概 率 模 型

概率模型

1 传送系统的效率

2 报童的诀窍

3 随机存贮策略

4 轧钢中的浪费

5 随机人口模型

随机模型

确定性因素和随机性因素

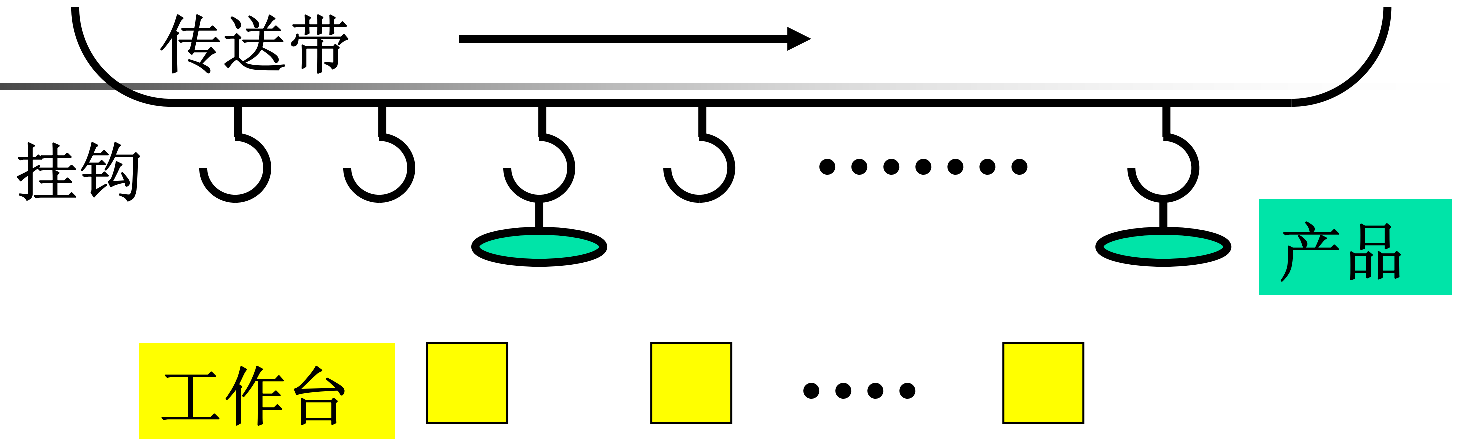
随机因素可以忽略

随机因素影响可以简单地以平均值的作用出现 ⇒ 确定性模型

随机因素影响必须考虑 ⇒ 随机性模型

1 传送系统的效率

背景



工人将生产出的产品挂在经过他上方的空钩上运走，若工作台数固定，挂钩数量越多，传送带运走的产品越多。

在生产进入稳态后，给出衡量传送带效率的指标，研究提高传送带效率的途径

问题分析

- 进入稳态后为保证生产系统的周期性运转，应假定工人们的生产周期相同，即每人作完一件产品后，要么恰有空钩经过他的工作台，使他可将产品挂上运走，要么没有空钩经过，迫使他放下这件产品并立即投入下件产品的生产。

- 可以用一个周期内传送带运走的产品数占产品总数的比例，作为衡量传送带效率的数量指标。

- 工人们生产周期虽然相同，但稳态下每人生产完一件产品的时刻不会一致，可以认为是随机的，并且在一个周期内任一时刻的可能性相同。

模型假设

1）n个工作台均匀排列，n个工人生产相互独立，生产周期是常数；

2）生产进入稳态，每人生产完一件产品的时刻在一个周期内是等可能的；

3）一周期内m个均匀排列的挂钩通过每一工作台的上方，到达第一个工作台的挂钩都是空的；

4）每人在生产完一件产品时都能且只能触到一只挂钩，若这只挂钩是空的，则可将产品挂上运走；若该钩非空，则这件产品被放下，退出运送系统。

模型建立

- 定义**传送带效率**为一周期内运走的产品数（记作s，待定）与生产总数 n（已知）之比，记作 $D=s/n$

为确定s，从工人考虑还是从挂钩考虑，哪个方便？

- 若求出一周期内每只挂钩非空的概率p，则 $s=mp$

如何求概率

设每只挂钩为空的概率为q，则 $p=1-q$

设每只挂钩不被一工人触到的概率为r，则 $q=r^n$

设每只挂钩被一工人触到的概率为u，则 $r=1-u$

一周期内有m个挂钩通过每一工作台的上方

$u=1/m \Rightarrow p=1-(1-1/m)^n \Rightarrow D=m[1-(1-1/m)^n]/n$

模型解释

传送带效率(一周期内运走产品数与生产总数之比)

$$D=\frac{m}{n}[1-(1-\frac{1}{m})^n]$$

若(一周期运行的)挂钩数**m**远大于工作台数**n**, 则

$$D\approx\frac{m}{n}[1-(1-\frac{n}{m}+\frac{n(n-1)}{2m^2})]=1-\frac{n-1}{2m}$$

定义***E*=1-*D*** (一周期内未运走产品数与生产总数之比)

当**n**远大于**1**时, ***E* ≈ n/2m** ~ ***E***与**n**成正比，与**m**成反比

若***n*=10, *m*=40,**

***D*≈87.5% (89.4%)**

提高效率的途径：

- 增加***m***
- 习题1

2　报童的诀窍

问题

报童售报： *a* (零售价) > *b*(购进价) > *c*(退回价)

售出一份赚 *a-b*；退回一份赔 *b-c*

每天购进多少份可使收入最大？

分析

购进太多→卖不完退回→赔钱

购进太少→不够销售→赚钱少

存在一个合适的购进量

应根据需求确定购进量

每天需求量是随机的

每天收入是随机的

优化问题的目标函数应是长期的日平均收入

等于每天收入的期望

准备

建模

调查需求量的随机规律——每天需求量为 r 的概率 $f(r)$, $r=0,1,2\ldots$

- 设每天购进 n 份，日平均收入为 $G(n)$
- 已知售出一份赚 $a-b$；退回一份赔 $b-c$

$$r \le n \Rightarrow 售出\ r \Rightarrow 赚(a-b)r$$

$$\Rightarrow 退回\ n-r \Rightarrow 赔(b-c)(n-r)$$

$$r > n \Rightarrow 售出 n \Rightarrow 赚(a-b)n$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r)$$

求 n 使 $G(n)$ 最大

求解

将**r**视为连续变量 $f(r) \Rightarrow p(r)$（概率密度）

$$G(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)dr+\int_n^\infty(a-b)np(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn}=(a-b)np(n)-\int_0^n(b-c)p(r)dr$$

$$-(a-b)np(n)+\int_n^\infty(a-b)p(r)dr$$

$$=-(b-c)\int_0^n p(r)dr+(a-b)\int_n^\infty p(r)dr$$

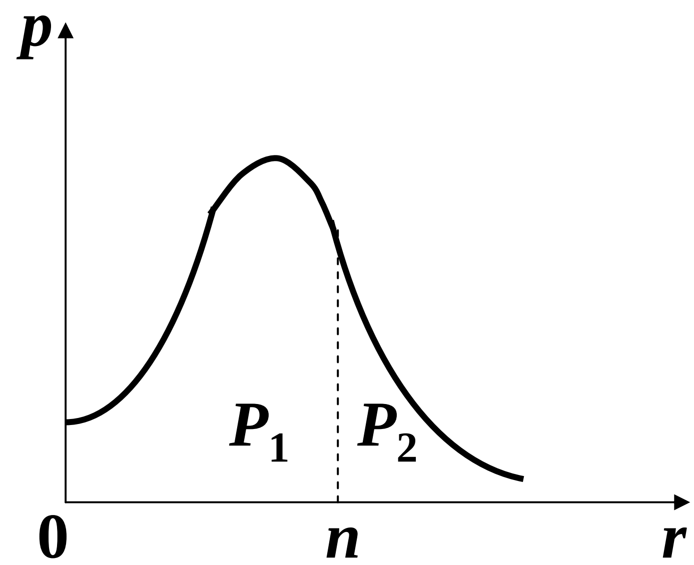
$$\frac{dG}{dn}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr}=\frac{a-b}{b-c}}$$

结果解释

$$\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}$$

$$\int_0^n p(r)dr = P_1, \int_n^\infty p(r)dr = P_2$$

取n使 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{a-b}{b-c}$



a-b ~售出一份赚的钱

b-c ~退回一份赔的钱

$$(a-b)\uparrow \Rightarrow n\uparrow, \quad (b-c)\uparrow \Rightarrow n\downarrow$$

3 随机存贮策略

问题

以周为时间单位；一周的商品销售量为随机；周末根据库存决定是否订货，供下周销售。

（s, S) 存贮策略

制订下界s, 上界S，当周末库存小于s 时订货，使下周初的库存达到S；否则，不订货。

考虑订货费、存贮费、缺货费、购进费，制订（s, S) 存贮策略，使(平均意义下)总费用最小

模型假设

- 每次订货费c_0, 每件商品购进价c_1,每件商品一周贮存费c_2,每件商品缺货损失费c_3 ($c_1<c_3$)

- 每周销售量 r 随机、连续，概率密度 $p(r)$

- 周末库存量x, 订货量 u, 周初库存量 $x+u$

- 每周贮存量按 $x+u-r$ 计

建模与求解

(s, S) 存贮策略

$$x \ge s \Rightarrow u = 0 \qquad x < s \Rightarrow u > 0,\ x + u = S$$

确定**(s, S)**, 使目标函数——每周总费用的平均值最小

s ~ 订货点，　**S** ~ 订货值

订货费c_0, 购进价c_1, 贮存费c_2, 缺货费c_3, 销售量 r

平均费用

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x+u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

$$L(x) = c_2 \int_0^x (x-r)p(r)dr + c_3 \int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

建模与求解

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

1）设 $x<s$, 求 u 使 $J(u)$ 最小，确定S

$$L(x)=c_2\int_0^x(x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty(r-x)p(r)dr$$

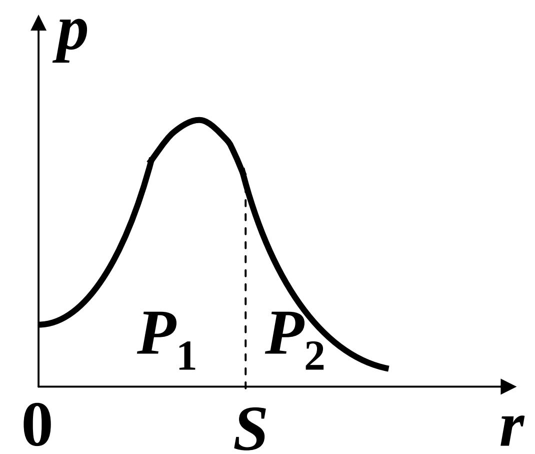
$$\frac{dJ}{du}=c_1+c_2\int_0^{x+u}p(r)dr-c_3\int_{x+u}^\infty p(r)dr$$

$x+u=S$

$\int_0^\infty p(r)dr=1$

$$\Rightarrow =(c_1+c_2)\int_0^S p(r)dr-(c_3-c_1)\int_S^\infty p(r)dr$$

$$\frac{dJ}{du}=0 \Rightarrow \frac{\int_0^S p(r)dr}{\int_S^\infty p(r)dr}=\frac{c_3-c_1}{c_2+c_1}=\frac{P_1}{P_2}$$



$$c_3\uparrow\Rightarrow S\uparrow,\quad c_2\uparrow\Rightarrow S\downarrow$$

建模与求解

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

2）对库存 *x*，确定订货点*s*

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^{\infty}(r-x)p(r)dr$$

若订货**u, u+x=S,** 总费用为 $J_1=c_0+c_1(S-x)+L(S)$

若不订货, **u=0,** 总费用为 $J_2=L(x)$

$$J_2\le J_1 \quad \Leftrightarrow \quad L(x)\le c_0+c_1(S-x)+L(S)$$

$\Downarrow$ 不订货

$$\Downarrow$$

$$c_1x+L(x)\le c_0+c_1S+L(S)$$

$$\Downarrow$$

记 $c_1x+L(x)=I(x)$ $\qquad$ $I(x)\le c_0+I(S)$

订货点 *s* 是 $I(x)=c_0+I(S)$ 的最小正根

建模与求解

$I(x)=c_0+I(S)$ 最小正根的图解法

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

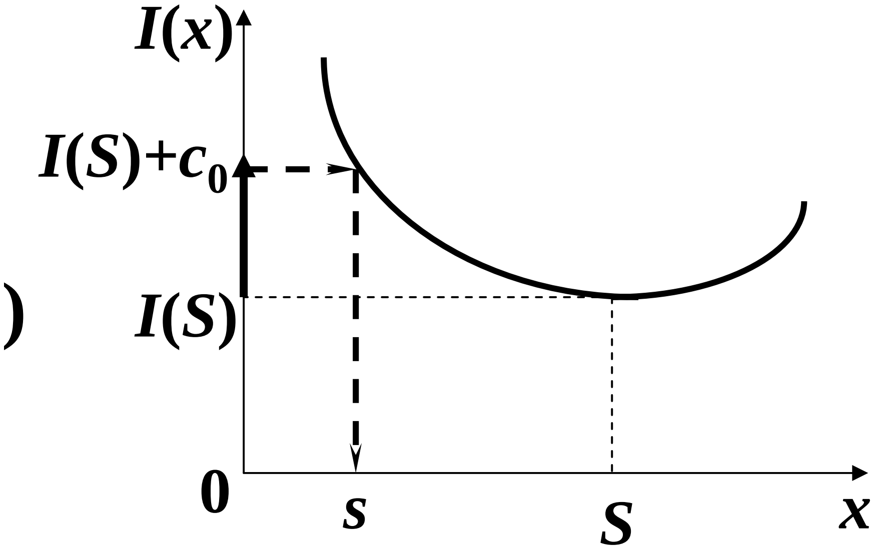
$$I(x)=c_1x+L(x)$$

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

***J(u)*在*u+x=S*处达到最小**

***J(u)*与*I(x)*相似** ⇩

I(x)*在*x=S*处达到最小值*I(S)



I(x)*图形** ⇨ ***I(S)

⇨ $I(x)=c_0+I(S)$ 的最小正根 *s*

4　轧钢中的浪费

背景

轧制钢材两道工序

- 粗轧(热轧) ~ 形成钢材的雏形
- 精轧(冷轧) ~ 得到钢材规定的长度

随机因素影响

粗轧

钢材长度正态分布

均值可以调整

方差由设备精度确定

粗轧钢材长度大于规定 → 切掉多余部分

精轧

粗轧钢材长度小于规定 → 整根报废

问题：如何调整粗轧的均值，使精轧的浪费最小

分析

设已知精轧后钢材的规定长度为 **l**，粗轧后钢材长度的均方差为 σ

记粗轧时可以调整的均值为 **m**，则粗轧得到的钢材长度为正态随机变量，记作 $x \sim N(m, \sigma^2)$

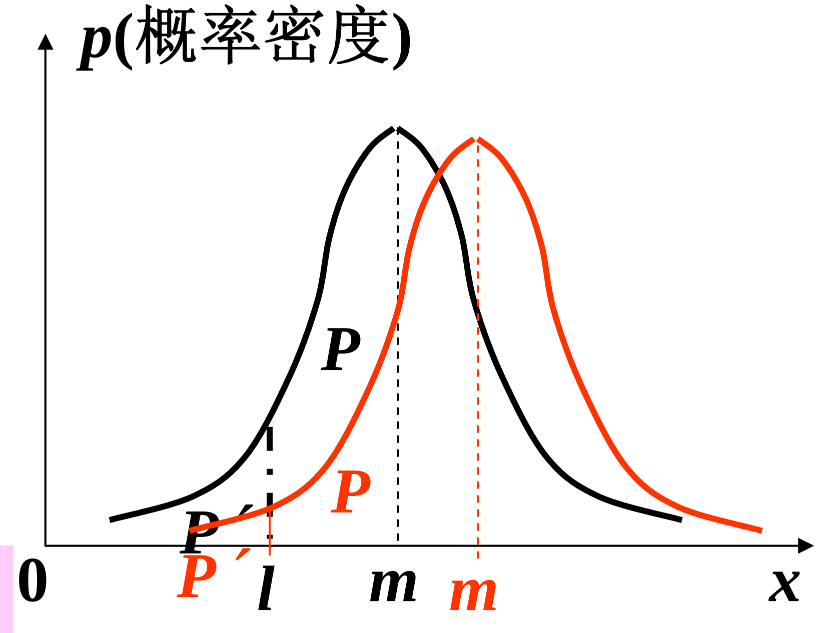
$P = P(x \geq l)$ $P' = P(x < l)$

切掉多余部分的概率

整根报废的概率

$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$

$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$



存在最佳的m使总的浪费最小

建模　选择合适的目标函数

总浪费 = 切掉多余部分的浪费 + 整根报废的浪费

$$W = \int_l^{\infty}(x-l)p(x)dx + \int_{-\infty}^{l} xp(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - \int_l^{\infty} lp(x)dx = m - lP$$

粗轧一根钢材平均浪费长度

粗轧N根 ⇨ 成品材 PN根

总长度mN ⇨ 成品材长度lPN

⇨ 共浪费长度 $mN-lPN$

$$\frac{mN - lPN}{N} = m - lP$$

建模 选择合适的目标函数

粗轧一根钢材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{N}=m-lP$

粗轧N根得成品材 PN根

得到一根成品材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{PN}=\dfrac{m}{P}-l$

更合适的目标函数

记 $J(m)=\dfrac{m}{P(m)}$

$$P(m)=\int_l^{\infty}p(x)dx,\ p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

优化模型：求m 使$J(m)$ 最小（已知l ,σ ）

求解

$$y = \frac{x-m}{\sigma}, \quad \mu = \frac{m}{\sigma}, \lambda = \frac{l}{\sigma}$$

$$J(m) = \frac{m}{P(m)}$$

$$\Downarrow$$

$$J(\mu) = \frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$$

$$P(m) = \int_l^\infty p(x)dx$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Phi(z) = \int_z^\infty \varphi(y)dy$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$z = \lambda - \mu$$

$$J(\mu) = \frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)} \quad \Rightarrow \quad J(z) = \frac{\sigma(\lambda - z)}{\Phi(z)}$$

求 z 使**$J(z)$** 最小（已知λ）

求解

$$\frac{dJ}{dz}=0$$

$$J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)}$$

$$-\Phi(z)-(\lambda-z)\Phi'(z)=0$$

$$\Phi'(z)=-\varphi(z)$$

$$\lambda-z=\Phi(z)/\varphi(z)$$

$$\Phi(z)=\int_z^{\infty}\varphi(y)dy$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$F(z)=\lambda-z$$

$$F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$$

求解 $F(z)=\lambda-z$ $F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$简表

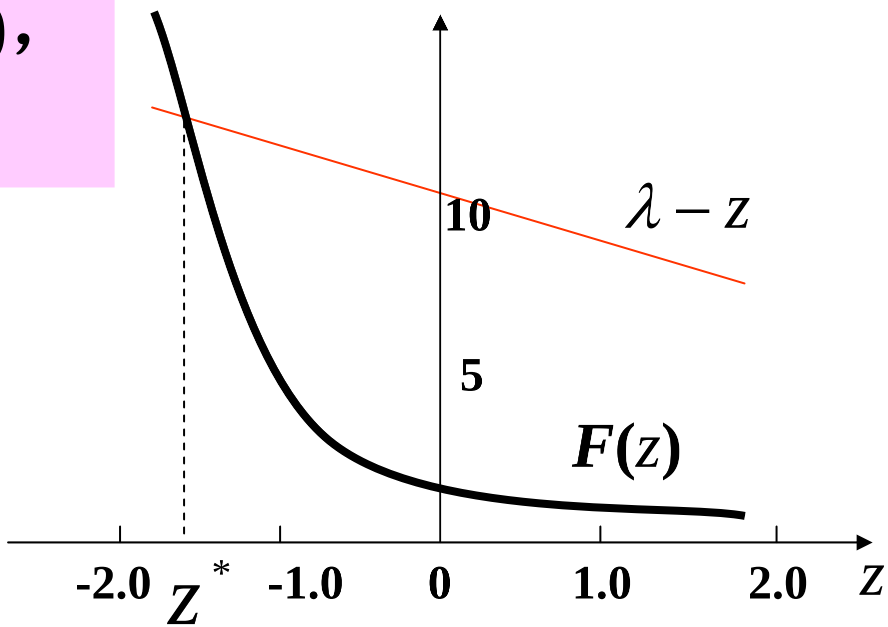
z	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5
$F(z)$	227.0	56.79	18.10	7.206	3.477	1.680
z	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$F(z)$	1.253	0.876	0.656	0.516	0.420	0.355

例 设l=2(米), σ=20(厘米)，求 m 使浪费最小。

$\lambda=l/\sigma=10$ ⇨ $z^*=-1.78$

⇨ $\mu^*=\lambda-z^*=11.78$

⇨ $m^*=\mu^*\sigma=2.36$(米)



5 随机人口模型

背景

• 一个人的出生和死亡是随机事件

一个国家或地区	平均生育率 平均死亡率	确定性模型
一个家族或村落	出生概率 死亡概率	随机性模型

对象

$X(t)$ ~ 时刻 t 的人口, 随机变量.

$P_n(t)$ ~概率$P(X(t)=n)$, $n=0,1,2,\ldots$

研究$P_n(t)$的变化规律；得到$X(t)$的期望和方差

模型假设

若$X(t)=n$, 对t到$t+\Delta t$的出生和死亡概率作以下假设

1)出生一人的概率与Δt成正比，记$b_n\Delta t$;

出生二人及二人以上的概率为$o(\Delta t)$.

2)死亡一人的概率与Δt成正比，记$d_n\Delta t$;

死亡二人及二人以上的概率为$o(\Delta t)$.

3)出生和死亡是相互独立的随机事件。

进一步假设

b_n与n成正比，记$b_n=\lambda n$, λ~出生概率;

d_n与n成正比，记$d_n=\mu n$，μ~死亡概率。

建模

为得到$P_n(t)$ $P(X(t)=n)$,的变化规律，考察$P_n(t+\Delta t) =P(X(t+\Delta t)=n)$.

事件$X(t+\Delta t)=n$的分解	概率$P_n(t+\Delta t)$
$X(t)=n-1$, Δt内出生一人	$P_{n-1}(t)$, $b_{n-1}\Delta t$
$X(t)=n+1$, Δt内死亡一人	$P_{n+1}(t)$, $d_{n+1}\Delta t$
$X(t)=n$, Δt内没有出生和死亡	$P_n(t)$, $1-b_n\Delta t-d_n\Delta t$
其它(出生或死亡二人，出生且死亡一人，… …)	$o(\Delta t)$

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t \\
&\quad + P_n(t)(1-b_n\Delta t - d_n\Delta t) + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

建模

微分方程

$$\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) - (b_n + d_n)P_n(t)$$

$b_n=\lambda n$，$d_n=\mu n$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

(**t=0**时已知人口为n_0)

~一组递推微分方程——求解的困难和不必要

转而考察**$X(t)$**的期望和方差

基本方程 $$\frac{dP_n}{dt}=\lambda(n-1)P_{n-1}(t)+\mu(n+1)P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)nP_n(t)$$

求解

X(t)的期望 $E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)$ $\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{dP_n}{dt}$

$$\frac{dE}{dt}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)P_{n-1}(t)$$

n-1=k

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)P_k(t)$$

$$+\mu\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)P_{n+1}(t)$$

$$=\mu\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)P_k(t)$$

n+1=k

$$-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n^2P_n(t)$$

$$\frac{dE}{dt}=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)=(\lambda-\mu)E(t)$$

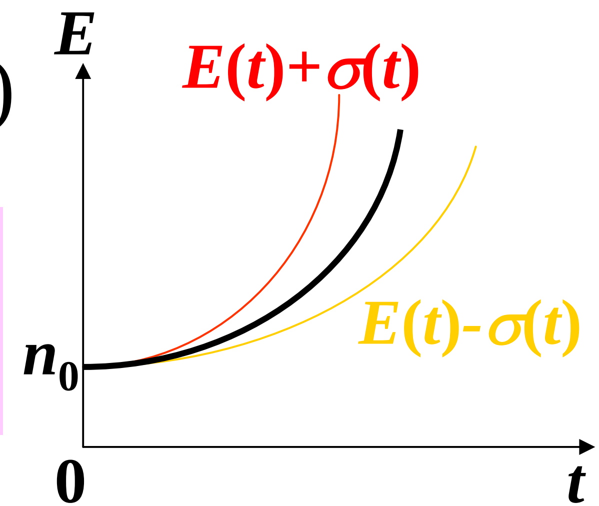
求解 $\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)E(t)$ ⇨ $E(t) = n_0 e^{rt}$，$r = \lambda - \mu$

$E(0) = n_0$

r ~ 增长概率

比较：确定性指数增长模型 $x(t) = x_0 e^{rt}$ r ~ 平均增长率

$X(t)$的方差 $D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - E^2(t)$



⇨ $D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t}[e^{(\lambda - \mu)t} - 1]$

$X(t)$大致在 $E(t) \pm 2\sigma(t)$ 范围内（$\sigma(t)$ ~均方差）

$\lambda - \mu = r \uparrow \rightarrow D(t) \uparrow$ $\lambda, \mu \uparrow \rightarrow D(t) \uparrow$

Discussions