



平衡与稳定性模型



稳定性模型

- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势——平衡状态是否稳定。
- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性。

A decorative graphic in the top-left corner consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

稳定性模型

- 1 捕鱼业的持续收获
- 2 军备竞赛
- 3 种群的相互竞争
- 4 种群的相互依存
- 5 种群的弱肉强食



1 捕鱼业的持续收获

背景

- 再生资源（渔业、林业等）与非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题及分析

- 在**捕捞量稳定**的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。
- 如果使捕捞量等于自然增长量，**渔场鱼量将保持不变**，则捕捞量稳定。



产量模型

$x(t)$ ~ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 **Logistic** 规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

r ~ 固有增长率, N ~ 最大鱼量

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

$$h(x) = Ex, E \sim \text{捕捞强度}$$

建模

$$\text{记 } F(x) = f(x) - h(x)$$

捕捞情况下
渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - Ex$$

- 不需要求解 $x(t)$, 只需知道 $x(t)$ 稳定的条件



一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$\dot{x} = F(x)$ (1) 一阶非线性（自治）方程

$F(x)=0$ 的根 x_0 ~微分方程的平衡点

$$\dot{x}\Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$$

设 $x(t)$ 是方程的解，若从 x_0 某邻域的任一初值出发，都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ ，称 x_0 是方程(1)的稳定平衡点

不求 $x(t)$ ，判断 x_0 稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程

$$\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ 稳定(对(2),(1))}$$

$$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ 不稳定(对(2),(1))}$$



产量模型

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right) - Ex$$

$$F(x) = 0$$

平衡点

$$x_0 = N\left(1 - \frac{E}{r}\right), \quad x_1 = 0$$

稳定性判断

$$F'(x_0) = E - r, \quad F'(x_1) = r - E$$

$$E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 稳定}, x_1 \text{ 不稳定}$$

$$E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 不稳定}, x_1 \text{ 稳定}$$

E ~捕捞强度

r ~固有增长率

x_0 稳定, 可得到稳定产量

x_1 稳定, 渔场干枯



产量模型

在捕捞量稳定的条件下，
控制捕捞强度使产量最大

图解法

$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$$h(x) = Ex$$

$F(x) = 0 \Rightarrow f$ 与 h 交点 P

$E < r \Rightarrow x_0$ 稳定

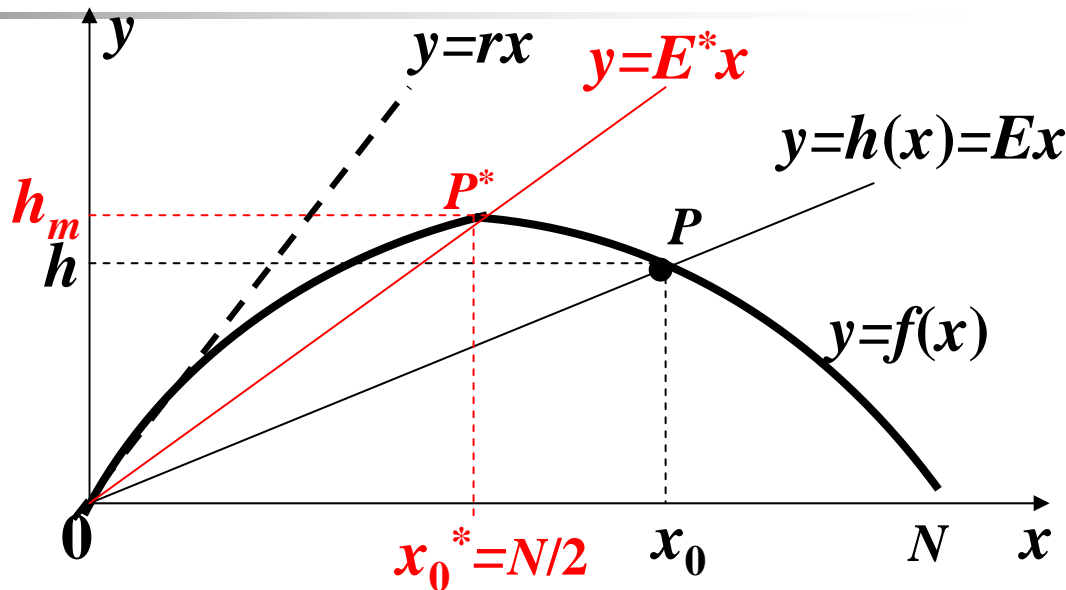
P 的横坐标 $x_0 \sim$ 平衡点

P 的纵坐标 $h \sim$ 产量

产量最大

$$P^* (x_0^* = N/2, h_m = rN/4) \quad E^* = h_m / x_0^* = r/2$$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半





效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大。

假设

- 鱼销售价格 p
- 单位捕捞强度费用 c

收入 $T = ph(x) = pEx$

支出 $S = cE$

单位时间利润

$$R = T - S = pEx - cE$$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E / r)$ \Downarrow

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE \left(1 - \frac{E}{r}\right) - cE$$

求 E 使 $R(E)$ 最大

$$\Rightarrow E_R = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{c}{pN}\right) < E^* = \frac{r}{2}$$

渔场
鱼量

$$x_R = N \left(1 - \frac{E_R}{r}\right) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p} \quad h_R = \frac{rN}{4} \left(1 - \frac{c^2}{p^2 N^2}\right)$$

捕捞过度

- 封闭式捕捞追求利润 $R(E)$ 最大
- 开放式捕捞只求利润 $R(E) > 0$

$$E_R = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{c}{pN}\right)$$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE \left(1 - \frac{E}{r}\right) - cE \stackrel{\text{令}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad E_s = r \left(1 - \frac{c}{pN}\right)$$

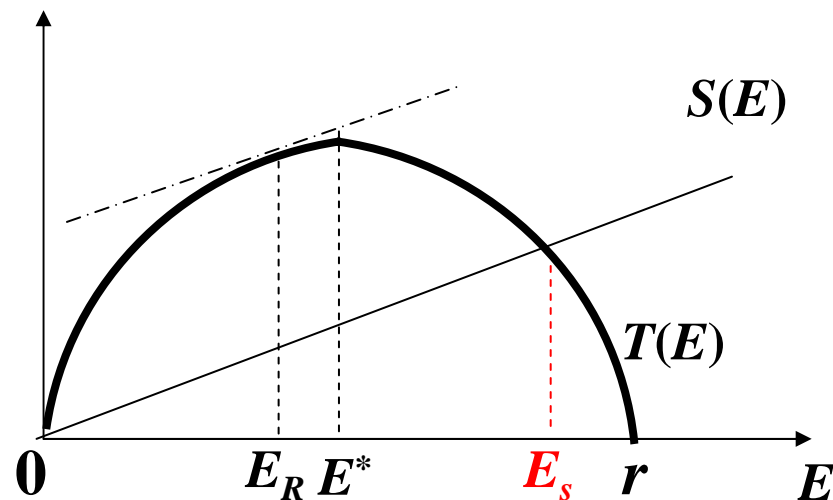
$R(E)=0$ 时的捕捞强度(临界强度) $E_s=2E_R$

临界强度下的渔场鱼量

$$x_s = N \left(1 - \frac{E_s}{r}\right) = \frac{c}{p}$$

$$p \uparrow, c \downarrow \Rightarrow E_s \uparrow, x_s \downarrow$$

捕捞过度





Discussion



2 军备竞赛

目的

- 描述双方(国家或国家集团)军备竞赛过程
- 解释(预测)双方军备竞赛的结局

假设

- 1) 由于相互不信任, 一方军备越大, 另一方军备增加越快;
- 2) 由于经济实力限制, 一方军备越大, 对自己军备增长的制约越大;
- 3) 由于相互敌视或领土争端, 每一方都存在增加军备的潜力。

进一步假设

- 1) 2) 的作用为线性; 3) 的作用为常数



建模

$x(t)$ ~甲方军备数量, $y(t)$ ~乙方军备数量

$$\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g$$

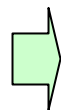
$$\dot{y}(t) = lx - \beta y + h$$

α, β ~ 本方经济实力的制约;

k, l ~ 对方军备数量的刺激;

g, h ~ 本方军备竞赛的潜力。

军备竞赛的结局



$t \rightarrow \infty$ 时的 $x(t)$, $y(t)$



微分方程的平衡点及其稳定性



线性常系数 微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax + by \\ \dot{y}(t) &= cx + dy\end{aligned}$$

的平衡点及其稳定性

平衡点 $P_0(x_0, y_0) = (0, 0)$ ~ 代数方程

$$\begin{aligned}ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0\end{aligned} \quad \text{的根}$$

若从 P_0 某邻域的任一初值出发，都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$ ，称 P_0 是微分方程的 **稳定平衡点**

记系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$

特征根

$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(a + d) \\ q = \det A \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) / 2$$



线性常系数 微分方程组

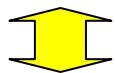
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax + by \\ \dot{y}(t) &= cx + dy\end{aligned}$$

的平衡点及其稳定性

平衡点 $P_0(0,0)$ 特征根 $\lambda_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$

微分方程一般解形式 $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2}$ 为负数或有负实部

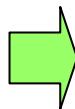


$p > 0$ 且 $q > 0$



平衡点 $P_0(0,0)$ 稳定

$p < 0$ 或 $q < 0$



平衡点 $P_0(0,0)$ 不稳定



军备竞赛

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$$

平衡点

$$x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y_0 = \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}$$

稳定性判断

系数
矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$$

$$p = -(-\alpha - \beta) = \alpha + \beta > 0$$

$$q = \det A = \alpha\beta - kl$$

平衡点 (x_0, y_0) 稳定的条件

$$p > 0, q > 0$$



$$\alpha\beta > kl$$

模型的定性解释

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$$



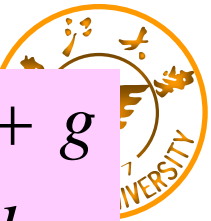
平衡点 $x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, y_0 = \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}$

双方军备稳定(时间充分长后趋向有限值)的条件

$$\alpha\beta > kl$$

$\alpha, \beta \sim$ 本方经济实力的制约;
 $k, l \sim$ 对方军备数量的刺激;
 $g, h \sim$ 本方军备竞赛的潜力。

- 1) 双方经济制约大于双方军备刺激时, 军备竞赛才会稳定, 否则军备将无限扩张。
- 2) 若 $g=h=0$, 则 $x_0=y_0=0$, 在 $\alpha\beta > kl$ 下 $x(t), y(t) \rightarrow 0$, 即友好邻国通过裁军可达到永久和平。



模型的定性解释

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$$

$\alpha, \beta \sim$ 本方经济实力的制约;

$k, l \sim$ 对方军备数量的刺激;

$g, h \sim$ 本方军备竞赛的潜力。

3) 若 g, h 不为零, 即便双方一时和解, 使某时 $x(t), y(t)$ 很小, 但因 $\dot{x} > 0, \dot{y} > 0$, 也会重整军备。

4) 即使某时一方(由于战败或协议)军备大减, 如 $x(t)=0$, 也会因 $\dot{x} = ky + g$ 使该方重整军备,

即存在互不信任($k \neq 0$)或固有争端($g \neq 0$)的单方面裁军不会持久。

A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

Discussion



3 种群的相互竞争

- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。



模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从**Logistic**规律；

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于 N_2)是甲(相对于 N_1)的 σ_1 倍。

$$\sigma_1 > 1$$



对甲增长的阻滞作用，乙大于甲



乙的竞争力强

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

模型分析

$t \rightarrow \infty$ 时 $x_1(t), x_2(t)$ 的趋向 (平衡点及其稳定性)

(二阶)非线性
(自治)方程 $\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2)$
 $\dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2)$

的平衡点及其稳定性

平衡点 $P_0(x_1^0, x_2^0) \sim$ 代数方程

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \\ g(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad \text{的根}$$

若从 P_0 某邻域的任一初值出发, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^0$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^0$, 称 P_0 是微分方程的 **稳定平衡点**



判断 $P_0(x_1^0, x_2^0)$ 稳定性的方法——直接法

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) &= g(x_1, x_2) \quad (1)\end{aligned}$$

(1)的近似线性方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \\ \dot{x}_2(t) &= g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \quad (2)\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} \Big|_{P_0}$$

$$p > 0 \text{ 且 } q > 0$$

平衡点 P_0 稳定(对2,1)

$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(f_{x_1} + g_{x_2}) \Big|_{P_0} \\ q = \det A \end{cases}$$

$$p < 0 \text{ 或 } q < 0$$

平衡点 P_0 不稳定(对2,1)

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) = 0 \end{cases}$$

平衡点: $P_1(N_1, 0), P_2(0, N_2),$

$$P_3 \left(\frac{N_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \frac{N_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2} \right), P_4(0, 0)$$

仅当 $\sigma_1, \sigma_2 < 1$ 或 $\sigma_1, \sigma_2 > 1$ 时, P_3 才有意义





平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2x_1}{N_1} - \frac{\sigma_1 x_2}{N_2} \right) & -\frac{r_1 \sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\frac{r_2 \sigma_2 x_2}{N_1} & r_2 \left(1 - \frac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \frac{2x_2}{N_2} \right) \end{bmatrix}$$

$$p = -(f_{x1} + g_{x2}) \Big|_{p_i}, \quad q = \det A \Big|_{p_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

平衡点 P_i 稳定条件: $p > 0$ 且 $q > 0$



种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1, 0)$	$r_1 - r_2(1 - \sigma_2)$	$-r_1 r_2(1 - \sigma_2)$	$\sigma_2 > 1, \sigma_1 < 1$
$p_2(0, N_2)$	$-r_1(1 - \sigma_1) + r_2$	$-r_1 r_2(1 - \sigma_1)$	$\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$
$p_3\left(\frac{N_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \frac{N_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1 - \sigma_1) + r_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\frac{r_1 r_2(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$
$p_4(0, 0)$	$-(r_1 + r_2)$	$r_1 r_2$	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

P_3 是两种群共存的平衡点

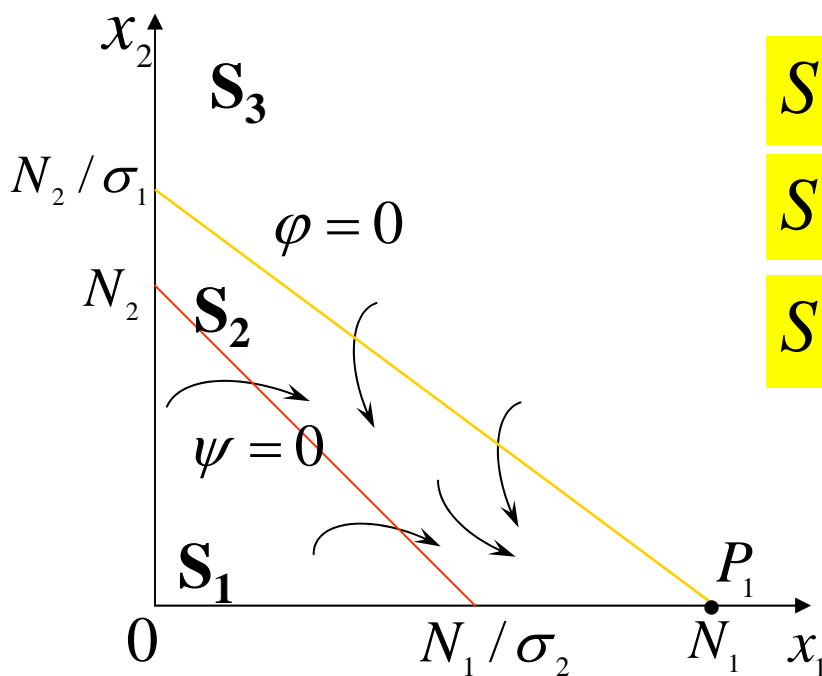
P_1 稳定的条件 $\sigma_1 < 1$?

平衡点稳定性的相轨线分析

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \\ \dot{x}_2(t) &= r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2) &= 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \\ \psi(x_1, x_2) &= 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\end{aligned}$$

(1) $\sigma_2 > 1$, $\sigma_1 < 1$



$$S_1 : \varphi > 0, \psi > 0$$

$$S_1 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$$

$$t \uparrow \rightarrow x_1, x_2 \uparrow$$

$$S_2 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$$

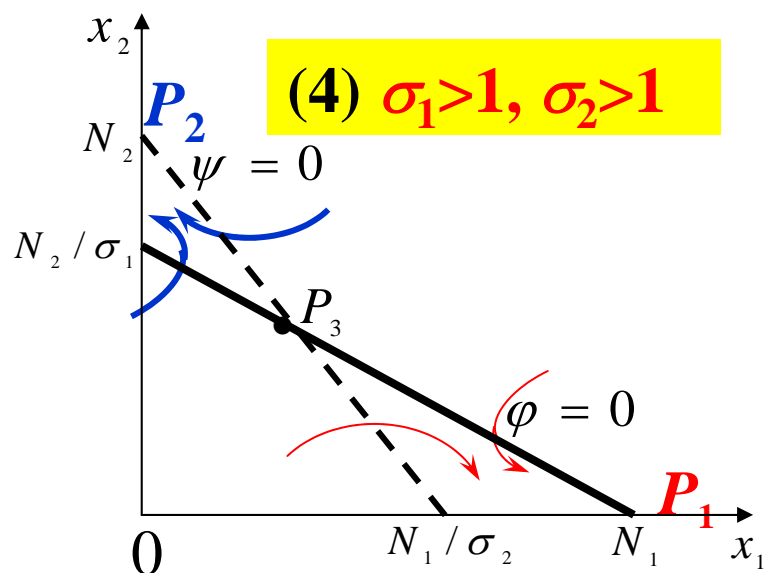
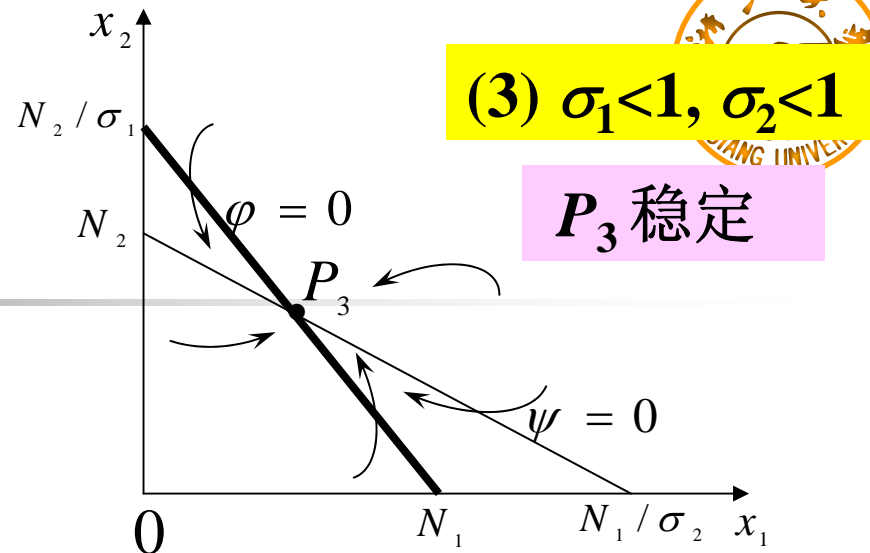
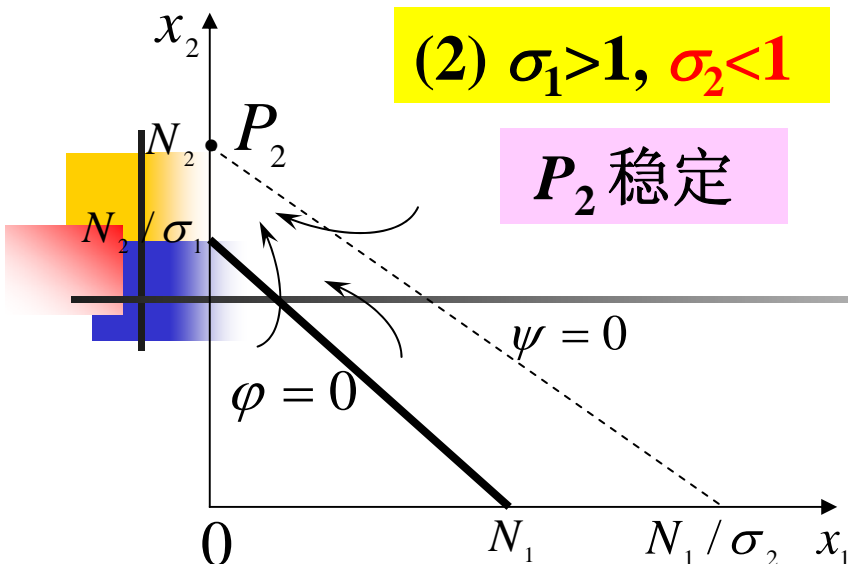
$$t \uparrow \rightarrow x_1 \uparrow, x_2 \downarrow$$

$$S_3 : \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0$$

$$t \uparrow \rightarrow x_1, x_2 \downarrow$$

从任意点出发($t=0$)的相轨线都趋向 $P_1(N_1, 0)$ ($t \rightarrow \infty$)

$P_1(N_1, 0)$ 是稳定平衡点



有相轨线趋向 P_1
有相轨线趋向 P_2

P_1, P_2 都不
(局部) 稳定

P_1 稳定的条件: 直接法 $\sigma_2 > 1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1 < 1$

P_1 全局稳定



结果解释

• P_1 稳定的条件: $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$

对于消耗甲的资源而言, 乙(相对于 N_2)是甲(相对于 N_1)的 σ_1 倍。

$$\sigma_1 < 1$$



对甲增长的阻滞作用, 乙小于甲
 \Rightarrow 乙的竞争力弱

$\sigma_2 > 1 \Rightarrow$ 甲的竞争力强

甲达到最大容量, 乙灭绝

• P_2 稳定的条件: $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$

• P_3 稳定的条件: $\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$

通常 $\sigma_1 \approx 1/\sigma_2$, P_3 稳定条件不满足



Discussion



4 种群的相互依存

甲乙两种群的相互依存有三种形式

- 1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。
- 2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。
- 3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。



模型假设

- 甲可以独自生存，数量变化服从**Logistic**规律；
甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。
- 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从**Logistic**规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

乙为甲提供食物
是甲消耗的 σ_1 倍

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

甲为乙提供食物
是乙消耗的 σ_2 倍

种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1, 0)$	$r_1 - r_2(\sigma_2 - 1)$	$-r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$	$\sigma_2 < 1, \sigma_1 \sigma_2 < 1$
$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1 r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1,$ $\sigma_1 \sigma_2 < 1$
$P_3(0, 0)$	$-r_1 + r_2$	$-r_1 r_2$	不稳定

P_2 是甲乙相互依存而共生的平衡点



平衡点 P_2 稳定性的相轨线

$$P_2 \left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2} \right)$$

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) = r_1 x_1 \varphi(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) = r_2 x_2 \psi(x_1, x_2)$$

$$\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1 \sigma_2 < 1$$

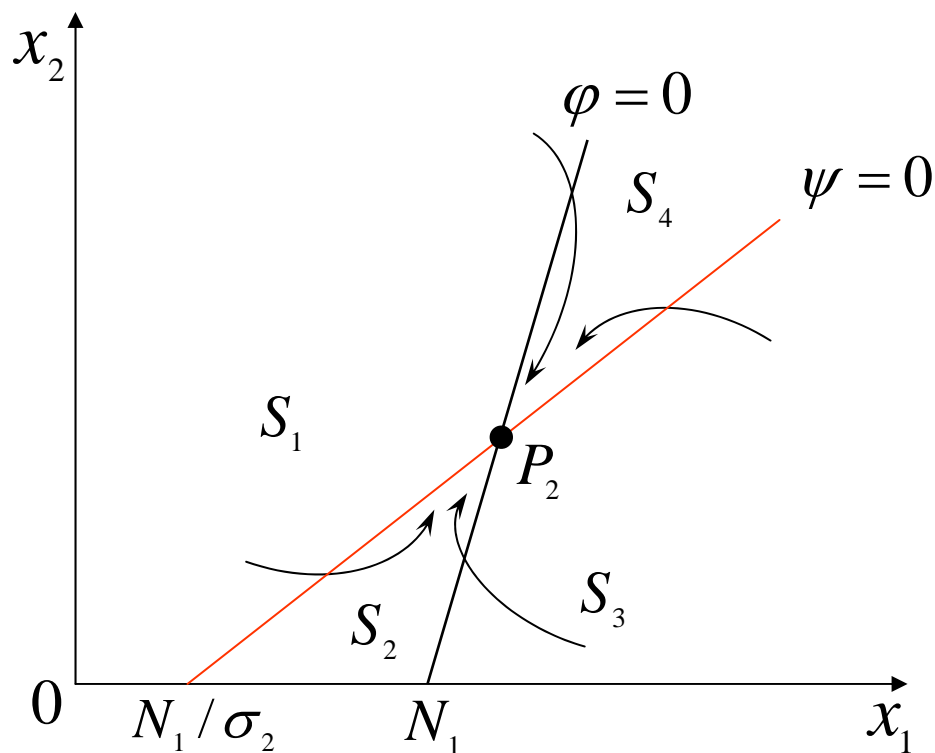
$$S_1 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0;$$

$$S_2 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0;$$

$$S_3 : \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 > 0;$$

$$S_4 : \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0.$$

P_2 稳定





结果 解释

甲可以独自生存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

乙不能独立生存

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$P_2 \left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2} \right)$$

P_2 稳定条件:
 $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$

$\sigma_2 > 1$ ~ 甲必须为乙提供足够的食物——
甲为乙提供的食物是乙消耗的 σ_2 倍

$\sigma_1\sigma_2 < 1$ ~ $\sigma_2 > 1$ 前提下 P_2 存在的必要条件

$\sigma_1 < 1$ ~ $\sigma_2 > 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$ 的需要, 且 σ_1 必须足够小, 才能在 $\sigma_2 > 1$ 条件下使 $\sigma_1\sigma_2 < 1$ 成立

A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

Discussion



5 种群的弱肉强食 (食饵-捕食者模型)

- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。
- **模型的历史背景**——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？



食饵-捕食者模型(Volterra)

食饵（甲）数量 $x(t)$, 捕食者（乙）数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率 r

$$\dot{x} = rx$$

乙使甲的增长率减小,
减小量与 y 成正比

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率 d

$$\dot{y} = -dy$$

甲使乙的死亡率减小,
减小量与 x 成正比

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$$

a ~ 捕食者掠取食饵能力 b ~ 食饵供养捕食者能力

方程(1),(2) 无解析解



Volterra模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy$$

稳定性分析

平衡点

$$P(d/b, r/a), P'(0,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} r - ax & -ax \\ by & -d + bx \end{bmatrix}$$

$$A|_P = \begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p = 0, q > 0$
 P : 临界状态

$$A|_{P'} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

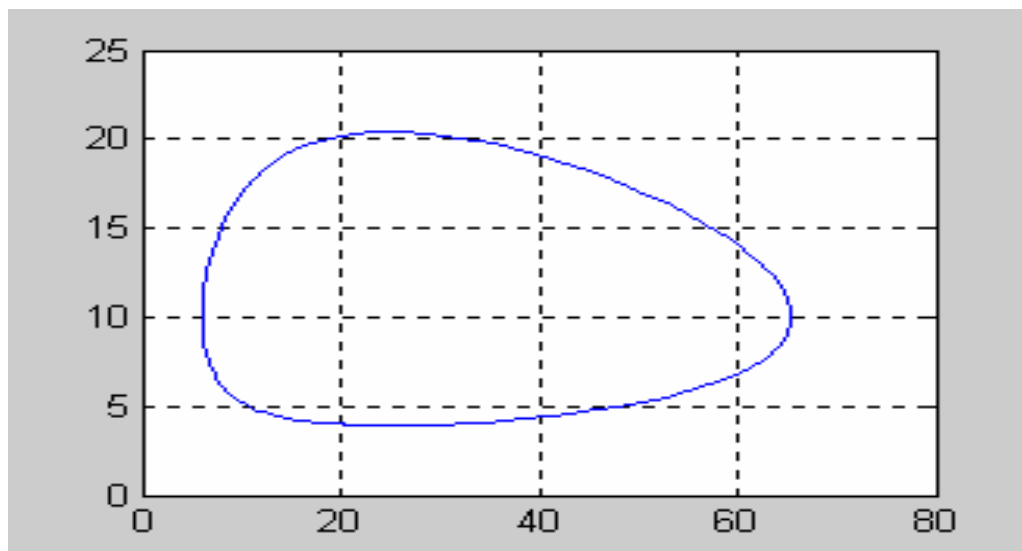
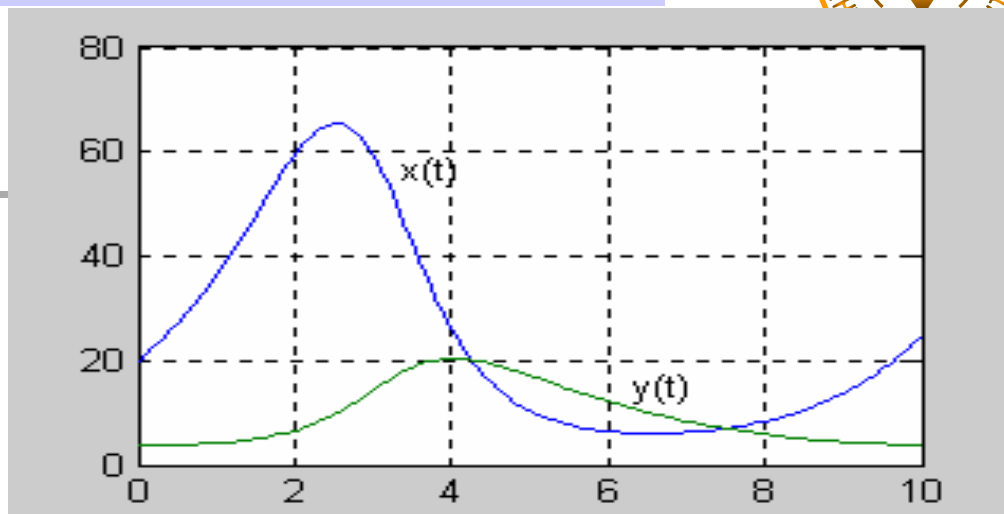
$q < 0$
 P' 不稳定

P 点稳定性不能用近似线性方程分析



用数学软件MATLAB求微分方程数值解

t	$x(t)$	$y(t)$
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
...
5.1000	9.6162	16.7235
5.2000	9.0173	16.2064
...
9.5000	18.4750	4.0447
9.6000	19.6136	3.9968
9.7000	20.8311	3.9587



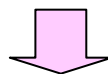
$x \sim y$ 平面上的相轨线



食饵-捕食者模型(Volterra)

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \quad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

计算结果（数值，图形）



观察，猜测

$x(t), y(t)$ 是周期函数，相图 (x, y) 是封闭曲线

$x(t), y(t)$ 的周期约为9.6

$x_{\max} \approx 65.5, x_{\min} \approx 6, y_{\max} \approx 20.5, y_{\min} \approx 3.9$

用数值积分可算出 $x(t), y(t)$ 一周期的平均值：

$x(t)$ 的平均值约为25, $y(t)$ 的平均值约为10。

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (r - ay)x \\ \dot{y}(t) &= (-d + bx)y \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{消去} dt \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-d + bx)}$$

$$\Rightarrow \frac{-d + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

$$\Rightarrow -d \ln x + bx = r \ln y - ay + c_1$$

$$\Rightarrow (x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

取指数

c 由初始条件确定



用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

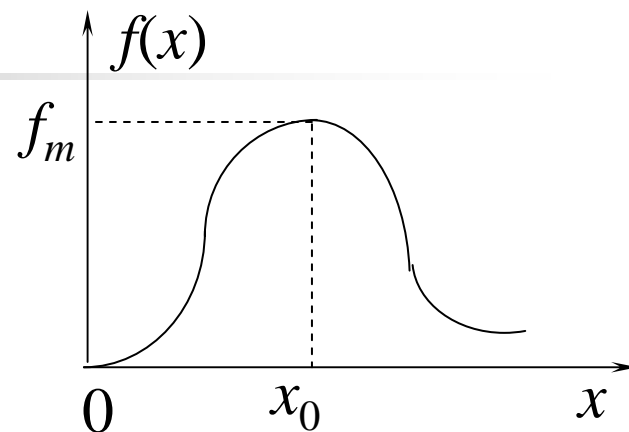
$$(x^{d/b} e^{-bx})(y^{r/a} e^{-ay}) = c$$

$f(x)$

$g(y)$

相轨线

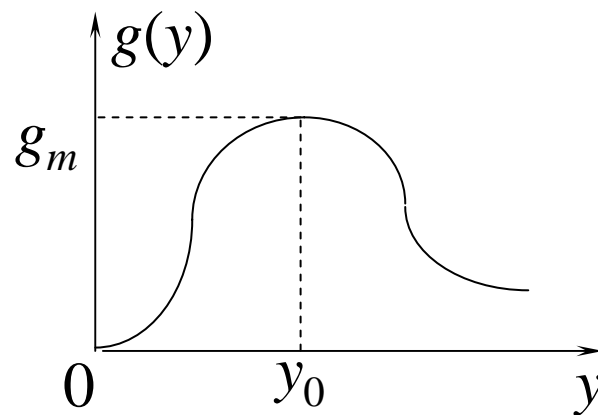
$$f(x)g(y) = c$$



在相平面上讨论相轨线的图形

$$f(0) = f(\infty) = 0, \quad f(x_0) = f_m, \quad x_0 = d/b$$

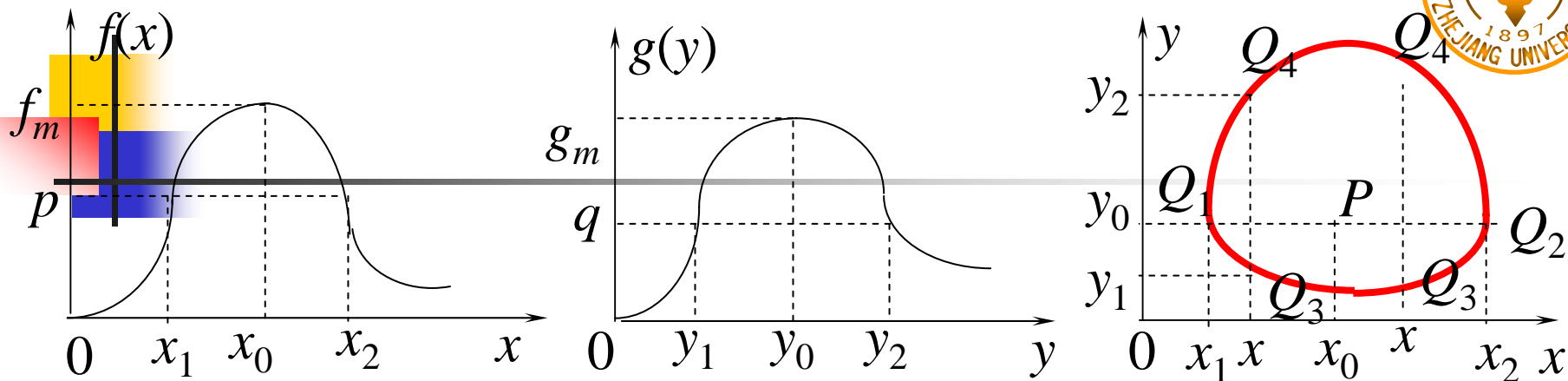
$$g(0) = g(\infty) = 0, \quad g(y_0) = g_m, \quad y_0 = r/a$$



$c > f_m g_m$ 时无相轨线 以下设 $c \leq f_m g_m$



相轨线 $f(x)g(y) = c$



$c = f_m g_m \Rightarrow x = x_0, y = y_0 \Rightarrow$ 相轨线退化为 P 点 $P \sim$ 中心

$c < f_m g_m \Rightarrow$ 设 $c = p g_m$ 令 $y = y_0 \Rightarrow g(y) = g_m \quad f(x) = p < f_m$

\Rightarrow 存在 $x_1 < x_0 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2) = p \Rightarrow Q_1(x_1, y_0), Q_2(x_2, y_0)$

考察 $x \in [x_1, x_2] \quad f(x)g(y) = p g_m \quad f(x) > p \quad g(y) = q < g_m$

\Rightarrow 存在 $y_1 < y_0 < y_2$, 使 $g(y_1) = g(y_2) = q \Rightarrow Q_3(x, y_1), Q_4(x, y_2)$

x 是 $[x_1, x_2]$ 内任意点 \Rightarrow 相轨线是封闭曲线族



用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 $\Leftrightarrow x(t), y(t)$ 是周期函数(周期记 T)

求 $x(t), y(t)$ 在一周期的平均值 \bar{x}, \bar{y}

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{b} \left(\frac{\dot{y}}{y} + d \right) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{b} \left(\frac{\dot{y}}{y} + d \right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{b} + \frac{dT}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = d/b$$

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow \bar{y} = r/a$$

轨线
中心

$$P(x_0, y_0): x_0 = d/b, y_0 = r/a \Rightarrow \bar{x} = x_0, \bar{y} = y_0$$

模型解释

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

初值 $P_0(x'_0, y'_0)$

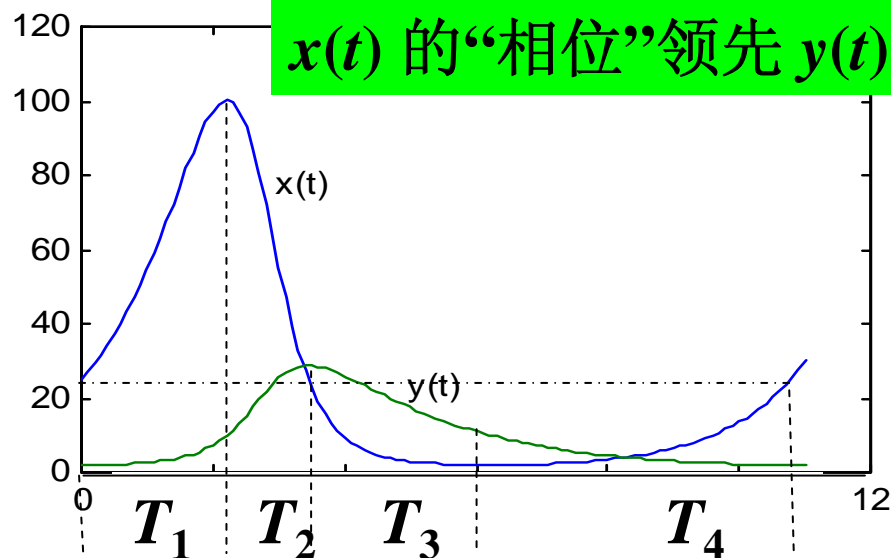
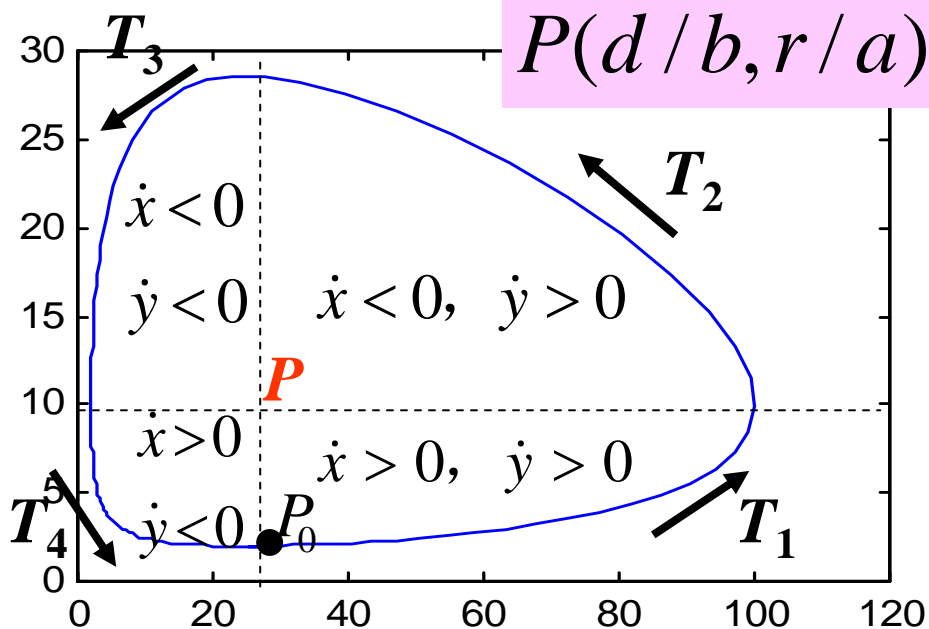
相轨线的方向

$T_1 : x(t) \uparrow y(t) \uparrow$

$T_2 : x(t) \downarrow y(t) \uparrow$

$T_3 : x(t) \downarrow y(t) \downarrow$

$T_4 : x(t) \uparrow y(t) \downarrow$



模型解释

捕食者
数量 $\bar{y} = \frac{r}{a}$

$r \sim$ 食饵增长率

$a \sim$ 捕食者掠取食饵能力

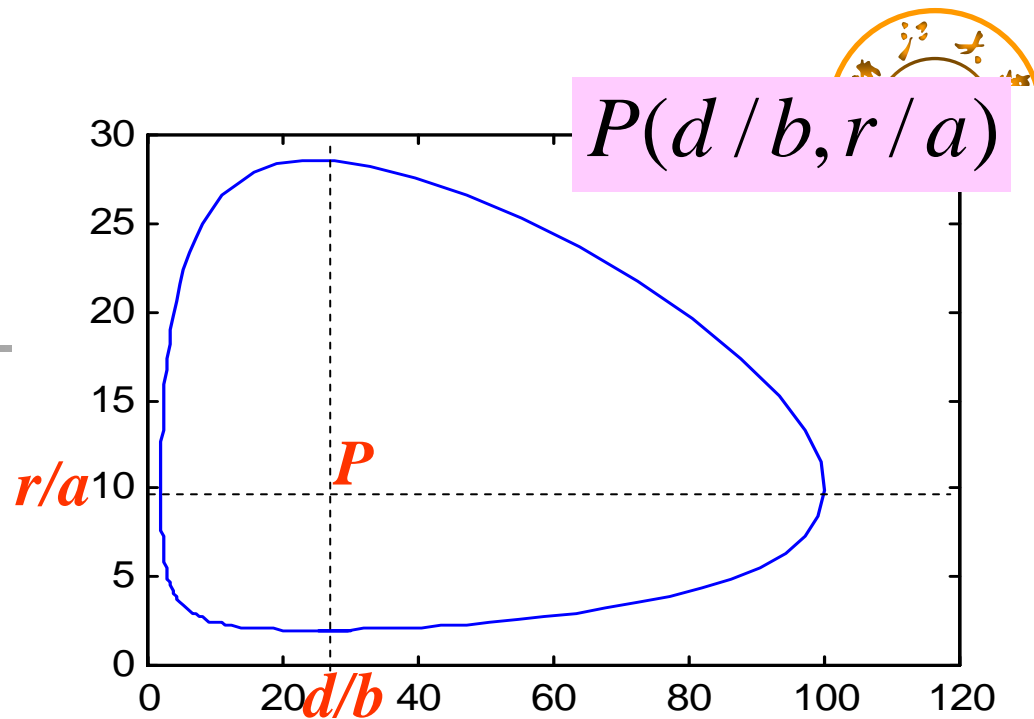
捕食者数量与 r 成正比，与 a 成反比

食饵
数量 $\bar{x} = \frac{d}{b}$

$d \sim$ 捕食者死亡率

$b \sim$ 食饵供养捕食者能力

食饵数量与 d 成正比，与 b 成反比





模型解释

一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？

自然环境

$$P(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{x} = d/b, \bar{y} = r/a$$

捕捞

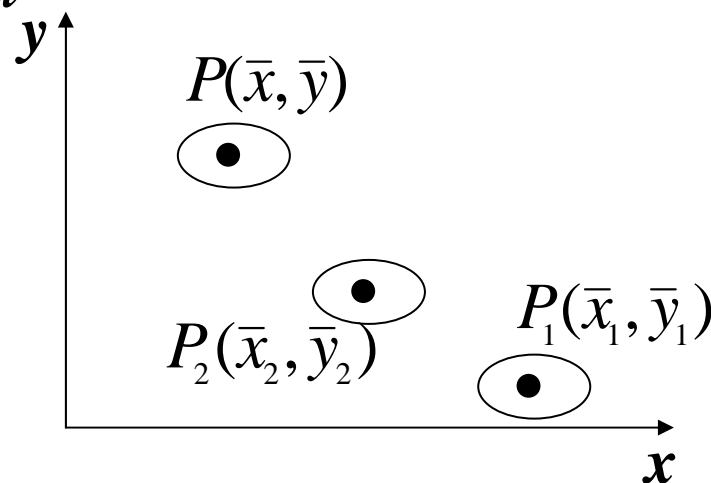
$$r \rightarrow r - \varepsilon_1, d \rightarrow d + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 > \bar{x}, \bar{y}_1 < \bar{y} \quad P \rightarrow P_1$$

战时捕捞

$$r \rightarrow r - \varepsilon_2, d \rightarrow d + \varepsilon_2, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 < \bar{x}_1, \bar{y}_2 > \bar{y}_1 \quad P_1 \rightarrow P_2$$



食饵(鱼)减少，
捕食者(鲨鱼)增加

$P \rightarrow P_1$ 还表明：对害虫(食饵)—益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂，会使害虫增加，益虫减少。



食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

多数食饵—捕食者系统观察不到周期震荡，
而是趋向某个平衡状态，即存在稳定平衡点

Volterra模型 $\dot{x}(t) = (r - ay)x$ $\dot{y}(t) = -(d - bx)y$

→
改写

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} \right)$$

加Logistic项 ↓

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

有稳定平衡点



食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定——一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。
- 自然界存在的周期性平衡生态系统是结构稳定的，即偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原状。

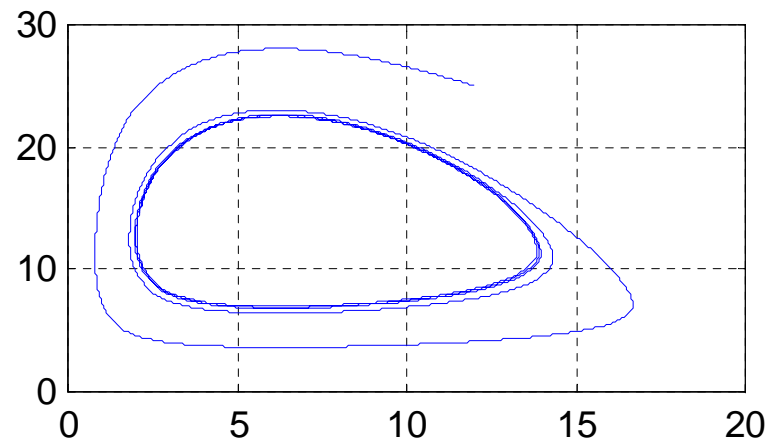
$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{1 + w x_1} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{1 + w x_1} \right)$$

$$r_1=1, N_1=20, \sigma_1=0.1, \\ w=0.2, r_2=0.5, \sigma_2=0.18$$

相轨线趋向极限环



结构稳定





两种群模型的几种形式

相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

相互依存

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

Discussion
