

基于熵权法的群决策模糊综合评价

周辉仁¹, 郑丕谔¹, 张 扬², 秦万峰²

(1. 天津大学 管理学院, 天津 300072; 2. 山东大学 管理学院, 济南 250100)

摘 要: 群决策模糊综合评价是多人对受多种因素影响的事物做出全面评价的一种多因素决策方法。文章根据事物的多因素属性, 基于模糊数学理论, 对问题属性的各因素的权重用熵权法确定, 结合实例对图书选题进行群决策综合评价。实例结果表明, 本文采用的方法能够自动确定各因素的权重系数, 易于对多因素属性的事物进行群决策综合评价, 避免权重确定的主观随意性, 使评价结果具有实用性。

关键词: 群决策; 模糊综合评价; 熵权法; 权重; 图书选题

中图分类号: O212

文献标识码: A

文章编号: 1002-6487(2008)08-0034-03

在模糊综合评价中, 因素的赋权方法用客观法赋权研究的相对较少, 客观法是指单纯利用因素的客观信息而确定权重的方法。本文提出一种在模糊综合评价中因素的客观赋权方法——从信息熵的角度对各因素进行赋权, 得到模糊综合评价群决策的结果, 并以图书选题为例进行应用。

1 模糊综合评价群决策原理

对一个事物的评价, 常常要涉及多个因素或者多个指标。具体过程是: 将评价目标看成是由多种因素组成的模糊集合(称为因素集), 再设定这些因素所能选取的评价等级, 多个决策者的评语组成模糊集合(称为评价集), 分别求出各单一因素对各个评价等级的归属程度(称为模糊矩阵), 然后根据各个因素在评价目标中的权重分配, 通过计算(称为模糊矩阵合成), 求出评价的定量解值。上述过程即为模糊综合评价群决策。

命题 1 设 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ 。

(1) 给定模糊映射

$$f: X \rightarrow P(Y)$$

$$x_i \rightarrow f(x_i) = B = \frac{r_{i1}}{y_1} + \frac{r_{i2}}{y_2} + \dots + \frac{r_{im}}{y_m}$$

$$= (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \in P(Y)$$

其中, $i=1, 2, \dots, n$ 。

以 $(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$ 为行构造一个模糊矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

就可以唯一确定模糊关系

$$R(x_i, y_j) = r_{ij} = f(x_i)(y_j)。$$

(2) 给出模糊关系矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

可令 $x_i \rightarrow f_R(x_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \in P(Y)$ 。

其中, $f_R(x_i)(y_j) = r_{ij} = R(x_i, y_j)$, $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$ 。

f_R 是 X 到 Y 的模糊映射。

于是, 也就确定了模糊映射 f_R 。

命题 2 设 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 则有:

(1) 给定模糊关系矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\forall A = A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in P(X)$$

可以确定一个模糊线性变换(取 max-min 合成运算)

$$T_R: p(X) \rightarrow p(Y)$$

$$A \rightarrow T_R(A) = A \circ R = B = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in p(Y)$$

其中 $b_j = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge r_{ij})$; $j=1, 2, \dots, m$ 。

并称 T_R 是由模糊关系 R 诱导出的。

(2) 模糊线性变换 T_R

$$T_R(A) = A \circ R, A \in p(Y)$$

设 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 为 n 种因素(或指标), $V=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 为 m 种评价, 它们的元素个数和名称均可根据实际问题需要由人们主观规定, 如: 评价集可以是{好, 较好, 一般, 较差, 差}, 也可以是{很好, 好, 较好, 一般, 较差, 差, 很差}, 还有{很重要, 重要, 较重要, 一般, 较不重要, 不重要, 很不重要}等等。评价等级并非一成不变, 可适当增大或缩小等级域, 评价集的级别越高, 就越能反映决策成员的态度, 但同时, 评价的

基金项目: 国家社会科学基金资助项目(07BJY008)

难度却相应加大了。由于各种因素所处的地位不同,作用也不一样,因此权重也不同,因而评价也就不同。人们对 m 种评价并不是绝对的肯定或否定,因此综合评判应该是 V 上的一个模糊子集

$$\tilde{B}=(b_1, b_2, \dots, b_m) \quad p(V)$$

其中 $b_j(j=1, 2, \dots, m)$ 反映第 j 种评价 v_j 在综合评价中所占的地位,即 v_j 对模糊集 \tilde{B} 的隶属度, $B(v_j)=b_j$ 。综合评价依赖于各个因素的权重,它应该是 U 上的模糊子集

$$\tilde{W}=(w_1, w_2, \dots, w_n) \quad p(U)$$

且 $\sum_{i=1}^n w_i=1$, 其中 w_i 表示第 i 种因素的权重。因此,一旦给定权重 \tilde{W} , 相应的可得到一个综合评价 \tilde{B} 。

综上,根据命题 1、2,模糊综合评价决策的数学模型由三个要素组成,其步骤分为四步:

- (1)因素集 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 。
- (2)评价集(评价集或决断集) $V=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 。
- (3)单因素评价 $f: U \rightarrow p(V)$, $u_i \mapsto f(u_i)=(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \quad p(V)$ 。

模糊映射 f 可诱导出模糊关系 $R_i \quad p(U \times V)$, 即

$$R_i(u_i, v_j)=f(u_i)(v_j)=r_{ij}$$

因此 R_i 可由模糊矩阵 $R \quad \mu_{m \times n}$ 表示:

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

称 R 为模糊综合评价矩阵。称 (U, V, R) 构成一个模糊综合决策模型, U, V, R 是此模型的三个要素。

(4)综合评判。对于权重 $\tilde{W}=(w_1, w_2, \dots, w_n)$, 取 $\max\text{-min}$ 合成运算,即用模型 $M(\quad, \quad)$ 计算,可得综合评判

$$\tilde{B}=\tilde{W} \circ R \quad (1)$$

2 多因素熵权法原理

按照熵的思想,人们在决策中获得信息的多少和质量,是决策的精度和可靠性大小的决定因素之一。而熵在应用于不同决策过程的评价时是一个很理想的尺度,熵技术是确定多因素综合评价问题中各因素权系数的一种有效方法,它是利用模糊综合评价矩阵和各因素的输出熵来确定各因素的权系数。目前,大部分熵技术是用在多属性决策中用来确定属性的权重,本文将熵技术应用在群决策模糊综合评价中确定各个因素的权重。

对于某一群决策模糊综合评价问题,设 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 为因素的集合,各因素的权重未知,有 m 个评价指标。假设第 i 个因素对第 j 个评价指标进行模糊评价后所得的值为 r_{ij} , 第 i 个因素 u_i 对所有评价指标进行模糊评价后所得的值组成 1 维行向量 $r_i=(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$, 所有因素对所有评价指标进

行模糊评价后所得的值组成 $n \times m$ 矩阵 R , 这里 R 也即是模糊综合评价矩阵,应用熵权法时无需再进行规范化处理

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \quad (2)$$

矩阵 R 表示了多 n 个决策者对个因素模糊决策所作的结论,代表各个因素针对各个评价指标的评价值。

定义 1(因素熵) 在所有决策者对 n 个因素多指标决策后所得模糊综合评价矩阵如式(2)所示(以下简称 (n, m) 评价问题),第 i 个因素的熵定义为

$$H_i=-k \sum_{j=1}^m f_{ij} \ln f_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$\text{其中, } f_{ij}=\frac{r_{ij}}{\sum_{j=1}^m r_{ij}}, k=\frac{1}{\ln m}.$$

并假定,当 $f_{ij}=0$ 时, $f_{ij} \ln f_{ij}=0$ 。

定义 2(因素的熵权) 在 (n, m) 评价问题中,第 i 个因素的熵权 w_i 定义为

$$w_i=\frac{1-H_i}{n-\sum_{i=1}^n H_i} \quad (4)$$

3 群决策模糊综合评价方法

以上介绍了熵权法和模糊综合评价的原理,基于熵权法的群决策模糊综合评价具体步骤如下。

步骤 1: 根据所要评判的问题建立因素集 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 。

步骤 2: 根据问题的需要建立群决策评价集(评判集或决断集) $U=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, 如{很好, 好, 较好, 一般, 较差, 差, 很差}, 还有{很重要, 重要, 较重要, 一般, 较不重要, 不重要, 很不重要}等等。针对评价集要根据问题的实际情况选用合适的集合以及细化程度。

步骤 3: 对于某一模糊综合评价群决策问题,因素权重信息即 $\tilde{W}=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ 完全未知, t 位决策者针对因素集 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 根据评价集(评判集或决断集) $V=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 进行评价。所有决策者分别对某一因素发表意见,就会得到一个模糊映射,所有因素的模糊映射形成模糊综合评价矩阵 R 。具体为:

(1)建立评价表,分发给 t 位决策者进行填表,决策者在横行每一因素 u_i 与纵行相应某一评价 v_j 对应的空格处打“ ”,如表 1 所示。最终得到 t 份这样的表格。

(2)把得到的各评价表格进行汇总如表 2 所示。

(3)将汇总的表格进行数据处理便可得到模糊综合评价矩阵 R :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

其中, R_i 表示针对因素 u_i 的单因素评价矩阵, 而

$$R_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$$

其中, r_{ij} 为第 i 个因素对第 j 种评价级别 v_j 的隶属度, 且

$$r_{ij} = x_{ij}/t \quad (5)$$

其中, x_{ij} 为针对因素 u_i 给出第 j 种评价级别 v_j 的人数, t 为决策者总人数。

表 1 评价表

因素集	评价集			
	V_1	V_2	...	V_m
u_1			...	
u_2			...	
\vdots				
u_n			...	

表 2 评判汇总表

因素集	评价集			
	V_1	V_2	...	V_m
u_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
u_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
\vdots				
u_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

目前, 大部分出版社都采用“编辑论证”和“集体决策”相结合的选题论证方法, 但在集体决策过程中, 容易受到每个决策成员的经验、心理、个人偏好和人际关系等主观因素的影响。在文献[9]中应用模糊综合评价方法对图书选题进行了论证, 其各因素权重的给出是根据决策者对各因素权重进行打分求其平均值再归一化处理得来的赋权方法, 即专家估测法。

本文对图书选题问题根据所得的模糊评价矩阵利用熵权法对各因素确定权重, 最后得出综合评价结果。有关数据取自文献[9], 具体步骤如下。

步骤 1: 因素集 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$

$= \{\text{政治性, 科学性, 价值性, 需要性, 可行性, 创新性, 特色性, 效益性, 优化性}\}$

步骤 2: 评价集 $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9\} = \{\text{很好, 好, 中, 差, 很差}\}$

步骤 3: 由 10 个决策者进行评价, 最后得到模糊评价矩阵

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

步骤 4: 利用熵权法, 根据公式 (4) 计算最优权重向量

$$W = (0.1062 \ 0.0525 \ 0.1592 \ 0.1768 \ 0.0924 \ 0.0830 \ 0.0924 \ 0.0884 \ 0.1492)$$

步骤 5: 利用模型 $M(\cdot, +)$ 计算得

$$B = W \cdot R = (0.5691, 0.3075, 0.1182, 0.0053, 0)$$

步骤 6: 根据综合评价计算的结果, 综合 9 个因素考虑, 根据最大隶属原则, 该选题应评为很好。

文献[9]的评价结果也为很好, 说明本文所提出的方法是比较切合实际的。

5 结束语

在模糊综合评价群决策中, 权重问题的研究占有重要地位。本文通过熵权法原理根据模糊综合评价矩阵中的信息对各因素确定权重, 然后得到群决策模糊综合评价的最终评价结果, 并应用该方法对图书选题进行评价。本文方法概念清楚、含义明确, 能有效解决人为因素存在的弊端, 同时, 该方法计算不复杂并且易于计算机实现, 可方便地应用于计算机群决策支持系统, 可操作性强, 具有推广价值。

参考文献:

- [1] Zadeh L. A. Fuzzy Sets. Information and Control [J]. 1965(8).
- [2] 郭亚军. 综合评价理论、方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] 汪培庄. 模糊集合论及其应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.
- [4] Hwang C L, Yong K. Multiple Attribute Decision Making and Application[M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [5] 邱苑华. 管理决策与应用熵学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
- [6] 林齐宁. 决策分析[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003.
- [7] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [8] 谢季平, 刘承平. 模糊数学方法及其应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.
- [9] 姜朋. 图书选题的模糊综合评判[J]. 东北财经大学学报, 2003, (1).

(责任编辑/浩 天)