

A decorative graphic on the left side of the slide, consisting of overlapping blue, red, and yellow squares with a black crosshair.

# 初等模型 (III)

---



## 4. 双层玻璃窗的功效

---

## 问题

双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比，减少多少热量损失

## 假设

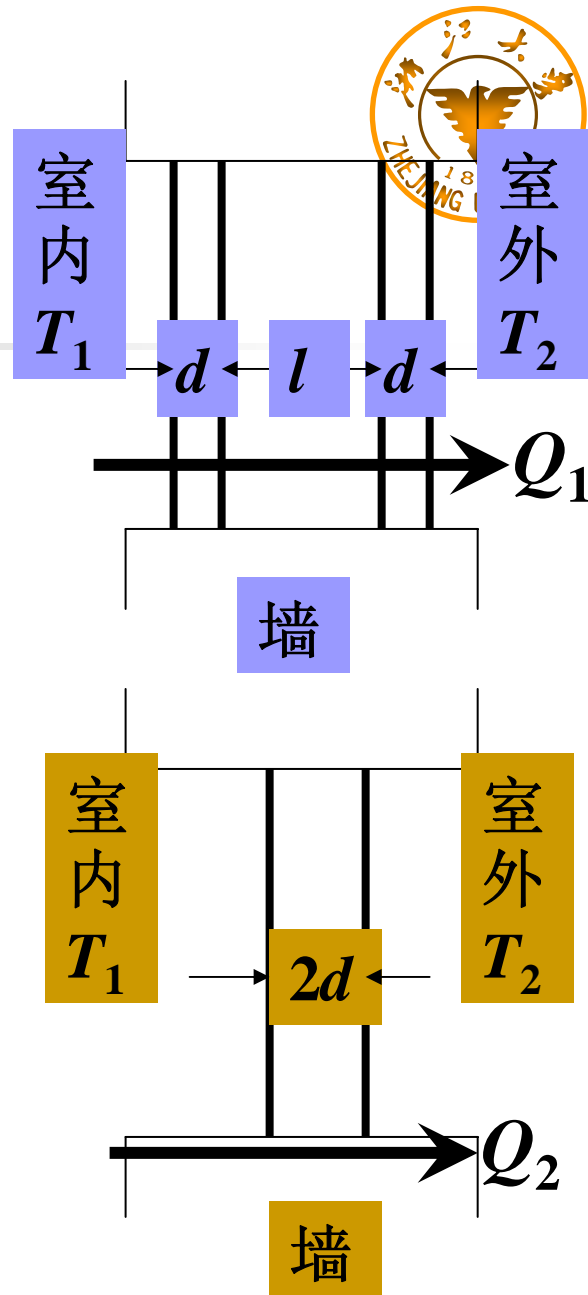
热量传播只有传导，没有对流  
 $T_1, T_2$  不变，热传导过程处于稳态  
材料均匀，热传导系数为常数

## 建模

$Q$  ~ 单位时间单位面积传导的热量  
 $\Delta T$  ~ 温差,  $d$  ~ 材料厚度,  $k$  ~ 热传导系数

热传导定律

$$Q = k \frac{\Delta T}{d}$$





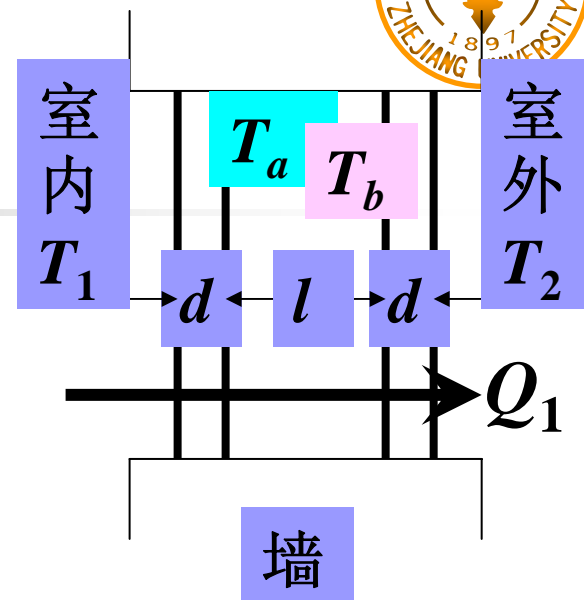
## 建模 记双层玻璃窗传导的热量 $Q_1$

$T_a$ ~内层玻璃的外侧温度

$T_b$ ~外层玻璃的内侧温度

$k_1$ ~玻璃的热传导系数

$k_2$ ~空气的热传导系数



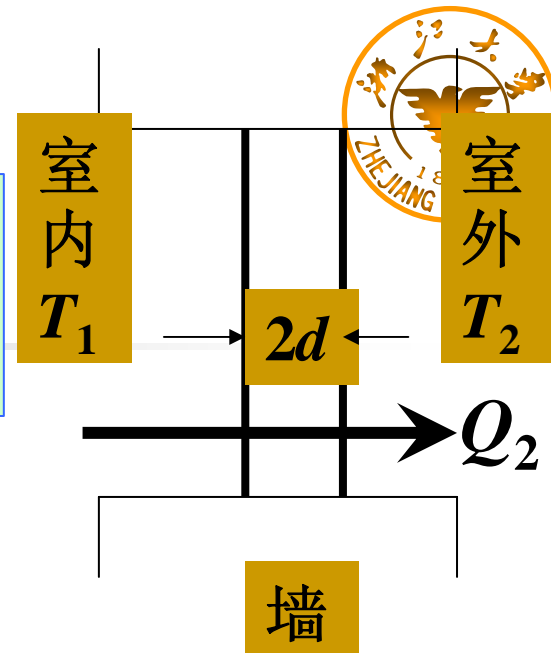
$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

$$\Rightarrow Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s + 2)}, \quad s = h \frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d}$$

**建模** 记单层玻璃窗传导的热量 $Q_2$

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}$$



双层与单层窗传导的热量之比

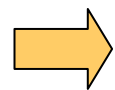
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{s+2}, \quad s = h \frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d}$$

$$Q_1 < Q_2$$

$$k_1 = 4 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3}, \quad k_2 = 2.5 \times 10^{-4}, \quad k_1/k_2 = 16 \sim 32$$

对 $Q_1$ 比 $Q_2$ 的减少量  
作最保守的估计,

取 $k_1/k_2 = 16$



$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h+1}, \quad h = \frac{l}{d}$$



## 模型应用

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h + 1}, \quad h = \frac{l}{d}$$

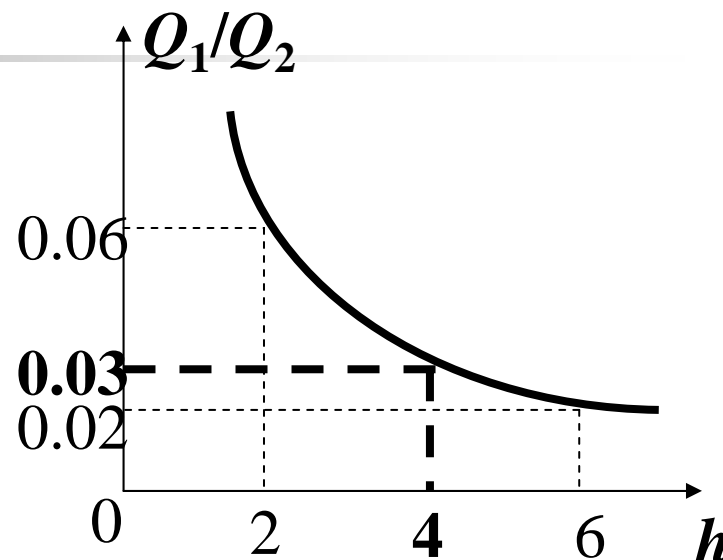
取  $h=l/d=4$ , 则  $Q_1/Q_2=0.03$

即双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比, 可减少97%的热量损失。

## 结果分析

$Q_1/Q_2$  所以如此小, 是由于层间空气极低的热传导系数  $k_2$ , 而这要求空气非常干燥、不流通。房间通过天花板、墙壁... 损失的热量更多。

双层窗的功效不会如此之大





# Discussions

---



## 5. 录像机计数器的用途





## 问题

经试验，一盘标明**180**分钟的录像带从头走到尾，时间用了**184**分，计数器读数从**0000**变到**6061**。

在一次使用中录像带已经转过大半，计数器读数为**4450**，问剩下的一段还能否录下**1**小时的节目？

## 思考

计数器读数是均匀增长的吗？

## 要求

不仅回答问题，而且建立计数器读数与录像带转过时间的关系。

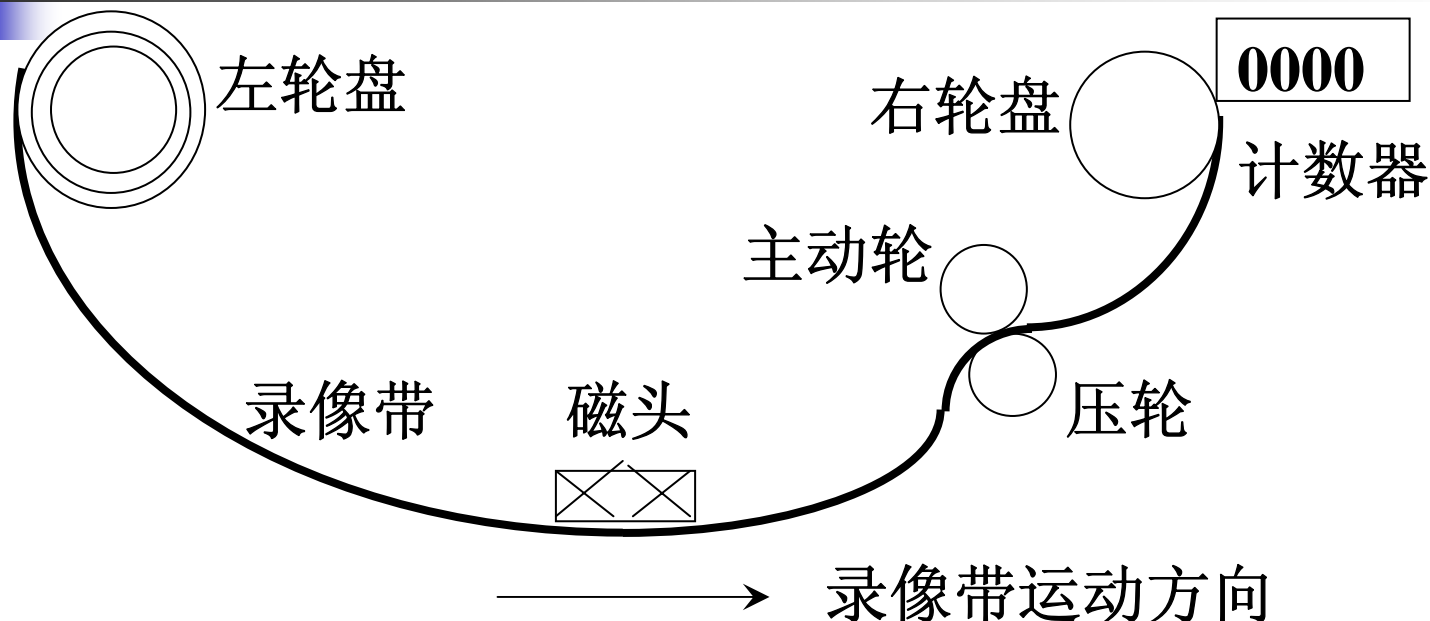


观察

计数器读数增长越来越慢！

问题分析

录像机计数器的工作原理



录像带运动

右轮盘半径增大

计数器读数增长变慢

录像带运动速度是常数

右轮转速不是常数



## 模型假设

- 录像带的运动速度是常数  $v$  ;
- 计数器读数  $n$  与右轮转数  $m$  成正比 , 记  $m=kn$  ;
- 录像带厚度 ( 加两圈间空隙 ) 为常数  $w$  ;
- 空右轮盘半径记作  $r$  ;
- 时间  $t=0$  时读数  $n=0$  .

### 建模目的

建立时间 $t$ 与读数 $n$ 之间的关系

( 设 $v, k, w, r$ 为已知参数 )



## 模型建立

### 建立 $t$ 与 $n$ 的函数关系有多种方法

1. 右轮盘转第  $i$  圈的半径为  $r+wi$ ,  $m$  圈的总长度等于录像带在时间  $t$  内移动的长度  $vt$ , 所以

$$\sum_{i=1}^m 2\pi(r+wi) = vt \qquad m = kn$$

$$\rightarrow t = \frac{\pi wk^2}{v} n^2 + \frac{2\pi rk}{v} n$$



## 模型建立

2. 考察右轮盘面积的变化，等于录像带厚度乘以转过的长度，即

3. 考察 $t$ 到 $t+dt$ 录像带在右轮盘缠绕的长度，有

$$\pi[(r + wkn)^2 - r^2] = wvt$$



$$t = \frac{\pi wk^2}{v} n^2 + \frac{2\pi rk}{v} n$$

$$(r + wkn)2\pi kdn = vdt$$





## 思考

## 3种建模方法得到同一结果

$$\sum_{i=1}^m 2\pi(r + wi) = vt$$

$$\pi[(r + wkn)^2 - r^2] = wvt$$

$$(r + wkn)2\pi kdn = vdt$$

$$t = \frac{\pi wk^2}{v} n^2 + \frac{2\pi rk}{v} n$$

但仔细推算会发现稍有差别，请解释。

## 思考

模型中有待定参数  $r, w, v, k$ ,

一种确定参数的办法是测量或调查，请设计测量方法。

# 参数估计

## 另一种确定参数的方法——测试分析



将模型改记作  $t = an^2 + bn$  , 只需估计  $a, b$

理论上, 已知  $t=184, n=6061$ , 再有一组  $(t, n)$  数据即可

实际上, 由于测试有误差, 最好用足够多的数据作拟合

现有一批测试数据:

$t$	0	20	40	60	80
$n$	0000	1141	2019	2760	3413
$t$	100	120	140	160	184
$n$	4004	4545	5051	5525	6061

用最小二乘法可得

$$a = 2.61 \times 10^{-6},$$

$$b = 1.45 \times 10^{-2}.$$



## 模型检验

应该另外测试一批数据检验模型：

$$t = an^2 + bn \quad (a = 2.61 \times 10^{-6}, b = 1.45 \times 10^{-2})$$

## 模型应用

回答提出的问题：由模型算得  $n = 4450$  时  $t = 116.4$  分，  
剩下的录像带能录  $184 - 116.4 = 67.6$  分钟的节目。

揭示了“ $t$  与  $n$  之间呈二次函数关系”这一普遍规律，  
当录像带的状态改变时，只需重新估计  $a, b$  即可。



A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

# Discussions

---



## 6. 启帆远航

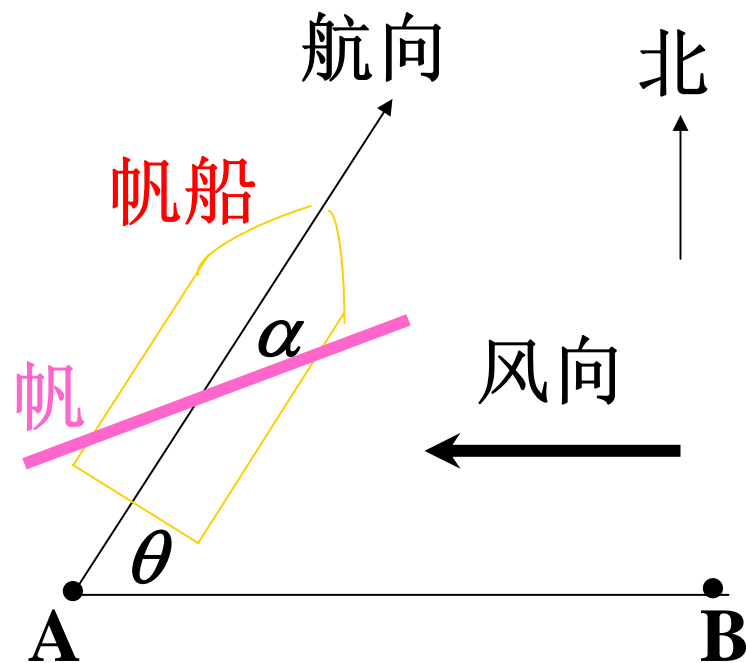
---

## 问题

帆船在海面上乘风远航，确定最佳的航行方向及帆的朝向

## 简化问题

海面上东风劲吹，设帆船要从A点驶向正东方的B点，确定起航时的航向 $\theta$ ，以及帆的朝向 $\alpha$



# 模型分析



- 风(通过帆)对船的推力 $w$
- 风对船体部分的阻力 $p$

推力 $w$ 的分解

$$w = w_1 + w_2$$

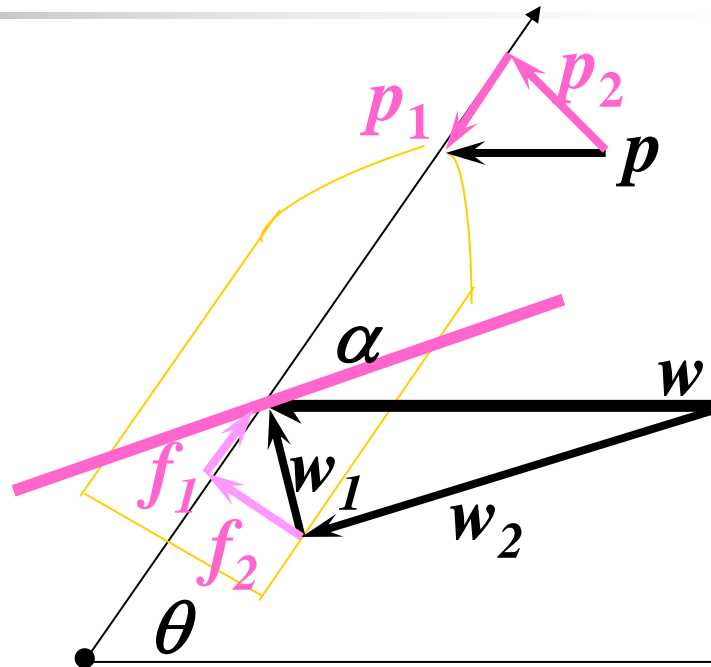
$$w_1 = f_1 + f_2$$

$f_1$  ~ 航行方向的推力

阻力 $p$ 的分解

$$p = p_1 + p_2$$

$p_1$  ~ 航行方向的阻力



## 模型假设

- $w$ 与帆迎风面积 $s_1$ 成正比,  $p$ 与船迎风面积 $s_2$ 成正比, 比例系数相同且  $s_1$ 远大于  $s_2$ ,

## 模型假设

- $w_2$ 与帆面平行，可忽略
- $f_2, p_2$ 垂直于船身，可由舵抵消
- 航向速度 $v$ 与力 $f=f_1-p_1$ 成正比

## 模型建立

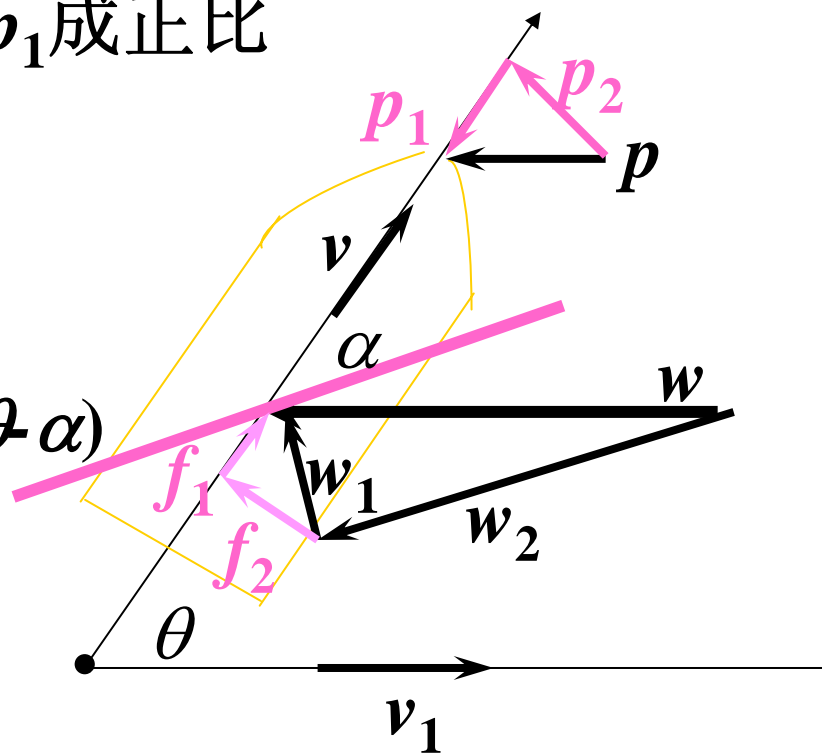
$$w=ks_1, \quad p=ks_2$$

$$w_1=w\sin(\theta-\alpha)$$

$$f_1=w_1\sin\alpha=w\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)$$

$$p_1=p\cos\theta$$

$$v=k_1(f_1-p_1)$$



船在正东方向速度分量 $v_1=v\cos\theta$

## 模型建立

$$v_1 = v \cos \theta = k_1 (f_1 - p_1) \cos \theta$$

$$f_1 = w_1 \sin \alpha = w \sin \alpha \sin(\theta - \alpha) \quad p_1 = p \cos \theta$$

## 模型求解

求  $\theta, \alpha$ , 使  $v_1$  最大

1) 当  $\theta$  固定时求  $\alpha$  使  $f_1$  最大

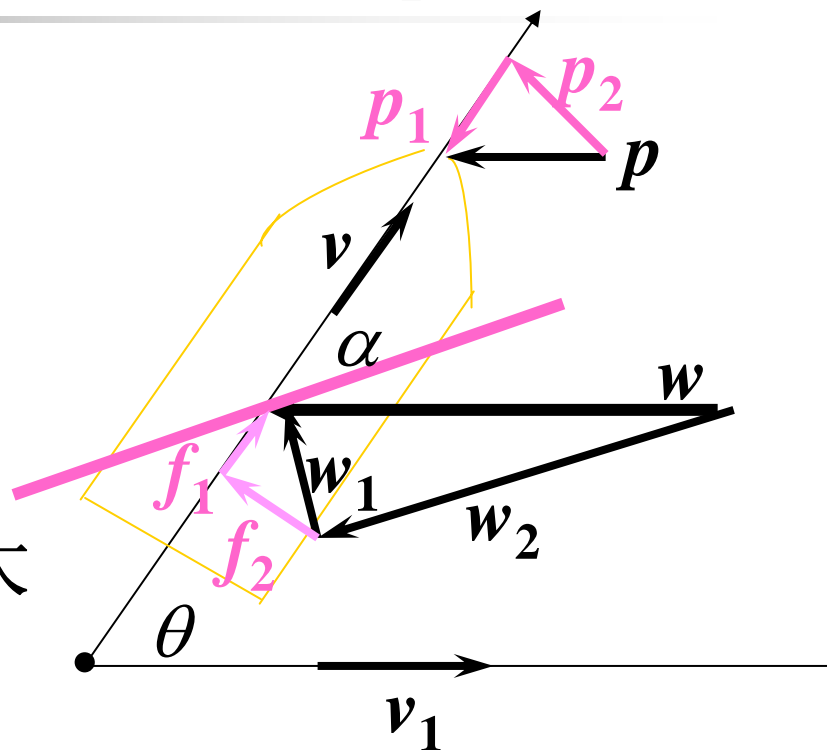
$$f_1 = w [\cos(\theta - 2\alpha) - \cos \theta] / 2$$

$\Rightarrow \alpha = \theta / 2$  时  $f_1 = w(1 - \cos \theta) / 2$  最大

2) 令  $\alpha = \theta / 2$ ,

$$v_1 = k_1 [w(1 - \cos \theta) / 2 - p \cos \theta] \cos \theta$$

求  $\theta$  使  $v_1$  最大 ( $w = ks_1, p = ks_2$ )





## 模型求解

$$v_1 = k_1 [w(1 - \cos \theta)/2 - p \cos \theta] \cos \theta$$

$$= (k_1 w/2) [1 - (1 + 2p/w) \cos \theta] \cos \theta$$

$$w = ks_1, p = ks_2 \quad \text{记 } t = 1 + 2s_2/s_1, k_2 = k_1 w/2$$

$$v_1 = k_2 (1 - t \cos \theta) \cos \theta = k_2 t \left[ \frac{1}{4t^2} - \left( \cos \theta - \frac{1}{2t} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2t} \quad (t = 1 + \frac{2s_2}{s_1}), \quad \alpha = \frac{\theta}{2} \quad v_1 \text{最大}$$

$$s_1 \gg s_2 \quad \Rightarrow \quad 1 < t < 2 \quad \Rightarrow \quad 1/4 < \cos \theta < 1/2 \quad \Rightarrow \quad 60^\circ < \theta < 75^\circ$$

### 备注

- 只讨论起航时的航向，是静态模型
- 航行过程中终点**B**将不在正东方



# Discussions

---





## 7. 核军备竞赛

---



## 背景

- 冷战时期美苏声称为了保卫自己的安全，实行“核威慑战略”，核军备竞赛不断升级。
- 随着前苏联的解体和冷战的结束，双方通过了一系列的核裁军协议。
- 在什么情况下双方的核军备竞赛不会无限扩张，而存在暂时的平衡状态。
- 估计平衡状态下双方拥有的最少的核武器数量，这个数量受哪些因素影响。
- 当一方采取加强防御、提高武器精度、发展多弹头导弹等措施时，平衡状态会发生什么变化。



# 模型假设

以双方(战略)核导弹数量描述核军备的大小。

假定双方采取如下同样的核威慑战略：

- 认为对方可能发起所谓第一次核打击，即倾其全部核导弹攻击己方的核导弹基地；
- 乙方在经受第一次核打击后，应保存足够的核导弹，给对方重要目标以毁灭性的打击。

在任一方实施第一次核打击时，假定一枚核导弹只能攻击对方的一个核导弹基地。

摧毁这个基地的可能性是常数，它由一方的攻击精度和另一方的防御能力决定。



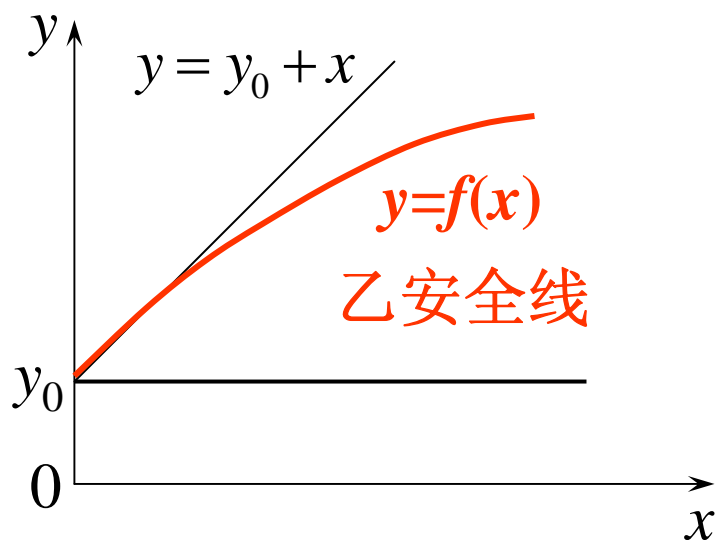
# 图的模型

$y=f(x)$ ~甲方有 $x$ 枚导弹, 乙方所需的最少导弹数

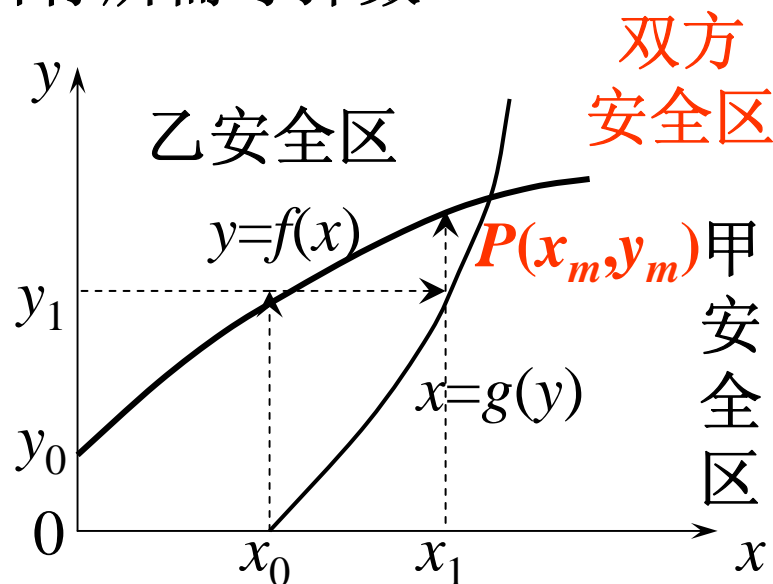
$x=g(y)$ ~乙方有 $y$ 枚导弹, 甲方所需的最少导弹数

当  $x=0$  时  $y=y_0$ ,  $y_0$ ~乙方的威慑值

$y_0$ ~甲方实行第一次打击后已经没有导弹, 乙方为毁灭甲方工业、交通中心等目标所需导弹数



$$y_0 < y = f(x) < y_0 + x$$



$P$ ~平衡点(双方最少导弹数)



# 精细模型

乙方残存率  $s$  ~ 甲方一枚导弹攻击乙方一个基地，基地未被摧毁的概率。

$$x < y$$

甲方以  $x$  攻击乙方  $y$  个基地中的  $x$  个，  
 $sx$  个基地未摧毁，  $y-x$  个基地未攻击。

$$y_0 = sx + y - x$$

$$\Rightarrow y = y_0 + (1-s)x$$

$$x = y$$

$$y_0 = sy$$

$$\Rightarrow y = y_0 / s$$

$$y < x < 2y$$

乙的  $x-y$  个被攻击2次，  $s^2(x-y)$  个未摧毁；

$y - (x-y) = 2y - x$  个被攻击1次，  $s(2y - x)$  个未摧毁

$$y_0 = s^2(x-y) + s(2y-x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y_0}{s(2-s)} + \frac{1-s}{2-s} x$$

$$x = 2y$$

$$y_0 = s^2 y$$

$$\Rightarrow y = y_0 / s^2$$



## 精细模型

$$x < y, \quad y = y_0 + (1-s)x$$

$$y < x < 2y, \quad y = \frac{y_0}{s(2-s)} + \frac{1-s}{2-s}$$

$$x = y, \quad y = y_0/s$$

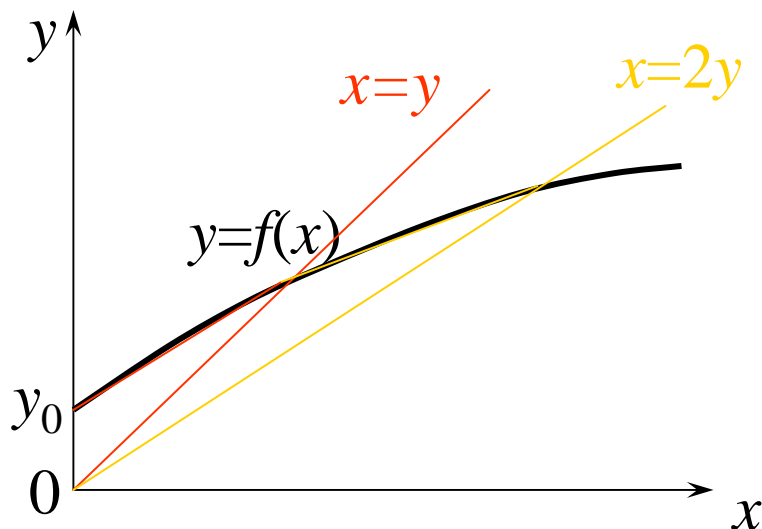
$$x = 2y, \quad y = y_0/s^2$$

$$x = a y, \quad y = \frac{y_0}{s^a} = \frac{y_0}{s^{x/y}}$$

$y_0$  ~ 威慑值

$s$  ~ 残存率

$a$  ~ 交换比(甲乙导弹数量比)



$y$  是一条上凸的曲线

$y_0$  变大, 曲线上移、变陡

$s$  变大,  $y$  减小, 曲线变平

$a$  变大,  $y$  增加, 曲线变陡

## 模型解释

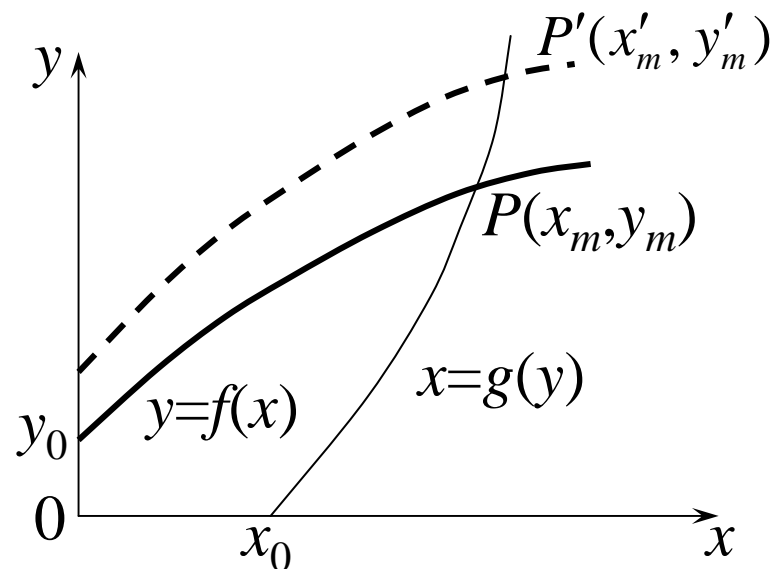
- 甲方增加经费保护及疏散工业、交通中心等目标

⇒ 乙方威慑值  $y_0$  变大  
(其它因素不变)

⇒ 乙安全线  $y=f(x)$  上移

⇒ 平衡点  $P \rightarrow P'$

⇒  $x'_m > x_m, y'_m > y_m$



甲方的被动防御也会使双方军备竞赛升级。

## 模型解释

- 甲方将固定核导弹基地改进为可移动发射架

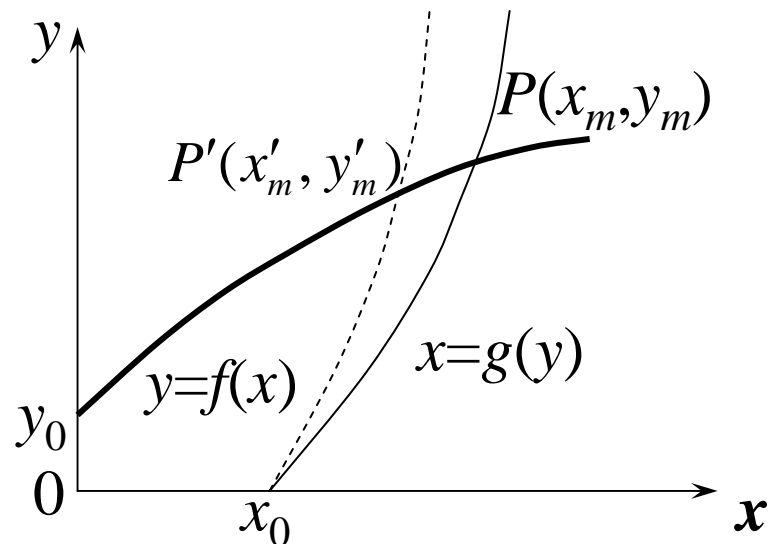
⇒ 乙安全线  $y=f(x)$  不变

甲方残存率变大

威慑值  $x_0$  和交换比不变

⇒  $x$  减小, 甲安全线  
 $x=g(y)$  向  $y$  轴靠近

⇒  $P \rightarrow P'$      $x'_m < x_m, y'_m < y_m$



甲方这种单独行为, 会使双方的核导弹减少



# 模型解释

- 双方发展多弹头导弹，每个弹头可以独立地摧毁目标

( $x, y$  仍为双方核导弹的数量)

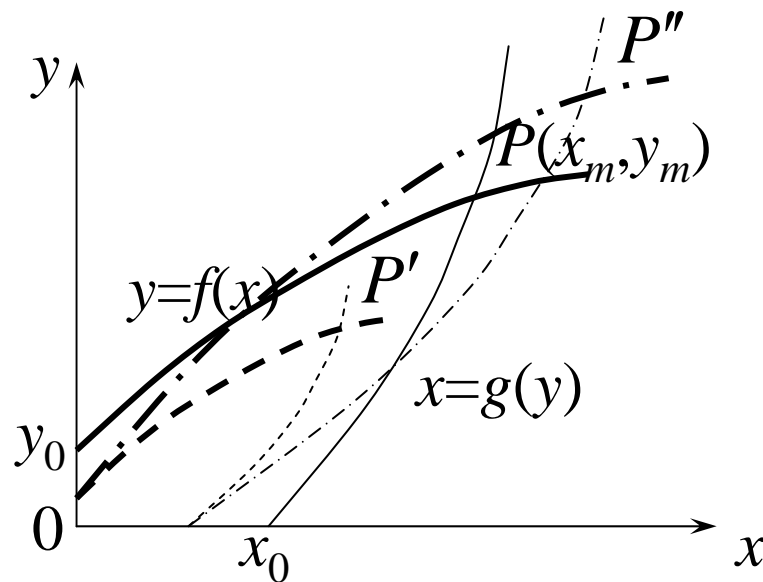
⇒ 双方威慑值减小，残存率不变，交换比增加

乙安全线  $y=f(x)$

$y_0$  减小  $\rightarrow y$  下移且变平

$a$  变大  $\rightarrow y$  增加且变陡

⇒  $P \rightarrow P'$ ?  $P \rightarrow P''$ ?



双方导弹增加还是减少，需要更多信息及更详细的分析

A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

# Discussions

---



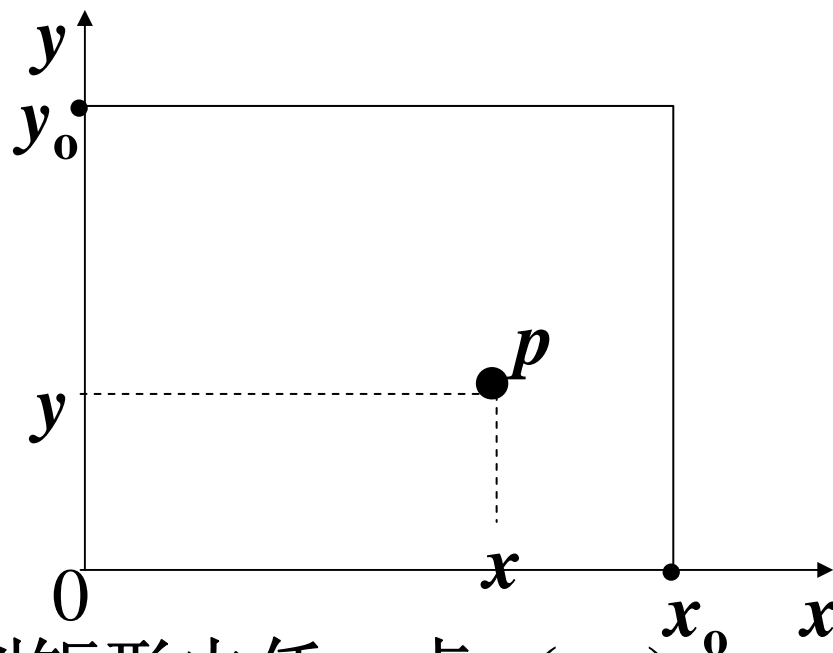
## 8. 实物交换

---



**问题** 甲有物品 $X$ , 乙有物品 $Y$ , 双方为满足更高的需要, 商定相互交换一部分。研究实物交换方案。

用 $x, y$ 分别表示甲(乙)占有 $X, Y$ 的数量。设交换前甲占有 $X$ 的数量为 $x_0$ , 乙占有 $Y$ 的数量为 $y_0$ , 作图:

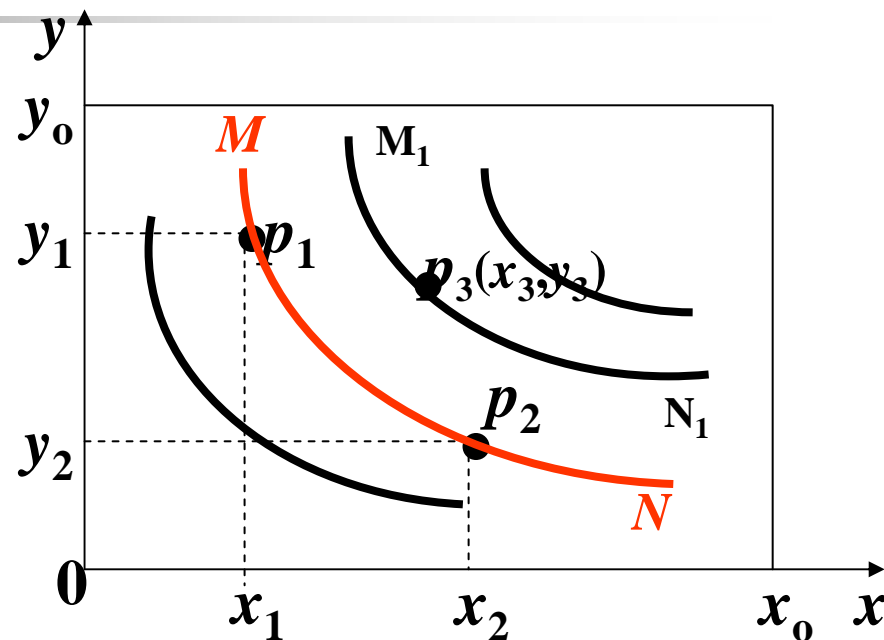


若不考虑双方对 $X, Y$ 的偏爱, 则矩形内任一点  $p(x, y)$  都是一种交换方案: 甲占有 $(x, y)$ , 乙占有 $(x_0 - x, y_0 - y)$

# 分析与建模

## 甲的无差别曲线

如果甲占有 $(x_1, y_1)$ 与占有 $(x_2, y_2)$ 具有同样的满意程度，即 $p_1, p_2$ 对甲是无差别的，将所有与 $p_1, p_2$ 无差别的点连接起来，得到一条无差别曲线 $MN$ ，



线上各点的满意程度相同，线的形状反映对 $X, Y$ 的偏爱程度，

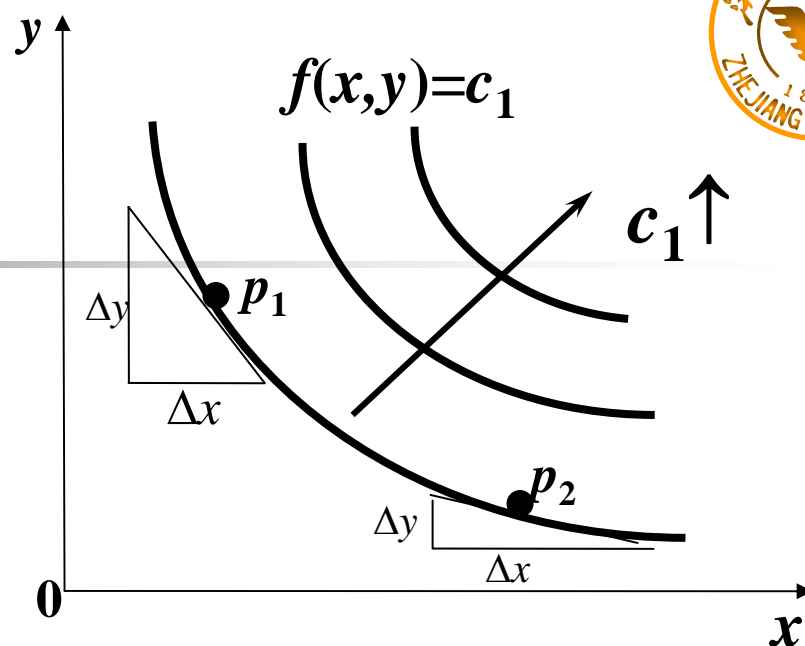
比 $MN$ 各点满意程度更高的点如 $p_3$ ，在另一条无差别曲线 $M_1N_1$ 上。于是形成一族无差别曲线（无数条）。

甲的无差别曲线族记作

$$f(x,y)=c_1$$

$c_1 \sim$  满意度

( $f \sim$  等满意度曲线)



无差别曲线族的性质：

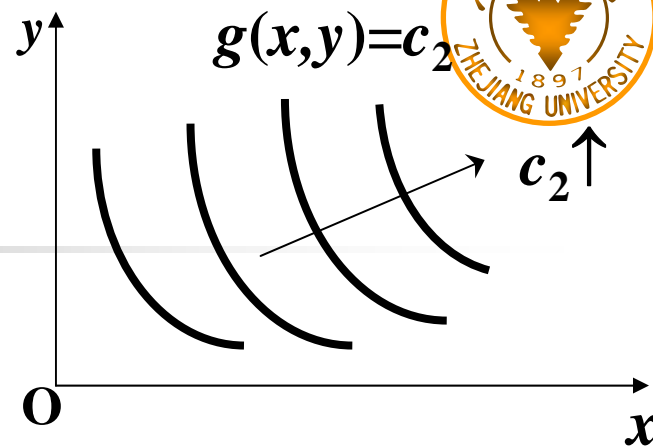
- 单调减( $x$ 增加,  $y$ 减小)
- 下凸(凸向原点)
- 互不相交

在 $p_1$ 点占有 $x$ 少、 $y$ 多,  
宁愿以较多的 $\Delta y$ 换取  
较少的 $\Delta x$ ;

在 $p_2$ 点占有 $y$ 少、 $x$ 多,  
就要以较多的 $\Delta x$ 换取  
较少的 $\Delta y$ 。



乙的无差别曲线族  $g(x,y)=c_2$  具有相同性质（形状可以不同）



## 双方的交换路径

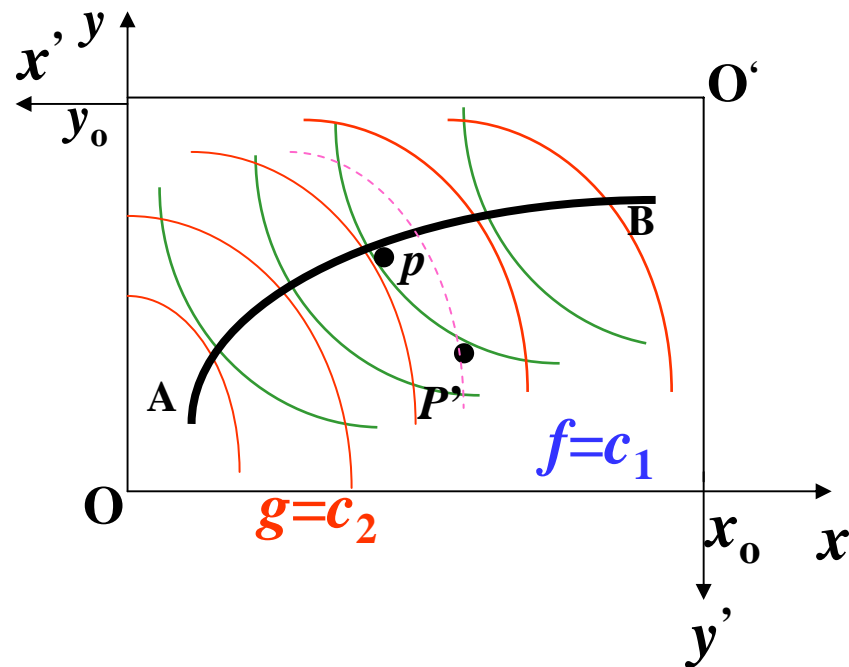
甲的无差别曲线族  $f=c_1$

乙的无差别曲线族  $g=c_2$  (坐标系  $x'O'y'$ , 且反向)

两族曲线切点连线记作AB

双方满意的交换方案必在AB（交换路径）上

因为在AB外的任一点  $p'$ ,  
(双方)满意程度低于AB上的点  $p$

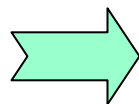




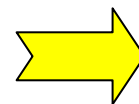
# 交换方案的进一步确定

交换方案 ~ 交换后甲的占有量  $(x,y)$

$0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0$  矩形内任一点



交换路径AB



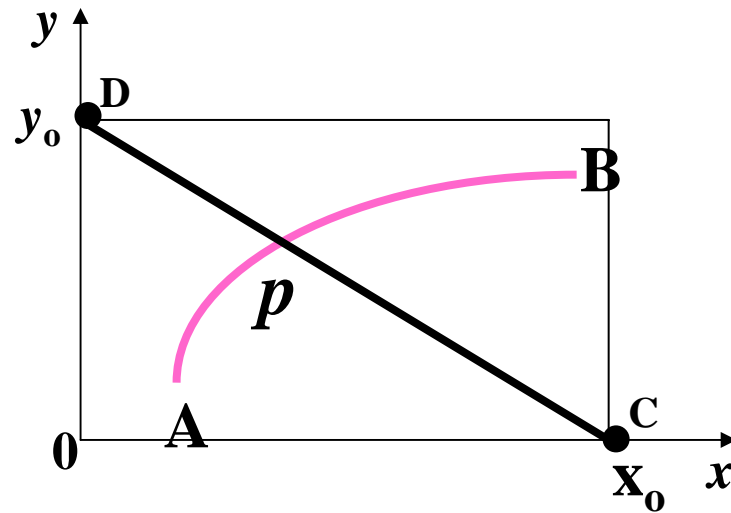
AB与CD的交点 $p$

双方的无差别曲线族

等价交换原则

$X, Y$ 用货币衡量其价值，设交换前 $x_0, y_0$ 价值相同，则等价交换原则下交换路径为

$(x_0, 0), (0, y_0)$  两点的连线CD



设 $X$ 单价 $a$ ,  $Y$ 单价 $b$ , 则等价交换下 $ax+by=s$  ( $s=ax_0=by_0$ )



A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

# Discussions

---



## 9. $\pi$ 的计算

---



➤ 圆周率是人类获得的最古老的数学概念之一，早在大约3700年前（即公元前1700年左右）的古埃及人就已经在用 $256/81$ （约3.1605）作为 的近似值了。几千年来，人们一直没有停止过求 的努力。

A decorative graphic in the top-left corner consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

---

 古典方法

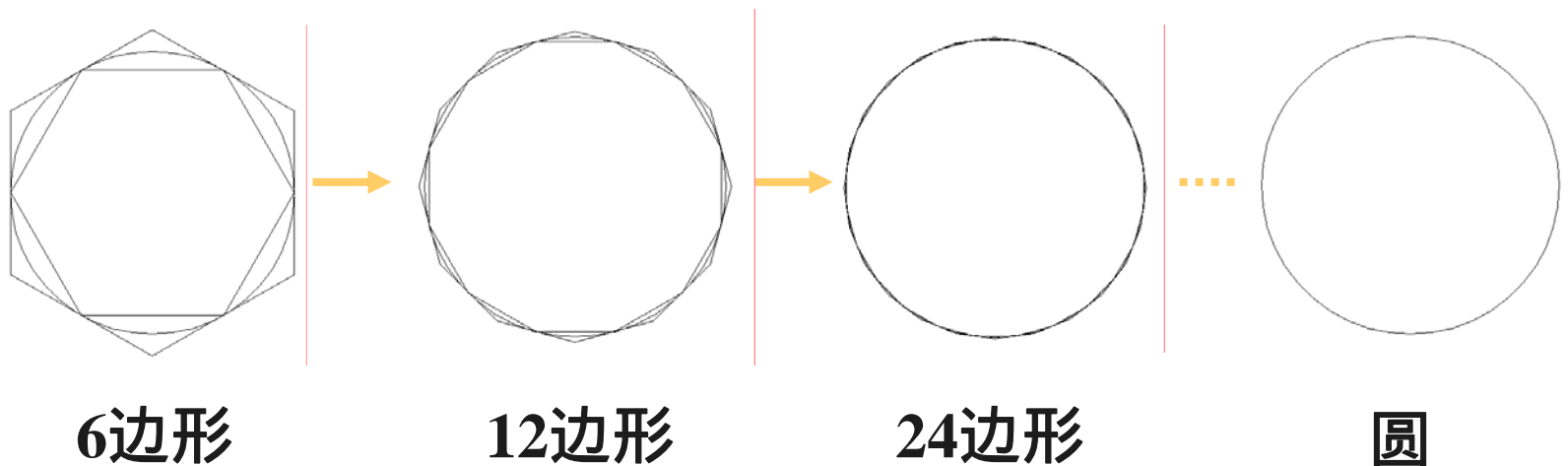
 分析方法

 其它方法

- 概率方法
- 数值积分方法

# 古典方法

用什么方法来计算  $\pi$  的近似值呢？显然，不可能仅根据圆周率的定义，用圆的周长去除以直径。起先，人们采用的都是用圆内接正多边形和圆外切正多边形来逼近的古典方法。





➤ 阿基米德曾用圆内接 96边形和圆外切 96边形夹逼的方法证明了

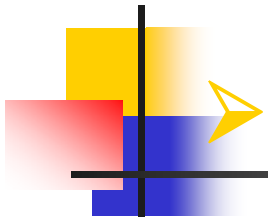
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

由  $\sin \theta < \theta < \tan \theta$   
和  $\theta = \pi/96$  导出

➤ 公元5世纪，祖冲之指出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

比西方得到同样结果几乎早了1000年

A decorative graphic on the left side of the slide, consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

➤ 十五世纪中叶，阿尔·卡西给出 的16  
位小数，打破了祖冲之的纪录

➤ 1579年，韦达证明

$$3.14159265\ 35 < \pi < 3.14159265\ 37$$

➤ 1630年，最后一位用古典方法求 的人  
格林伯格也只求到了 的第39位小数



# 分析方法

从十七世纪中叶起，人们开始用更先进的分析方法来求  $\pi$  的近似值，其中应用的主要工具是收敛的无穷乘积和无穷级数，在本节中我们将介绍一些用此类方法求  $\pi$  近似值的实例。





## ➤ 1656年，沃里斯(Wallis)证明

$$\pi = 2 \cdot \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left( \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \cdots$$

$$= 2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right)$$

取  $k = 10$

$$\pi \approx 2 \cdot \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdots \left( \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{21} \right) = 3.067702$$

取  $k = 20$

$$\pi \approx 2 \cdot \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdots \left( \frac{40}{39} \cdot \frac{40}{41} \right) = 3.103516$$



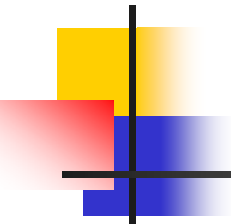
在微积分中我们学过泰勒级数，其中有

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

当  $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$



取  $k = 10$

---

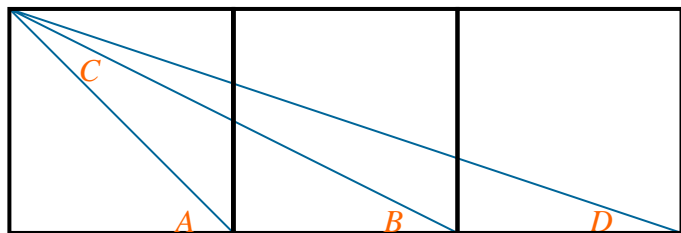
$$\pi \approx 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) = 3.232316$$

取  $k = 20$

$$\pi \approx 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{39} + \frac{1}{41} \right) = 3.189184$$

在中学数学中证明过下面的等式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

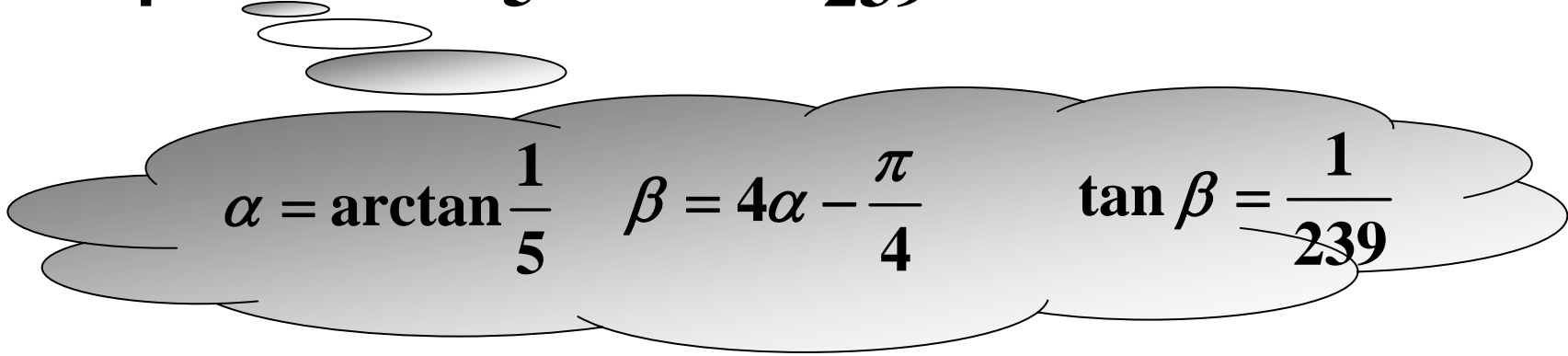


$\arctan \frac{1}{2}$  和  $\arctan \frac{1}{3}$   
的展开式的收敛速度  
都比  $\arctan 1$  快得多

左边三个正方形  
组成的矩形中，  
由  $\angle A = \angle B + \angle C$   
和  $\angle C = \angle D$  可得

➤ 麦琴 (Machin) 给出

A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.
$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (\text{Machin公式})$$

A decorative graphic consisting of several overlapping grey clouds.
$$\text{记 } \alpha = \arctan \frac{1}{5}, \beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \text{ 得 } \tan \beta = \frac{1}{239}$$

此式求得了 的第100位小数且全部正确



## 其它方法

除用古典方法与分析方法求 的近似值以外，还有人用其他方法来求 的近似值。  
这里我们将介绍两种方法：

➤ 概率方法

➤ 数值积分方法



## ➤ 概率方法

取一个二维数组  $(x, y)$ ，取一个充分大的正整数  $n$ ，重复  $n$  次，每次独立地从  $(0, 1)$  中随机地取一对数  $x$  和  $y$ ，分别检验  $x^2 + y^2 \leq 1$  是否成立。设  $n$  次试验中等式成立的共有  $m$  次，令  $\pi \approx 4m/n$ 。

但这种方法很难得到  $\pi$  的较好的近似值。



## 数值积分方法

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

还可使用其它数值积分公式来求，但用此类方法效果也很难做得比用幂级数展开更好





# Discussions

---