数学建模
（Mathematic Modeling）

国防科技大学

第六讲

第六讲

- 主要内容：介绍层次分析法和合作对策模型。

层次分析法（Analytic Hierarchy Process, AHP）

层次分析法（Analytic Hierarchy Process, AHP）

数学用于研究自然与社会现象的方法主要有:

层次分析法（Analytic Hierarchy Process, AHP）

数学用于研究自然与社会现象的方法主要有：

- 机理分析——用经典的数学工具分析现象的因果关系；
- 统计分析——以随机数学为工具，通过大量观测数据寻求统计规律。

层次分析法（Analytic Hierarchy Process, AHP）

数学用于研究自然与社会现象的方法主要有：

- 机理分析——用经典的数学工具分析现象的因果关系；
- 统计分析——以随机数学为工具，通过大量观测数据寻求统计规律。

近年来发展起来的第三种方法称为系统分析，层次分析是系统分析的工具之一，它是美国运筹学教授 Saaty 于 70 年代初期提出来的。它把人的思维过程层次化、数量化，并用数学方法为分析、决策、 预报或控制提供定量的依据。这是一种定性与定量相结合的方法。

例 1　（渡河方案）三个方案：桥梁、隧道、渡船，用效益、代价作为选择方案的标准。

步骤:

步骤：

① 将问题条理化、层次化，构造出一个有层次的结构模型。层次分为三层：目标层、准则层和方案层。

步骤：

① 将问题条理化、层次化，构造出一个有层次的结构模型。层次分为三层：目标层、准则层和方案层。

② 比较同一层次元素对上一层次同一目标的影响，从而确定它们在目标中所占的比重。采用两两比较的方法，求出它们对于同一个目标的重要性的比例标度，标度等级为 1，2，. . . ，9，1/2，1/3，. . . ，1/9。得到两两比较判断矩阵。

1——9 标度的含义为：

1—两个元素同等重要　　3—前者稍重要
5—前者明显重要　　7—前者强烈重要
9—前者极端重要

2，4，6，8 为上述判断的中间值。

③ 在单一准则下计算元素相对排序权重，以及判断矩阵一致性检验。

③ 在单一准则下计算元素相对排序权重，以及判断矩阵一致性检验。

④ 计算方案层中各元素对于目标层的总排序权重，从而确定首选方案。

成对比较法，正互反阵和一致阵

成对比较法，正互反阵和一致阵

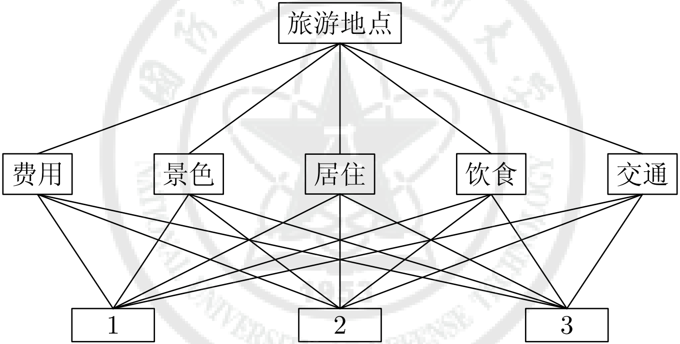
设要比较的 n 个因素 $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ 对目标 Z 的影响，确定它们在 Z 中的比重。每次取两个因素 y_i 和 y_j，用 a_{ij} 表示 y_i 与 y_j 对 Z 的影响之比：

$$a_{ij} > 0, \quad a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

$A = (a_{ij})$ 称为成对比较阵或判断矩阵。满足 (1) 的矩阵称为正互反阵。成对比较阵是正互反阵。

考虑旅游问题。设有三个地点供选择，他考虑五个因素：费用 y_1，景色 y_2，居住 y_3，饮食 y_4， 交通 y_5。

考虑旅游问题。设有三个地点供选择，他考虑五个因素：费用 y_1，景色 y_2，居住 y_3，饮食 y_4， 交通 y_5。



经推敲，得成对比较阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 & 5 \\ 1/2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

经推敲，得成对比较阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 & 5 \\ 1/2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

如果此人对 y_1, y_2, y_3 三因素的成对比较是绝对一致的，则应该有

$$a_{12}\cdot a_{23}=a_{13}$$

但实际上，$a_{12}\cdot a_{23}=2\cdot 4=8\neq 7=a_{13}$，这说明他对这三个因素的成对比较不一致。

引入一致阵的概念。

引入一致阵的概念。

如果一个正互反阵 A 满足

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

则称 A 为一致阵。

引理　正互反阵的最大特征值是正实数，它对应正的特征向量。

定理 1 n 阶正互反阵是一致阵 $\Leftrightarrow \lambda_{\max} = n$.

定理 1 n 阶正互反阵是一致阵 $\Leftrightarrow \lambda_{\max} = n$.

证明 $\Rightarrow$) 设 A 是一致阵，由一致性

$$a_{ij} = a_{i1} \cdot a_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}}$$

故第 i 行为 $\frac{a_{11}}{a_{1i}}$ $\frac{a_{12}}{a_{1i}}$ $\cdots$ $\frac{a_{1n}}{a_{1i}}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. 与第一行成比例，$r_k A = 1 \Rightarrow A$ 只有一个特征根非零，设为 λ_1.
则 $n = \mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1$. 必要性得证。

$\Leftarrow$) 设 A 的最大特征值 $\lambda_{\max} = n$，相应的特征向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)'$. 由引理 $\omega > 0$.

由于

$$\lambda_{\max} \cdot \omega = A\omega \Rightarrow \lambda_{\max}\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda_{\max} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\omega_j \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i} \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i\neq j}a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i}+n\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i}+a_{ji}\frac{\omega_i}{\omega_j}\right)+n\right] \\
&\geqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}2+n\right]=\frac{1}{n}\cdot n^2=n=\lambda_{\max}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i}+\frac{1}{a_{ij}}\frac{\omega_i}{\omega_j}=2 \\
\Rightarrow \quad & a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i}=1 \quad \Rightarrow \quad a_{ij}=\frac{\omega_i}{\omega_j} \\
\Rightarrow \quad & a_{ik}=\frac{\omega_i}{\omega_k}=\frac{\omega_i}{\omega_j}\frac{\omega_j}{\omega_k}=a_{ij}\cdot a_{jk}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad A$ 是一致阵

权向量和一致性指标

权向量和一致性指标

当 A 是一致阵时， $\lambda_m = n, a_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$. 设 $\omega = (\omega_i)$ 是 λ_m 的标准化特征向量，则 $\sum \omega_i = 1$，它表示了 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 在 Z 中的比重，称为权向量。例如：

权向量和一致性指标

当 A 是一致阵时， $\lambda_m = n, a_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$. 设 $\omega = (\omega_i)$ 是 λ_m 的标准化特征向量，则 $\sum \omega_i = 1$，它表示了 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 在 Z 中的比重，称为权向量。例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

是一致阵， $\lambda_m = 3$, $\omega = (0.6, 0.3, 0.1)'$.

更多的情况下 A 不是一致的，这时仍称 λ_m 的标准化特征向量 ω 为权向量，如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_m = 3.01$. A 不一致。$\omega = (0.588, 0.322, 0.09)'$.

λ_m 比 n 大得越多， A 不一致的程度就越严重，用 ω 表示 $\{y_1, \ldots, y_n\}$ 在 Z 中所占比重时的偏差越大。

λ_m 比 n 大得越多， A 不一致的程度就越严重，用 ω 表示 $\{y_1, \ldots, y_n\}$ 在 Z 中所占比重时的偏差越大。

衡量不一致程度的数量指标叫做一致性指标。Saaty 将它定义为

$$CI = \frac{\lambda_m - n}{n - 1} \tag{3}$$

λ_m 比 n 大得越多， A 不一致的程度就越严重，用 ω 表示 $\{y_1, \ldots, y_n\}$ 在 Z 中所占比重时的偏差越大。

衡量不一致程度的数量指标叫做一致性指标。Saaty 将它定义为

$$CI = \frac{\lambda_m - n}{n - 1} \tag{3}$$

对于一致阵，一致性指标 $CI = 0$.

CI 越大，A 的不一致程度越严重。

为了找出衡量一致性指标 CI 的标准，Saaty 提出一种方法。对于固定的 n，随机地构造正互反阵 $\widetilde{A}$，其中 $\widetilde{a}_{ij}(i<j)$ 随机地从 $1/9,\ldots,1/2,1,2,\ldots,9$ 当中取出一数，由于其随机性，可以认为这样的 $\widetilde{A}$ 是最不一致的，用充分大的子样得到 $\widetilde{A}$ 的最大特征值的平均值 $\widetilde{\lambda}_m$，定义随机性指标为

$$CR=\frac{\widetilde{\lambda}_m-n}{n-1} \tag{4}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CR	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

表: 随机性指标 CR 值

当

$$CI \leqslant 0.1CR \tag{5}$$

时，认为 A 的不一致性仍可接受。

下面介绍计算 λ_m 和 ω 的一种近似方法。

将 A 的各个列向量平均后，再标准化，即为 $\widehat{\omega}$，

$$\widehat{\lambda}_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(A\widehat{\omega})_i}{\widehat{\omega}_i}$$

例如： $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{\text{各行求和}} \begin{pmatrix} 9 \\ 5.5 \\ 1.42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{平均}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1.83 \\ 0.47 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{标准化}} \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.35 \\ 0.08 \end{pmatrix} = \widehat{\omega}$$

$$A\widehat{\omega} = (1.75, 0.955, 0.26)'$$

$$\widehat{\lambda}_m = \frac{1}{3}\left(\frac{1.75}{0.57} + \frac{0.955}{0.35} + \frac{0.26}{0.08}\right) = 3.016 \qquad \lambda_m = 3.016$$

$$CI = \frac{\widehat{\lambda}_m - n}{n-1} = \frac{3.016-3}{2} = 0.008 < 0.1 \times 0.58$$

$\therefore$ 认为 A 的不一致性是可以接受的。

层次分析模型

层次分析模型

旅游问题：

$$A \xrightarrow{\text{各行求和}} \begin{pmatrix} 20 \\ 11.5 \\ 2.23 \\ 4.53 \\ 5.53 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{平均}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2.3 \\ 0.45 \\ 0.91 \\ 1.11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{标准化}} \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.26 \\ 0.05 \\ 0.10 \\ 0.13 \end{pmatrix} = \widehat{\omega}$$

即 $\omega_2(y) = (0.46,\ 0.26,\ 0.05,\ 0.10,\ 0.13)'$
$A\omega_2(y) = (2.48,\ 1.38,\ 0.27,\ 0.51,\ 0.56)'$

$$\lambda_m = \frac{1}{5}\left(\frac{2.48}{0.46} + \frac{1.38}{0.26} + \frac{0.27}{0.05} + \frac{0.51}{0.10} + \frac{0.56}{0.13}\right) = 5.1$$

$$CI = \frac{5.1 - 5}{4} = \frac{0.1}{4} = 0.025, \quad CR_5 = 1.12, \quad \frac{CI}{CR} < 0.1$$

故 A 的不一致性可以接受。$\omega_2(y)$ 可以代表 5 个因素在 Z 中分别所占的比重，即准则层关于目标层的比重已确定。下面还要确定方案层关于准则层的比重。

故 A 的不一致性可以接受。$\omega_2(y)$ 可以代表 5 个因素在 Z 中分别所占的比重，即准则层关于目标层的比重已确定。 下面还要确定方案层关于准则层的比重。

设 $x=\{x_1,x_2,x_3\}$ 对 y_i 的成对比较阵为:

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8}\\ 3 & 1 & \frac{1}{3}\\ 8 & 3 & 1\end{pmatrix}\ B_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ \frac{1}{2} & 1 & 2\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\ B_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$B_4=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ \frac{1}{3} & 1 & 1\\ \frac{1}{4} & 1 & 1\end{pmatrix}\ B_5=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & \frac{1}{4}\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

i	1	2	3	4	5
$\omega_{y_i}(x_1)$	0.082	0.595	0.429	0.633	0.166
$\omega_{y_i}(x_2)$	0.236	0.277	0.429	0.193	0.166
$\omega_{y_i}(x_3)$	0.682	0.129	0.142	0.175	0.668
$\lambda_m^{(i)}$	3.002	3.005	3	3.009	3
$CI^{(i)}$	0.001	0.003	0	0.005	0

由于 $n=3$ 时，$CR=0.58$，故 $CI^{(i)}/CR<0.1$ $(i=1,2,\ldots,5)$，所以 $B_1 \sim B_5$ 的不一致性都可以接受。

由于 $n=3$ 时，$CR=0.58$，故 $CI^{(i)}/CR<0.1$ $(i=1,2,\ldots,5)$，所以 $B_1\sim B_5$ 的不一致性都可以接受。

最终目的是要得到 x_1,x_2,x_3 在 Z 中所占的比重。

$$\omega_2(x)=\{\omega_2(x_1),\omega_2(x_2),\omega_2(x_3)\}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(x_1)&=\omega_y(x_1)'\cdot\omega_2(y)\\&=0.082\times0.46+0.595\times0.26+\\&\quad 0.429\times0.05+0.633\times0.1+0.166\times0.13\\&=0.299\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega_2(x_2) &= \omega_y(x_2)' \cdot \omega_2(y) \\
&= (0.236, 0.277, 0.429, 0.193, 0.166) \cdot \\
&\quad\ (0.46, 0.26, 0.05, 0.10, 0.13)' \\
&= 0.245
\end{aligned}
$$

$$\omega_2(x_3) = \omega_y(x_3)' \cdot \omega_2(y) = 0.456$$

$$\therefore\ \omega_2(x) = \{0.299, 0.245, 0.456\}'$$

x_3 为第一选择。

一般地，设已知

$$\omega_2(y) = (\omega_2(y_1), \ldots, \omega_2(y_n))'$$
$$\omega_{y_i}(x) = (\omega_{y_i}(x_1), \ldots, \omega_{y_i}(x_m))'$$

则

$$\begin{aligned}\omega_2(x_j) &= \omega_y(x_j) \cdot \omega_2(y) \\ &= (\omega_{y_1}(x_j), \ldots, \omega_{y_n}(x_j)) \cdot \\ &\quad (\omega_2(y_1), \ldots, \omega_2(y_n))'\end{aligned}$$

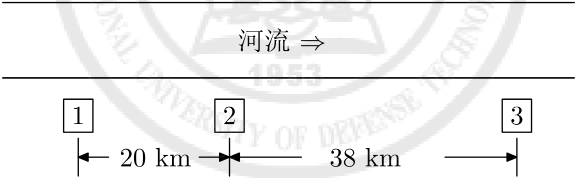
最终 $\omega_2(x) = (\omega_2(x_1), \ldots, \omega_2(x_n))'$.

合作对策模型

合作对策模型

三城镇的污水处理方案

沿河有三镇，污水需处理后才能排入河中，三镇或者单独建厂，或者联合建厂，用管道将污水集中处理。Q 表示污水量（吨/秒），L 表示管道长度（公里），按照经验公式，污水处理厂的建厂费用为 $C_T = 730\,Q^{0.712}$，铺设管道的费用为 $C_P = 6.6\,Q^{0.51}L$. 已知三镇的污水量分别为 $Q_1 = 5$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 5$. 试从节约总投资的角度为三镇制定污水处理方案。



Shapley 公理

Shapley 公理 设 v 是定义在 $I=\{1,2,\ldots,n\}$ 上的特征函数， $\phi=(\varphi_1(v),\ldots,\varphi_n(v))$ 是合作对策。

公理 1 设 π 是 I 的一个排列，对于 I 的任一子集 $S=\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}$, $\pi S=\{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_s)\}$, 若再定义一个特征函数 $v'(S)=v(\pi S)$，则对于每一个 $\{i\}\in I$,

$$\varphi_i(v')=\varphi_{\pi(i)}(v)$$

公理 2

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v) = v(I)$$

即各人分配之和等于合作获利。

公理 3 如果对于所有包含 $\{i\}$ 的子集 S，都有 $v(S-\{i\})=v(S)$，则 $\varphi_i(v)=0$.

公理 3 如果对于所有包含 $\{i\}$ 的子集 S，都有 $v(S-\{i\})=v(S)$，则 $\varphi_i(v)=0$.

公理 3 表示，如果 $\{i\}$ 对于每一个合作都没有贡献，他不应从全体的合作获利中得到报酬。

公理 4 若 v' 也是定义在 I 的特征函数，且 $\omega = v + v'$，则 $\phi(\omega) = \phi(v) + \phi(v')$

公理 4 若 v' 也是定义在 I 的特征函数，且 $\omega = v + v'$，则 $\phi(\omega) = \phi(v) + \phi(v')$

公理 4 表示，当 n 个人同时进行两项合作时，合作获利应为两合作获利之和。