

# 熵值法及其在综合评价中的应用

郭显光

在社会经济活动中,综合评价问题越来越引起人们的注意。综合评价是对被评对象的全面评价,如对某个国家综合国力的评价、对某个国家或地区社会发展水平的评价、对某个国家或地区生态环境的综合评价、对某个企业管理水平的评价、对某个企业或地区经济效益的评价等等。

目前国内外建立的评价方法有数百种之多,但大多数尚处于理论研究阶段,不十分成熟。最主要的和最常用的方法有:专家评价法、经济分析法、层次分析法、综合指数法、因子分析法、模糊综合评判法、多目标效用综合法等等。本文介绍一种新的综合评价方法——熵值法。

## 一、熵值法的原理

设有  $m$  个待评方案,  $n$  项评价指标, 形成原始指标数据矩阵  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ , 对于某项指标  $x_j$ , 指标值  $X_{ij}$  的差距越大, 则该指标在综合评价中所起的作用越大; 如果某项指标的指标值全部相等, 则该指标在综合评价中不起作用。在信息论中信息熵  $H(x) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \ln p(x_i)$  表示系统的有序程度, 一个系统的有序程度越高, 则信息熵越大, 反之, 一个系统的无序程度越高, 则信息熵越小。所以, 可以根据各项指标指标值的差异程度, 利用信息熵这个工具, 计算出各指标的权重, 为多指标综合评价提供依据。

用熵值法进行综合评价的步骤是:

1. 将各指标同度量化, 计算第  $j$  项指标下第  $i$  个方案指标值的比重  $p_{ij}$

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$$

2. 计算第  $j$  项指标的熵值  $e_j$

$$e_j = -k \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij}$$

其中,  $k > 0$ ,  $\ln$  为自然对数,  $e_j \geq 0$ 。如果  $X_{ij}$  对于给定的  $j$  全部相等, 那么

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}} = \frac{1}{m}$$

此时  $e_j$  取极大值, 即

$$e_j = -k \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} = k \ln m$$

若设  $k = \frac{1}{\ln m}$ , 于是有  $0 \leq e_j \leq 1$

3. 计算第  $j$  项指标的差异性系数  $g_j$

对于给定的  $j$ ,  $x_{ij}$  的差异性越小, 则  $e_j$  越大; 当  $x_{ij}$  全部相等时,  $e_j = e_{\max} = 1$ , 此时对于方案的

比较,指标  $X_i$  毫无作用;当各方案的指标值相差越大时,  $e_i$  越小,该项指标对于方案的比较,作用越大。

#### 4. 定义权数

$$a_j = \frac{g_j}{\sum_{j=1}^n g_j}$$

#### 5. 计算综合经济效益系数 $v_i$

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_j p_{ij}$$

$v_i$  为第  $i$  个方案的综合评价价值。

### 二、熵值法在综合评价经济效益中的应用

以国家统计局公布的 1993 年全国分地区工业经济效益主要指标统计资料为例,用熵值法对各地区工业经济效益作一横向比较。原始资料见表 1。

表 1 1993 年全国各地区工业经济效益主要指标

地 区	产品销售率 X1(%)	资金利税率 (X2(%))	成本费用利润率 X3(%)	劳动生产率 X4(元/人)	流动资金周转次数 X5(次)	增加值率 X6(%)
全国总计	96.40	10.60	4.65	13470	1.71	27.65
北 京	95.23	12.72	7.53	20272	1.54	29.02
天 津	92.99	8.49	3.13	11063	1.68	22.66
河 北	93.04	9.94	5.07	12183	1.74	29.16
山 西	95.81	8.78	6.06	9958	1.46	35.52
内 蒙 古	95.84	6.84	1.63	9474	1.44	33.23
辽 宁	95.64	10.11	5.13	12890	1.53	28.83
吉 林	96.15	7.3	3.40	10263	1.38	29.68
黑 龙 江	96.39	2.95	-4.42	13146	1.37	40.86
上 海	99.13	15.26	8.62	21783	1.74	25.87
江 苏	95.30	10.58	3.63	14201	2.21	22.44
浙 江	96.01	13.93	4.88	13782	2.14	23.45
安 徽	95.47	11.97	5.14	10455	1.76	25.78
福 建	96.62	13.54	6.61	11545	1.96	26.03
江 西	96.46	8.67	2.56	8315	1.64	25.75
山 东	95.92	10.06	4.71	14885	1.84	26.49
河 南	97.50	9.78	4.38	11552	1.57	30.55
湖 北	96.54	11.12	4.89	11874	1.63	28.17
湖 南	96.36	11.80	3.31	10305	1.75	29.33
广 东	96.11	12.01	6.24	20447	1.83	25.20
广 西	96.94	14.75	6.48	14187	1.86	27.5
海 南	92.02	4.98	3.15	14707	1.35	26.62
四 川	96.08	10.34	4.57	10481	1.50	28.25
贵 州	94.87	12.07	4.58	12391	1.25	35.96
云 南	97.44	27.21	8.90	22851	1.93	41.64
陕 西	95.68	6.36	2.20	8860	1.26	29.65
甘 肃	96.76	7.64	2.01	12300	1.47	33.76
青 海	96.54	5.70	0.12	11370	1.12	32.59
宁 夏	97.65	6.5	1.92	11308	1.44	33.13
新 疆	97.13	2.06	-3.97	17637	1.46	34.37
西 藏						

上表中六项指标均为正指标,即越大越好;如果有逆指标,可以取倒数将其转换成正指标。

对于第三项指标成本费用利润率,存在着两个异常值-4.42和-3.97,该指标数据不宜直接代入计算,因为这样会导致 $p_{ij}$ 为负而不能取对数,而为保证数据的完整性这两个值又不能删去,因此需要对该项指标数据进行变换。

通常可以用功效系数法对数据作变换,从全国来看,该指标最好值为8.90(云南),最差值为-4.42(黑龙江),取 $X_j^{(h)}=8.90, X_j^{(s)}=-4.42$ ,用下列公式进行变换:

$$X'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{(s)}}{x_j^{(h)} - x_j^{(s)}} \times 60 + 40$$

用这个公式使变换后的数据在40~100之间,如果数据差异大范围可以取大一些,如果数据差异小范围可以取小一些。同时用户也可以加入一定的主观因素,即在公式

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{(s)}}{x_j^{(h)} - x_j^{(s)}} \times \alpha + (1 - \alpha) \text{ 中,}$$

如果要加大该指标的权重,可将 $\alpha$ 取大一些,这时数据差异大,用熵值法计算的权重就大;同理,如果要减小该指标的权重,可将 $\alpha$ 取小一些,这时数据差异小,用熵值法计算的权重就小。

根据 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ 的数据,运用熵值法计算各指标的熵值 $e_i$ ,差异性系数 $g_i$ ,进而确定出各指标的权重 $g_i$ ,如表2所示:

表2 各指标权重计算

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$e_i$	.93997	.97128	.99513	.98880	.99625	.99626
$g_i$	.00003	.02872	.00487	.01120	.00375	.00374
$a_i$	.00052	.54912	.09302	.21422	.07168	.07144

最后,用公式

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_j p_{ij}$$

求出各地区综合经济效益系数(见表3)。

### 三、熵值法与其它评价方法的比较

国家统计局在公布表1资料时,同时公布了综合评价结果。国家统计局是用综合经济效益指数法进行综合评价的。

$$\text{综合经济效益指数} = \frac{\sum \left( \frac{\text{各项经济效益指标值}}{\text{相应指标全国标准值}} \times \text{权数} \right)}{\text{总权数}} \times 100\%$$

评价结果见表3。

用综合指数法进行综合评价,在确定指标权重上,多是采取综合咨询评分的定性方法,即是一种主观赋权法;另外,必须有相应的全国标准值数据,否则,计算各指标的指数会遇到困难。

熵值法与综合指数法的根本区别,在于熵值法是根据各项指标指标值的变异程度来确定指标权数,这是一种客观赋权法。这种方法避免了人为因素带来的偏差,但由于忽略了指标本身的重要程度,有时确定的指标权数与预期的相差很远(这种情况也可以用一定的数据处理方法解决,见表1中 $X_3$ 的处理),另外同样的指标体系在不同的样本中确定的权数也不同,这有时也使人感到困惑。

因子分析法也是一种常用的综合评价方法。因子分析法研究相关矩阵的内部依赖关系,它将多个变量综合为少数几个因子,以再现原始变量与因子之间相关关系。由于多个变量的内部依赖关系表现了评价指标之间对评价对象的相互影响及其对评价对象的相对贡献,因而可利用这种方法求得各指标的权数。

为了将熵值法与因子分析法相比较,笔者也用因子分析法对表1中的数据作了综合评价,是运用统计分析软件包SPSS/PC+中的因子分析模块完成评价过程中的计算的。计算结果见表3。

熵值法与因子分析法在确定指标权数时同属于客观赋权法,但两者也有区别:因子分析法从众多的变量中分解出少数几个公共因子,减少了评价指标维数,而熵值法不能减少评价指标维数;因子分析中因子与变量是线性函数关系,而熵值法的综合评价结果与变量不是线性函数关系;因子分析法计算过程比较复杂,一般必须用计算机完成,而熵值法计算过程相对简单。

表3 三种方法综合评价结果

序号	地区	熵值法得分 (方法1)	名次	经济效益综合指数 %(方法2)	名次	因子分析得分 (方法3)	名次
	全国总计			96.61			
1	北 京	0.04377	4	115.76	3	0.39	8
2	天 津	0.02959	19	83.61	19	0.09	13
3	河 北	0.03392	15	94.85	13	0.22	11
4	山 西	0.03079	18	89.24	17	-0.12	18
5	内 蒙 古	0.02584	24	75.26	25	-0.53	24
6	辽 宁	0.03429	14	93.69	14	0.02	15
7	吉 林	0.02709	22	78.88	21	-0.34	21
8	黑 龙 江	0.02000	29	63.73	29	-1.25	29
9	上 海	0.04961	2	127.45	2	0.93	2
10	江 苏	0.03613	10	99.34	8	0.40	7
11	浙 江	0.04238	6	107.92	6	0.62	3
12	安 徽	0.03651	9	95.33	11	0.25	9
13	福 建	0.04066	7	105.64	7	0.60	5
14	江 西	0.02848	21	78.80	22	-0.15	19
15	山 东	0.03551	13	98.66	9	0.23	10
16	河 南	0.03299	17	90.78	16	0.01	16
17	湖 北	0.03567	12	94.86	12	0.14	12
18	湖 南	0.03605	11	92.71	15	0.08	14
19	广 东	0.04242	5	114.15	4	0.52	6
20	广 西	0.04434	3	111.80	5	0.61	4
21	海 南	0.02487	25	78.44	23	-0.56	25
22	四 川	0.03318	16	88.86	18	-0.02	17
23	贵 州	0.03774	8	95.52	10	-0.22	20
24	云 南	0.07422	1	163.39	1	1.34	1
25	陕 西	0.02414	26	71.00	26	-0.58	26
26	甘 肃	0.02908	20	82.92	20	-0.39	22
27	青 海	0.02394	27	69.49	27	-0.82	27
28	宁 夏	0.02627	23	78.23	24	-0.43	23
29	新 疆	0.02053	28	68.66	28	-1.04	28
30	西 藏						

由于综合指数法与因子分析法的普及面广,其评价结果有一定权威性,为了说明熵值法评价结果的合理性,下面用一种非参数统计方法——等级相关法来说明这三种评价方法评价结果的密切程度。

用斯皮尔曼等级相关系数公式

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n(n-1)}$$

来计算三种排序结果的等级相关系数

$$r_{12} = 1 - \frac{6 \times 68}{29(29^2 - 1)} = 0.9833$$

$$r_{23} = 1 - \frac{6 \times 212}{29(29^2 - 1)} = 0.9478$$

$$r_{13} = 1 - \frac{6 \times 266}{29(29^2 - 1)} = 0.9345$$

由计算结果可见,这三种方法计算结果的关系都相当密切,其中以熵值法与综合指数的计算结果关系最为密切。

#### 四、多种评价结果的组合

由于这三种方法是从三个不同的角度进行的综合评价,且其结果都具有合理性,因而不能轻易地舍弃哪一种结果。下面用组合评价法对三种结果进行组合。组合的方法是先将每种方法排序的名次转换成分数,如果排序为第  $k$  名,则其得分为  $n+1-k$  分,即第 1 名得  $n$  分……第  $n$  名得 1 分,其中如有相同的名次,则取这几个位置的平均分,然后将三种方法的分数进行平均,得出组合分数。计算结果见表 4。

表 4 组合评价得分

地区	北京	天津	河北	山西	内蒙古	辽宁	吉林	黑龙江	上海	江苏
方法 1 分数	26	11	15	12	6	16	8	1	28	20
方法 2 分数	27	11	17	13	5	16	9	1	28	22
方法 3 分数	22	17	19	12	6	15	9	1	28	23
组合分数	25	13	17	12.3	5.7	15.7	8.7	1	28	21.7
组合名次	4	17	13	19	24	15	22	29	2	8

  

地区	浙江	安徽	福建	江西	山东	河南	湖北	湖南	广东	广西
方法 1 分数	24	21	23	9	17	13	18	19	25	27
方法 2 分数	24	19	23	8	21	14	18	15	26	25
方法 3 分数	27	21	25	11	20	14	18	16	24	26
组合分数	25	20.3	23.7	9.3	19.3	13.7	18	16.7	25	26
组合排序	4	9	7	20	10	16	11	14	4	3

  

地区	海南	四川	贵州	云南	陕西	甘肃	青海	宁夏	新疆	西藏
方法 1 分数	5	14	22	29	4	10	3	7	2	
方法 2 分数	7	12	20	29	4	10	3	6	2	
方法 3 分数	5	13	10	29	4	8	3	7	2	
组合分数	5.7	13	17.3	29	4	9.3	3	6.7	2	
组合排序	24	17	12	1	26	20	27	23	28	

综上所述,熵值法是一种科学、简单、实用的综合评价方法,这种方法大有推广之必要。

责任编辑 何苏湘