统计回归模型

数据拟合方法再讨论

数学建模的基本方法

机理分析　测试分析

由于客观事物内部规律的复杂及人们认识程度的限制，无法分析实际对象内在的因果关系，建立合乎机理规律的数学模型。

通过对数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型

回归模型是用统计分析方法建立的最常用的一类模型

- 不涉及回归分析的数学原理和方法
- 通过实例讨论如何选择不同类型的模型
- 对软件得到的结果进行分析，对模型进行改进

统计回归模型

1　牙膏的销售量

2　软件开发人员的薪金

3　酶促反应

4　投资额与国民生产总值和物价指数

1　牙膏的销售量

问题

建立牙膏销售量与价格、广告投入之间的模型

预测在不同价格和广告费用下的牙膏销售量

收集了30个销售周期本公司牙膏销售量、价格、广告费用，及同期其它厂家同类牙膏的平均售价

销售周期	本公司价格(元)	其它厂家价格(元)	广告费用(百万元)	价格差（元）	销售量(百万支)
1	3.85	3.80	5.50	-0.05	7.38
2	3.75	4.00	6.75	0.25	8.51
…	…	…	…	…	…
29	3.80	3.85	5.80	0.05	7.93
30	3.70	4.25	6.80	0.55	9.26

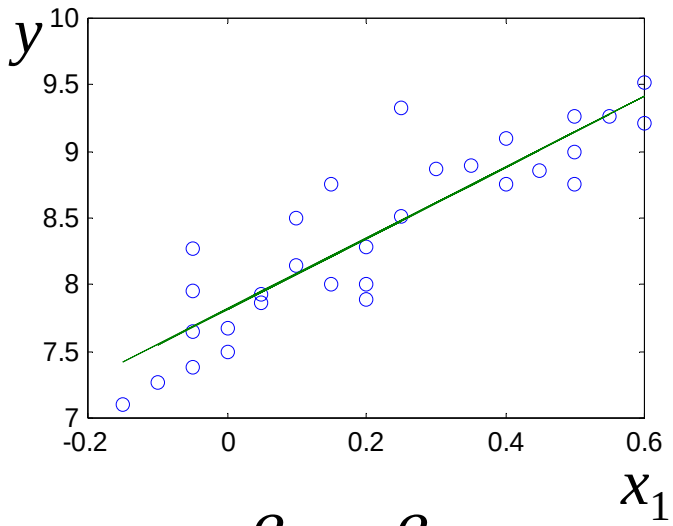
基本模型

y ~公司牙膏销售量

x_1~其它厂家与本公司价格差

x_2~公司广告费用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$



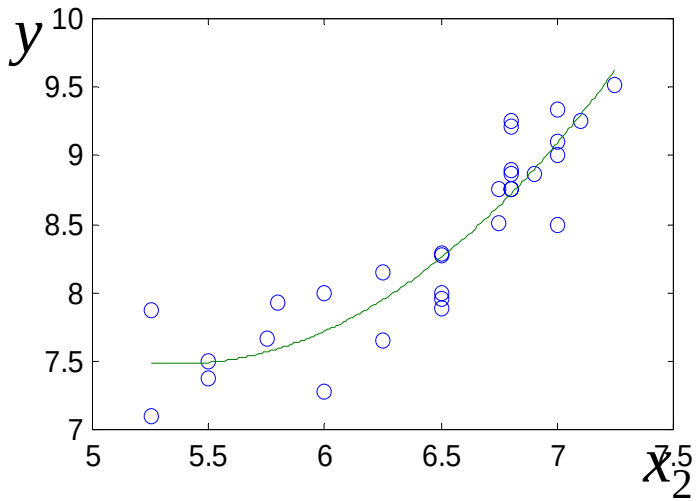
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

y~被解释变量（因变量）

x_1, x_2~解释变量(回归变量, 自变量)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ~回归系数

ε~随机误差（均值为零的正态分布随机变量）



$$y = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon$$

模型求解

MATLAB 统计工具箱

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$　由数据 y, x_1, x_2 估计 β

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x,alpha)
```

输入

y~n维数据向量

x= $[1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_2^2]$ ~n×4数据矩阵, 第1列为全1向量

alpha(置信水平,0.05)

输出

b~β的估计值

bint~b的置信区间

r ~残差向量y-xb

rint~r的置信区间

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282　28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829　1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989　0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379　0.6594]
R^2=0.9054　F=82.9409　p=0.0000		

Stats~检验统计量

R^2, F, p

结果分析

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054	F=82.9409	p=0.0000

y的90.54%可由模型确定

F远超过F检验的临界值

p远小于α=0.05

模型从整体上看成立

β_2的置信区间包含零点
(右端点距零点很近)

x_2对因变量y 的
影响不太显著

x_2^2项显著

可将x_2保留在模型中

销售量预测

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2$$

价格差x_1=其它厂家价格x_3-本公司价格x_4

估计x_3 调整x_4 ⇨ 控制x_1 ⇨ 通过x_1, x_2预测y

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=650万元

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 = 8.2933 \text{ (百万支)}$$

销售量预测区间为 [7.8230，8.7636]（置信度95%）

上限用作库存管理的目标值　下限用来把握公司的现金流

若估计x_3=3.9，设定x_4=3.7，则可以95%的把握知道销售额在 7.8320×3.7≈ 29（百万元）以上

模型改进

x_1和x_2对y的影响独立

x_1和x_2对y的影响有交互作用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054	F=82.9409	p=0.0000

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	29.1133	[13.7013 44.5252]
β_1	11.1342	[1.9778 20.2906]
β_2	-7.6080	[-12.6932 -2.5228]
β_3	0.6712	[0.2538 1.0887]
β_4	-1.4777	[-2.8518 -0.1037]
R^2=0.9209	F=72.7771	p=0.0000

两模型销售量预测比较

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=6.5百万元

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2$$

$\hat{y}=8.2933$ (百万支)

区间 [7.8230，8.7636]

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

$\hat{y}=8.3272$ (百万支)

区间 [7.8953，8.7592]

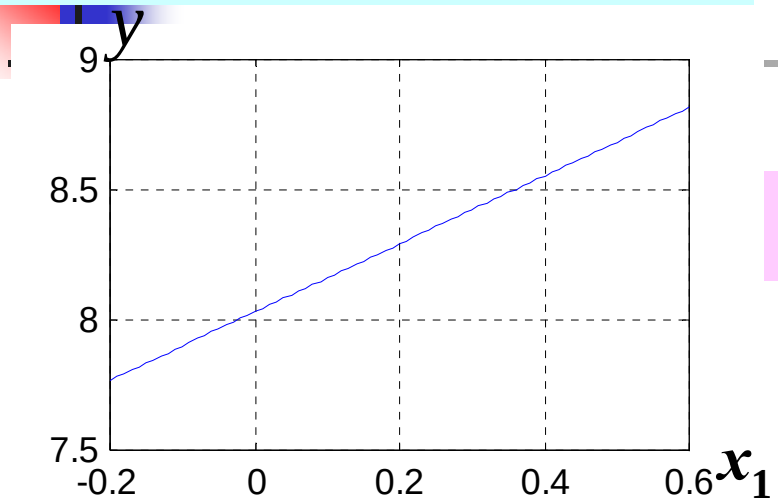
$\hat{y}$ 略有增加

预测区间长度更短

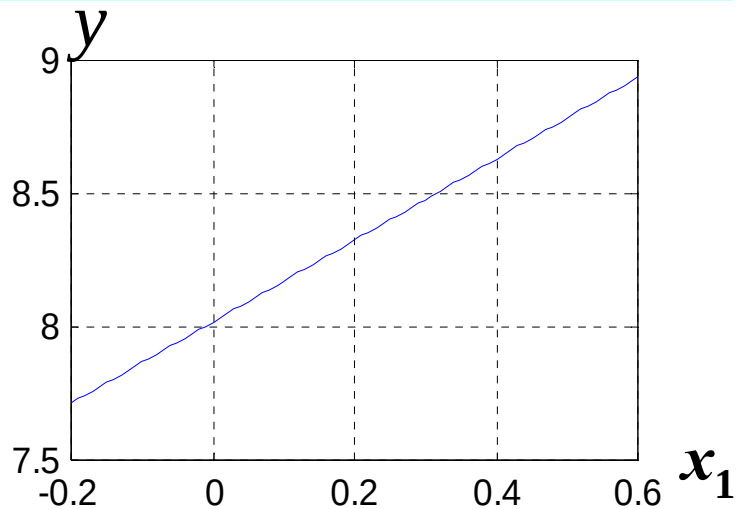
两模型 $\hat{y}$ 与x_1, x_2关系的比较

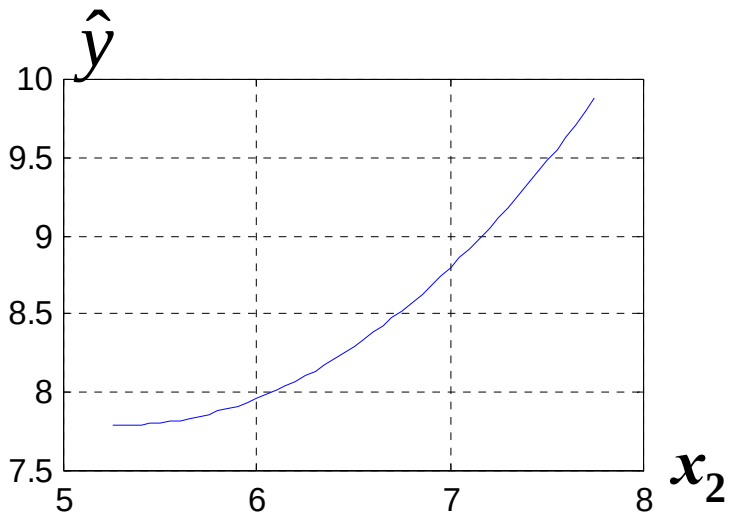
$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 + \hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

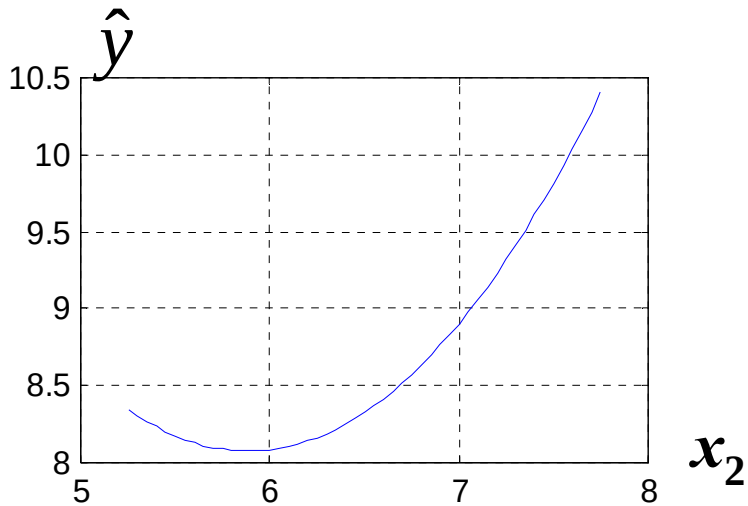


x_2=6.5





x_1=0.2



交互作用影响的讨论

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

价格差 x_1=0.1

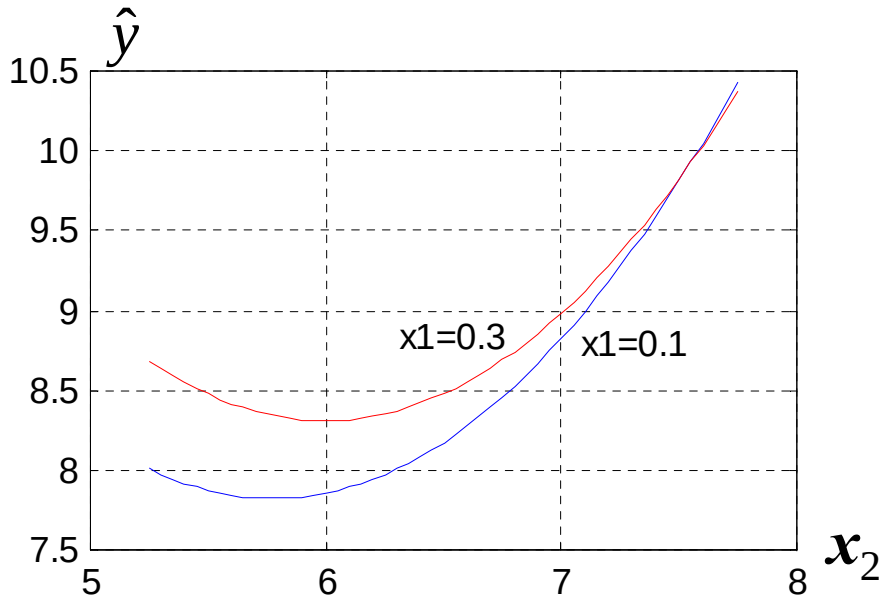
$$\hat{y}\big|_{x_1=0.1}=30.2267-7.7558x_2+0.6712x_2^2$$

价格差 x_1=0.3

$$\hat{y}\big|_{x_1=0.3}=32.4535-8.0513x_2+0.6712x_2^2$$

$$x_2<7.5357 \Rightarrow \hat{y}\big|_{x_1=0.3}>\hat{y}\big|_{x_1=0.1}$$

⇨ **价格优势会使销售量增加**



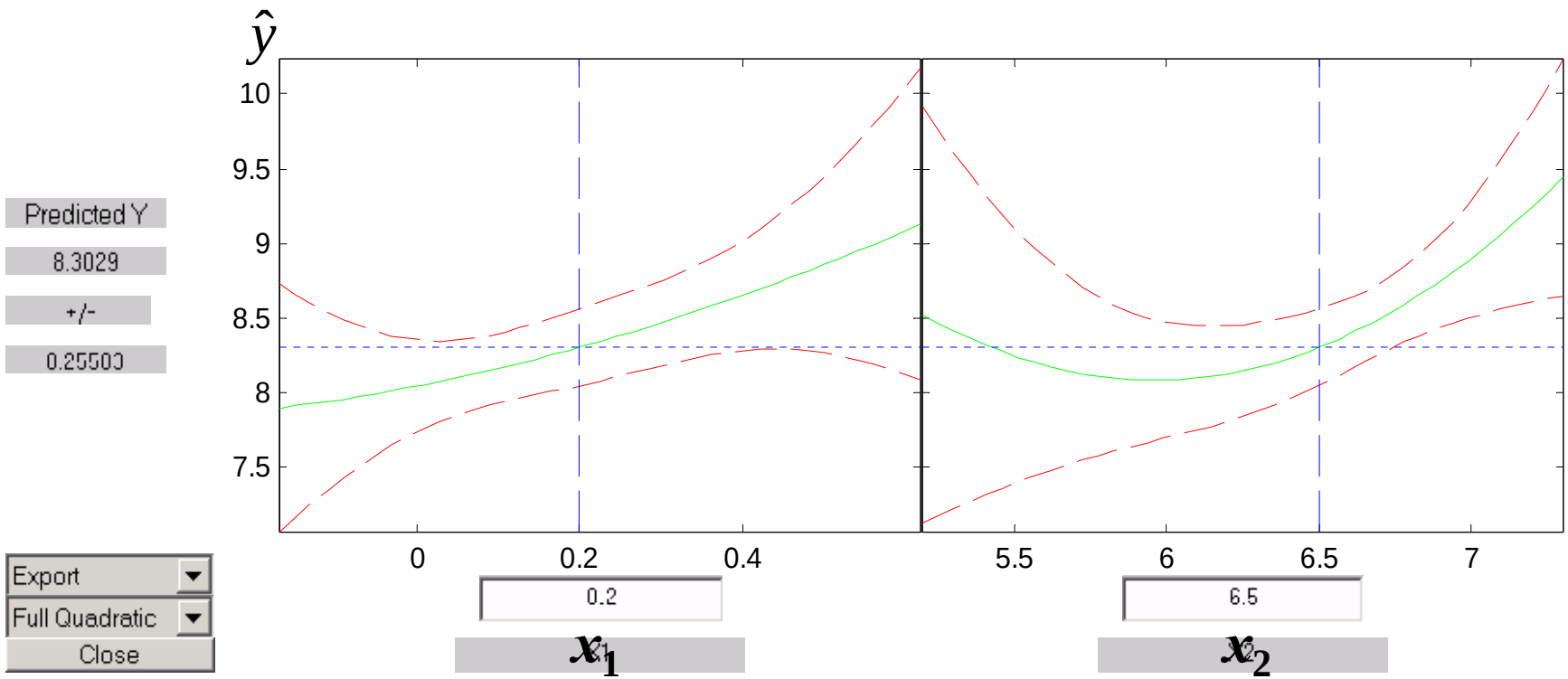
加大广告投入使销售量增加
（x_2大于6百万元）

价格差较小时增加的速率更大 ⇨ **价格差较小时更需要靠广告来吸引顾客的眼球**

完全二次多项式模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \varepsilon$$

MATLAB中有命令rstool直接求解



从输出 Export 可得 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5)$

2　软件开发人员的薪金

建立模型研究薪金与资历、管理责任、教育程度的关系

分析人事策略的合理性，作为新聘用人员薪金的参考

46名软件开发人员的档案资料

编号	薪金	资历	管理	教育
01	13876	1	1	1
02	11608	1	0	3
03	18701	1	1	3
04	11283	1	0	2
…	…	…	…	…

编号	薪金	资历	管理	教育
42	27837	16	1	2
43	18838	16	0	2
44	17483	16	0	1
45	19207	17	0	2
46	19346	20	0	1

资历~ 从事专业工作的年数；管理~ 1=管理人员，0=非管理人员；教育~ 1=中学，2=大学，3=更高程度

分析与假设

y~ 薪金，x_1~资历（年）

$x_2 = 1$~ 管理人员，$x_2 = 0$~ 非管理人员

教育

1=中学

2=大学

3=更高

$$x_3 = \begin{cases} 1, & \text{中学} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$x_4 = \begin{cases} 1, & \text{大学} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

⇨

中学：$x_3=1, x_4=0$ ；

大学：$x_3=0, x_4=1$ ；

更高：$x_3=0, x_4=0$

资历每加一年薪金的增长是常数；

管理、教育、资历之间无交互作用

线性回归模型 $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \varepsilon$

$a_0, a_1, \ldots, a_4$是待估计的回归系数，ε是随机误差

模型求解

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11032	[10258 11807]
a_1	546	[484 608]
a_2	6883	[6248 7517]
a_3	-2994	[-3826 -2162]
a_4	148	[-636 931]
R^2=0.957	F=226	p=0.000

资历增加1年薪金增长546

管理人员薪金多6883

中学程度薪金比更高的少2994

大学程度薪金比更高的多148

a_4置信区间包含零点，解释不可靠!

$R^2, F, p \rightarrow$ 模型整体上可用

x_1~资历(年)

x_2 = 1~ 管理，x_2 = 0~ 非管理

中学：x_3=1, x_4=0;大学：x_3=0, x_4=1; 更高：x_3=0, x_4=0.

结果分析

残差分析方法

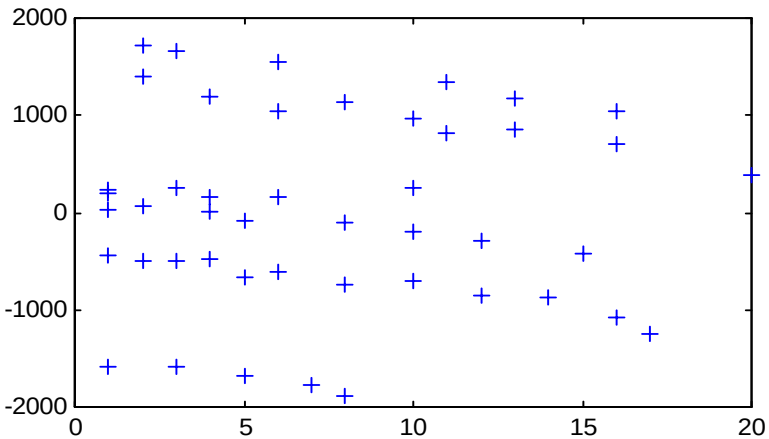
$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3 + \hat{a}_4 x_4$$

残差 $e = y - \hat{y}$

管理与教育的组合

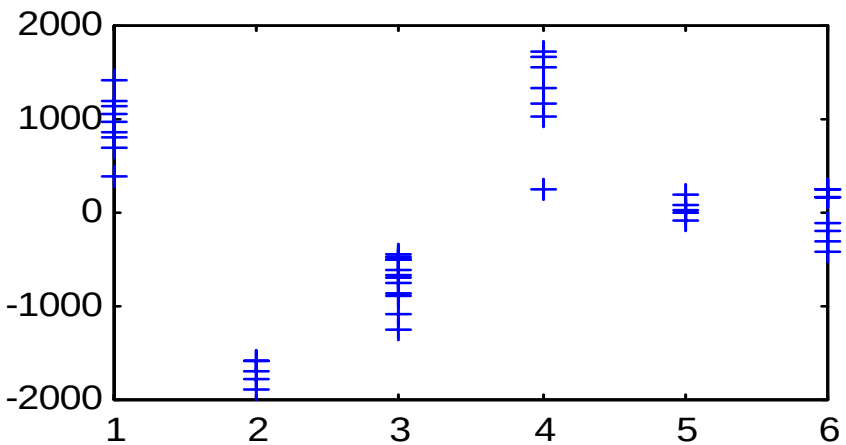
组合	1	2	3	4	5	6
管理	0	1	0	1	0	1
教育	1	1	2	2	3	3

e 与资历x_1的关系



残差大概分成3个水平，6种管理—教育组合混在一起，未正确反映。

e与管理—教育组合的关系



残差全为正，或全为负，管理—教育组合处理不当

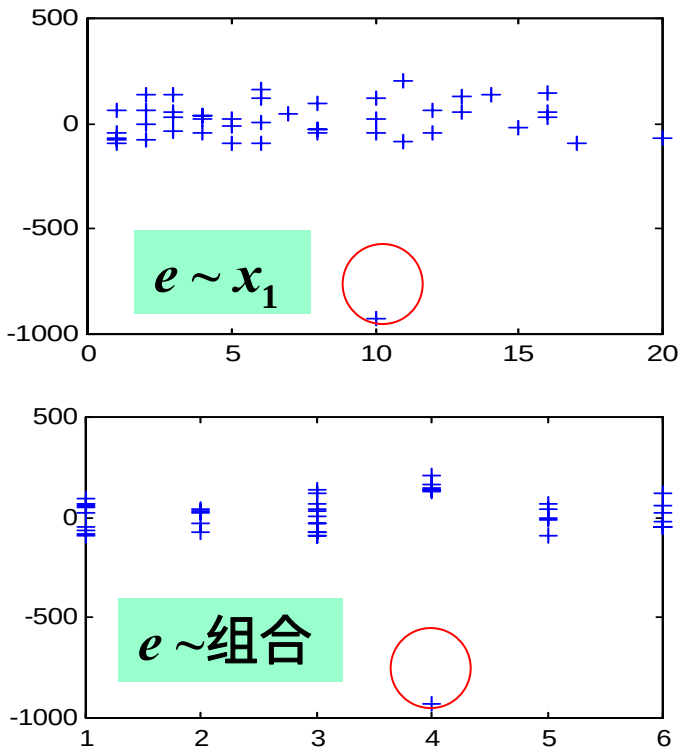
应在模型中增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

进一步的模型

增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_2x_3 + a_6x_2x_4 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11204	[11044 11363]
a_1	497	[486 508]
a_2	7048	[6841 7255]
a_3	-1727	[-1939 -1514]
a_4	-348	[-545 –152]
a_5	-3071	[-3372 -2769]
a_6	1836	[1571 2101]
R^2=0.999	F=554	p=0.000



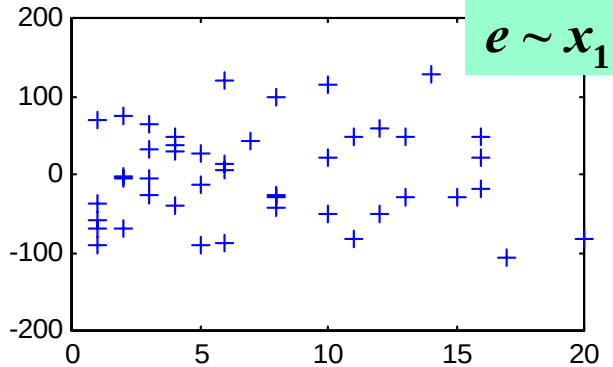
R^2, F有改进，所有回归系数置信区间都不含零点，模型完全可用

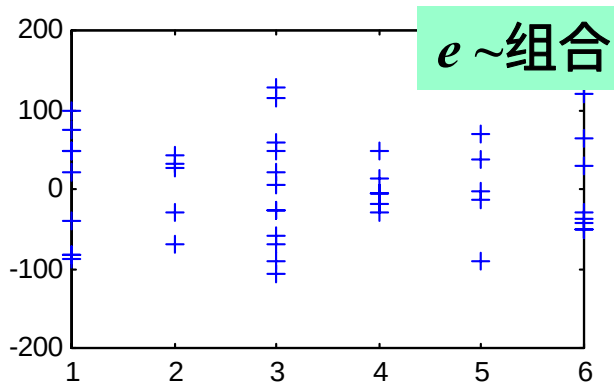
消除了不正常现象

异常数据(33号)应去掉

去掉异常数据后的结果

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11200	[11139 11261]
a_1	498	[494 503]
a_2	7041	[6962 7120]
a_3	-1737	[-1818 -1656]
a_4	-356	[-431 –281]
a_5	-3056	[-3171 –2942]
a_6	1997	[1894 2100]
R^2= 0.9998	F=36701	p=0.0000





R^2： 0.957 → 0.999 → 0.9998

F： 226 → 554 → 36701

置信区间长度更短

残差图十分正常

最终模型的结果可以应用

模型应用

$$\hat{y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1x_1+\hat{a}_2x_2+\hat{a}_3x_3+\hat{a}_4x_4+\hat{a}_5x_2x_3+\hat{a}_6x_2x_4$$

制订6种管理—教育组合人员的“基础”薪金(资历为0)

$x_1=0$； $x_2=1$~ 管理，$x_2=0$~ 非管理

中学：$x_3=1, x_4=0$ ；大学：$x_3=0, x_4=1$； 更高：$x_3=0, x_4=0$

组合	管理	教育	系数	“基础”薪金
1	0	1	a_0+a_3	9463
2	1	1	$a_0+a_2+a_3+a_5$	13448
3	0	2	a_0+a_4	10844
4	1	2	$a_0+a_2+a_4+a_6$	19882
5	0	3	a_0	11200
6	1	3	a_0+a_2	18241

大学程度管理人员比更高程度管理人员的薪金高

大学程度非管理人员比更高程度非管理人员的薪金略低

软件开发人员的薪金

对定性因素(如管理、教育)，可以引入0-1变量处理，0-1变量的个数应比定性因素的水平少1

残差分析方法可以发现模型的缺陷，引入交互作用项常常能够改善模型

剔除异常数据，有助于得到更好的结果

注：可以直接对6种管理—教育组合引入5个0-1变量

3　酶促反应

问题

研究酶促反应（酶催化反应）中嘌呤霉素对反应速度与底物（反应物）浓度之间关系的影响

建立数学模型，反映该酶促反应的速度与底物浓度以及经嘌呤霉素处理与否之间的关系

方案

设计了两个实验 ：酶经过嘌呤霉素处理；酶未经嘌呤霉素处理。实验数据见下表:

底物浓度(ppm)		0.02		0.06		0.11		0.22		0.56		1.10	
反应速度	处理	76	47	97	107	123	139	159	152	191	201	207	200
	未处理	67	51	84	86	98	115	131	124	144	158	160	/

线性化模型

$$y=\frac{\beta_1 x}{\beta_2+x} \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{1}{x}=\theta_1+\theta_2\frac{1}{x}$$

对β_1，β_2非线性 ⇒ 对θ_1，θ_2线性

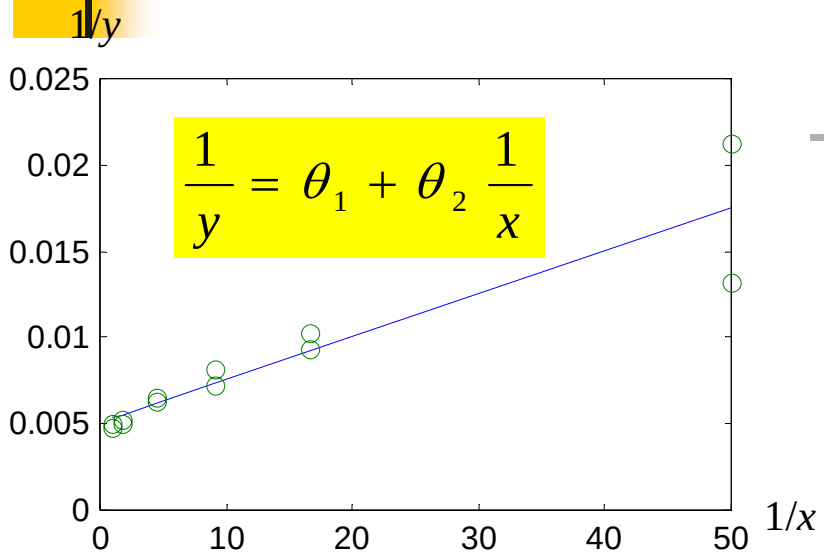
经嘌呤霉素处理后实验数据的估计结果

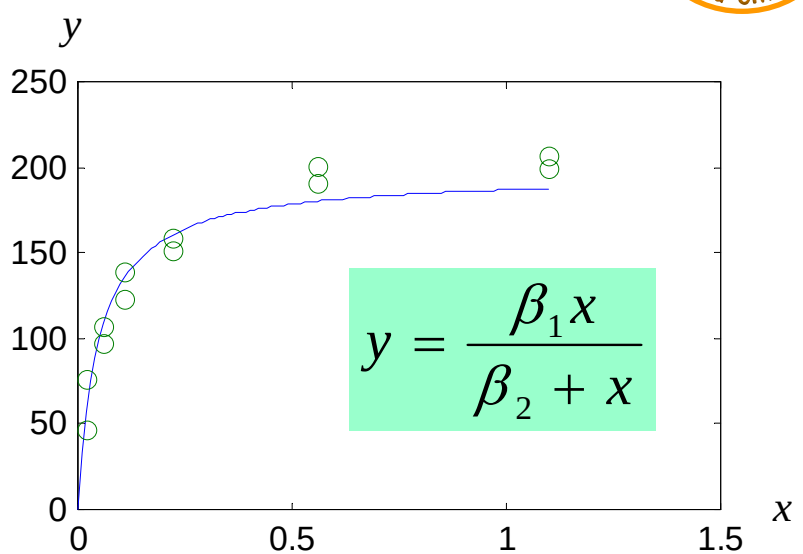
参数	参数估计值（×10^{-3}）	置信区间（×10^{-3}）
θ_1	5.107	[3.539 6.676]
θ_2	0.247	[0.176 0.319]
R^2=0.8557	F=59.2975	p=0.0000

$$\hat{\beta}_1=1/\hat{\theta}_1=195.8027$$

$$\hat{\beta}_2=\hat{\theta}_2/\hat{\theta}_1=0.04841$$

线性化模型结果分析





1/x较小时有很好的线性趋势，1/x较大时出现很大的起落

x较大时，y有较大偏差

- **参数估计时，x较小（1/x很大）的数据控制了回归参数的确定**

非线性模型参数估计

MATLAB 统计工具箱

[beta,R,J] = nlinfit (x,y,'model',beta0)

输入

x~自变量数据矩阵

y ~因变量数据向量

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

beta0~线性化模型估计结果

model ~模型的函数M文件名

beta0 ~给定的参数初值

输出

beta ~参数的估计值

R ~残差，J ~估计预测误差的Jacobi矩阵

beta的置信区间

betaci =nlparci(beta,R,J)

```
x=                    ; y=                    ;
beta0=[195.8027  0.04841];
[beta,R,J]=nlinfit(x,y,'f1',beta0);
betaci=nlparci(beta,R,J);
beta, betaci
```

```
function  y=f1(beta, x)
y=beta(1)*x./(beta(2)+x);
```

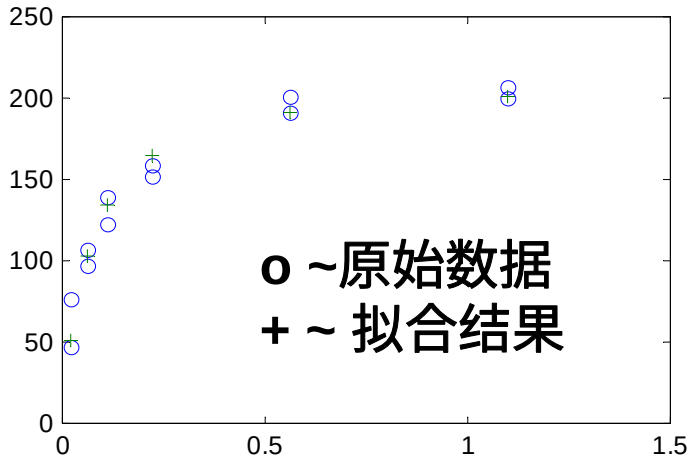
非线性模型结果分析

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

参数	参数估计值	置信区间
β_1	212.6819	[197.2029 228.1609]
β_2	0.0641	[0.0457 0.0826]

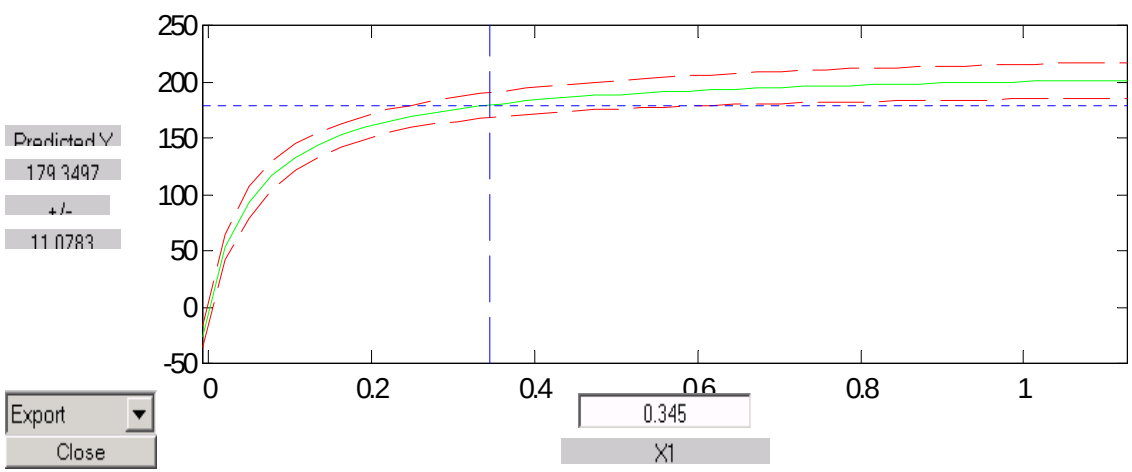
最终反应速度为 $\hat{\beta}_1 = 212.6831$

半速度点(达到最终速度一半时的x值)为 $\hat{\beta}_2 = 0.0641$



其它输出

命令nlintool 给出交互画面



拖动画面的十字线，得y的预测值和预测区间

画面左下方的Export输出其它统计结果。

剩余标准差s= 10.9337

混合反应模型

在同一模型中考虑嘌呤霉素处理的影响

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{(\beta_1 + \gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2 + \gamma_2 x_2) + x_1}$$

x_1为底物浓度， x_2为一示性变量

x_2=1表示经过处理，x_2=0表示未经处理

β_1是未经处理的最终反应速度

γ_1是经处理后最终反应速度的增长值

β_2是未经处理的反应的半速度点

γ_2是经处理后反应的半速度点的增长值

混合模型求解

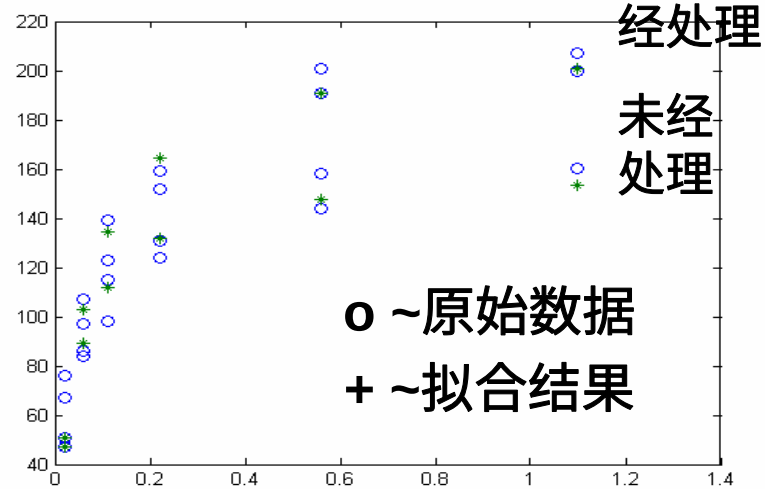
$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ \ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

用nlinfit 和 nlintool命令

参数初值 (基于对数据的分析) $\beta_1^0=170,\ \gamma_1^0=60,\ \beta_2^0=0.05,\ \gamma_2^0=0.01$

估计结果和预测

参数	参数估计值	置信区间
β_1	160.2802	[145.8466 174.7137]
β_2	0.0477	[0.0304 0.0650]
γ_1	52.4035	[32.4130 72.3941]
γ_2	0.0164	[-0.0076 0.0403]



剩余标准差s= 10.4000

γ_2置信区间包含零点，表明γ_2对因变量y的影响不显著

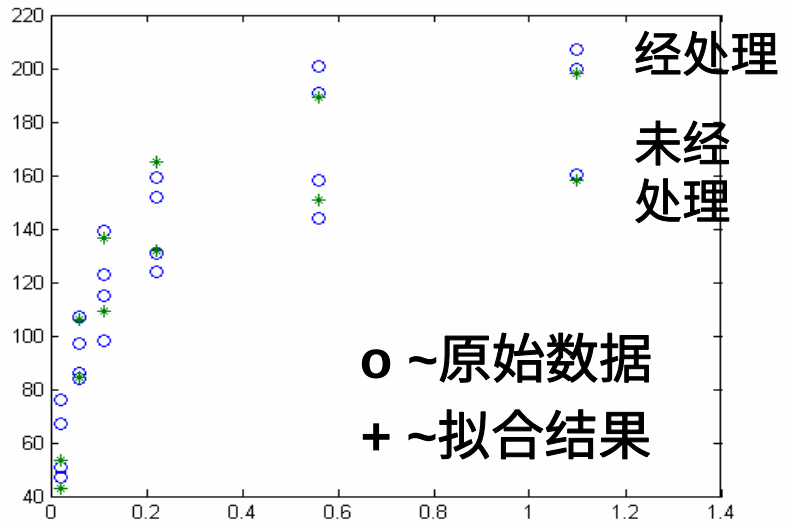
⇨ 经嘌呤霉素处理的作用不影响半速度点参数

简化的混合模型

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ \ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1} \Rightarrow y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ \ x_1}{\beta_2+x_1}$$

估计结果和预测

参数	参数估计值	置信区间
β_1	166.6025	[154.4886 178.7164]
β_2	0.0580	[0.0456 0.0703]
γ_1	42.0252	[28.9419 55.1085]



简化的混合模型形式简单，参数置信区间不含零点

剩余标准差 s = 10.5851，比一般混合模型略大

一般混合模型与简化混合模型预测比较

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{\beta_2+x_1}$$

预测区间为
预测值 ± Δ

实际值	一般模型预测值	Δ (一般模型)	简化模型预测值	Δ (简化模型)
67	47.3443	9.2078	42.7358	5.4446
51	47.3443	9.2078	42.7358	5.4446
84	89.2856	9.5710	84.7356	7.0478
…	…	…	…	…
191	190.8329	9.1484	189.0574	8.8438
201	190.8329	9.1484	189.0574	8.8438
207	200.9688	11.0447	198.1837	10.1812
200	200.9688	11.0447	198.1837	10.1812

简化混合模型的预测区间较短，更为实用、有效

酶促反应

反应速度与底物浓度的关系 ⇨ 非线性关系

机理分析

求解线性模型 ⇨ 求解非线性模型

发现问题，
得参数初值

嘌呤霉素处理对反应速度与底物浓度关系的影响

⇨ 混合模型 ⇨ 简化模型

引入0-1变量

检查参数置信区
间是否包含零点

注：非线性模型拟合程度的评价无法直接利用线性模型的方法，但R^2 与s仍然有效。

4 投资额与国民生产总值和物价指数

问题 建立投资额模型，研究某地区实际投资额与国民生产总值（GNP）及物价指数（PI）的关系

根据对未来GNP及PI的估计，预测未来投资额

该地区连续20年的统计数据

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	11	229.8	1326.4	1.0575
2	97.4	637.7	0.7277	12	228.7	1434.2	1.1508
3	113.5	691.1	0.7436	13	206.1	1549.2	1.2579
4	125.7	756.0	0.7676	14	257.9	1718.0	1.3234
5	122.8	799.0	0.7906	15	324.1	1918.3	1.4005
6	133.3	873.4	0.8254	16	386.6	2163.9	1.5042
7	149.3	944.0	0.8679	17	423.0	2417.8	1.6342
8	144.2	992.7	0.9145	18	401.9	2631.7	1.7842
9	166.4	1077.6	0.9601	19	474.9	2954.7	1.9514
10	195.0	1185.9	1.0000	20	424.5	3073.0	2.0688

投资额与国民生产总值和物价指数

分析

许多经济数据在时间上有一定的滞后性

以时间为序的数据，称为时间序列

时间序列中同一变量的顺序观测值之间存在自相关

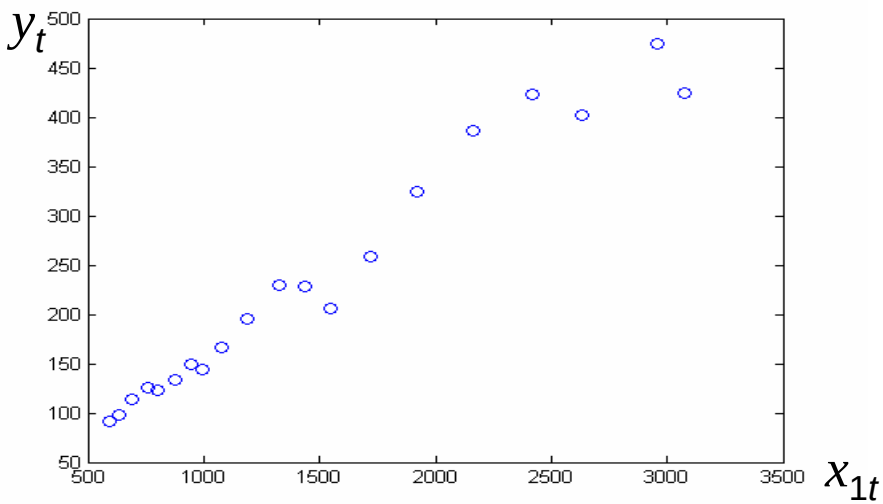
若采用普通回归模型直接处理，将会出现不良后果

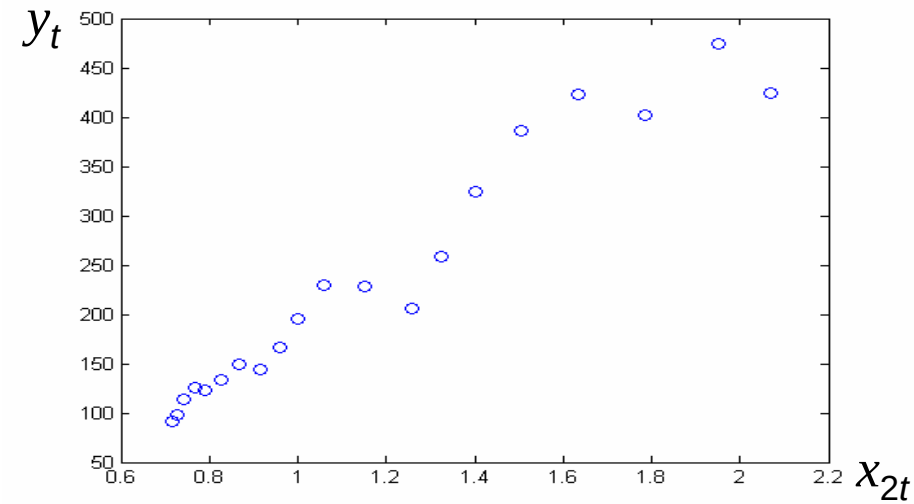
需要诊断并消除数据的自相关性，建立新的模型

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	11	229.8	1326.4	1.0575
2	97.4	637.7	0.7277	12	228.7	1434.2	1.1508
3	113.5	691.1	0.7436	13	206.1	1549.2	1.2579
4	125.7	756.0	0.7676	14	257.9	1718.0	1.3234
…	…	…	…	…	…	…	…

基本回归模型

t ~年份， y_t ~ 投资额，x_{1t} ~ GNP，x_{2t} ~ 物价指数





投资额与 GNP及物价指数间均有很强的线性关系

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ~回归系数

ε_t ~对t相互独立的零均值正态随机变量

基本回归模型的结果与分析

参数	参数估计值	置信区间
β_0	322.7250	[224.3386 421.1114]
β_1	0.6185	[0.4773 0.7596]
β_2	-859.4790	[-1121.4757 -597.4823]
R^2= 0.9908 F= 919.8529 p=0.0000		

$$\hat{y}_t = 322.725 + 0.6185x_{1t} - 859.479x_{2t}$$

剩余标准差 s=12.7164

模型优点 R^2=0.9908，拟合度高

模型缺点 没有考虑时间序列数据的滞后性影响可能忽视了随机误差存在自相关；如果存在自相关性，用此模型会有不良后果

自相关性的定性诊断

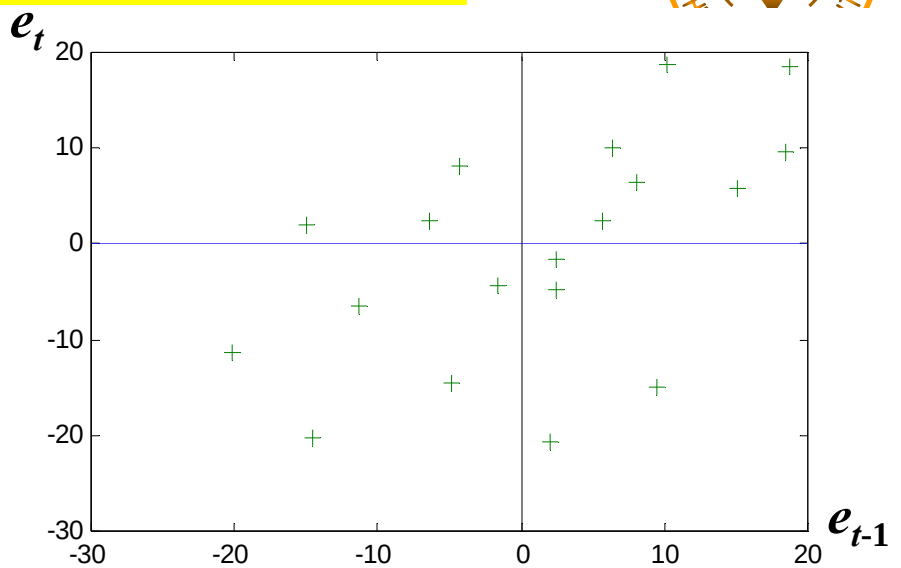
残差诊断法

模型残差 $e_t = y_t - \hat{y}_t$

e_t为随机误差ε_t的估计值

在MATLAB工作区中输出

作残差 e_t~e_{t-1} 散点图



大部分点落在第1, 3象限 ⇨ ε_t 存在正的自相关

大部分点落在第2, 4象限 ⇨ ε_t 存在负的自相关

自相关性直观判断 ⇨ 基本回归模型的随机误差项ε_t 存在正的自相关

自回归性的定量诊断

D-W检验

自回归模型 $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ~回归系数　　ρ~自相关系数　　$|\rho| \leq 1$

u_t~对t相互独立的零均值正态随机变量

$\rho = 0$	⇨	无自相关性
$\rho > 0$	⇨	存在正自相关性
$\rho < 0$	⇨	存在负自相关性

如何估计 ρ ⇔ **D-W统计量**

如何消除自相关性 ⇔ 广义差分法

D-W统计量与D-W检验

$$DW=\frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}e_t^2}\approx 2\left[1-\frac{\sum_{t=2}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}e_t^2}\right]$$

n较大

$$\hat{\rho}=\sum_{t=2}^{n}e_te_{t-1}/\sum_{t=2}^{n}e_t^2$$

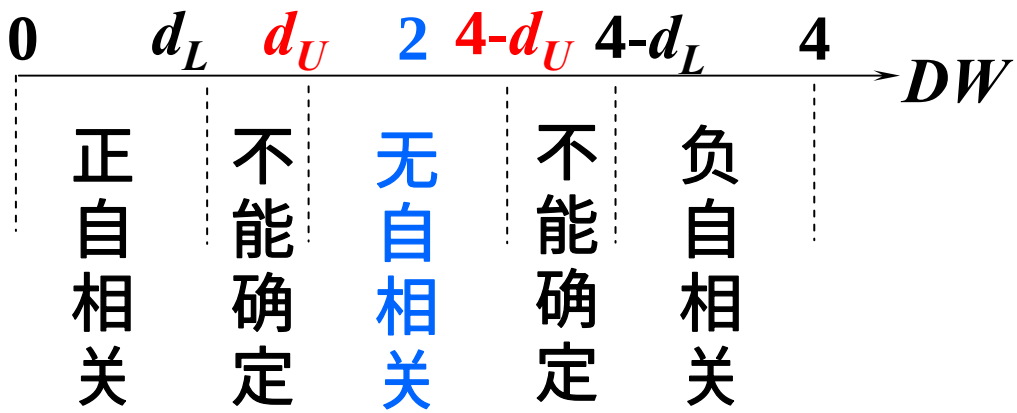
$$=2(1-\hat{\rho})$$

$$-1\le\hat{\rho}\le 1\rightarrow 0\le DW\le 4$$

$$\hat{\rho}=1\rightarrow DW=0$$

$$\hat{\rho}=-1\rightarrow DW=4$$

$$\hat{\rho}=0\rightarrow DW=2$$



检验水平，样本容量，回归变量数目

D-W分布表

检验临界值d_L和d_U

由DW值的大小确定自相关性

广义差分变换

$$DW = 2(1-\hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

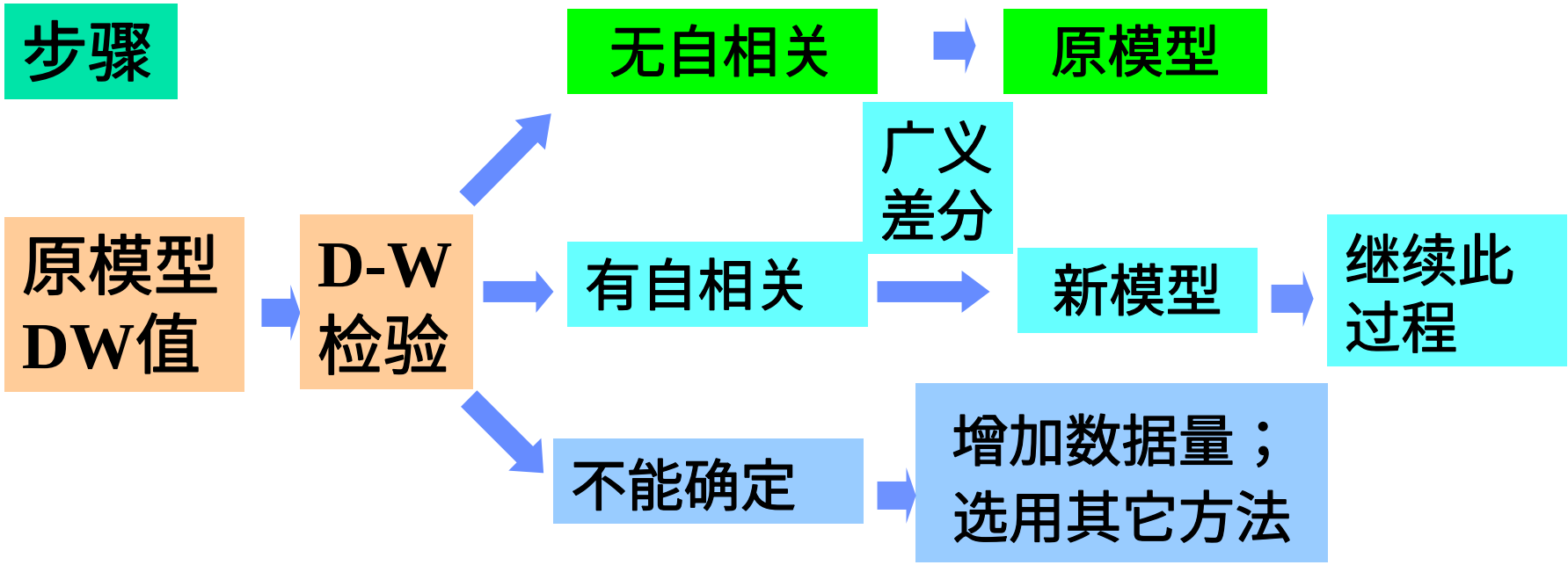
原模型 $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

变换 $y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}, \; x_{it}^* = x_{it} - \rho x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$

新模型 $y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_{1t}^* + \beta_2 x_{2t}^* + u_t \quad \beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$

以$\beta^*_0, \beta_1, \beta_2$为回归系数的普通回归模型

步骤



投资额新模型的建立

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}$$

原模型	DW_{old}=
残差e_t	0.8754

样本容量n=20，回归变量数目k=3，α=0.05

查表 ⇩

临界值d_L=1.10, d_U=1.54

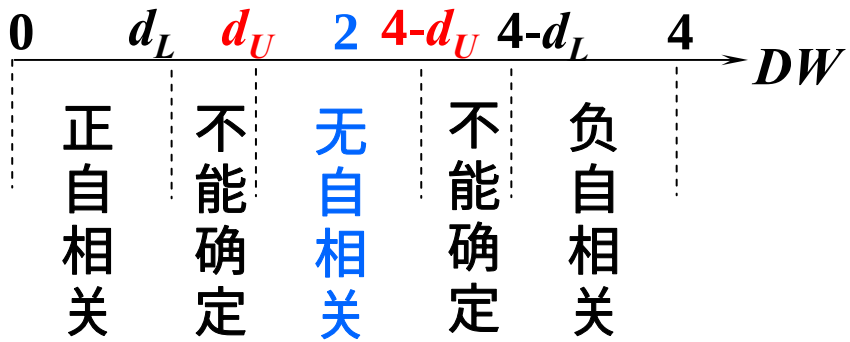
$DW_{old} < d_L$ ➡ 原模型有正自相关

$$\hat{\rho} = 1 - DW / 2 = 0.5623$$

作变换

$$y_t^* = y_t - 0.5623 y_{t-1}$$

$$x_{it}^* = x_{it} - 0.5623 x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$$



投资额新模型的建立

$$y_t^* = y_t - 0.5623 y_{t-1} \qquad x_{it}^* = x_{it} - 0.5623 x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_{1t}^* + \beta_2 x_{2t}^* + u_t$$

由数据 $y_t^*, x_{1t}^*, x_{2t}^*$ 估计系数 β_0^*， β_1， β_2

参数	参数估计值	置信区间
β^*_0	163.4905	[1265.4592 2005.2178]
β_1	0.6990	[0.5751 0.8247]
β_2	-1009.0333	[-1235.9392 -782.1274]
R^2= 0.9772	F=342.8988	p=0.0000

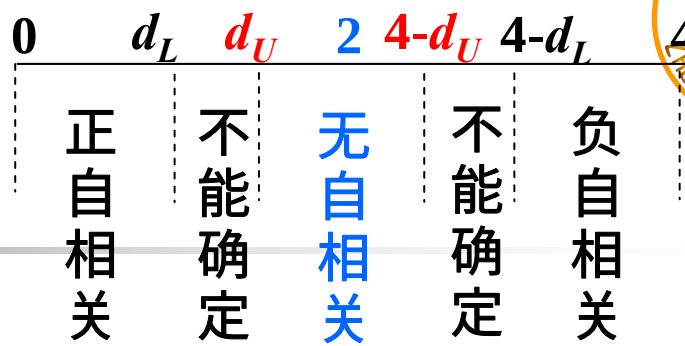
总体效果良好

剩余标准差

s_{new}= 9.8277 < s_{old}=12.7164

新模型的自相关性检验

新模型残差e_t → DW_{new}=1.5751



样本容量n=19，回归变量数目k=3，α=0.05

查表 ⇩

临界值d_L=1.08, d_U=1.53

$d_U < DW_{new} < 4-d_U$

⇩

新模型无自相关性

新模型 $\hat{y}_t^* = 163.4905 + 0.699\, x_{1t}^* - 1009.033\, x_{2t}^*$

还原为原始变量

$$\hat{y}_t = 163.4905 + 0.5623\, y_{t-1} + 0.699\, x_{1,t} - 0.3930\, x_{1,t-1} - 1009.0333\, x_{2,t} + 567.3794\, x_{2,t-1}$$

一阶自回归模型

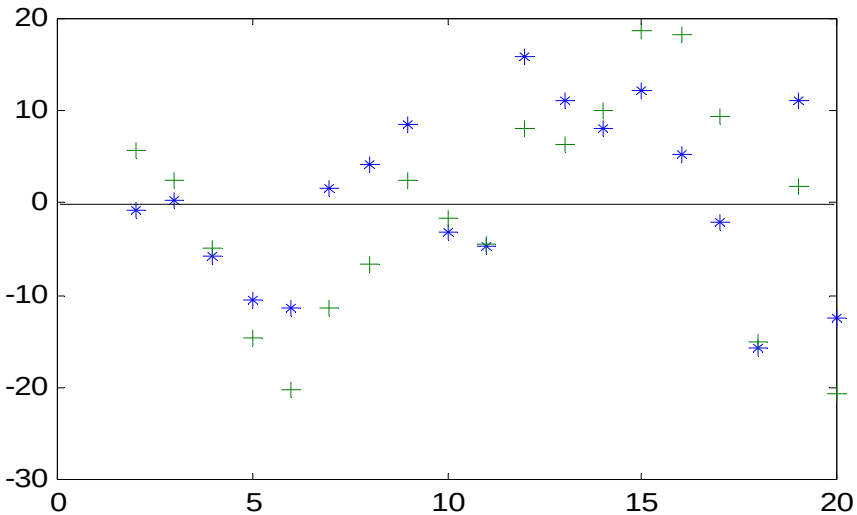
模型结果比较

基本回归模型 $\hat{y}_t = 322.725 + 0.6185x_{1t} - 859.479x_{2t}$

一阶自回归模型

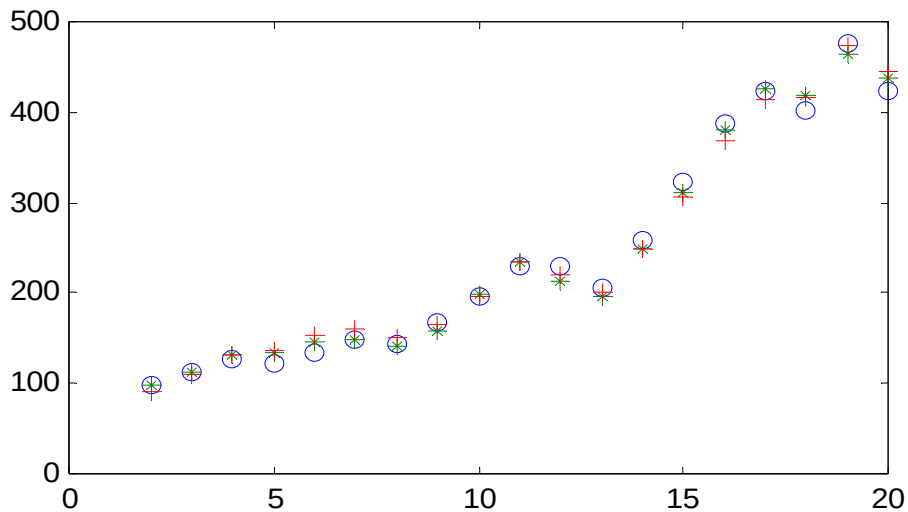
$$\hat{y}_t = 163.4905 + 0.5623y_{t-1} + 0.699x_{1,t} - 0.3930x_{1,t-1} - 1009.0333x_{2,t} + 567.3794x_{2,t-1}$$

残差图比较



新模型 e_t~ *，原模型 e_t~ +

拟合图比较



新模型 $\hat{y}_t$ ~ *，新模型 $\hat{y}_t$ ~ +

一阶自回归模型残差e_t比基本回归模型要小

投资额预测

对未来投资额y_t作预测，需先估计出未来的国民生产总值x_{1t}和物价指数x_{2t}

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	18	401.9	2631.7	1.7842
2	97.4	637.7	0.7277	19	474.9	2954.7	1.9514
3	113.5	691.1	0.7436	20	424.5	3073.0	2.0688

设已知 t=21时， x_{1t}=3312，x_{2t}=2.1938

基本回归模型 $\hat{y}_t = 485.6720$

一阶自回归模型 $\hat{y}_t = 469.7638$

$\hat{y}_t$ 较小是由于y_{t-1}=424.5过小所致

Discussions