特殊矩阵——逆矩阵

知识回顾

唐老狮系列教程-逆矩阵

知识回顾

1.方块矩阵 —— **行列数相等的矩阵**

2.对角矩阵—— **只有主对角线有值，其余元素全为零的 方阵**

3.单位矩阵—— **主对角线上的元素均为1　的 对角矩阵**

4.数量矩阵—— **主对角线上的元素为同一值 的 对角矩阵**

5.转置矩阵—— **将原始矩阵的行和列互换得到的 新矩阵**

矩阵转置的转置等于原矩阵 $(M^T)^T = M$

矩阵串接的转置，等于反向串接各个矩阵的转置 $(AB)^T = B^T A^T$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

主要讲解内容

1.逆矩阵的基本概念

2.逆矩阵的计算

3.逆矩阵的重要性质

唐老狮系列教程-逆矩阵

逆矩阵的概念

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

逆矩阵

逆矩阵是所有特殊矩阵当中计算最复杂的矩阵

它的特点是 **逆矩阵是必须是一个方阵，并且不是所有矩阵都有逆矩阵**

假设 一个方阵 M， 它的逆矩阵用 M^{-1} 表示

那么 $MM^{-1} = M^{-1}M = I$（单位矩阵）

如果一个矩阵存在对应的逆矩阵，我们就说该矩阵是可逆的（或称非奇异的）

如果不存在，那么该矩阵为不可逆的（或称奇异的）

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

逆矩阵的计算

计算矩阵的逆矩阵

1. 确定矩阵为方阵（即行列数相等）
2. 计算矩阵的行列式（若行列式值为零，则该矩阵没有逆矩阵）
3. 计算矩阵的代数余子式矩阵
4. 计算标准伴随矩阵（转置代数余子式矩阵）
5. 计算逆矩阵（标准伴随矩阵 / 行列式）

唐老狮系列教程-逆矩阵

计算矩阵的逆矩阵

1. 确定矩阵为方阵（即行列数相等）
2. 计算矩阵的行列式（若行列式值为零，则该矩阵没有逆矩阵）
3. 计算矩阵的代数余子式矩阵
4. 计算标准伴随矩阵（转置代数余子式矩阵）
5. 计算逆矩阵（标准伴随矩阵 / 行列式）

唐老狮系列教程-逆矩阵

行列式的计算方式

假设矩阵为M，|M| 表示M矩阵的行列式，行列式是一个标量（数值）

计算口诀：

左下左上画对角，线上数值都相乘，数值数量为行列，数量不够对岸取

左下分组加，左上分组减

2x2矩阵的行列式计算方式

$$\begin{bmatrix} m11 & m12 \\ m21 & m22 \end{bmatrix}$$

= +m11*m22 – m21*m12

3x3矩阵的行列式计算方式

$$\begin{bmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{bmatrix}$$

= + m11*m22*m33 + m21*m32*m13 + m31*m12*m23

- m31*m22*m13 – m32*m23*m11 – m33*m21*m12

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

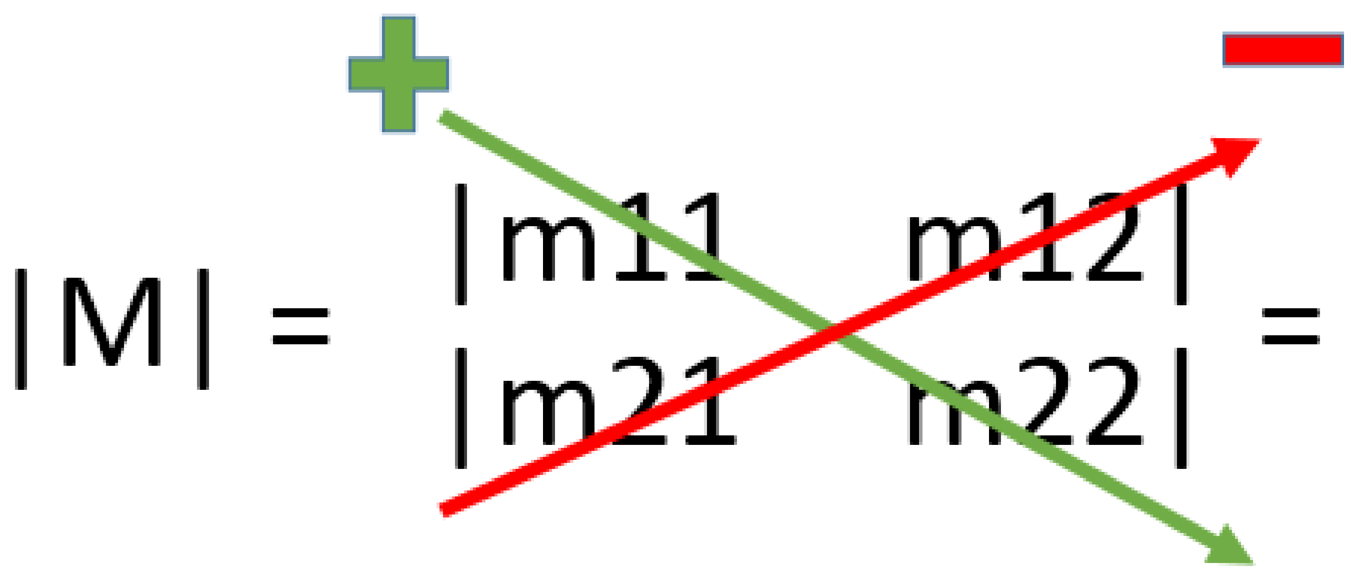
行列式的计算方式

计算口诀：

左下左上画对角，线上数值都相乘，数值数量为行列，数量不够对岸取

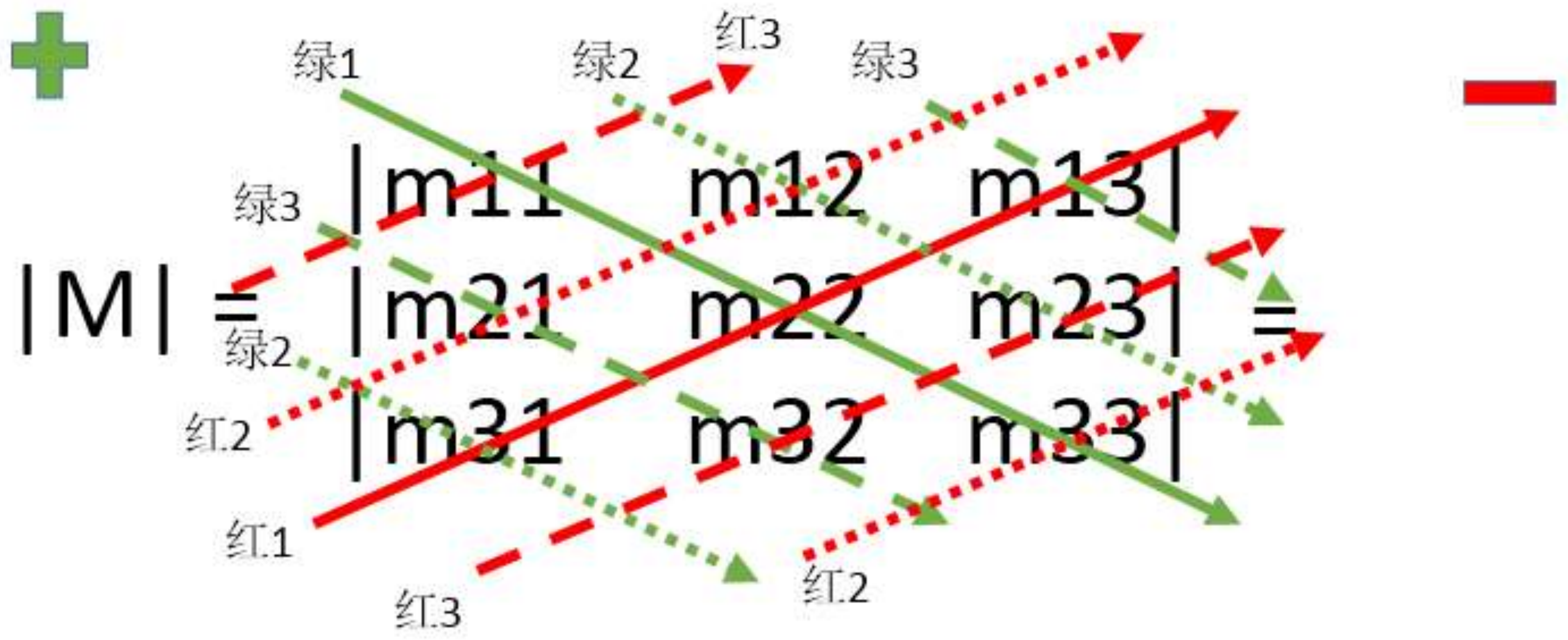
左下分组加，左上分组减

2x2矩阵的行列式计算方式



$$= \quad m11*m22 - m21 * m12$$

3x3矩阵的行列式计算方式



$$= m11*m22*m33 + m21*m32*m13 + m31*m12*m23$$
$$-m11*m32*m23 - m21*m12*m33 - m31*m22*m13$$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

练习 行列式的计算方式

2x2矩阵的行列式计算

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} m11 & m12 \\ m21 & m22 \end{vmatrix} = m11*m22 - m21*m12$$

= 4 * 2 - -3*3

= 8 - -9

= 17

3x3矩阵的行列式计算

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{vmatrix}$$

= m11*m22*m33 + m21*m32*m13 + m31*m12*m23
-m11*m32*m23 – m21*m12*m33 – m31*m22*m13

= 1*2*0 + 3*-2*3 + 3 *-2*-1

- 3*2*3 – 3*-2*0 – 1*-2*-1

= 0 + -18 + 6 – 18 - 0 – 2

=-32

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

计算矩阵的逆矩阵

1. 确定矩阵为方阵（即行列数相等）
2. 计算矩阵的行列式（若行列式值为零，则该矩阵没有逆矩阵）
3. 计算矩阵的代数余子式矩阵
4. 计算标准伴随矩阵（转置代数余子式矩阵）
5. 计算逆矩阵（标准伴随矩阵 / 行列式）

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

代数余子式矩阵的计算方式

假设 矩阵M 的 代数余子式矩阵为 矩阵C

$$M = \begin{bmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{bmatrix}$$

标量的代数余子式计算规则：Cij = **-1的i+j次幂** * **去掉第i行，j列组成的矩阵的行列式**

$$\begin{vmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{vmatrix}$$

C11 = **-1的2次幂** * **（m22 * m33 – m32*m23）**

C12 = **-1的3次幂** * **（m21 * m33 – m31*m23）**

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

练习 代数余子式矩阵的计算方式

标量的代数余子式计算规则：Cij = **-1的i+j次幂** * **去掉第i行，j列组成的矩阵的行列式**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{它代数余子式矩阵 C} = \begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -12 \\ -6 & -9 & -4 \\ -4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

c11 = -1的2次幂 * (2*0 - -2*-1)= -2 | c12 = -1的3次幂 * (3*0 – 3*-1) = -3 | c13 = -1的4次幂 * (3*-2 – 3*2) = -12

c21 = -1的3次幂 * (-2*0 - -2*3)= -6 | c22 = -1的4次幂 * (1*0 – 3* 3) = -9 | c23 = -1的5次幂 * (1*-2 – 3*-2) = -4

c31 = -1的4次幂 * (-2*-1 -2*3) = -4 | c32 = -1的5次幂 * (1*-1 – 3*3) = 10 | c33 = -1的6次幂 * (1*2 -3*-2) = 8

唐老狮系列教程-逆矩阵

计算矩阵的逆矩阵

1. 确定矩阵为方阵（即行列数相等）
2. 计算矩阵的行列式（若行列式值为零，则该矩阵没有逆矩阵）
3. 计算矩阵的代数余子式矩阵
4. 计算标准伴随矩阵（转置代数余子式矩阵）
5. 计算逆矩阵（标准伴随矩阵 / 行列式）

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

标准伴随矩阵的计算方式

标准伴随矩阵 为**原矩阵的 代数余子式矩阵 的转置矩阵**

假设 矩阵M 的 代数余子式矩阵为 矩阵C

$$M = \begin{bmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{bmatrix}$$

那么矩阵M的标准伴随矩阵为 $C^T = \begin{bmatrix} c11 & c21 & c31 \\ c12 & c22 & c32 \\ c13 & c23 & c33 \end{bmatrix}$

练习 标准伴随矩阵的计算方式

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

它代数余子式矩阵 C = $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -12 \\ -6 & -9 & -4 \\ -4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

因此，它的**标准伴随矩阵**为 $C^T = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -3 & -9 & 10 \\ -12 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

计算矩阵的逆矩阵

1. 确定矩阵为方阵（即行列数相等）
2. 计算矩阵的行列式（若行列式值为零，则该矩阵没有逆矩阵）
3. 计算矩阵的代数余子式矩阵
4. 计算标准伴随矩阵（转置代数余子式矩阵）
5. 计算逆矩阵（标准伴随矩阵 / 行列式）

唐老狮系列教程-逆矩阵

逆矩阵的计算方式

逆矩阵 为 **标准伴随矩阵 / 行列式**

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

它的**标准伴随矩阵**为

代数余子式矩阵 的 **转置矩阵** $C^T = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -3 & -9 & 10 \\ -12 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

它的**行列式** = 1*2*0 + 3*-2*3 + 3 *-2*-1

- 3*2*3 – 3*-2*0 – 1*-2*-1

= 0 + -18 + 6 – 18 - 0 – 2

= -32

因此，它的逆矩阵为 $M^{-1} = C^T$ / -32 = $\begin{bmatrix} -2/-32 & -6/-32 & -4/-32 \\ -3/-32 & -9/-32 & 10/-32 \\ -12/-32 & -4/-32 & 8/-32 \end{bmatrix}$

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

逆矩阵的重要性质

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY

唐老狮系列教程-逆矩阵

逆矩阵的重要性质

1.逆矩阵的逆矩阵是原矩阵本身 $(M^{-1})^{-1} = M$

2.矩阵乘以自己的逆矩阵为单位矩阵 $MM^{-1} = M^{-1}M = I$

3.单位矩阵的逆矩阵是它本身 $I^{-1} = I$

4.转置矩阵的逆矩阵是逆矩阵的转置 $(M^{T})^{-1} = (M^{-1})^{T}$

5.矩阵串接相乘后的逆矩阵 等于 反向串接各个矩阵的逆矩阵 相乘

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

6.逆矩阵可以计算矩阵变换的反向变换（M为矩阵，v为一个矢量）

$M^{-1}(Mv) = (M^{-1}M)v = Iv = v$

总结

唐老狮系列教程-逆矩阵

总结

逆矩阵是必须是一个方阵，并且不是所有矩阵都有逆矩阵（矩阵的行列式如果为0，则该矩阵不可逆）

逆矩阵的计算法流程为

1. 确定矩阵为方阵（即行列数相等）
2. 计算矩阵的行列式（若行列式值为零，则该矩阵没有逆矩阵）
3. 计算矩阵的代数余子式矩阵
4. 计算标准伴随矩阵（转置代数余子式矩阵）
5. 计算逆矩阵（标准伴随矩阵 / 行列式）

$$|M| = \begin{vmatrix} m11 & m12 \\ m21 & m22 \end{vmatrix} = m11*m22 - m21*m12$$

$$|M| = \begin{vmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{vmatrix} =$$

= m11*m22*m33 + m21*m32*m13 + m31*m12*m23
-m11*m32*m23 – m21*m12*m33 – m31*m22*m13

标量的代数余子式计算规则：

Cij = **-1的i+j次幂** * **去掉第i行，j列组成的矩阵的行列式**

唐老狮系列教程-逆矩阵

总结

1.逆矩阵的逆矩阵是原矩阵本身　　$(M^{-1})^{-1} = M$

2.矩阵乘以自己的逆矩阵为单位矩阵　　$MM^{-1} = M^{-1}M = I$

3.单位矩阵的逆矩阵是它本身　　$I^{-1} = I$

4.转置矩阵的逆矩阵是逆矩阵的转置　　$(M^{T})^{-1} = (M^{-1})^{T}$

5.矩阵串接相乘后的逆矩阵 等于 反向串接各个矩阵的逆矩阵 相乘

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$　　$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

6.逆矩阵可以计算矩阵变换的反向变换（M为矩阵，v为一个矢量）

$M^{-1}(Mv) = (M^{-1}M)v = Iv = v$

Thank

谢谢您的聆听

WELCOME
TO THE
UNITY
SPECIALTY COURSE
STUDY