微分方程模型

微分方程模型

动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

1. 传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，
  用机理分析方法建立模型

模型1　已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

• 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$

$\Rightarrow$ $t\to\infty \Rightarrow i\to\infty$?

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ **必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)**

模型2 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ，且使接触的健康人致病

λ ~ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

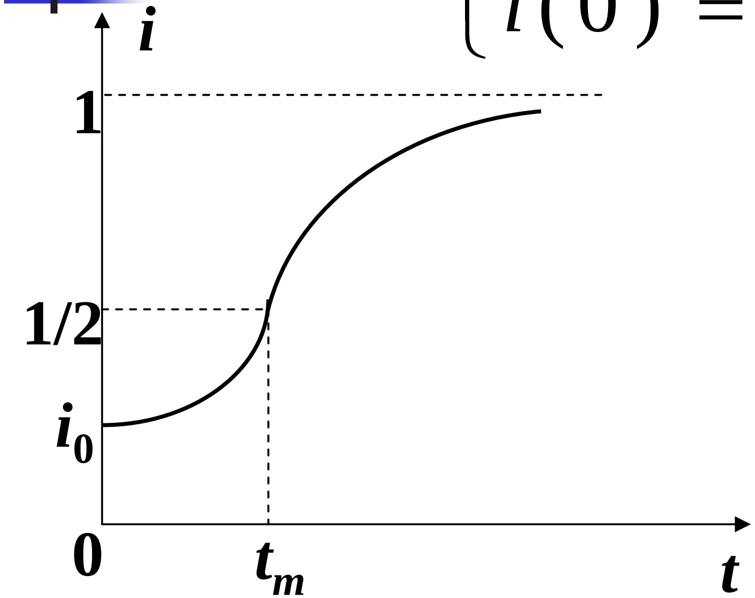
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$?

病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ~日接触率

$1/\mu$~感染期

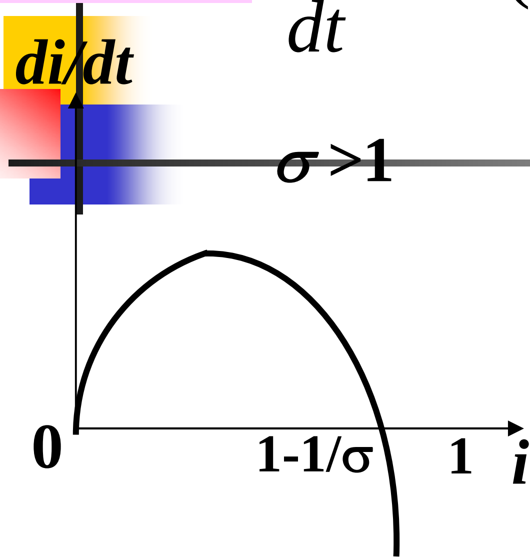
$$\sigma=\lambda/\mu$$

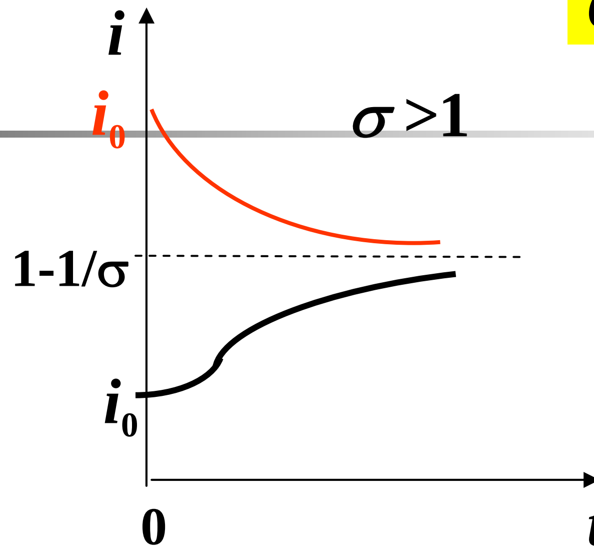
σ~一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

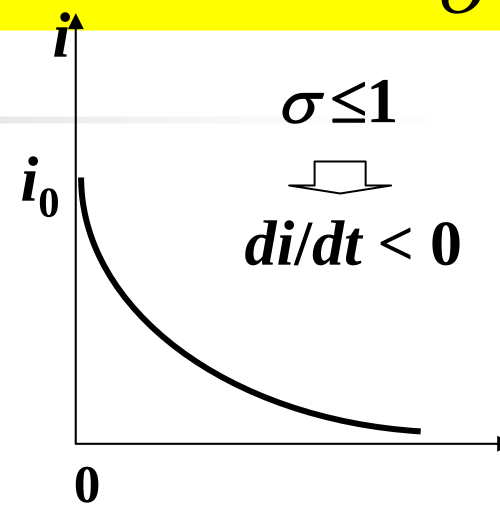
模型3

$$\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \qquad \sigma=\lambda/\mu$$

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i\left[i-\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]$$







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma\le 1 \Rightarrow i(t)\downarrow$

$\sigma>1$
i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**

SIR模型

假设

1）总人数*N*不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,

接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

$\Downarrow$

在相平面 $s \sim i$ 上研究解的性质

$i_0+s_0\approx 1$（通常 $r(0)=r_0$ 很小）

模型4

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

相轨线

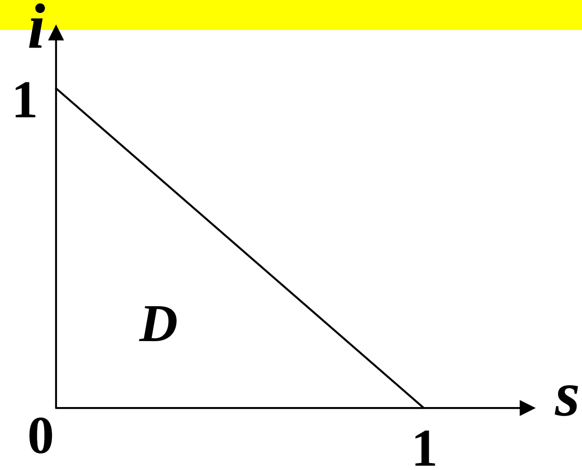
$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s, i) \mid s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$

在D内作相轨线$i(s)$

的图形，进行分析

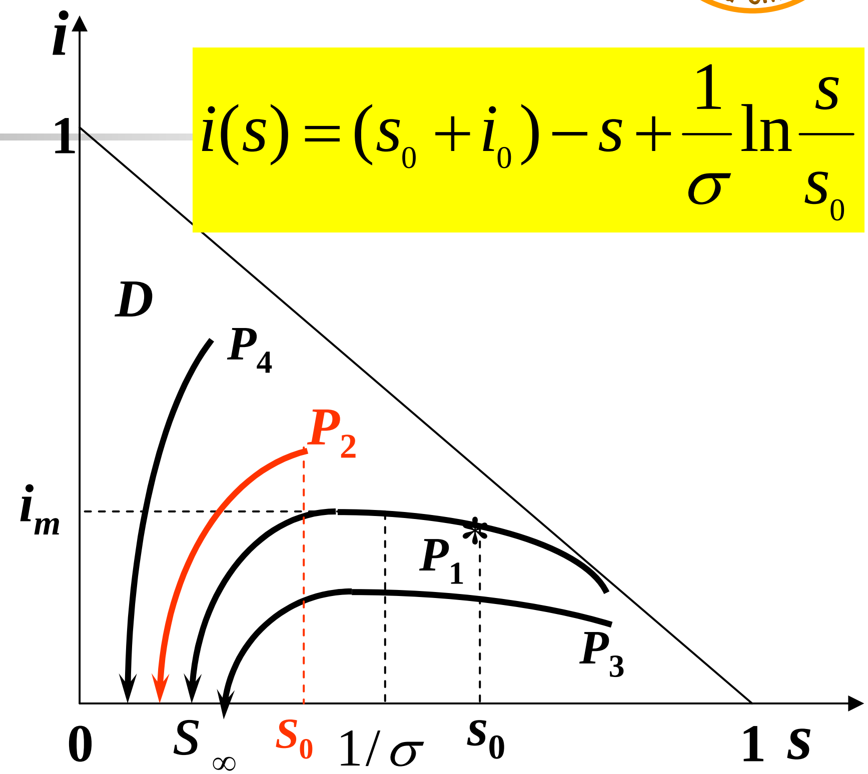


模型4 相轨线 $i(s)$ 及其分析 SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$s = 1/\sigma,\ i = i_m \quad t \to \infty,\ i \to 0$

s_∞满足 $s_0 + i_0 - s_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0} = 0$

P_1: s_0>1/♦ → $i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: s_0<1/♦ → $i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

1/♦~阈值

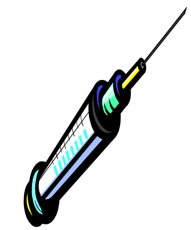
模型4　　预防传染病蔓延的手段　　SIR模型

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow,\ \mu\uparrow$

  λ(日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

  μ(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑



- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略 i_0

$$\boxed{\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}}$$

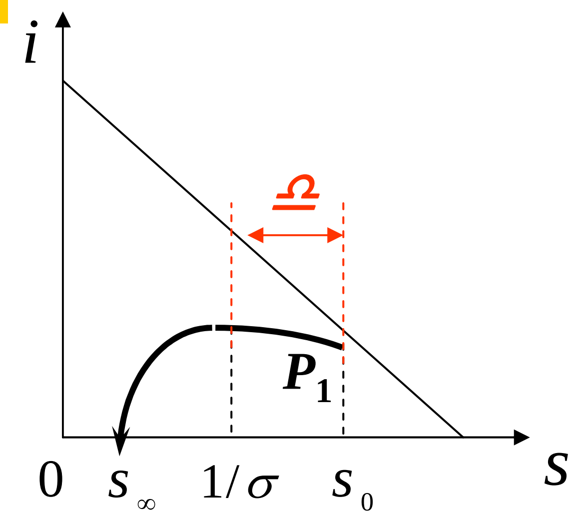
模型4　　被传染人数的估计　　SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1-\frac{x}{s_0}\right) \cong 0$$



$x << s_0$

$$x\left(1-\frac{1}{s_0\sigma}-\frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \cong 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right)$$

$s_0 - 1/\sigma = \delta$

δ小, $s_0\sigma \cong 1$

$$x \cong 2\delta$$

提高阈值1/♦→降低被传染人数比例 x

Discussions

2. 经济增长模型

增加生产 发展经济 增加投资 增加劳动力 提高技术

- 建立产值与资金、劳动力之间的关系
- 研究资金与劳动力的最佳分配，使投资效益最大
- 调节资金与劳动力的增长率，使经济(生产率)增长

1. 道格拉斯(Douglas)生产函数

产值 $Q(t)$ ⇐ 资金 $K(t)$ 劳动力 $L(t)$

技术 $f(t) = f_0$

$$Q(t) = f_0 F(K(t), L(t))$$

F为待定函数

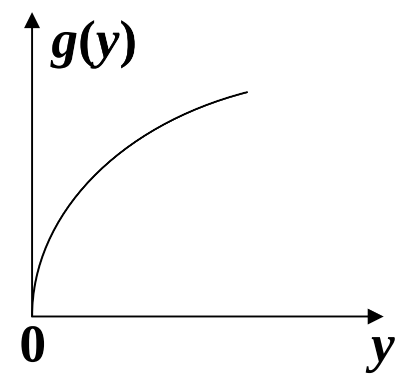
1. 道格拉斯(Douglas)生产函数

静态模型 $Q(K,L) = f_0 F(K,L)$

每个劳动力的产值 $z = \dfrac{Q}{L}$ 每个劳动力的投资 $y = \dfrac{K}{L}$

模型假设 ***z*** 随着 ***y*** 的增加而增长，但增长速度递减

$$z = Q/L = f_0 g(y) \qquad g(y) = y^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$



$$\Rightarrow Q = f_0 L (K/L)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow Q(K,L) = f_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$ **Douglas生产函数**

$$\frac{\partial Q}{\partial K}, \frac{\partial Q}{\partial L} > 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$ 含义？

1. Douglas生产函数 $Q(K,L) = f_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$

$\Downarrow$

$\mathbf{Q_K}$~ 单位资金创造的产值

$\mathbf{Q_L}$~ 单位劳动力创造的产值

$$\frac{KQ_K}{Q} = \alpha, \quad \frac{LQ_L}{Q} = 1-\alpha$$

$\Downarrow$

$$KQ_K + LQ_L = Q$$

α~ 资金在产值中的份额

1-α~劳动力在产值中的份额

更一般的道格拉斯(**Douglas**)生产函数

$$Q(K,L) = f_0 K^{\alpha} L^{\beta}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad f_0 > 0$$

2）资金与劳动力的最佳分配（静态模型）

资金来自贷款，利率 **r**　　劳动力付工资 **w**

资金和劳动力创造的效益　$S = Q - rK - wL$

求资金与劳动力的分配比例***K/L*(**每个劳动力占有的资金**)**，使效益**S**最大

$$\frac{\partial S}{\partial K} = 0, \frac{\partial S}{\partial L} = 0 \Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{r}{w}$$

$$\frac{KQ_K}{Q} = \alpha, \quad \frac{LQ_L}{Q} = 1-\alpha \Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{L}{K}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}$$

$\boldsymbol{w}\uparrow, \boldsymbol{r}\downarrow, \alpha\uparrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{K/L}\uparrow$

3) 经济(生产率)增长的条件 (动态模型)

要使 *Q*(*t*) 或 *Z*(*t*)=*Q*(*t*)/*L*(*t*) 增长, *K*(*t*), *L*(*t*)应满足的条件

模型假设

- 投资增长率与产值成正比(用一定比例扩大再生产) $\Rightarrow \dfrac{dK}{dt} = \lambda Q,\ \lambda > 0$

- 劳动力相对增长率为常数 $\Rightarrow \dfrac{dL}{dt} = \mu L \Rightarrow L(t) = L_0 e^{\mu t}$

$$Q = f_0 L g(y) \quad g(y) = y^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = \lambda f_0 L y^\alpha$$

$$y = \frac{K}{L},\ K = Ly \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = L\frac{dy}{dt} + \mu L y$$

$$\frac{dK}{dt} = \lambda f_0 L y^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \mu y = f_0 \lambda y^{\alpha}$$

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dy}{dt} + \mu L y$$

Bernoulli方程

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left(\frac{f_0\lambda}{\mu} + (y_0^{1-\alpha} - \frac{f_0\lambda}{\mu})e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{1/1-\alpha}$$

$$y_0 = K_0 / L_0,\ Q_0 = f_0 K_0^{\alpha} L_0^{1-\alpha},\ \dot{K}_0 = \lambda Q_0 \quad \Rightarrow \quad y_0^{1-\alpha} = f_0 \lambda \frac{K_0}{\dot{K}_0}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left\{ \frac{f_0\lambda}{\mu}[1 - (1 - \mu\frac{K_0}{\dot{K}_0})e^{-(1-\alpha)\mu t}] \right\}^{1/1-\alpha}$$

3) 经济增长的条件

产值$Q(t)$增长 $\Leftrightarrow$ $dQ/dt > 0$

$$Q = f_0 L g(y) \qquad \frac{dQ}{dt} = f_0 L g'(y)\frac{dy}{dt} + f_0 g(y)\frac{dL}{dt}$$

$$g(y) = y^{\alpha}$$

$$= f_0 L y^{2\alpha-1}[f_0 \alpha\lambda + \mu(1-\alpha)y^{1-\alpha}]$$

$$\frac{dQ}{dt} > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\mu}{\dot{K}_0 / K_0}\right) e^{-(1-\alpha)\mu t} < \frac{1}{1-\alpha} \qquad (A)$$

$$\mu > 0 \Rightarrow A\text{成立}$$

$$\mu < 0 \Rightarrow \text{当}\, t < \frac{1}{(1-\alpha)\mu}\ln(1-\alpha)\left(1 - \frac{\mu}{\dot{K}_0 / K_0}\right),\ A\text{成立}$$

3) 经济增长的条件

每个劳动力的产值 $Z(t)=Q(t)/L(t)$增长 $\Updownarrow$ **$dZ/dt>0$**

$$Z(t)=\frac{f_0 L y^{\alpha}}{L}=f_0\, y^{\alpha}=f_0\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{dZ}{dt}=f_0 \alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt}>0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}>0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}\right)e^{-(1-\alpha)\mu t}>0 \quad (B)$$

$$\mu<0 \Rightarrow B\text{成立} \quad \mu>0 \Rightarrow \text{当}\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}<1\text{时}, B\text{成立}$$

劳动力增长率小于初始投资增长率

Discussions

3. 正规战与游击战

第一次世界大战Lanchester提出预测战役结局的模型

战争分类：正规战争，游击战争，混合战争

只考虑双方兵力多少和战斗力强弱

兵力因战斗及非战斗减员而减少，因增援而增加

战斗力与射击次数及命中率有关

建模思路和方法为用数学模型讨论社会领域的实际问题提供了可借鉴的示例

一般模型

$x(t)$ ~甲方兵力，$y(t)$ ~乙方兵力

模型假设

- 每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力
- 每方非战斗减员率与本方兵力成正比
- 甲乙双方的增援率为$u(t), v(t)$

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,y) - \alpha x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) = g(x,y) - \beta y + v(t), & \beta > 0 \end{cases}$$

f, g 取决于战争类型

正规战争模型

双方均以正规部队作战

- 甲方战斗减员率只取决于乙方的兵力和战斗力

$f(x, y)=-ay$, a ~ 乙方每个士兵的杀伤率

$a=r_y p_y$, r_y ~射击率， p_y ~命中率

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases}$$

$$g=-bx, b=r_x p_x$$

- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

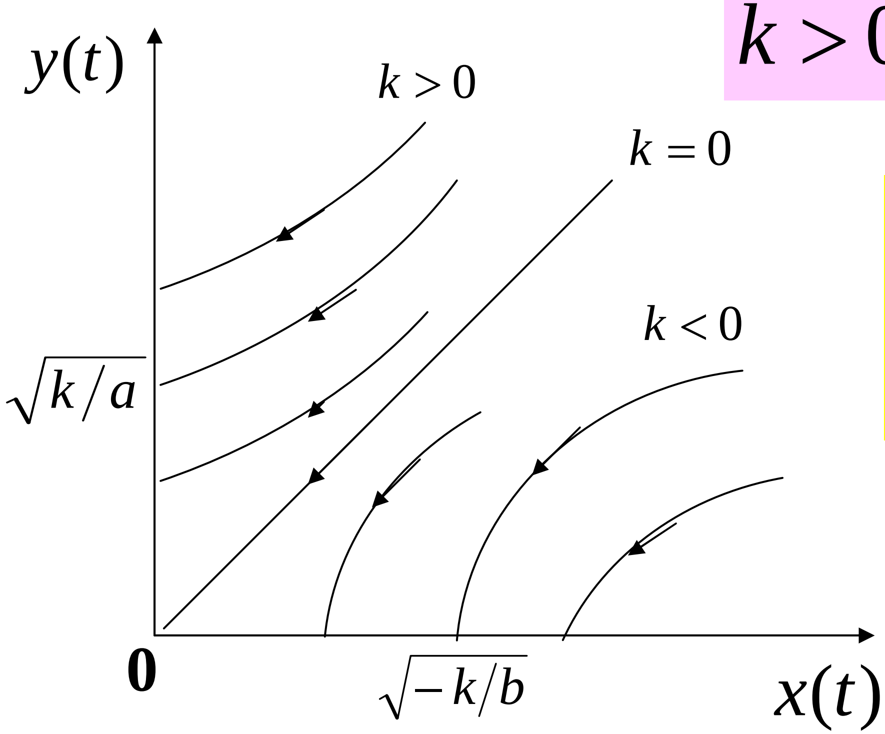
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

正规战争模型

为判断战争的结局，不求**x(t), y(t)**
而在相平面上讨论 **x** 与 **y** 的关系

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \Rightarrow ay^2 - bx^2 = k$$

$$k = ay_0^2 - bx_0^2$$



$k > 0 \Rightarrow x = 0$时$y > 0$ ⇒ 乙方胜

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$$

平方律模型

$k < 0 \Rightarrow$ 甲方胜

$k = 0 \Rightarrow$ 平局

游击战争模型

双方都用游击部队作战

- 甲方战斗减员率还随着甲方兵力的增加而增加

$f(x, y) = -cxy$, c~ 乙方每个士兵的杀伤率

$c = r_y p_y$ $\quad p_y = s_{ry} / s_x$

r_y~射击率 $\Rightarrow$ s_x ~ 甲方活动面积

p_y ~命中率 $\quad s_{ry}$ ~ 乙方射击有效面积

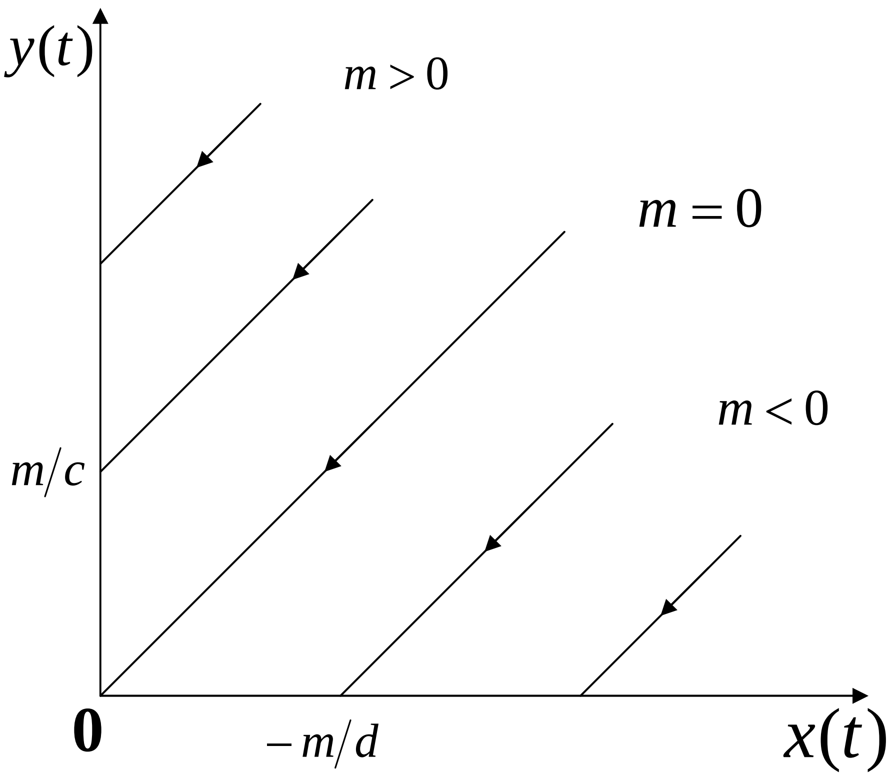
$$g(x, y) = -dxy, \ d = r_x p_x = r_x s_{rx} / s_y$$

- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

游击战争模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{c} \Rightarrow \begin{array}{l} cy - dx = m \\ m = cy_0 - dx_0 \end{array}$$



$$m > 0 \Rightarrow x = 0\text{时}y > 0$$
$$\Rightarrow \text{乙方胜}$$

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y}$$

线性律模型

$$m < 0 \Rightarrow \text{甲方胜}$$

$$m = 0 \Rightarrow \text{平局}$$

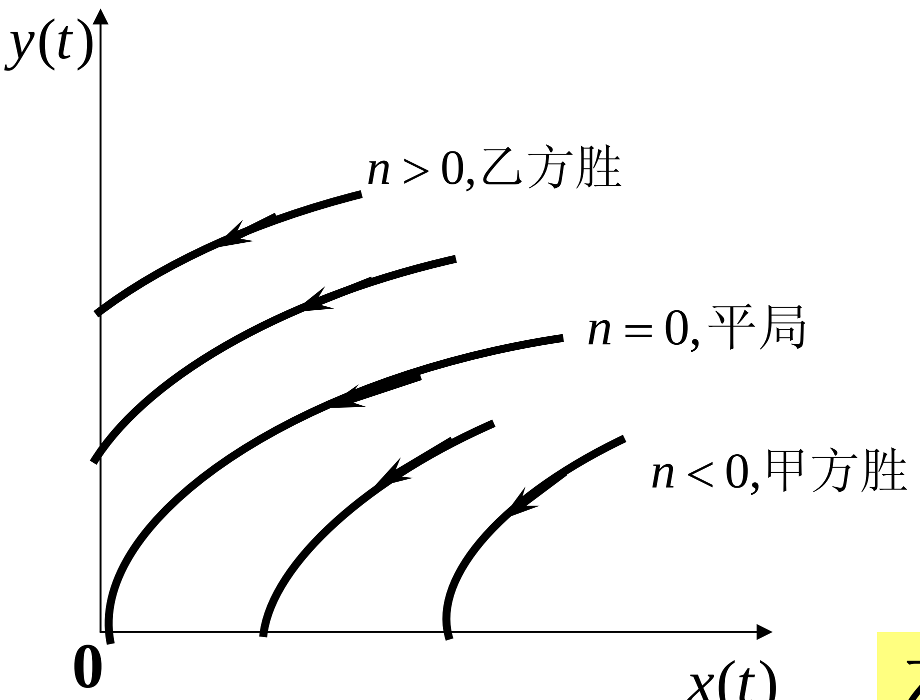
混合战争模型

甲方为游击部队，乙方为正规部队

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad cy^2 - 2bx = n, \quad n = cy_0^2 - 2bx_0$$

$n>0$ 乙方胜 $\Rightarrow \left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 > \dfrac{2b}{cx_0}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 > \dfrac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0}$



设 $x_0=100$, $r_x/r_y=1/2$, $p_x=0.1$, $s_x=1(\mathrm{km}^2)$, $s_{ry}=1(\mathrm{m}^2)$

$\Rightarrow \quad (y_0/x_0)^2 > 100$

乙方必须10倍于甲方的兵力

Discussions

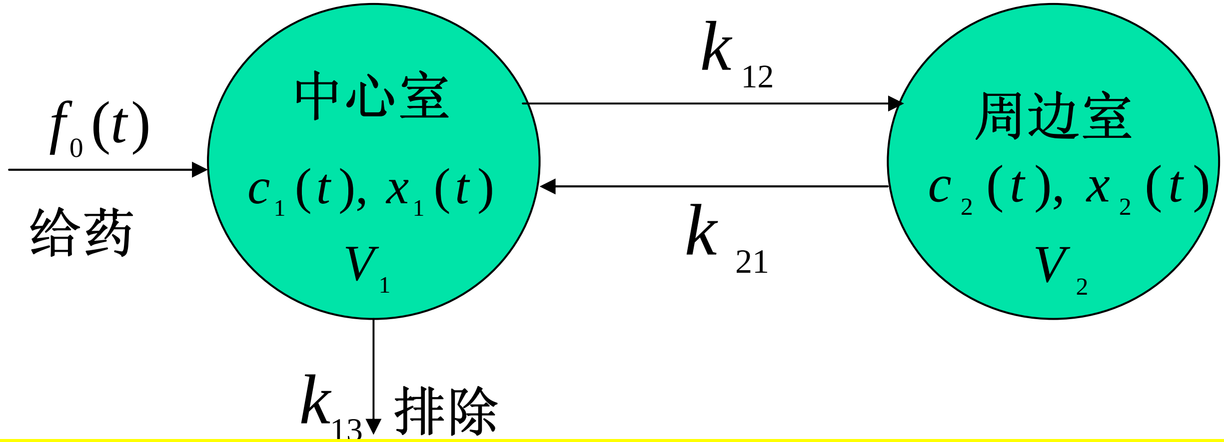
4. 药物在体内的分布与排除

- 药物进入机体形成血药浓度(单位体积血液的药物量)
- 血药浓度需保持在一定范围内——给药方案设计
- 药物在体内吸收、分布和排除过程 ——药物动力学
- 建立房室模型——药物动力学的基本步骤
- 房室——机体的一部分，药物在一个房室内均匀分布(血药浓度为常数)，在房室间按一定规律转移
- 本节讨论二室模型——中心室(心、肺、肾等)和周边室(四肢、肌肉等)

模型假设

- 中心室(1)和周边室(2), 容积不变
- 药物从体外进入中心室，在二室间相互转移, 从中心室排出体外
- 药物在房室间转移速率及向体外排除速率，与该室血药浓度成正比

模型建立



$x_i(t)$ ~ 药量

$c_i(t)$ ~ 浓度

V_i ~ 容积

$i = 1,2$

$$\dot{x}_1(t) = -k_{12}x_1 - k_{13}x_1 + k_{21}x_2 + f_0(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = k_{12}x_1 - k_{21}x_2$$

f_0 ~ 给药速率

模型建立

$$x_i(t) = V_i c_i(t),\ i = 1,2$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1} k_{21} c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2} k_{12} c_1 - k_{21} c_2 \end{cases}$$

线性常系数
非齐次方程

对应齐次
方程通解

$$\begin{cases} \overline{c}_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} \\ \overline{c}_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21} k_{13} \end{cases}$$

几种常见的给药方式

给药速率 $f_0(t)$
和初始条件

1. 快速静脉注射

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

$t=0$ 瞬时注射剂量D_0的药物进入中心室, 血药浓度立即为D_0/V_1

$$f_0(t) = 0,\ c_1(0) = \frac{D_0}{V_1},\ c_2(0) = 0$$

$$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta-\alpha)}[(k_{21}-\alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - k_{21})e^{-\beta t}]$$

$$c_2(t) = \frac{D_0 k_{12}}{V_2(\beta-\alpha)}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = k_{12}+k_{21}+k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21}k_{13} \end{cases}$$

2. 恒速静脉滴注

$0 \le t \le T$ 药物以速率k_0进入中心室

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

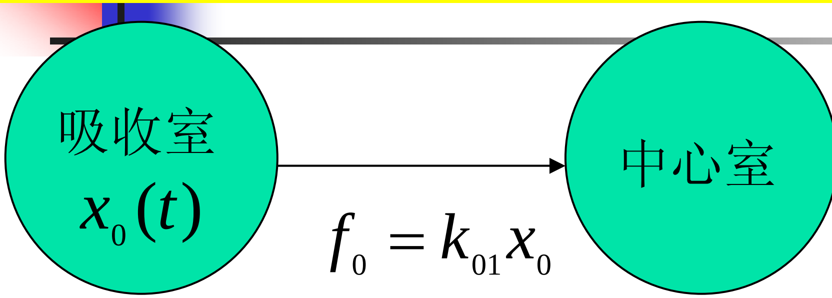
$$f_0(t) = k_0,\ c_1(0) = 0,\ c_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} c_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} + \dfrac{k_0}{k_{13}V_1}, \quad 0 \le t \le T \\ c_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} + \dfrac{k_{12}k_0}{k_{21}k_{13}V_2}, \quad 0 \le t \le T \\ A_2 = \dfrac{V_1(k_{12}+k_{13}-\alpha)}{k_{21}V_2}A_1,\ B_2 = \dfrac{V_1(k_{12}+k_{13}-\beta)}{k_{21}V_2}B_1 \end{cases}$$

$t > T$, $c_1(t)$和 $c_2(t)$按指数规律趋于零

3. 口服或肌肉注射

相当于药物(剂量D_0)先进入吸收室，吸收后进入中心室



吸收室药量$x_0(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -k_{01}x_0 \\ x_0(0) = D_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

$$x_0(t) = D_0 e^{-k_{01}t} \qquad f_0(t) = k_{01}x_0(t) = D_0 k_{01} e^{-k_{01}t}$$

$$c_1(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ee^{-k_{01}t}$$

$$c_1(0) = 0, c_2(0) = 0 \Rightarrow A, B, E$$

参数估计

各种给药方式下的 $c_1(t), c_2(t)$

取决于参数 $k_{12}, k_{21}, k_{13}, V_1, V_2$

$t=0$ 快速静脉注射 D_0，在 $t_i(i=1,2,\ldots n)$ 测得 $c_1(t_i)$

$$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta - \alpha)}[(k_{21} - \alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - k_{21})e^{-\beta t}]$$

设 $\alpha < \beta, t$ 充分大 $\Rightarrow$ $c_1(t) = \frac{D_0(k_{21} - \alpha)}{V_1(\beta - \alpha)}e^{-\alpha t} = Ae^{-\alpha t}$

由较大的 $t_i, c_1(t_i)$ 用最小二乘法定 A, α

$$\tilde{c}_1(t) = c_1(t) - Ae^{-\alpha t} = Be^{-\beta t}$$

由较小的 $t_i, \tilde{c}_1(t_i)$ 用最小二乘法定 B, β

参数估计

$t \to \infty, c_1, c_2 \to 0$ ⇨ 进入中心室的药物全部排除

$$D_0 = k_{13} V_1 \int_0^\infty c_1(t)\,dt$$ ⇨ $$D_0 = k_{13} V_1 \left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} \right)$$

$$c_1(0) = \frac{D_0}{V_1} = A + B$$ ⇨ $$k_{13} = \frac{\alpha\beta\,(A+B)}{\alpha B + \beta A}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21} k_{13} \end{cases}$$ ⇨ $$k_{21} = \frac{\alpha\beta}{k_{13}}$$

$$k_{12} = \alpha + \beta - k_{13} - k_{21}$$

Discussions

5. 香烟过滤嘴的作用

问题

• 过滤嘴的作用与它的材料和长度有什么关系

• 人体吸入的毒物量与哪些因素有关，其中哪些因素影响大，哪些因素影响小。

模型分析

• 分析吸烟时毒物进入人体的过程，建立吸烟过程的数学模型。

• 设想一个“机器人”在典型环境下吸烟，吸烟方式和外部环境认为是不变的。

模型假设

1）l_1~烟草长， l_2~过滤嘴长， $l = l_1 + l_2$，毒物量M均匀分布，密度$w_0=M/l_1$

2）点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是$a':a$, $a'+a=1$

3）未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的(单位时间)吸收率分别是b和β

4）烟雾沿香烟穿行速度是常数v，香烟燃烧速度是常数u， $v \gg u$

定性分析

Q ~ 吸一支烟毒物进入人体总量

$\beta\uparrow, l_2\uparrow, M\downarrow, a\downarrow, v\downarrow \Rightarrow Q\downarrow$

$b\uparrow, l_1\uparrow \Rightarrow Q\downarrow?$

$u\uparrow \Rightarrow Q\uparrow\downarrow?$

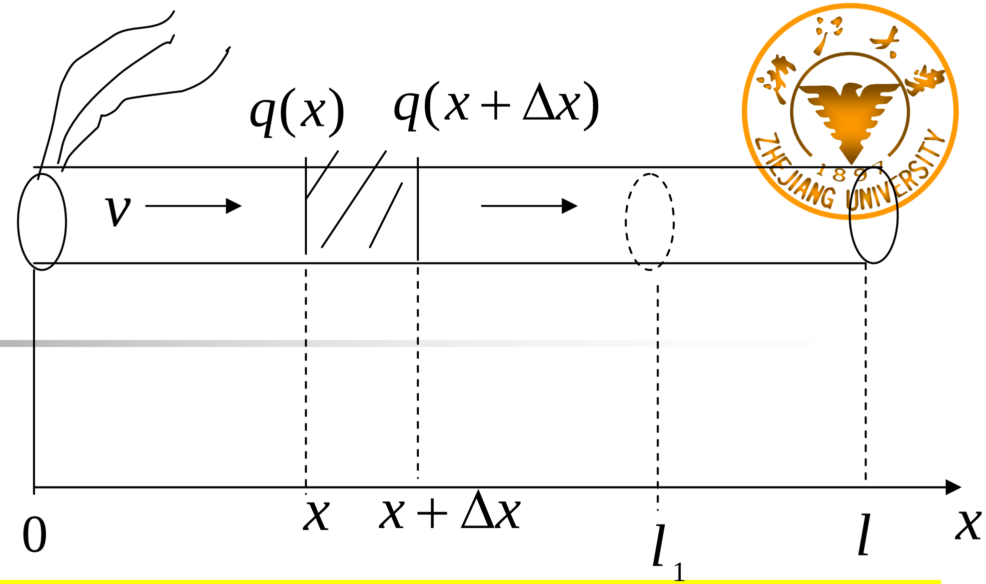
模型建立

t=0, x=0，点燃香烟

$q(x,t)$ ~ 毒物流量

$w(x,t)$ ~ 毒物密度

$w(x,0) = w_0$



$$Q = \int_0^T q(l,t)\,dt\,,\quad T = l_1 / u$$

1) 求$q(x,0)=q(x)$

$$q(x) - q(x+\Delta x) = \begin{cases} bq(x)\Delta\tau,\ 0 \le x \le l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau,\ l_1 \le x \le l, \end{cases} \qquad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\frac{dq}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{b}{v} q(x),\ 0 \le x \le l_1 \\ -\dfrac{\beta}{v} q(x),\ l_1 \le x \le l \end{cases}$$

$$q(0) = aH_0$$
$$H_0 = uw_0$$

1) 求$q(x,0)=q(x)$

$$q(x)=\begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0\le x\le l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

2) 求$q(l,t)$

t*时刻，香烟燃至 *x=ut

$$H(t)=uw(ut,t)$$

$$q(x,t)=\begin{cases} aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\le x\le l_1 \\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

3) 求$w(ut,t)$

$$w(x,t+\Delta t)-w(x,t)=b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{b}{v}auw(ut,t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}\\ w(x,0)=w_0\end{cases}$$

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right),\quad a'=1-a$$

4) 计算 Q

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right)$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{abut}{v}}\right)$$

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)dt=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),$$

$$r=\frac{a'bl_1}{v},\varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}$$

结果分析

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),$$ $$r = \frac{a'bl_1}{v}, \varphi(r) = \frac{1-e^{-r}}{r}$$

1）**Q与a,M成正比，　aM是毒物集中在$x=l$ 处的吸入量**

2) $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ ~过滤嘴因素，**β, l_2**~ 负指数作用

$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 是毒物集中在$x=l_1$ 处的吸入量

3）$\varphi(r)$~ 烟草的吸收作用

烟草为什么有作用?

$$r = \frac{a'bl_1}{v} << 1$$

$$\varphi(r) \doteq 1 - r/2$$

$$Q \doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1 - \frac{a'bl_1}{2v}\right)$$

b, l_1~ 线性作用

结果分析

4) 与另一支不带过滤嘴的香烟比较，w_0, b, a, v, l 均相同，吸至 $x=l_1$扔掉

带过滤嘴

$$Q_1 = \frac{a w_0 v}{a' b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a' b l_1}{v}}\right)$$

不带过滤嘴

$$Q_2 = \frac{a w_0 v}{a' b} e^{-\frac{b l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a' b l_1}{v}}\right)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{-\frac{(\beta - b) l_2}{v}}$$

$$\beta > b \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

提高 β-b 与加长l_2，效果相同

Discussions

6. 人口预测和控制

- 年龄分布对于人口预测的重要性
- 只考虑自然出生与死亡，不计迁移

人口发展方程

$F(r,t)$ ~ 人口分布函数 (年龄 $< r$ 的人口）

$p(r,t)$ ~ 人口密度函数

$N(t)$ ~ 人口总数

$r_m \ (\to \infty)$ ~ 最高年龄

$$F(0,t) = 0,\ F(r_m,t) = N(t)$$

$$p(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

人口发展方程

$\mu(r,t)\sim$ 死亡率

t, 年龄 $[r, r+dr]$ 人数 $-$ $t+dt$, 年龄 $[r+dr_1, r+dr_1+dr]$ 人数 $=$ $(t, t+dt)$ 内死亡人数, $dt = dr_1$

$$p(r,t)dr - p(r+dr_1, t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$$

$$[p(r+dr_1,t+dt)-p(r,t+dt)]+[p(r,t+dt)-p(r,t)]$$
$$=-\mu(r,t)p(r,t)dt, \qquad dt=dr_1$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t)}$$

一阶偏微分方程

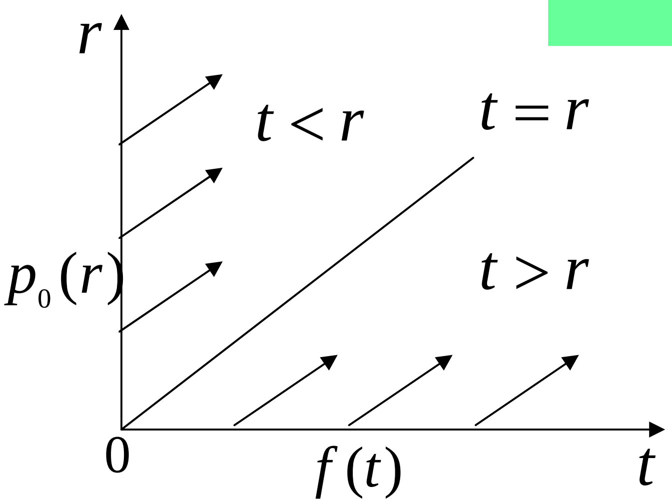
人口发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)\,p(r,t) \\ p(r,0) = p_0(r), \quad r \ge 0 \\ p(0,t) = f(t), \quad t \ge 0 \end{cases}$$

~已知函数（人口调查）

~生育率（控制人口手段）

$$\mu(r,t) = \mu(r) \Rightarrow p(r,t) = \begin{cases} p_0(r-t)\,e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, & 0 \le t \le r \\ f(t-r)\,e^{-\int_{0}^{r}\mu(s)ds}, & t > r \end{cases}$$



$$F(r,t) = \int_0^r p(s,t)\,ds$$

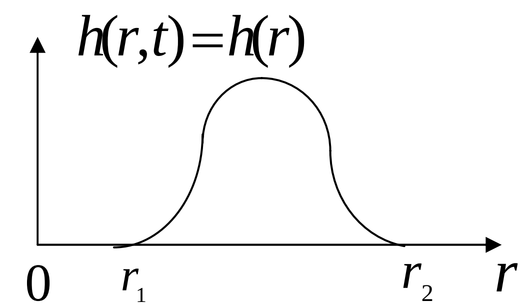
$$N(t) = \int_0^{r_m} p(s,t)\,ds$$

生育率的分解

$k(r,t)\sim$ (女性)性别比函数

$b(r,t)\sim$ (女性)生育数　　$[r_1, r_2]\sim$ 育龄区间

$$f(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$



$$b(r,t)=\beta(t)h(r,t)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr=1$$

***h*~生育模式**

$$\beta(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr$$

***β*~总和生育率**

$$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

人口发展方程和生育率

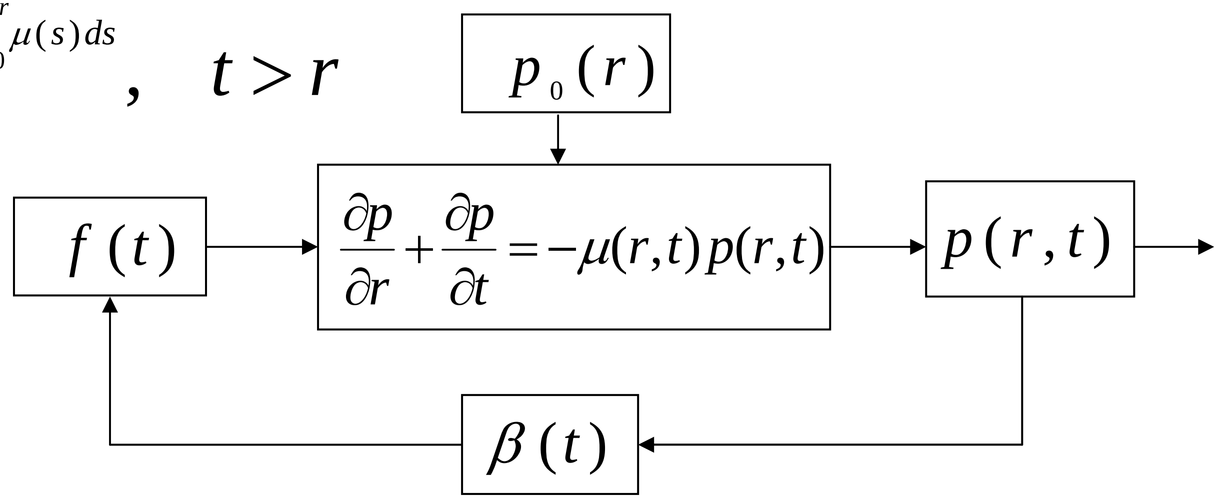
$$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

$\beta(t)$ ~总和生育率——控制生育的多少

$h(r,t)$ ~生育模式——控制生育的早晚和疏密

$$p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, 0\le t\le r \\ f(t-r)e^{-\int_{0}^{r}\mu(s)ds}, \quad t>r \end{cases}$$

- 正反馈系统
- 滞后作用很大



人口指数

1）人口总数 $N(t)=\int_0^{r_m} p(r,t)dr$

2）平均年龄 $R(t)=\frac{1}{N(t)}\int_0^{r_m} rp(r,t)dr$

3）平均寿命 $S(t)=\int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t}\mu(r,t)dr}d\tau$

*t*时刻出生的人，死亡率按 $\mu(r,t)$ 计算的平均存活时间

4）老龄化指数 $\omega(t)=R(t)/S(t)$

控制生育率 ⇨ 控制 $N(t)$不过大

控制 $\omega(t)$不过高

Discussions

7. 烟雾的扩散与消失

现象和问题

炮弹在空中爆炸，烟雾向四周扩散，形成圆形不透光区域。

不透光区域不断扩大，然后区域边界逐渐明亮，区域缩小，最后烟雾消失。

建立模型描述烟雾扩散和消失过程，分析消失时间与各因素的关系。

问题分析

无穷空间由瞬时点源导致的扩散过程，用二阶偏微分方程描述烟雾浓度的变化。

观察的烟雾消失与烟雾对光线的吸收，以及仪器对明暗的灵敏程度有关。

模型假设

1）烟雾在无穷空间扩散，不受大地和风的影响；扩散服从热传导定律。

2）光线穿过烟雾时光强的减少与烟雾浓度成正比；无烟雾的大气不影响光强。

3）穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

模型建立

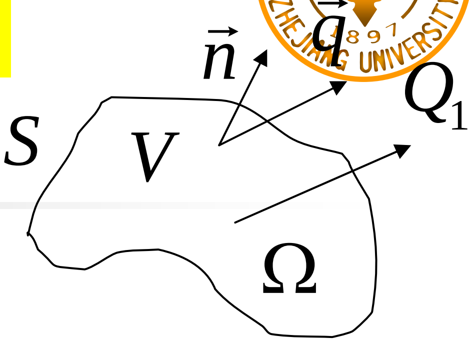
1）烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

热传导定律：单位时间通过单位法向面积的流量与浓度梯度成正比

$$\vec{q} = -k \cdot gradC$$

1）烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

$[t,t+\Delta t]$通过Ω流量 $$Q_1=\int_t^{t+\Delta t}\iint_S \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\sigma dt$$



Ω内烟雾改变量 $$Q_2=\iiint_V [C(x,y,z,t)-C(x,y,z,t+\Delta t)]dV$$

曲面积分的奥氏公式 $$\iint_S \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V div\vec{q}\,dV$$

$$Q_1=Q_2$$

$$\vec{q}=-k\cdot gradC$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k[div(gradC)]=k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$$

1）烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right),\quad -\infty<x,y,z<\infty,\quad t>0$$

初始条件 $C(x,y,z,0)=Q\delta(x,y,z)$

Q~炮弹释放的烟雾总量

δ~单位强度的点源函数

$$C(x,y,z,t)=\frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

- 对任意**t, C**的等值面是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$; $R\uparrow\rightarrow C\downarrow$
- 仅当 $t\rightarrow\infty$, 对任意点(x,y,z), $C\rightarrow 0$

2）穿过烟雾光强的变化规律

$I(l)$ ~ 沿l方向的光强

$C(l)$ ~ 沿l方向的烟雾浓度

光强的减少与烟雾浓度成正比

$$\frac{dI}{dl} = -\alpha C(l) I(l)$$

$I(l_0) = I_0$ 未进入烟雾($l \le l_0$)的光强为I_0

$$\Rightarrow \quad I(l) = I_0 e^{-\alpha \int_{l_0}^{l} C(s)\, ds}$$

3）仪器灵敏度与烟雾明暗界限

$$I(l) = I_0 e^{-\alpha \int_{l_0}^{l} C(s)ds}$$

烟雾浓度连续变化 ⇒ 不透光区域有扩大、缩小、消失的过程

烟雾中光强连续变化 ⇑

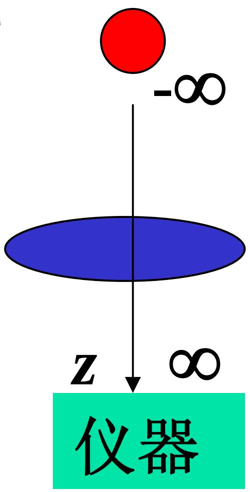
穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

μ ~ 仪器灵敏度，当 $I/I_0 < 1-\mu$，观测结果为暗

设光源在$z=-\infty$，仪器在$z=\infty$，则观测到的明暗界限为

$$e^{-\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x,y,z,t)dz} = 1-\mu$$

~不透光区域边界



4）不透光区域边界的变化规律

$$C(x,y,z,t)=\frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

$$e^{-\alpha\int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)dz}=1-\mu$$

$$\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)dz=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\mu}\approx\frac{\mu}{\alpha}\quad（\mu\text{很小}）$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/a}dx=\sqrt{\pi a}\quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)dz=\frac{Q}{4\pi kt}e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$$

$$\frac{Q}{4\pi kt}e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}=\frac{\mu}{\alpha}$$

对任意t, 不透光区域边界是圆周

$$x^2+y^2=r^2$$

不透光区域边界半径

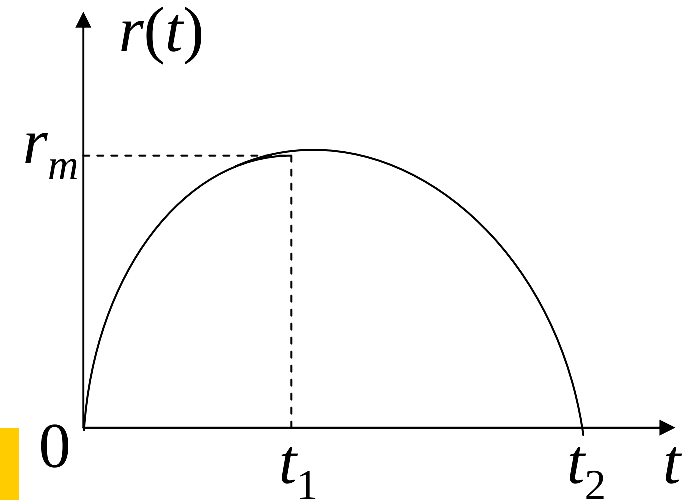
$$r(t)=\sqrt{4kt\ \ln\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu t}}$$

结果分析

$$r(t)=\sqrt{4kt\ \ln\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu t}}$$

$$t=t_1=\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu e},\quad r=r_m=\sqrt{\frac{\alpha Q}{\pi\mu e}}\text{(最大值)}$$

$$t=t_2=\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu},\quad r=0$$



$$\Rightarrow\quad t_2=t_1\cdot e\doteq 2.7t_1$$

观测到不透光区域边界达到最大的时刻t_1，可以预报烟雾消失的时刻t_2

$$\alpha\uparrow,Q\uparrow,\mu\downarrow\Rightarrow t_1\uparrow,r_m\uparrow\qquad k\downarrow\Rightarrow t_1\uparrow$$

Discussions

8. 万有引力定律的发现

背景

航海业发展

天文观测精确

“地心说”动摇

哥白尼：“日心说”

伽里略：落体运动

开普勒：行星运动三定律 ⇨ 变速运动的计算方法

牛顿：一切运动有力学原因

牛顿运动三定律

牛顿：研究变速运动，发明微积分（流数法）

开普勒三定律

牛顿运动第二定律

⇨

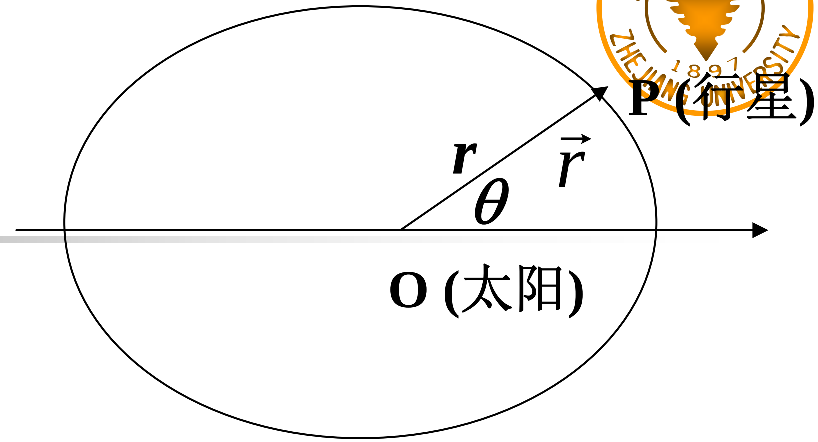
万有引力定律

《自然科学之数学原理》**(1687)**

模型假设

极坐标系 (r,θ)　　太阳 $(0,0)$

行星位置：向径 $\vec{r}(t)(r(t),\theta(t))$



1. 行星轨道

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad p=\frac{b^2}{a},\quad b^2=a^2(1-e^2)$$

a~长半轴, **b**~短半轴, **e**~离心率

2. 单位时间 $\vec{r}$ 扫过面积为常数 *A*

$$r^2\dot{\theta}/2=A$$

3. 行星运行周期 *T*

$$T^2=\lambda a^3$$

λ~ 绝对常数

4. 行星运行受力 $\vec{f}$

$$\vec{f}=m\ddot{\vec{r}}$$

m ~ 行星质量

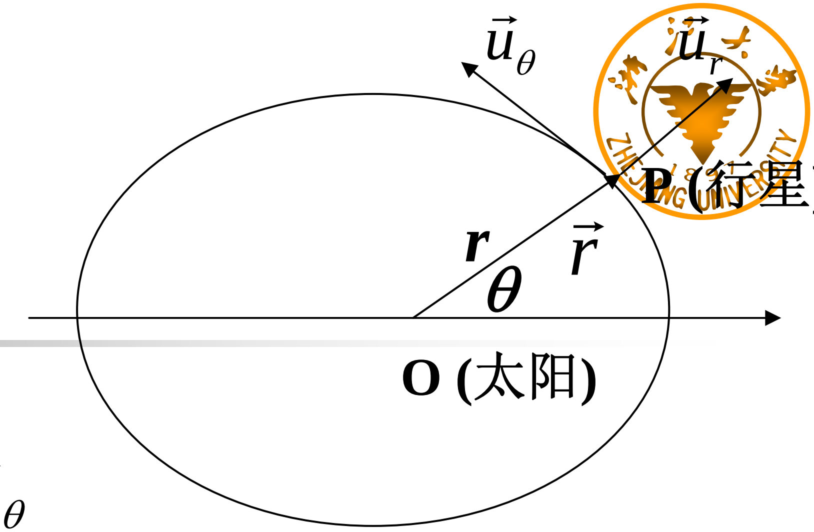
模型建立

向径$\vec{r}$ 的基向量

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$



$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$r^2\dot{\theta}/2 = A \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2A}{r^2}, \ddot{\theta} = \frac{-4A\dot{r}}{r^3} \qquad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{2Ae\sin\theta}{p}, \ddot{r} = \frac{4A^2(p-r)}{pr^3} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{4A^2}{pr^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\frac{4A^2m}{pr^2}\vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

模型建立

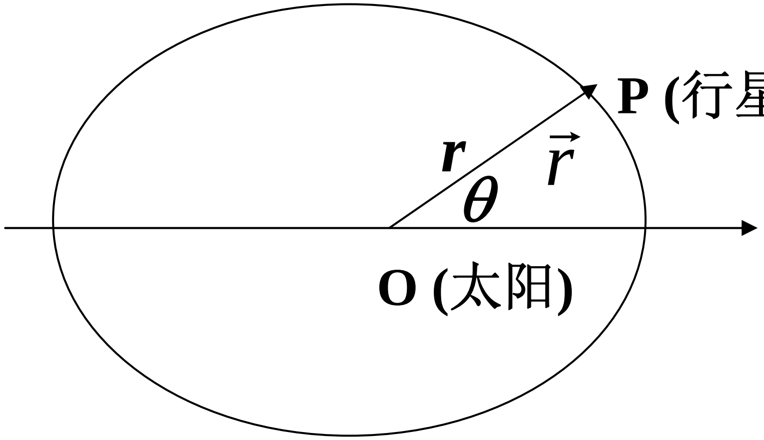
$$\vec{f} = -\frac{4A^2 m}{pr^2}\vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

万有引力定律

$$\vec{f} = -\frac{kMm}{r^2}\vec{r}_0$$

需证明 **$4A^2/p = kM$**

（与哪一颗行星无关）



***A*~单位时间 $\vec{r}$ 扫过面积**

$$TA = \pi ab$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$T^2 = \lambda a^3$$

$$A^2/p = \pi^2/\lambda$$

$4\pi^2/\lambda = kM$ (习题)

Discussions