

Problem A: 张老师和菜哭武的游戏

显然在 1 到 n 的这 n 个点中的某个点 p 要被走到, 要满足 $p=x*a+y*b$, 那么显然 p 必须要是 $\gcd(a, b)$ 的倍数, 所以判断 $n/\gcd(a, b)$ 奇偶即可.

Problem B: 伤害计算

根据+号分割开, 然后分类解决。包含 d 的: $n*(x+1)/2$; 不包含 d 的直接 `atoi` 一下就可以。

注意避免浮点数运算, 可以全部都乘 2 然后输出的时候分奇偶判断是否输出.5。

注意输出浮点数的时候, 如果有 1000000 之类的数可能会输出成 $1e+06$ 的形式。全部使用整数计算可以避免此类问题

Problem C: 张老师的旅行

观察发现, 在最少时间的前提下走过的点必然是连续的区间设为 $[l, r]$, 那么唯一的变化就是终点落在 l 还是 r , 这样我们可以通过 dp 来解决, 我们设状态 $f[l][r][0]$ 表示终点落在 l 的前提下走完区间 $[l, r]$, 最小时间, $f[l][r][1]$ 同理终点落在 r 上, 状态转移为:

$$f[l-1][r][0] = \min(f[l-1][r][0], f[l][r][0] + p[l] - p[l-1]);$$
$$f[l][r+1][1] = \min(f[l][r+1][1], f[l][r][0] + p[r+1] - p[l]);$$
$$f[l-1][r][1] = \min(f[l-1][r][1], f[l][r][1] + p[r] - p[l-1]);$$
$$f[l][r+1][1] = \min(f[l][r+1][1], f[l][r][1] + p[r+1] - p[r]);$$

那么答案就是 $\min(f[1][n][0], f[1][n][1])$ 。范围边界的细节需要注意一下。

Problem D: 车辆调度

将所有遥控车的位置作为状态, 每次操作依次选择一辆遥控车向四个方向按题意模拟其前进的路线(注意, 第一步后任意一辆车最多只有三个方向可以走)。

BFS 或深度限制 DFS 判断 k 步之内能否有一辆遥控车到达其中一个终点。

时间复杂度为 $O((3*R)^k * \max(w, h))$ 。

Problem E: 弦

答案是 $2^n / (n+1)!$ 。概率可以通过合法方案数/总方案数来计算。合法方案数 $f(n) = \sum f(i) * f(n-i-1)$, 即为卡特兰数, 故 $f(n) = C(2n, n) / (n+1)$ 。总方案数为 $C(2n, 2) * C(2n-2, 2) \cdots C(2, 2) / n! = (2n)! / n! / 2^n$ 。两者相除即为答案。除法取模的话用逆元来计算 (即费马小定理)。总复杂度 $O(n)$ 。

Problem F: 排列计算

排列中的每个数对答案的贡献是它被查询的次数乘以它自身, 因此, 要最大化答案, 应该在被查询次数较多的位置放置较大的数。

用差分 and 线段树等方法统计每个位置被查询的次数, 对每个位置被查询的次数排序, 在较大的位置放置排列中较大的数, 再计算答案即可。

时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

Problem G: 硬币游戏III

我们翻硬币的时候，可以理解成把最后一个硬币替换成最多前面 $k-1$ ，最少 0 个硬币。因为如果在一个位置有两个同样的硬币，他们的 sg 函数相同，互相抵消。这样我们就转化为 k 堆独立的硬币问题。

令 $2^p \leq k < 2^{p+1}$ ，第 i 个硬币的 sg 函数是 $\min(\text{lowbit}(i), 2^p)$ 。

可以归纳法证明。如果 $i-1$ 之前的 sg 函数满足条件，那么对于 i 的情况，如果 i 是奇数，前一个 sg 函数一定是 2^p ，其中 p 不小于 1。注意到每一个 sg 函数都是一个 bit，如果要 xor 掉 p 位的 bit，至少要经过一个 $p+1$ 位，此时的 xor 值不会达到 1。因此，任何时刻 sg 函数都不会达到 1。如果 i 是 2 的倍数，假设 $i=(2m+1)2^p$ ，那么在到达上一个 2^p 倍数之前一定能遍历到所有的小于 2^p 的值，如果 $k \geq 2^p$ 的情况下一定都能取到，因此 sg 函数至少应该是 2^p 。同时，当到达 $2^{(p+1)}$ 的情况时又复现了之前提到的 i 是奇数的情况，要抵消掉这个值一定要达到更高的幂次，因此最大达到 2^p 。当 k 比较小的时候，我们只需要考虑对应二进制位的前缀和就可以得出 sg 函数的上界，而且一定能达到。

整体复杂度是线性的。

Problem H: 时空栈

可以先离散化，然后开线段树维护。我们对于栈的查找操作可以理解成找到插入的时间点，然后再找到对应的元素。

对于插入和删除操作，可以认为是在指定时间以后+1 或者-1。对于查询操作，我们首先可以确定对应时间栈内元素个数，然后用线段树查询在当前时间之前最后一个小于这个个数的时间点 t ， $t+1$ 就是插入的时间。

整体复杂度 $O(n \log(n))$

Problem I: 纸牌

Stratoes:首先假设 $k \leq n-1$ ，那么我们可以这么做：将每个牌中间留一个空位，每次把牌堆顶的第一张牌放到合适的空位上，可以证明这么做是可行的。因此我们维护一个数组和一个指向牌堆顶的指针，一开始将第 i 张牌放在 2^i-1 的位置。第 j 次操作时将牌堆顶的牌放在 $(j+1)*2$ 的位置即可。这样我们就在 $O(n)$ 时间内完成了要求的操作。

当 k 很大时，假设 $n-1$ 次后的编号为 $p[i]$ ，则 $2(n-1)$ 次后的编号为 $p[p[i]]$ ，以此类推。令 $x = \lfloor k/n \rfloor$ ，则我们通过将排列 p 的拆分成若干个循环，就可以通过循环节的长度求得 p^x ，即 $k - k \% (n-1)$ 次后的编号，剩下 $k \% (n-1)$ 次直接模拟就好。总的时间复杂度为 $O(n)$ 。

Dzerzhinski: $k - k \% (n-1)$ 部分也可以快速幂计算。整体复杂度是 $O(n \log(k/n))$

Problem J: 斐波那契和

考虑 $F'_k(n) = \sum_{i=1}^n (n-i)^k \text{Fib}(i)$ ，这个比 $F_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k \text{Fib}(i)$ 好求一些。我们做一次差分，可以得到：

$$F'_k(n+1) - F'_k(n) = \sum_{i=1}^n ((n+1-i)^k - (n-i)^k) Fib(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (n-i)^j Fib(i)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} F'_j(n)$$

我们可以用矩阵快速幂的方法求出所有 $F'_j(n)$ ，考虑一个向量，维护 $Fib(i), Fib(i-1)$ 和所有的 $F'_j(n)$ ，对于 $F'_0(n)$ 用 $F'_0(n+1) = F'_0(n) + Fib(n) + Fib(n-1)$ 计算，其他情况用上述公式。矩阵共 $k+3$ 维。

得到 $F'_j(n)$ 之后，我们可以展开得到关于 $F_j(n)$ 的表达式，计算出所有的 $F_j(n)$ 。 $F_0(n) = F'_0(n)$,

$$F'_k(n) = \sum_{j=0}^k n^{k-j} (-1)^j \binom{k}{j} F_j(n),$$

也就是 $(-1)^k F_k(n) = F'_k(n) - \sum_{j=0}^{k-1} n^{k-j} (-1)^j \binom{k}{j} F_j(n)$ 。

整体复杂度 $O(k^3 \log(n))$