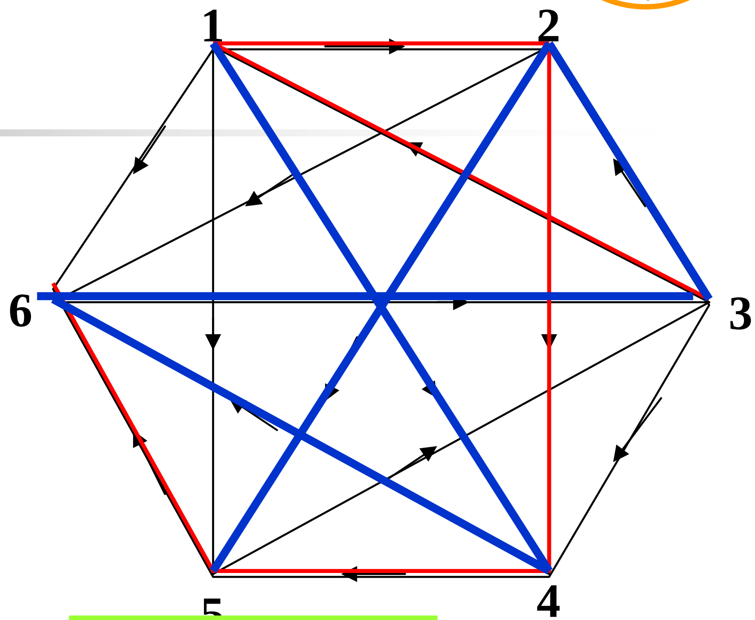
图论模型

1. 循环比赛的名次

6支球队比赛结果



• *n*支球队循环赛，每场比赛只计胜负，没有平局。

• 根据比赛结果排出各队名次

方法1：寻找按箭头方向通过全部顶点的路径。

312456　　146325　　……　　无法排名

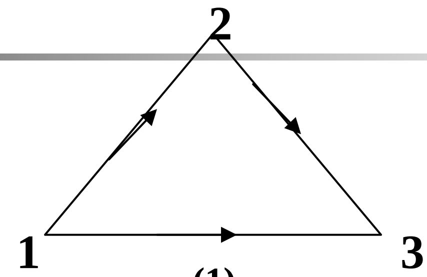
方法2：计算得分：1队胜4场，2, 3队各胜3场，4, 5队各胜2场， 6队胜1场。 2, 3队， 4, 5队无法排名

3→2，4 →5　　排名 132456 合理吗

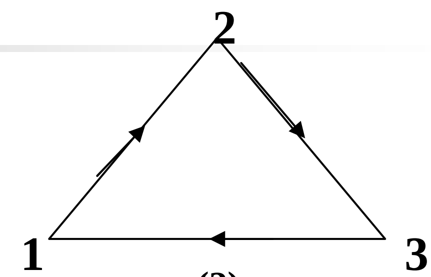
循环比赛的结果——竞赛图

每对顶点间都有边相连的有向图

3个顶点的竞赛图



(1)



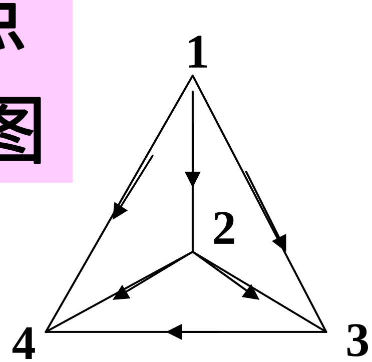
(2)

名次

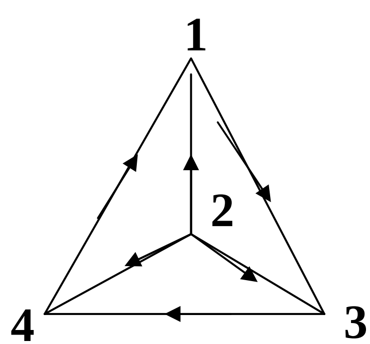
{1，2，3}

{(1,2,3)}并列

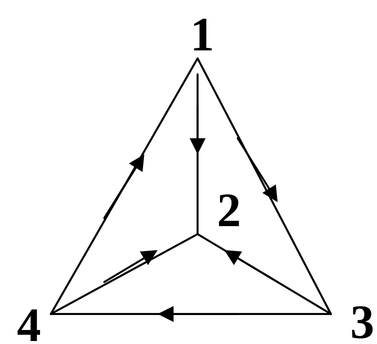
4个顶点的竞赛图



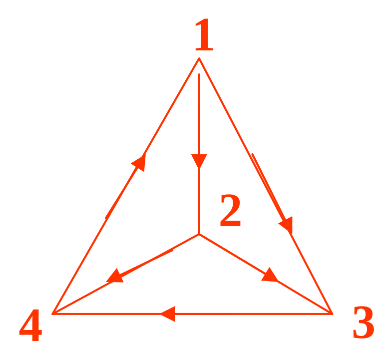
(1)



(2)



(3)



(4)

名次

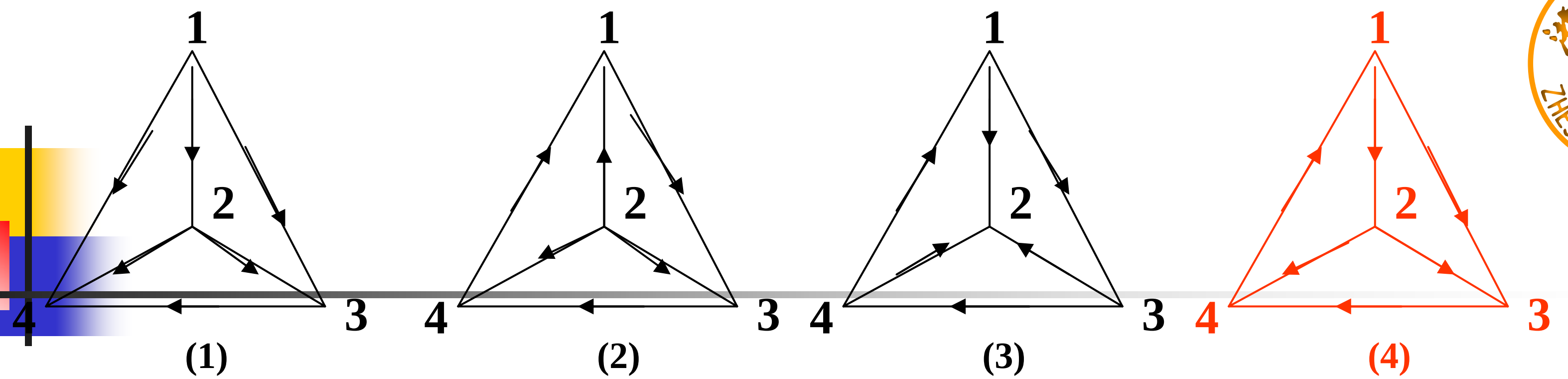
{1, 2, 3, 4}

{2,(1,3,4)}

{(1,3,4), 2}

{(1,2),(3,4)}

{1, 2, 3, 4}?



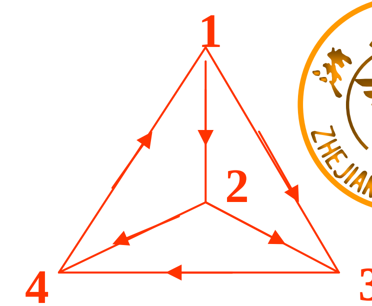
竞赛图的3种形式

- 具有唯一的完全路径，如(1)；
- 双向连通图——任一对顶点存在两条有向路径相互连通，如(4)；
- 其他，如(2)，(3)。

竞赛图的性质

- 必存在完全路径；
- 若存在唯一的完全路径，则由它确定的顶点顺序与按得分排列的顺序一致，如(1)。

双向连通竞赛图$G=(V,E)$的名次排序



(4)

邻接矩阵

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_iv_j\in E\\ 0, & v_iv_j\notin E\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

得分向量

$$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$$

$$s=Ae,\ e=(1,1,\cdots,1)^T$$

$$s^{(1)}=Ae=(2,2,1,1)^T \sim 1级得分向量$$

$$s^{(2)}=As^{(1)}=(3,2,1,2)^T \sim 2级得分向量$$

$$s^{(3)}=(3,3,2,3)^T,\quad s^{(4)}=(5,5,3,3)^T$$

$$s^{(5)}=(8,6,3,5)^T,\quad s^{(6)}=(9,8,5,8)^T$$

$$s^{(7)}=(13,13,8,9)^T,\ s^{(8)}=(21,17,9,13)^T$$

……

$$s^{(k)}=As^{(k-1)}=A^ke$$

$$k\to\infty,\ s^{(k)}\to ?$$

双向连通竞赛图的名次排序

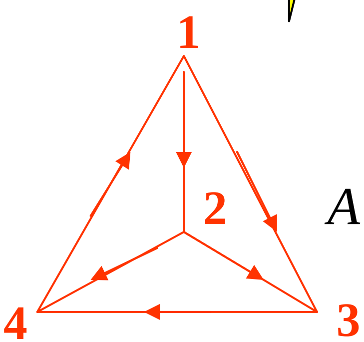
$$s^{(k)}=As^{(k-1)}=A^k e$$

- 对于$n(>3)$个顶点的双向连通竞赛图，存在正整数r，使邻接矩阵A 满足$A^r>0$，A称**素阵**

- 素阵A的最大特征根为正单根λ，对应正特征向量s，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{\lambda^k}=s$$

⇨ $k\to\infty, s^{(k)}$(归一化后)$\to s$ ⇨ 用s排名



(4)

{1, 2, 3, 4}?

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

⇨

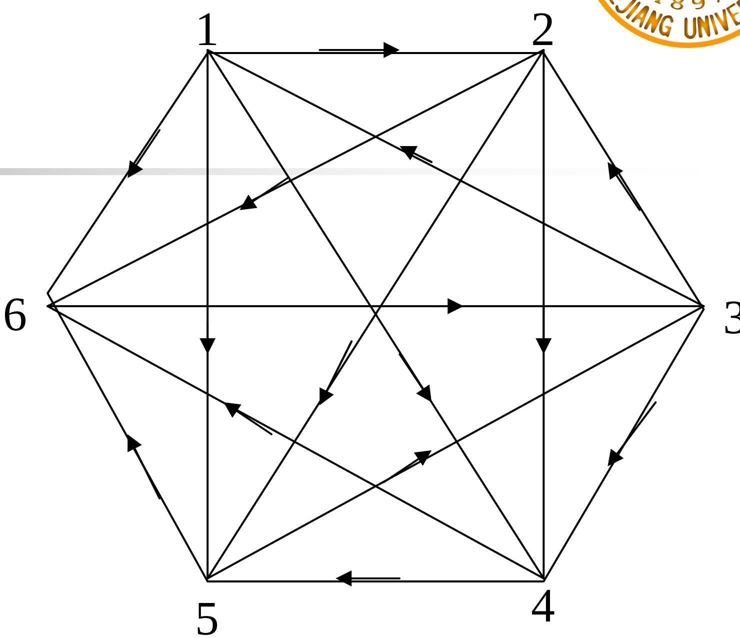
$$\lambda=1.4,$$

$$s=(0.323,0.280,0.167,0.230)^T$$

排名为{1，2，4，3}

6支球队比赛结果

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$



$$s^{(1)}=(4,3,3,2,2,1)^T,\qquad s^{(2)}=(8,5,9,3,4,3)^T$$

$$s^{(3)}=(15,10,16,7,12,9)^T,\qquad s^{(4)}=(38,28,32,21,25,16)^T$$

$$\lambda=2.232,\ s=(0.238,0.164,0.231,0.113,0.150,0.104)^T$$

排名次序为{1，3， 2，5，4，6}

2. 社会经济系统的冲量过程

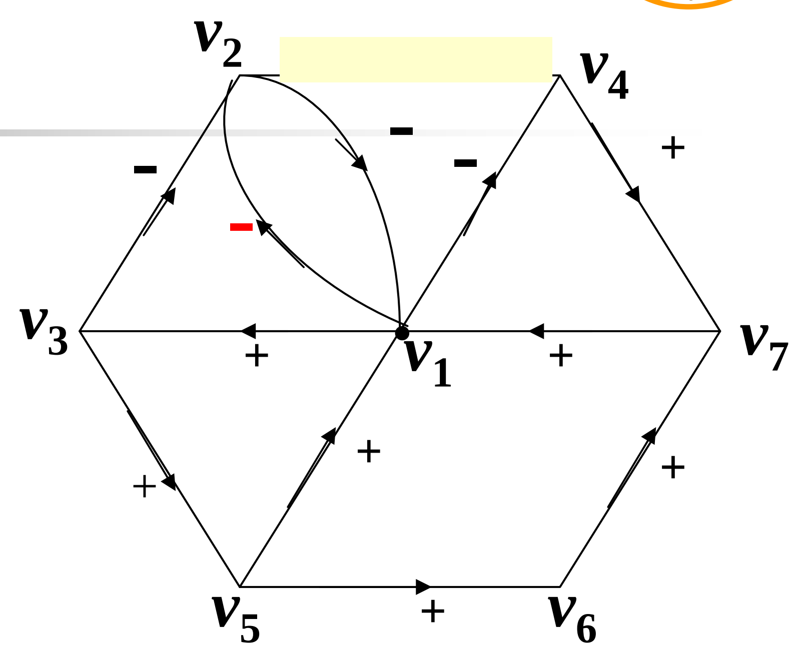
例　能源利用系统的预测

v_1—能源利用量；v_2—能源价格；

v_3—能源生产率；v_4—环境质量；

v_5—工业产值；　v_6—就业机会；

v_7—人口总数。



带符号的有向图

系统的元素——图的顶点

元素间的影响——带方向的弧

影响的正反面——弧旁的+、– 号

影响——直接影响　　符号——客观规律；方针政策

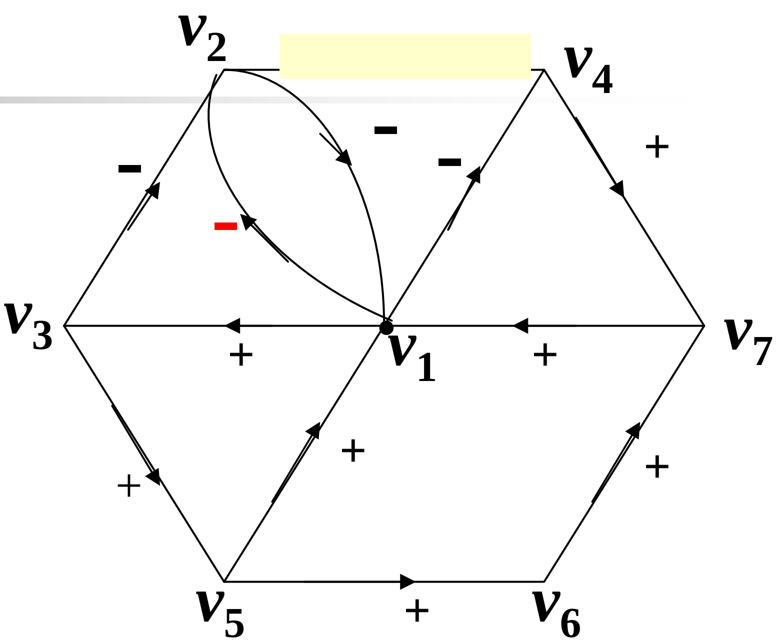
带符号有向图$G_1=(V,E)$的邻接矩阵A

V~顶点集　E~弧集

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若 v_iv_j 为 + \\ -1, & 若 v_iv_j 为 - \\ 0, & 若 v_iv_j \notin E\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

定性模型



带符号的有向图G_1

$$v_i \xrightarrow[-]{+} v_j$$

某时段v_i 增加导致

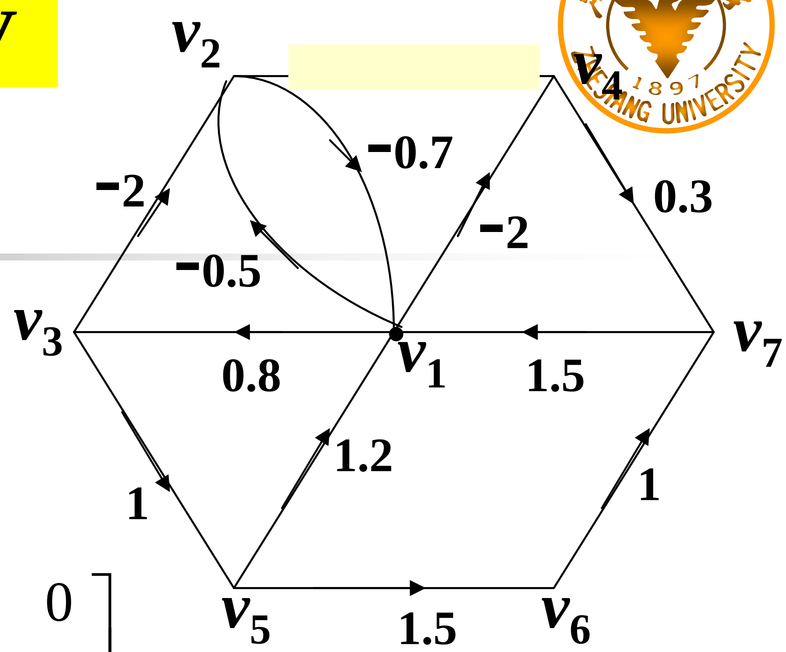
下时段v_j 增加减少

加权有向图G_2及其邻接矩阵W

$$v_i \xrightarrow{w_{ij}} v_j$$

某时段v_i 增加1单位导致

下时段v_j 增加w_{ij}单位



$$W=\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.8 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加权有向图G_2

定量模型

A视为 W的特例

冲量过程（Pulse Process)

$$v_i \xrightarrow{w_{ij}} v_j$$

研究由某元素v_i变化引起的系统的演变过程

$v_i(t)$ ~ v_i在时段t 的值； $p_i(t)$ ~ v_i在时段t 的改变量(冲量)

$$v_i(t+1)=v_i(t)+p_i(t+1), \quad i=1,2,\cdots,n, t=0,1,2,\cdots$$

$$p_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}\,p_i(t), \text{ 或 } p_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,p_i(t)$$

$$v(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t)),\ p(t)=(p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t))$$

冲量过程模型 $$v(t+1)=v(t)+p(t+1)$$

$$p(t+1)=p(t)W \text{ 或 } p(t+1)=p(t)A$$

能源利用系统的预测

$$v(t+1)=v(t)+p(t+1)$$

简单冲量过程——初始冲量$p(0)$中某个分量为1，其余为0的冲量过程

$$p(t+1)=p(t)A$$

设 $v(0)=p(0)$

若开始时能源利用量有突然增加，预测系统的演变

能源利用系统的 $p(t)$和$v(t)$

t	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	-1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0
2	1	-1	0	0	1	0	-1	2	-2	1	-1	1	0	-1
3	1	-1	1	-1	0	1	0	3	-3	2	-2	1	1	-1
	……							……						

简单冲量过程S的稳定性

- 任意时段S的各元素的值和冲量是否为有限(稳定)
- S不稳定时如何改变可以控制的关系使之变为稳定

$p(t+1) = p(t)W$　　　$v(t+1)=v(t)+p(t+1)$

S**冲量稳定**~对任意 i,t, $|p_i(t)|$有界

S**值稳定**~对任意 i,t, $|v_i(t)|$有界

值稳定 ⇩ 冲量稳定

$p(t) = p(0)W^t$ ⇨ S的稳定性取决于W的特征根

记W的非零特征根为λ

简单冲量过程S的稳定性

- S冲量稳定 $\Rightarrow |\lambda| \le 1$
- S冲量稳定 $\Leftrightarrow |\lambda| \le 1$且均为单根
- S值稳定 $\Leftrightarrow$ S冲量稳定且λ不等于1

对于能源利用系统的邻接矩阵A 特征多项式

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

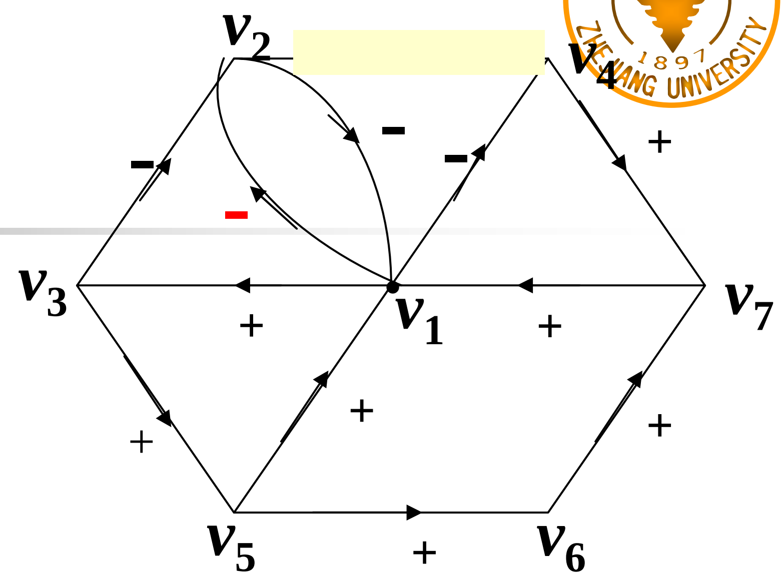
$$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5-\lambda^3-\lambda^2-1)$$

$f(1)=-2, f(2)=76$ $\Rightarrow$ $\exists\lambda\in(1,2)$

能源利用系统存在冲量不稳定的简单冲量过程

简单冲量过程的稳定性

改进的玫瑰形图S^*~带符号的有向图双向连通，且存在一个位于所有回路上的中心顶点。



回路长度~ 构成回路的边数

回路符号~ 构成回路的各有向边符号+1或-1之乘积

a_k~长度为k的回路符号和

r~使a_k不等于0的最大整数

- S^*冲量稳定 $\Rightarrow a_r = \pm 1,$ $a_k = -a_r \cdot a_{r-k}\ (k=1,2,\cdots,r-1)$

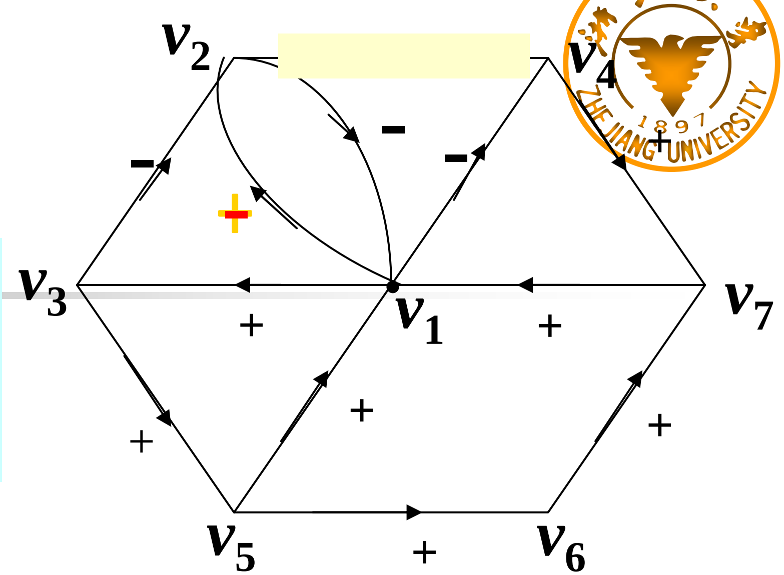
- 若S^*冲量稳定，则S^*值稳定 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{r} a_k \neq 1$

简单冲量过程S*的稳定性

$a_1=0,\ a_2=(-1)_{v1v2}\times(-1)_{v2v1}=1$

$a_3=(+1)_{v1v3v5v1}+(-1)_{v1v4v7v1}$

$+(+1)_{v1v3v2v1}=1,\ a_4=0,\ a_5=1,\ r=5$



• S*冲量稳定 $\Rightarrow a_r=\pm 1,$ $a_k=-a_r\cdot a_{r-k}\ (k=1,2,\cdots,r-1)$

$a_2\neq -a_5\cdot a_3$ ⇨ S*冲量不稳定 v_1~利用量, v_2~价格

$(-1)_{v1v2}\rightarrow(+1)_{v1v2}$(由鼓励利用变为限制利用)$\Rightarrow a_2=-1$

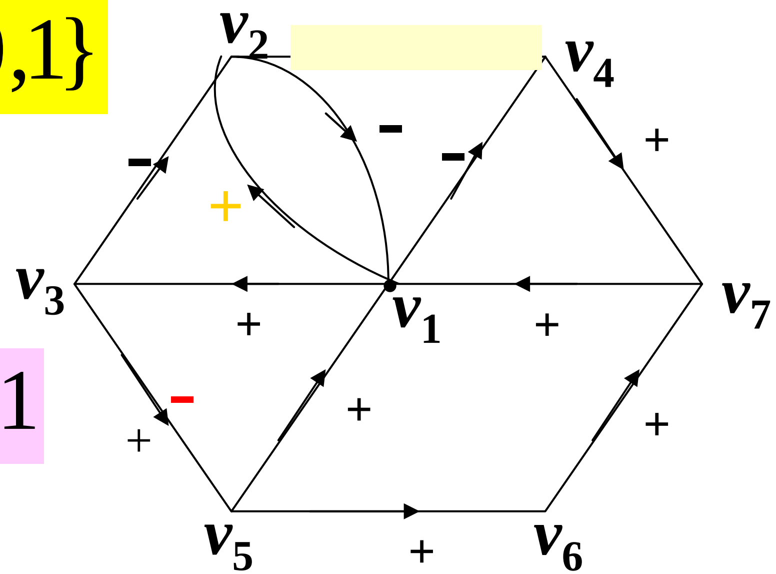
⇨ A的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5+\lambda^3-\lambda^2-1)$

⇨ $\lambda=0,0,1,\pm i,(-1\pm\sqrt{3}i)/2$ ⇨ S*冲量稳定

$\Rightarrow |\lambda|\leq 1$ 且为单根 • S*冲量稳定 $\Leftrightarrow |\lambda|\leq 1$且均为单根

- S*冲量稳定 $\Rightarrow a_r = \pm 1,\ a_k = -a_r \cdot a_{r-k}\ (k=1,2,\cdots r-1)$
- 若S*冲量稳定，则S*值稳定 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{r} a_k \neq 1$

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{0,-1,1,0,1\}$



⇒ S*值不稳定

S*值稳定 ⇐ $a_3, a_5 = 1 \Rightarrow a_3, a_5 = -1$

⇐ $(+1)_{v3v5} \rightarrow (-1)_{v3v5}$

v_3—能源生产率
v_5—工业产值

⇒ $(-1)_{v3v5}$ 违反客观规律

能源利用系统的值不应稳定？

Discussions

3. 效益的合理分配

例 甲乙丙三人合作经商，若甲乙合作获利7元，甲丙合作获利5元，乙丙合作获利4元，三人合作获利11元。又知每人单干获利1元。问三人合作时如何分配获利？

记甲乙丙三人分配为 $x=(x_1,x_2,x_3)$

$$x_1+x_2+x_3=11$$

$$x_1+x_2\ge 7$$

$$x_1+x_3\ge 5$$

$$x_2+x_3\ge 4$$

$$x_1,x_2,x_3\ge 1$$

解不唯一

(5，3，3)

(4，4，3)

(5，4，2)

……

(1) Shapley合作对策

集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$

$\forall$子集$s\in I$，$\exists$实函数$v(s)$满足

$$v(\phi)=0$$

$$v(s_1\cup s_2)\ge v(s_1)+v(s_2),\ s_1\cup s_2=\phi$$

$v(s)$~ 子集 s的获利

[I,v] ~n人合作对策，v~特征函数

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ **~n人从$v(I)$得到的分配，满足**

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=v(I)$$

$$x_i\ge v(i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

Shapley合作对策

公理化方法 ⇨ Shapley值

$$x_i = \sum_{s \in S_i} w(|s|)[v(s) - v(s \setminus i)], \; i = 1,2,\cdots n$$

$$w(|s|) = \frac{(n - |s|)!(|s| - 1)!}{n!}$$

$|s|$~子集 s中的元素数目， S_i~包含i的所有子集

$[v(s) - v(s \setminus i)]$ ~ i 对合作s 的“ 贡献 ” $(i \in s)$

$w(|s|)$ ~由 $|s|$ 决定的“ 贡献 ” 的权重

三人(I={1,2,3})经商中甲的分配x_1的计算

$$x_1=\sum_{s\in S_1} w(|s|)[v(s)-v(s\setminus 1)]$$

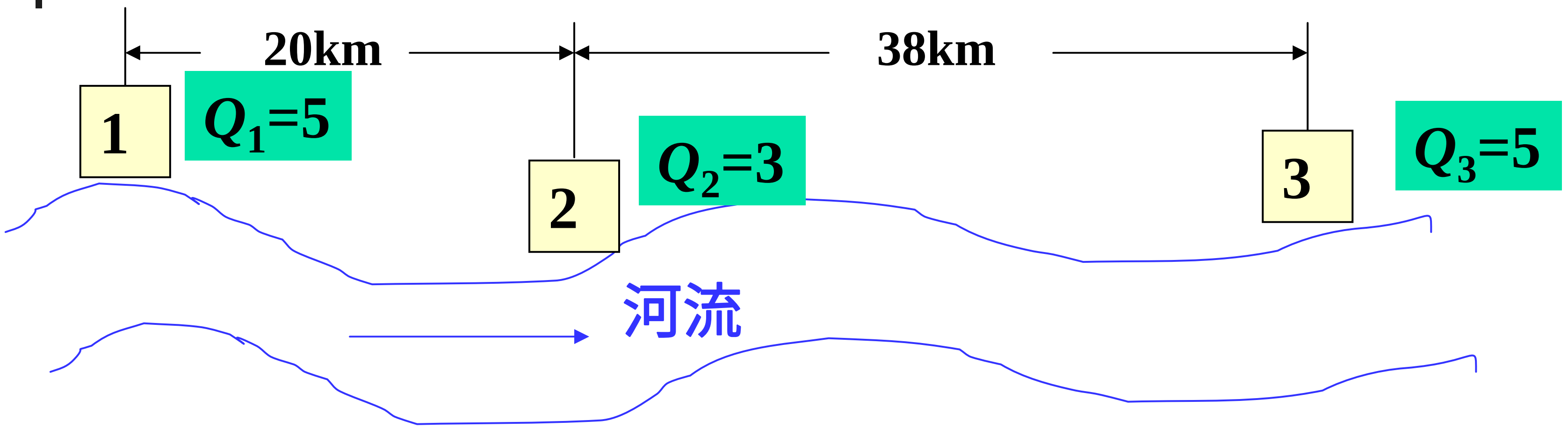
S_1	1	$1\cup 2$	$1\cup 3$	I
$v(s)$	1	7	5	11
$v(s\setminus 1)$	0	1	1	4
$v(s)-v(s\setminus 1)$	1	6	4	7
$\lvert s\rvert$	1	2	2	3
$w(\lvert s\rvert)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\lvert s\rvert)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	1/3	1	2/3	7/3

x_1=13/3

类似可得 x_2=23/6, x_3=17/6

合作对策的应用 例1 污水处理费用的合理分担

三城镇地理位置示意图



- 污水处理，排入河流
- 三城镇可单独建处理厂，或联合建厂(用管道将污水由上游城镇送往下游城镇)

Q~污水量，L~管道长度

建厂费用$P_1=73Q^{0.712}$

管道费用$P_2=0.66Q^{0.51}L$

污水处理的5 种方案

1）单独建厂 $C(1)=73\cdot 5^{0.712}=230,\ C(2)=160,\ C(3)=230$

总投资 $D_1=C(1)+C(2)+C(3)=620$

2）1, 2合作 $C(1,2)=73\cdot(5+3)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20=350$

总投资 $D_2=C(1,2)+C(3)=580$

3）2, 3合作 $C(2,3)=73\cdot(3+5)^{0.712}+0.66\cdot 3^{0.51}\cdot 38=365$

总投资 $D_3=C(1)+C(2,3)=595$

4）1, 3合作 $C(1,3)=73\cdot(5+5)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 58=463$

$>C(1)+C(3)=460$ 合作不会实现

5）三城合作总投资

$$D_5 = C(1,2,3) = 73 \cdot (5+3+5)^{0.712} + 0.66 \cdot 5^{0.51} \cdot 20 + 0.66(5+3)^{0.51} \cdot 38 = 556$$

D_5最小, 应联合建厂

D_5如何分担？

$C(1) = 230$

$C(2) = 160$

$C(3) = 230$

D_5
- 建厂费：$d_1=73\times(5+3+5)^{0.712}=453$
- 1→2管道费：$d_2=0.66\times5^{0.51}\times20=30$
- 2→3管道费：$d_3=0.66\times(5+3)^{0.51}\times38=73$

城3建议：d_1 按 5:3:5分担, d_2,d_3由城1,2担负

城2建议：d_3由城1,2按 5:3分担, d_2由城1担负

城1计算：城3分担$d_1\times5/13=174<C(3)$,

城2分担$d_1\times3/13+d_3\times3/8=132<C(2)$,

城1分担$d_1\times5/13+d_3\times5/8+d_2=250>C(1)$

不同意

Shapley合作对策 集合 $I=\{1,2,3\}$

特征函数$v(s)$~联合(集s)建厂比单独建厂节约的投资

$$v(\phi)=0,\quad v(1)=v(2)=v(3)=0$$

$$v(1\cup 2)=C(1)+C(2)-C(1,2)=230+160-350=40$$

$$v(2\cup 3)=C(2)+C(3)-C(2,3)=160+230-365=25$$

$$v(1\cup 3)=0$$

$$v(I)=C(1)+C(2)+C(3)-C(1,2,3)=230+160+230-556=64$$

$x=(x_1,x_2,x_3)$~三城从节约投资$v(I)$中得到的分配

计算城1从节约投资中得到的分配x_1

s	1	$1\cup 2$	$1\cup 3$	I
$v(s)$	0	40	0	64
$v(s\setminus 1)$	0	0	0	25
$v(s)-v(s\setminus 1)$	0	40	0	39
$\lvert s\rvert$	1	2	2	3
$w(\lvert s\rvert)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\lvert s\rvert)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	0	6.7	0	13

$x_1=19.7$, $x_2=32.1$, $x_3=12.2$　　x_2最大，如何解释？

⇨ 三城在总投资556中的分担

城1 $C(1)-x_1=$210.4, 城2 $C(2)-x_2=$127.8, 城3 $C(3)-x_3=$217.8

合作对策的应用 例2 派别在团体中的权重

90人的团体由3个派别组成，人数分别为40, 30, 20人。团体表决时需过半数的赞成票方可通过。

若每个派别的成员同时投赞成票或反对票，用Shapley合作对策计算各派别在团体中的权重。

团体 $I=\{1,2,3\}$，依次代表3个派别

定义特征函数 $v(s)=\begin{cases}1, & s\text{的成员超过}45\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

$$v(\phi)=0,\quad v(1)=v(2)=v(3)=0,$$

$$v(1\cup 2)=v(1\cup 3)=v(2\cup 3)=v(I)=1$$

权重 $x_1=x_2=x_3=1/3$ 虽然3派人数相差很大

Shapley合作对策小结

优点：公正、合理，有公理化基础。

缺点：需要知道所有合作的获利，即要定义$I=\{1,2,\ldots n\}$的所有子集(共2^n-1个)的特征函数，实际上常做不到。

如n个单位治理污染, 通常知道第i方单独治理的投资y_i和n方共同治理的投资Y, 及第i方不参加时其余n-1方的投资z_i (i=1,2, …n). 确定共同治理时各方分担的费用。

若定义特征函数为合作的获利(节约的投资)，则有

$$v(i)=0\ (i=1,2,\cdots n),\ v(I)=\sum_{i=1}^{n} y_i - Y,\quad v(I\setminus i)=\sum_{j\neq i} y_j - z_i$$

其它$v(s)$均不知道, 无法用Shapley合作对策求解

求解合作对策的其他方法

设只知道 $b_i = v(I \setminus i) \sim$ 无 $\boldsymbol{i}$ 参加时 **n-1** 方合作的获利

及 $B = v(I) \sim$ 全体合作的获利

记 $b = (b_1, \cdots, b_n)$

求各方对获利 B 的分配 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ x_i \geq 0$

例. 甲乙丙三人合作经商，若甲乙合作获利7元，甲丙合作获利5元，乙丙合作获利4元，三人合作获利11元。问三人合作时如何分配获利？

即已知 $B = 11,\ b = (4,5,7)$，求 $x = (x_1, x_2, x_3)$

（2）协商解　以n-1方合作的获利为下限

模型

$$\sum x_i = B$$

$$\begin{cases} \sum x_i - x_1 \ge b_1 \\ \quad\vdots \\ \sum x_i - x_n \ge b_n \end{cases} \Rightarrow Ax^T \ge b^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & & \mathbf{1} \\ & \ddots & \\ \mathbf{1} & & 0 \end{bmatrix}$$

求解 $A\underline{x}^T = b^T \Rightarrow$ $\underline{x}_i = \frac{1}{n-1}\sum b_i - b_i$ $\sim x_i$的下限

将剩余获利 $B - \sum \underline{x}_i$ 平均分配

$$x_i = \underline{x}_i + \frac{1}{n}(B - \sum \underline{x}_i) = \frac{1}{n}\sum b_i - b_i + \frac{B}{n}$$

例. $b = (4,5,7),\ B = 11$

$\underline{x} = (4,3,1),\ B - \sum \underline{x}_i = 3,$

$x = \underline{x} + (1,1,1) = (5,4,2)$

（3）Nash解

记$d=(d_1,\cdots,d_n)$为现状点（谈判时的威慑点）

在此基础上“均匀地”分配全体合作的获利B

模型

$$\max\prod_i (x_i-d_i)$$

$$s.t.\quad \sum x_i = B$$

$$x_i \ge d_i$$

$$x_i = d_i + \frac{1}{n}\left(B-\sum d_i\right)$$

$d_i = 0$ 平均分配获利B

$d_i = \underline{x}_i$ 3）Nash解 $\Rightarrow$ 2）协商解

（4）最小距离解

记 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$为$x$的上限

模型

$$\min \sum_i (x_i-\bar{x}_i)^2$$

$$s.t.\quad \sum x_i = B$$

$$x_i \le \bar{x}_i$$

$$\Rightarrow \quad x_i=\bar{x}_i-\frac{1}{n}\left(\sum \bar{x}_i - B\right)$$

$$\Downarrow$$

若令 $\bar{x}_i = B - b_i$ $\Rightarrow$

第i方的边际效益

$$x_i=\frac{1}{n}\sum b_i - b_i + \frac{B}{n}$$

$$\Downarrow$$

例. $b=(4,5,7),\ B=11$

$\bar{x}=(7,6,4), \sum x_i - B = 6,$

$x=\bar{x}-(2,2,2)=(5,4,2)$

4）最小距离解

$\Rightarrow$ 2）协商解

(5) 满意解

满意度 $u_i = \dfrac{x_i - d_i}{e_i - d_i}$　　d_i~现状点(最低点)　e_i~理想点(最高点)

模型

$$\max_i (\min u_i)$$

$$s.t. \sum x_i = B$$

$$u_i = \frac{B - \sum d_i}{\sum e_i - \sum d_i}$$

$$x_i = d_i + u_i(e_i - d_i)$$

$d_i = \underline{x}_i, e_i = \overline{x}_i$ ⇨ **5）基于满意度的解⇒ 2）协商解**

$d_i = 0, e_i = \overline{x}_i$ ⇨ $x_i = \dfrac{\overline{x}_i}{\sum \overline{x}_i} B$ ~ 按$\overline{x}_i$在$\sum \overline{x}_i$中的比例分配

（6）*Raiffi* 解

与协商解x=(5,4,2)比较

在 $\underline{x}$ ($n-1$方合作获利的分配)基础上进行 B的分配 :

当j参与(原来无j的)$n-1$方合作时,获利为$B-b_j=\bar{x}_j$

$\bar{x}_j$先由j和$n-1$方平分，$n-1$方再等分

$$x_j=\frac{\bar{x}_j}{2},\quad x_i=\underline{x}_i+\frac{\bar{x}_j}{2(n-1)},\ i=1,\cdots,n,\ i\neq j$$

j取$1,2,\cdots n$,再平均 ,得到

$$x_i=\frac{n-1}{n}\underline{x}_i+\frac{1}{n}\left[\frac{\bar{x}_i}{2}+\frac{1}{2(n-1)}\sum_{j\neq i}\bar{x}_j\right]$$

例. $b=(4,5,7),\ B=11$

$\underline{x}=(4,3,1),\ \bar{x}=(7,6,4)$

$$x=(4\frac{2}{3},3\frac{11}{12},2\frac{5}{12})$$

求解合作对策的6种方法（可分为三类）

A类

Shapley合作对策

$$x_i = \sum_{s \in S_i} w(|s|)[v(s) - v(s \setminus i)], i = 1,2,\cdots,n$$

需要所有 $v(s), s \in I$

$$w(|s|) = \frac{(n-|s|)!(|s|-1)!}{n!}$$

B类

只需 $b_i = v(I \setminus i), B = v(I)$

协商解

$\underline{x}_i \sim$ 下限

$$x_i = \underline{x}_i + \frac{1}{n}(B - \sum \underline{x}_i)$$

Nash解

$d_i \sim$ 现状

$$x_i = d_i + \frac{1}{n}(B - \sum d_i)$$

最小距离解

$\bar{x}_i \sim$ 上限

$$x_i = \bar{x}_i - \frac{1}{n}(\sum \bar{x}_i - B)$$

$$\underline{x} = A^{-1}b, \bar{x}_i = B - b_i$$

$$d_i = \underline{x}_i, e_i = \bar{x}_i$$

B类4种方法相同

满意解

d_i~现状, e_i~理想

$$u_i = \frac{B - \sum d_i}{\sum e_i - \sum d_i}$$

$$x_i = d_i + u_i(e_i - d_i)$$

C类

Raiffi解 只需 $b_i = v(I \setminus i), B = v(I)$

对每个j,上限$\bar{x}_j$先由j和$n-1$方平分，$n-1$方再等分

例：有一资方(甲)和二劳方(乙,丙), 仅当资方与至少一劳方合作时才获利10元，应如何分配该获利？

$$A\,(Shapley).\quad x = (6.67, 1.67, 1.67)$$

$$B.\ \ b_i = v(I \setminus i), b = (0,10,10),\ B = v(I) = 10$$

$$\underline{x}^T = A^{-1}b^T = (10,0,0)$$

$$\bar{x}_i = B - b_i, \bar{x} = (10,0,0)$$

$$\Rightarrow\quad x = (10,0,0)$$

$$C\,(Raiffi).\quad x_i = \frac{n-1}{n}\underline{x}_i + \frac{1}{n}\left[\frac{\bar{x}_i}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{j \neq i}\bar{x}_j\right]$$

$$x = (8.34, 0.83, 0.83)$$

求解合作对策的三类方法小结

A类：公正合理；需要信息多，计算复杂。

B类：计算简单，便于理解，可用于各方实力相差不大的情况；一般来说它偏袒强者。

C类：考虑了分配的上下限，又吸取了**Shapley**的思想，在一定程度上保护弱者。

Discussions