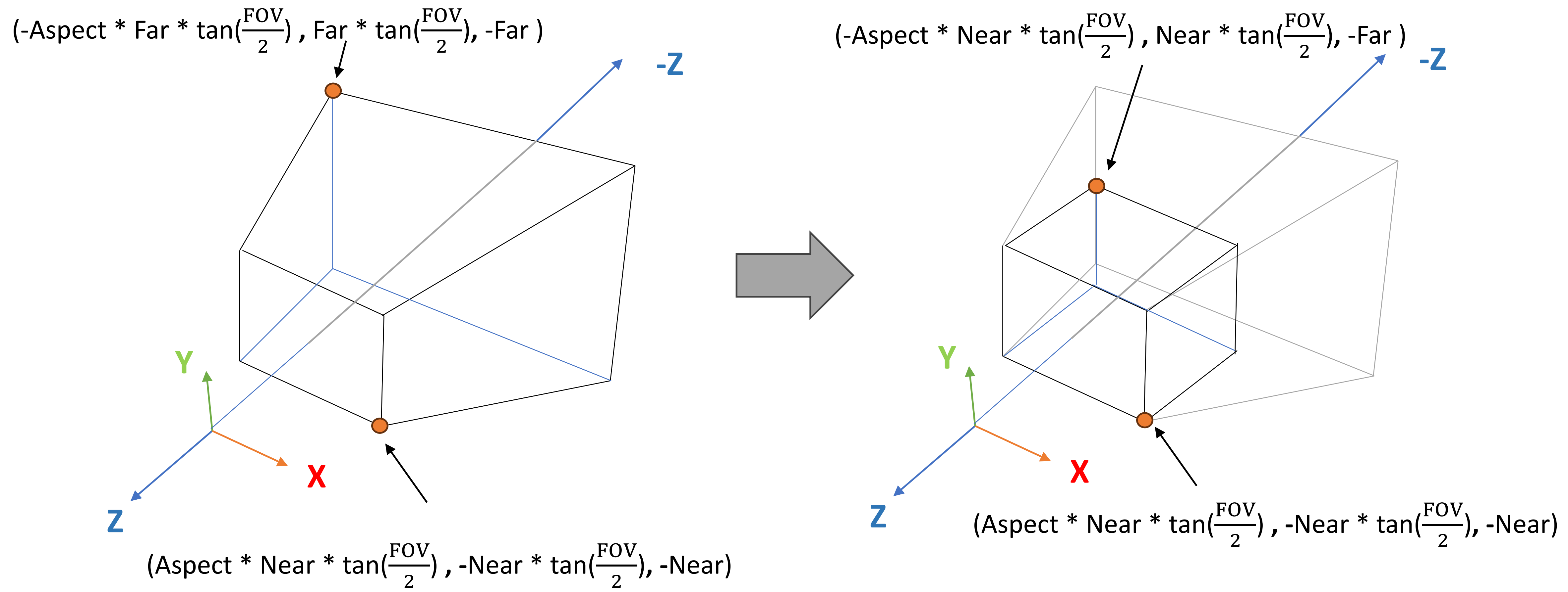
透视投影变换矩阵

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

2. 远裁剪面的z值不变，远裁剪面的中心点不变

相当于Z 轴与远裁剪面的

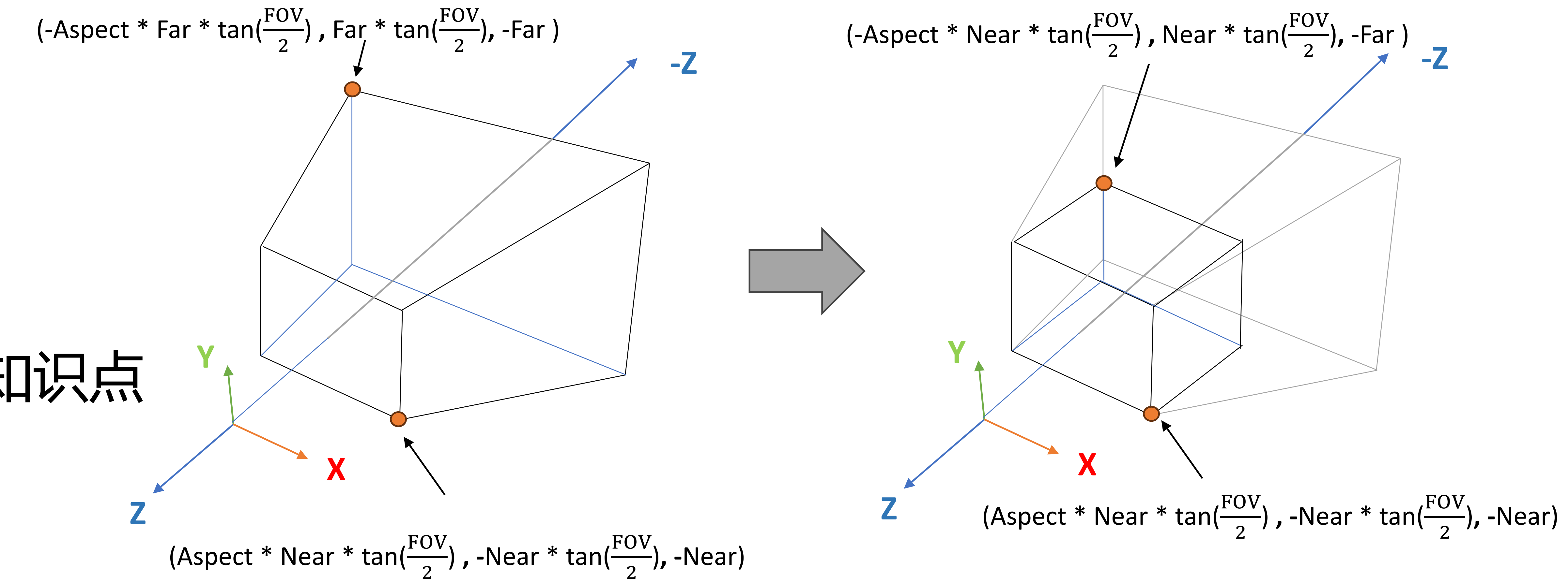
交点（0,0,Far,1）变换后仍为（0,0,Far,1）



$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix}$$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

透视投影变换矩阵



第一步：将透视视锥体变成一个长方体

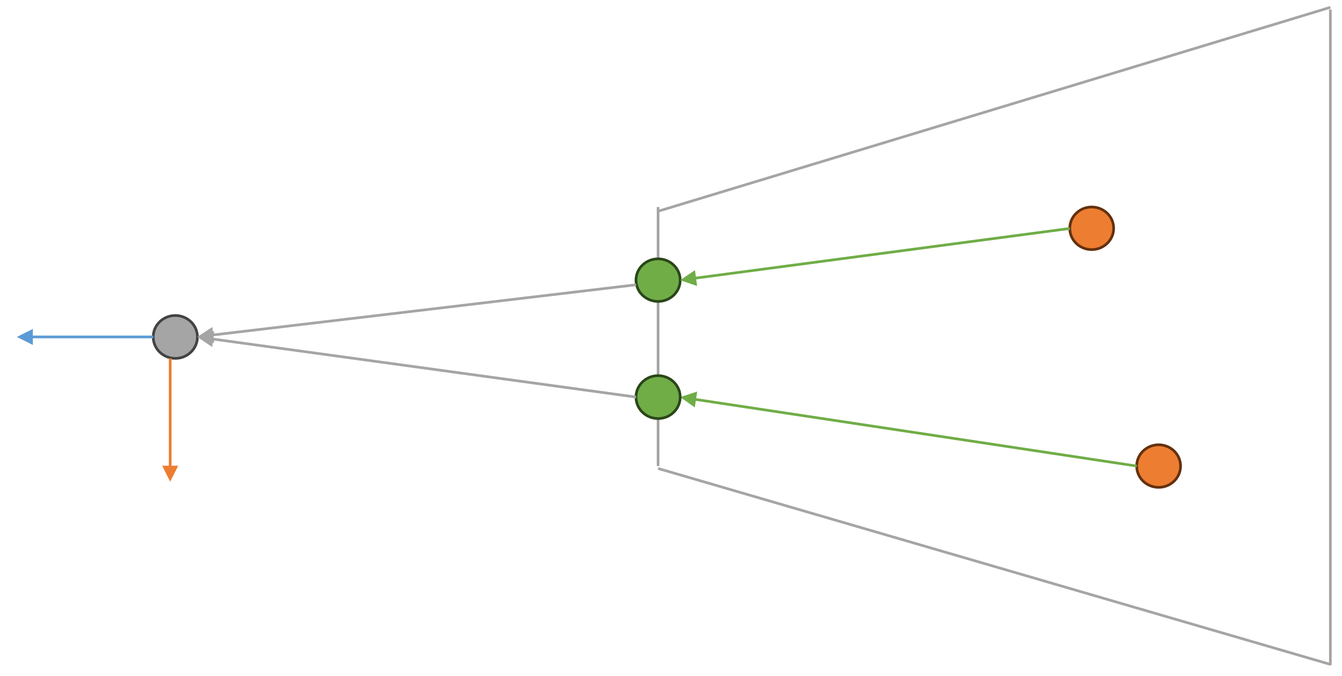
3. 远裁剪面宽高映射成近裁剪面的宽高

这一步相对来说复杂一些，我们需要利用之前学习的知识点来进行一些推导

回顾知识点：

1. 视锥体内顶点和原点连接，在近裁剪面的交点为投影点
2. 相似三角形的对应边成比例

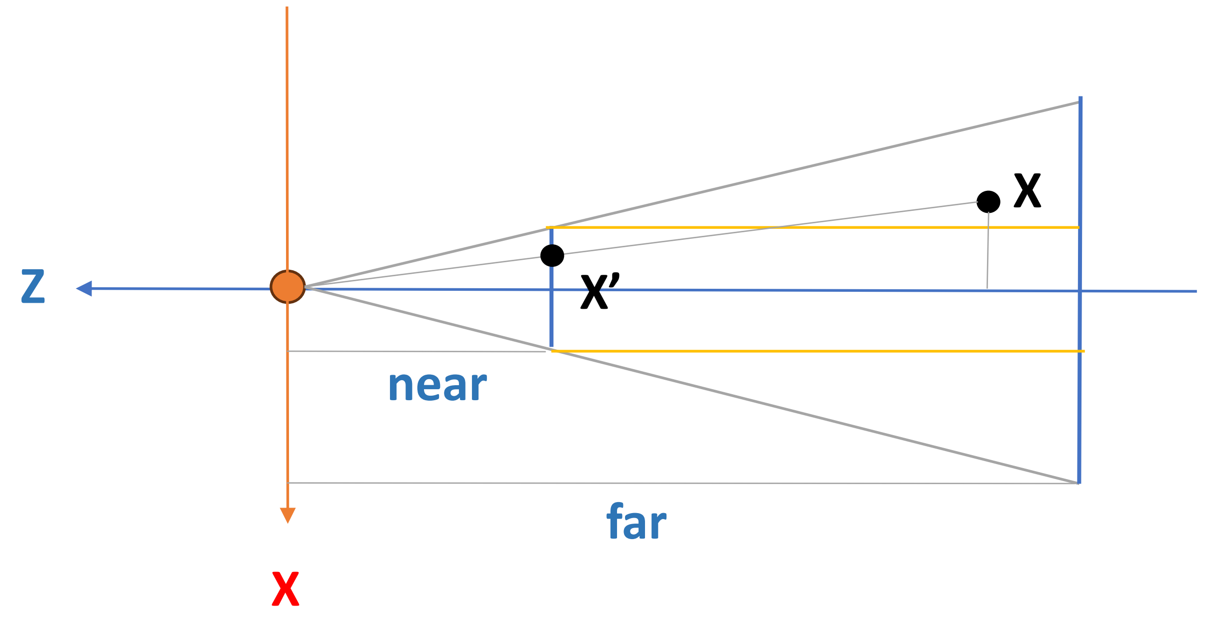
   a/a′ ＝ b/b′ ＝ c/c′



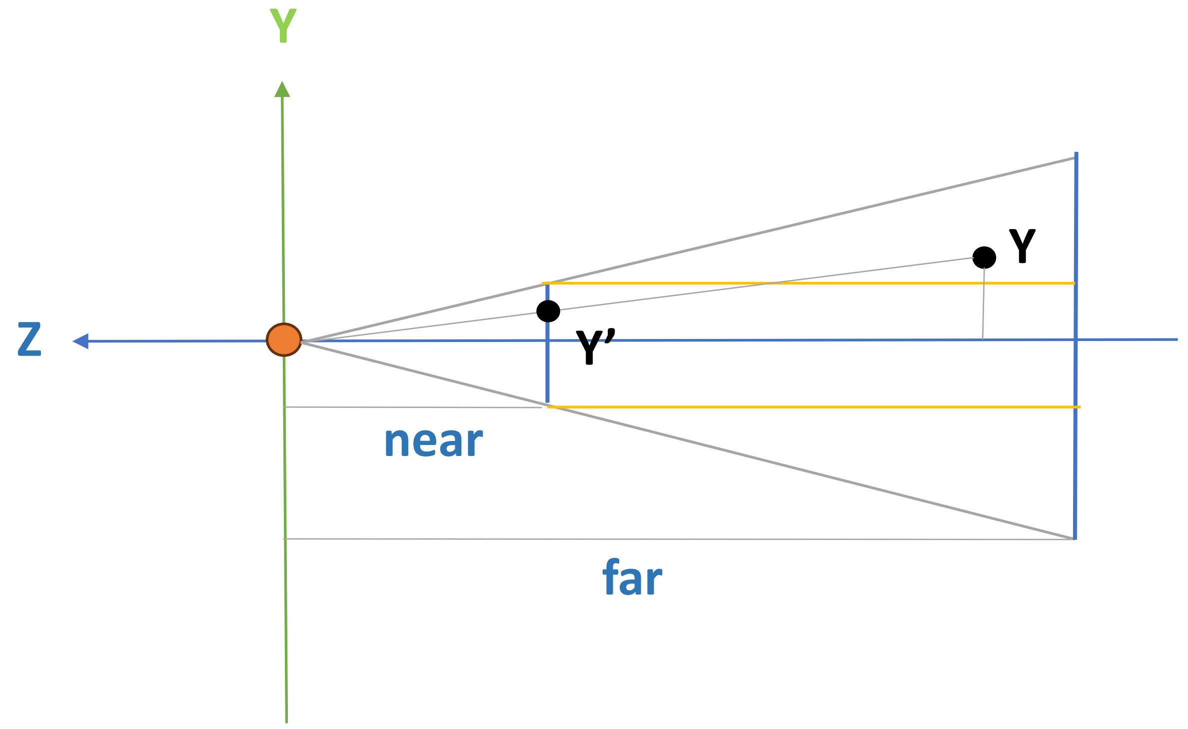
唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

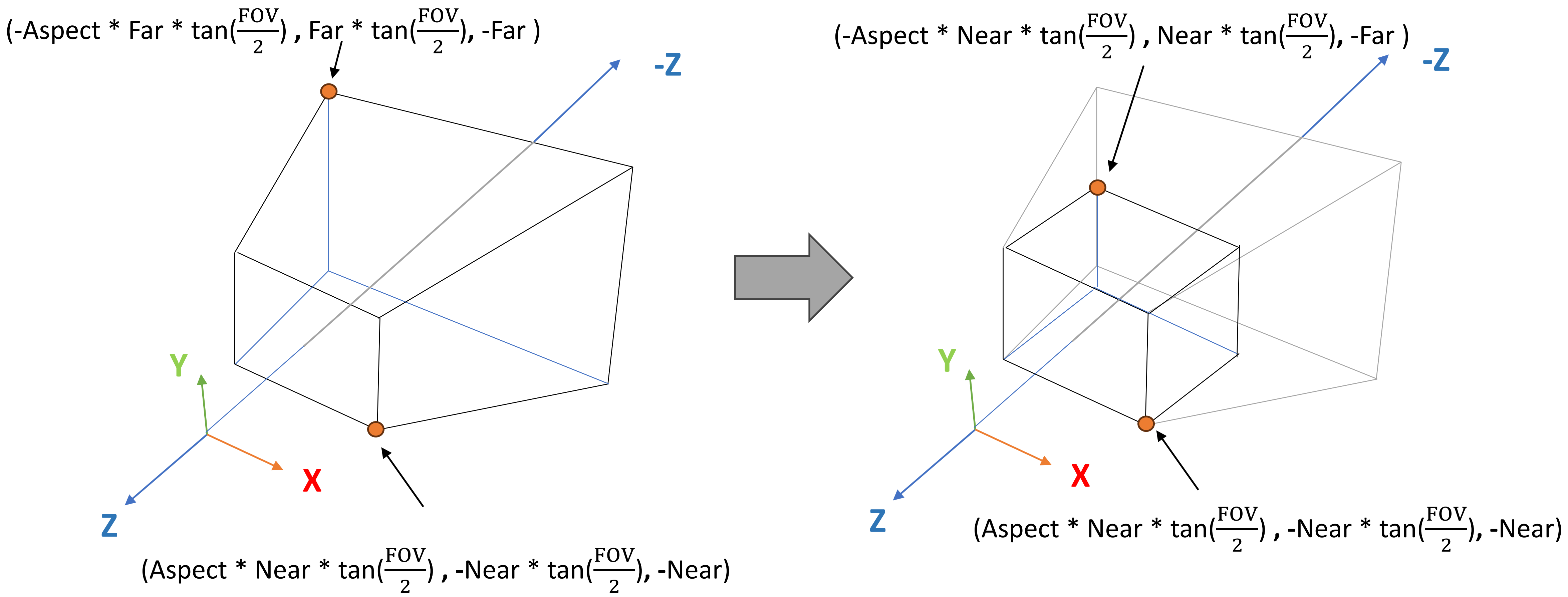
3. 远裁剪面宽高映射成近裁剪面的宽高



$$\frac{X'}{X} = \frac{-\mathrm{near}}{Z} \Rightarrow X' = X\frac{-Near}{Z}$$



$$\frac{Y'}{Y} = \frac{-\mathrm{near}}{Z} \Rightarrow Y' = Y\frac{-Near}{Z}$$



通过此推导我们发现，视锥体内的所有点的x、y坐标

都经过了同样的缩放，缩放因子为： $\frac{-Near}{Z}$

其中 Near是近裁剪面离摄像机的距离， Z为视锥体中点的Z坐标

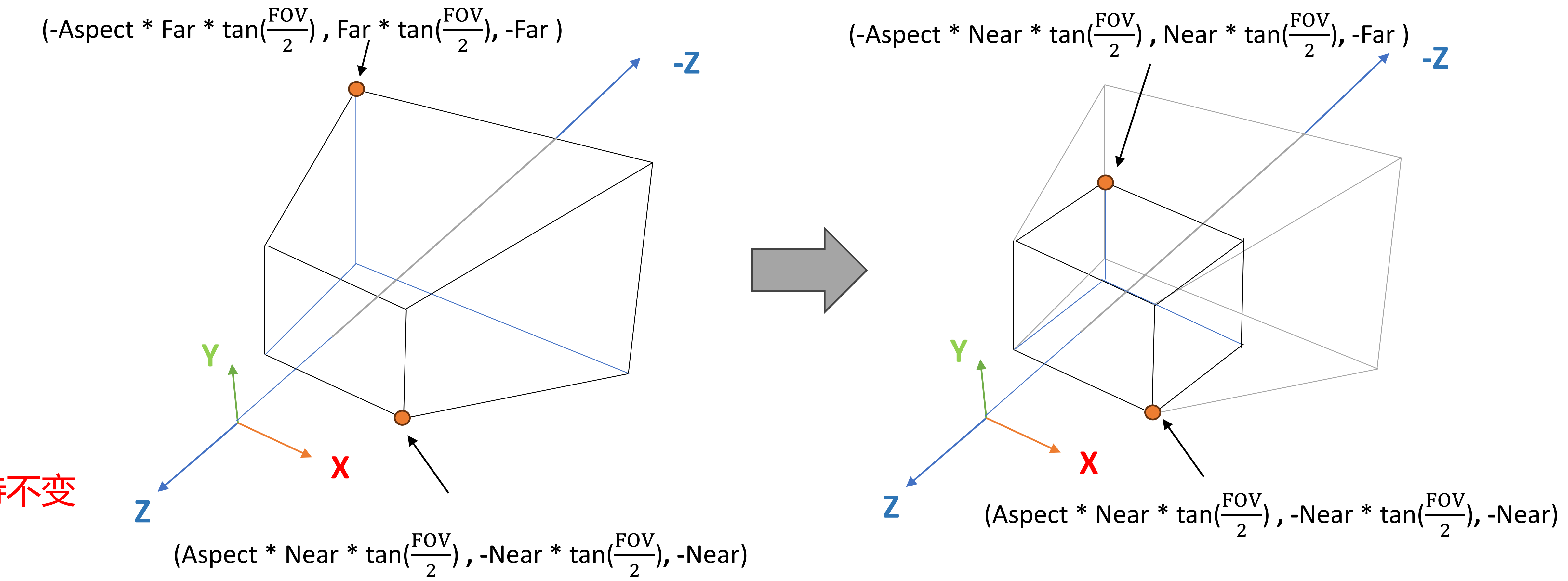
因此我们已推导出：

$$变换矩阵M * \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x\frac{-Near}{Z} \\ y\frac{-Near}{Z} \\ 未知 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

WELCOME TO THE UNITY SPECIALTY COURSE STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵



第一步：将透视视锥体变成一个长方体

现在我们得到了三个和变换矩阵有关的等式

$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} \mathrm{x} \\ y \\ -\mathrm{Near} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{x} \\ y \\ -\mathrm{Near} \\ 1 \end{matrix}$$

1. 近裁剪面上的所有点保持不变

$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix}$$

2. 远裁剪面的z值不变，远裁剪面的中心点不变

$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} \mathrm{x} \\ y \\ z \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} x\frac{-Near}{z} \\ \mathrm{y}\frac{-Near}{z} \\ \text{未知} \\ 1 \end{matrix}$$

3. 远裁剪面宽高映射成近裁剪面的宽高

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

透视投影变换矩阵

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

我们先从信息最多的等式来进行推导

我们首先对最终的结果进行一次变形

补充知识点:

四维齐次坐标中 乘以或者除以一个非零的数（标量），

所映射的三维坐标始终是同一个坐标

$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} x\frac{-Near}{z} \\ y\frac{-Near}{z} \\ \text{未知} \\ 1 \end{matrix}$$

3. 远裁剪面宽高映射成近裁剪面的宽高

$$\begin{matrix} x\frac{-Near}{z} \\ y\frac{-Near}{z} \\ \text{未知} \\ 1 \end{matrix} => \begin{matrix} x\frac{-Near}{z} \\ y\frac{-Near}{z} \\ \text{未知} \\ 1 \end{matrix} * -z => \begin{matrix} xNear \\ y\,Near \\ \text{未知} \\ -z \end{matrix}$$

$$\text{变换矩阵M} * \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} xNear \\ y\,Near \\ \text{未知} \\ -z \end{matrix} => \textbf{变换矩阵M} = \begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

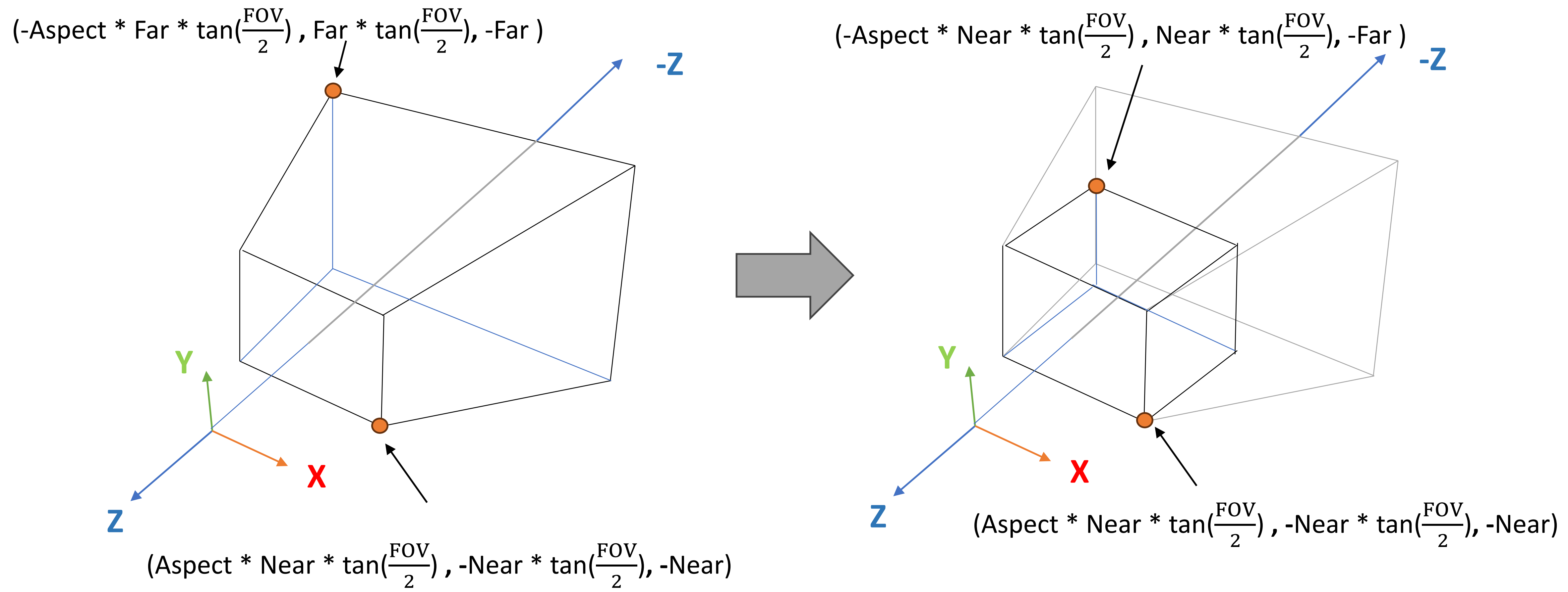
唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

我们现在已经得出了变换矩阵的基本构成为

$$\text{变换矩阵M} = \begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



也就是说我们只需要推导出该变换矩阵的第三行的构成，就能够得到我们的目标：

<u>将透视视锥体变成一个长方体的变换矩阵</u>

因此，我们可以假设

$$\text{变换矩阵M} = \begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中第三行前两个位置为0，是因为z和 x，y无关

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

变换矩阵M = $\begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

透视投影变换矩阵

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

接着，我们可以根据

变换矩阵M * $\begin{matrix} x \\ y \\ -Near \\ 1 \end{matrix}$ = $\begin{matrix} x \\ y \\ -Near \\ 1 \end{matrix}$ 来进行一些推导

1. 近裁剪面上的所有点保持不变

首先，我们让x，y等于0，相当于近裁剪面的中心点，肯定也是满足这一等式的，我们将变换矩阵M代入进去

$$\begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -Near \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -Near \\ 1 \end{matrix} * Near = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -Near^2 \\ Near \end{matrix}$$

补充知识点：

四维齐次坐标中 乘以或者除以一个非零的数（标量

所映射的三维坐标始终是同一个坐标

我们可以得到一个等式：

$-aNear + b = -Near^2$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

$$变换矩阵M = \begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

接着，我们再可以根据

$$变换矩阵M * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix}$$

来进行一些推导

2. 远裁剪面的z值不变，远裁剪面的中心点不变

我们将变换矩阵M代入进去

$$\begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far} \\ 1 \end{matrix} * \mathrm{Far} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{Far}^2 \\ \mathrm{Far} \end{matrix}$$

补充知识点：
四维齐次坐标中 乘以或者除以一个非零的数（标量
所映射的三维坐标始终是同一个坐标

我们可以得到一个等式：

$-a\mathrm{Far} + b = -\mathrm{Far}^2$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-透视投影

变换矩阵M = $\begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

透视投影变换矩阵

第一步：将透视视锥体变成一个长方体

通过

-aNear + b = -Near²

-aFar + b = -Far²

可以推导出 a、b的值

-aNaer + aFar = Far² - Near² => a(Far – Near) = (Far + Near)(Far - Near) => **a = Far + Near**

-(Far + Near)Near + b = -Near² => -FarNear – Near² + b = -Near² => b = Far * Near

因此变换矩阵为

变换矩阵M = $\begin{bmatrix} Near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Far + Near & Far\,Near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

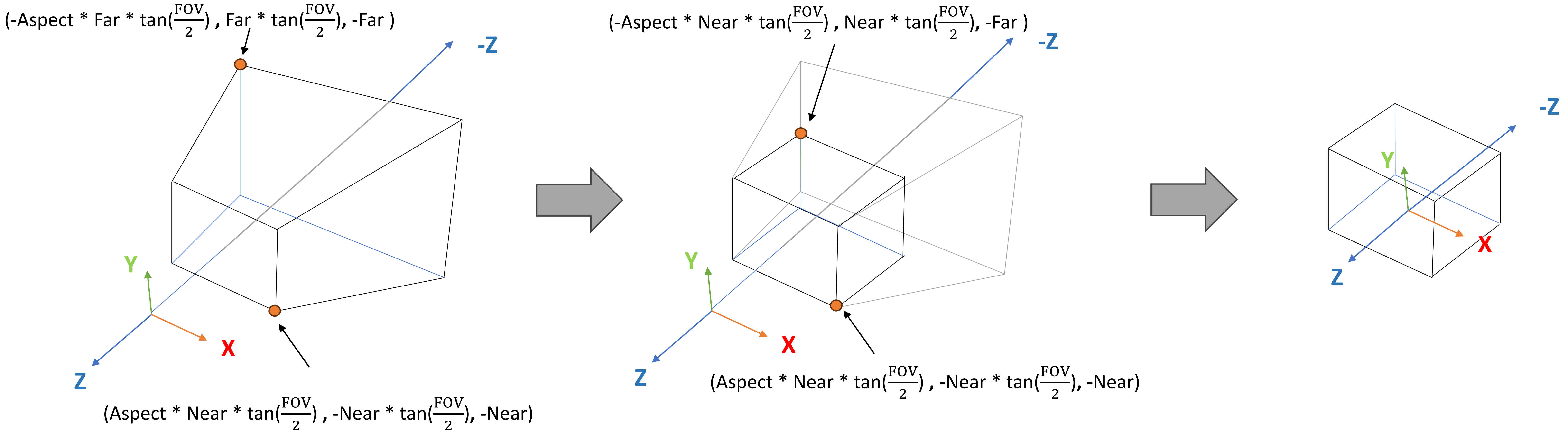
透视投影变换矩阵

第二步：将视锥体中心位移到观察空间原点中心

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

平移矩阵为：

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{Far + Near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

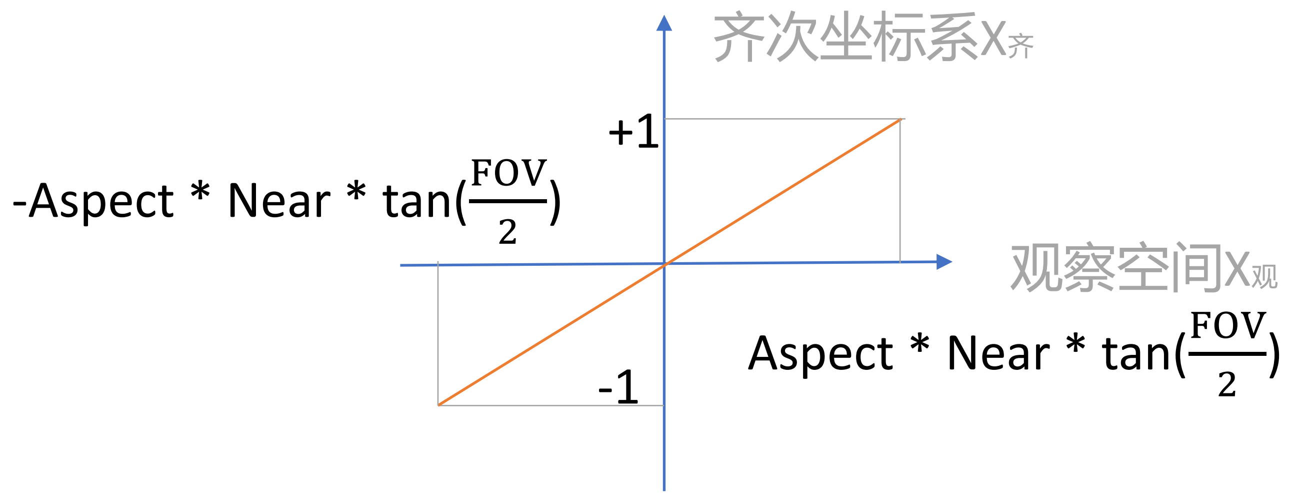


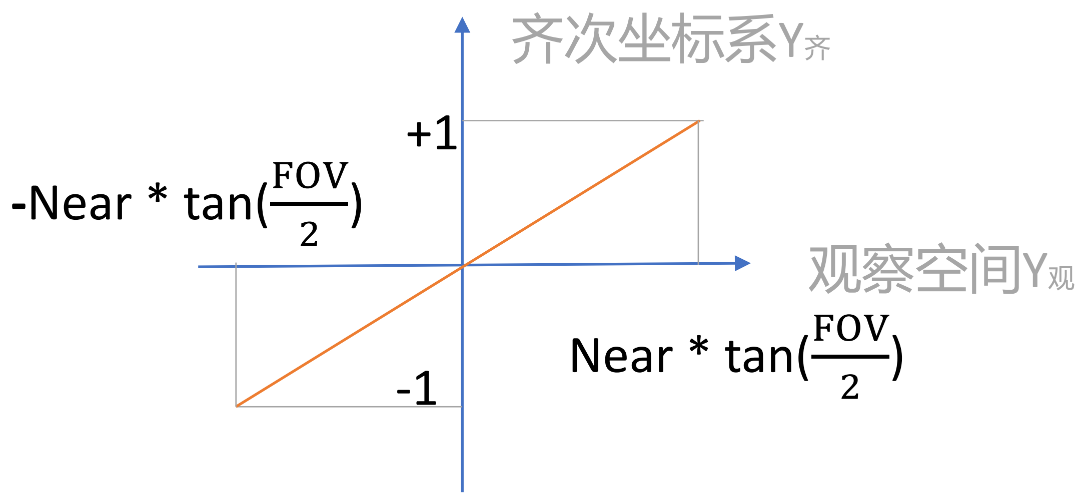
唐老狮系列教程-透视投影

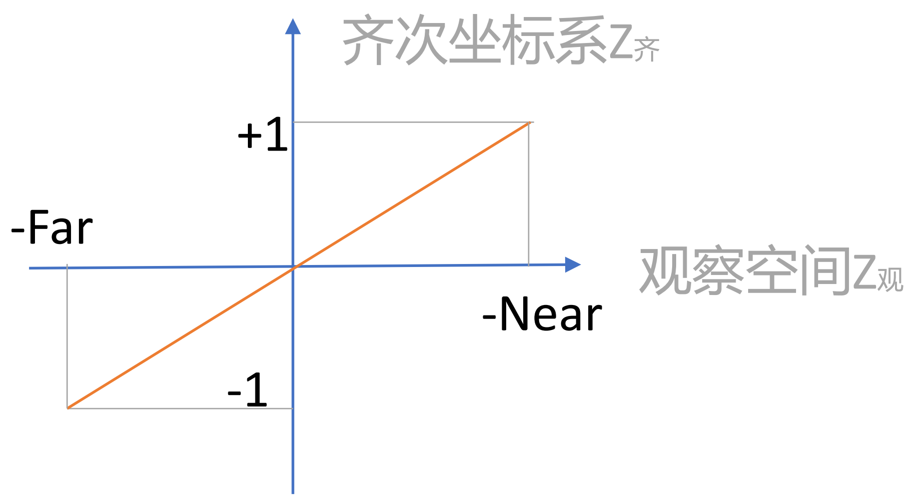
透视投影变换矩阵

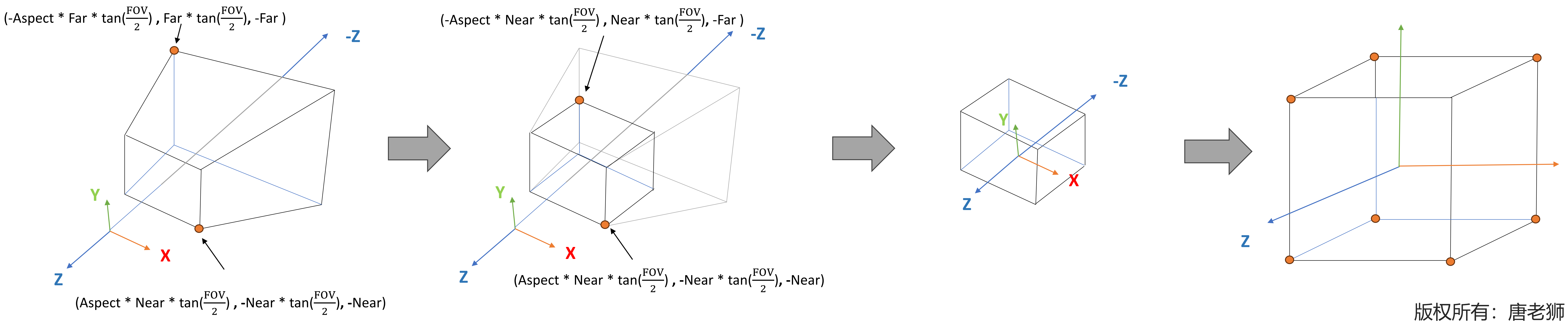
第三步：将长方体视锥体的xyz坐标范围映射到(-1,1)长宽高为2的正方体中

我们可以得到观察空间中的xyz和齐次坐标系中xyz的关系如下图





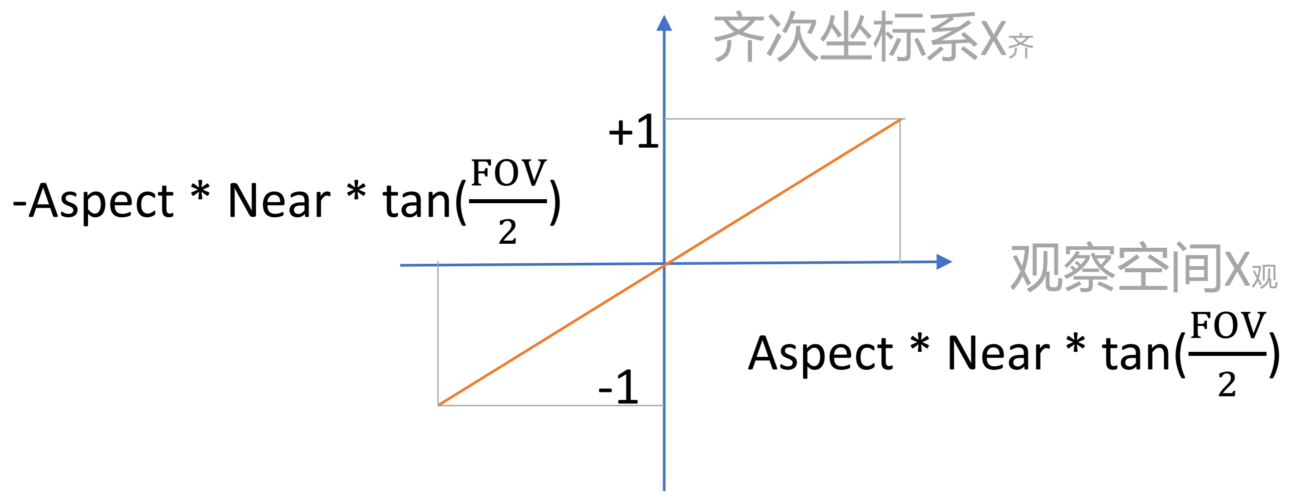


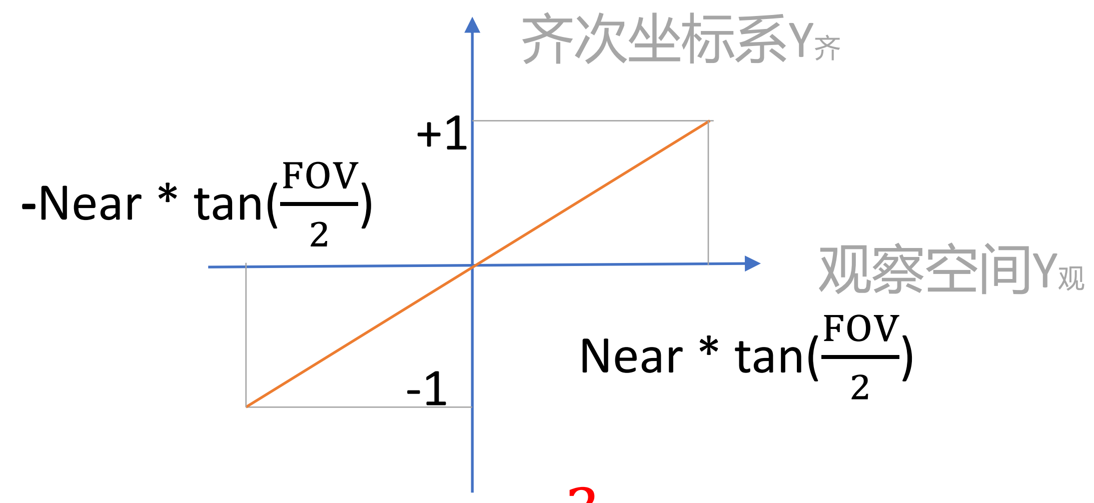


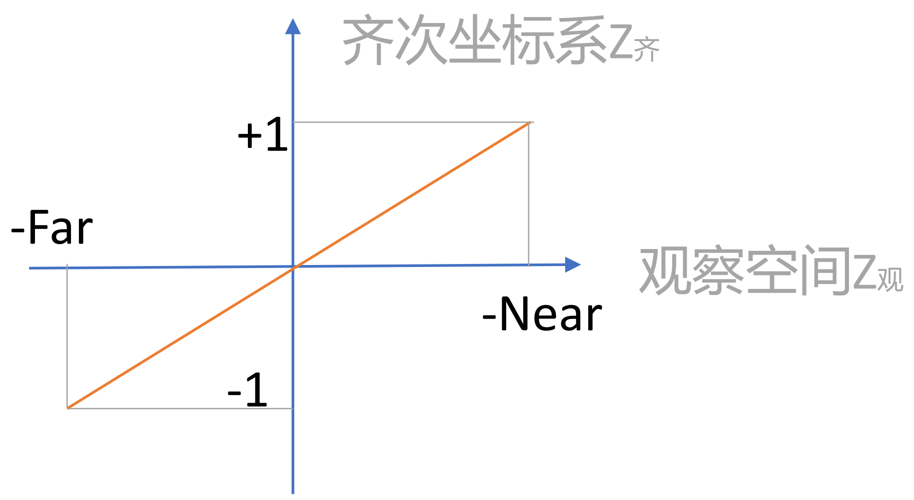
透视投影变换矩阵

第三步：将长方体视锥体的xyz坐标范围映射到(-1,1)长宽高为2的正方体中

我们可以得到观察空间中的xyz和齐次坐标系中xyz的关系如下图



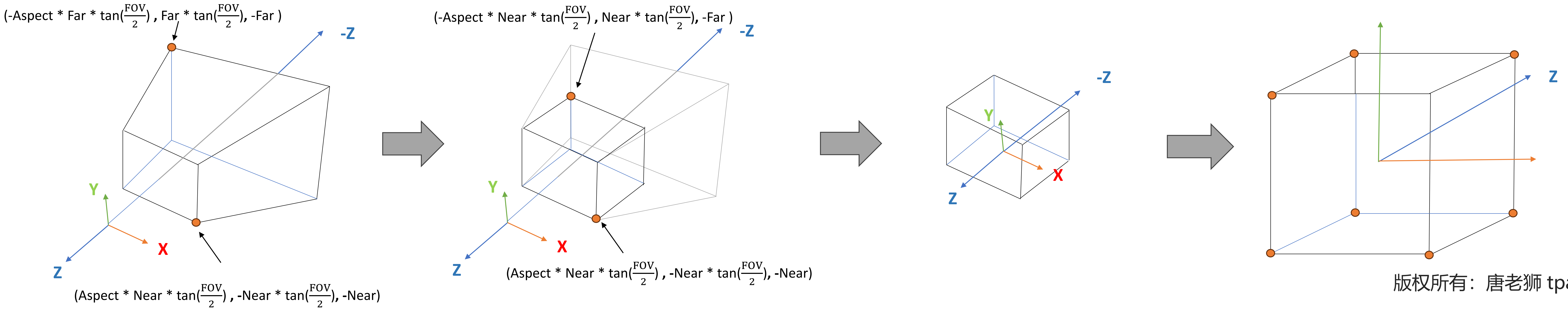




$$X_{齐} = \frac{2}{2*Aspect * Near * \tan(\frac{FOV}{2})} * X_{观}$$

$$Y_{齐} = \frac{2}{2*Near * \tan(\frac{FOV}{2})} * Y_{观}$$

$$Z_{齐} = \frac{2}{-Near-(-Far)} * Z_{观} \Rightarrow -\frac{2}{Far-Near} * Z_{观}$$



唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

第三步：将长方体视锥体的xyz坐标范围映射到(-1,1)长宽高为2的正方体中

因此，根据我们的推论，这一步的变换其实就是一个缩放变换，因此，我们可以根据刚才推导的公式

$$X_{齐} = \frac{2}{2*Aspect * Near * \tan(\frac{FOV}{2})} * X_{观} \qquad Y_{齐} = \frac{2}{2*Near * \tan(\frac{FOV}{2})} * Y_{观} \qquad Z_{齐} = \frac{2}{-Near-(-Far)} * Z_{观} \Rightarrow -\frac{2}{Far-Near} * Z_{观}$$

得到：

$$\begin{matrix} \frac{1}{Aspect * Near * \tan(\frac{FOV}{2})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Near * \tan(\frac{FOV}{2})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{Far - Near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

该矩阵即为我们的目标缩放矩阵

唐老狮系列教程-透视投影

透视投影变换矩阵

我们现在得到了三个变换矩阵，我们将其进行乘法计算后，便可以得到

将摄像机视锥体的 透视投影 空间 转换到 齐次坐标裁剪空间 时的 **变换矩阵**

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\text{Aspect} * \text{Near} * \tan(\frac{\text{FOV}}{2})} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\text{Near} * \tan(\frac{\text{FOV}}{2})} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{2}{Far - Near} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{Far + Near}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
\text{Near} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \text{Near} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \text{Far} + \text{Near} & \text{Far Near} \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\boxed{
\begin{matrix}
\frac{1}{\text{Aspect} * \tan(\frac{FOV}{2})} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\tan(\frac{FOV}{2})} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{Far + Near}{Far - Near} & -\frac{2FarNear}{Far - Near} \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{matrix}
}
$$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

总结

总结

1. 明确目标

   将摄像机视锥体的 透视投影 空间 转换到 齐次坐标裁剪空间 时的 **变换矩阵**

2. Unity中透视投影重要参数

   Near：近裁剪面离摄像机的距离

   Far：远裁剪面离摄像机的距离

   FOV（Field of View）：决定视锥开口角度

   近裁剪面

   高 = 2 * Near * tan($\frac{FOV}{2}$)

   宽 = Aspect *高 = Aspect * 2 * Near * tan($\frac{FOV}{2}$)

   远裁剪面

   高 = 2 * Far * tan($\frac{FOV}{2}$)

   宽 = Aspect *高 = Aspect * 2 * Far * tan($\frac{FOV}{2}$)

唐老狮系列教程-透视投影

总结

3. 透视投影变换矩阵

我们通过三个步骤

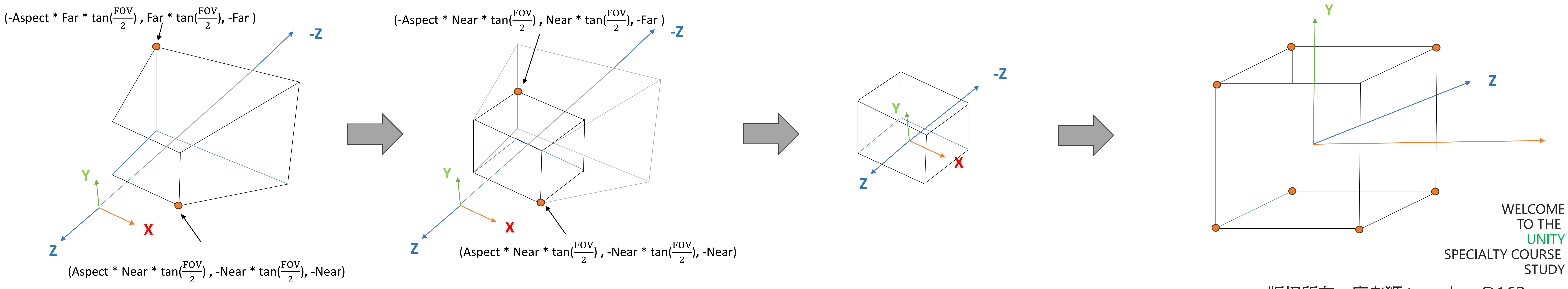
1.将透视视锥体变成一个长方体

2.将视锥体中心位移到观察空间原点中心

3.将长方体视锥体的xyz坐标范围映射到(-1,1)长宽高为2的正方体中

得到了最终的变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Aspect * \tan(\frac{FOV}{2})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\frac{FOV}{2})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Far+Near}{Far-Near} & -\frac{2FarNear}{Far-Near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



唐老狮系列教程

Thank

谢谢您的聆听

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY