



静态优化模型



内容

- 1 存贮模型
- 2 生猪的出售时机
- 3 森林救火
- 4 最优价格
- 5 血管分支
- 6 消费者均衡
- 7 冰山运输



静态优化模型

- 现实世界中普遍存在着优化问题
- 静态优化问题指**最优解**是数(不是函数)
- 建立静态优化模型的关键之一是根据建模目的确定恰当的**目标函数**
- 求解静态优化模型一般用**微分法**



1 存贮模型

问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费。该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出。

已知某产品日需求量**100**件，生产准备费**5000**元，贮存费每日每件**1**元。试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小。

要求 不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系。



问题分析与思考

日需求100件，准备费5000元，贮存费每日每件1元。

- 每天生产一次，每次100件，无贮存费，准备费5000元。

每天费用5000元

- 10天生产一次，每次1000件，贮存费 $900+800+\dots+100=4500$ 元，准备费5000元，总计9500元。

平均每天费用950元

- 50天生产一次，每次5000件，贮存费 $4900+4800+\dots+100=122500$ 元，准备费5000元，总计127500元。

平均每天费用2550元

10天生产一次平均每天费用最小吗？



问题分析与思考

- 周期短，产量小 \Rightarrow 贮存费少，准备费多
- 周期长，产量大 \Rightarrow 准备费少，贮存费多

\Rightarrow 存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小

- 这是一个优化问题，关键在建立目标函数。

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数

目标函数——每天总费用的平均值



模型假设

1. 产品每天的需求量为常数 r ;
2. 每次生产准备费为 c_1 , 每天每件产品贮存费为 c_2 ;
3. T 天生产一次（周期）, 每次生产 Q 件, 当贮存量为零时, Q 件产品立即到来（生产时间不计）;
4. 为方便起见, 时间和产量都作为连续量处理。

建模目的

设 r, c_1, c_2 已知, 求 T, Q 使每天总费用的平均值最小。



模型建立

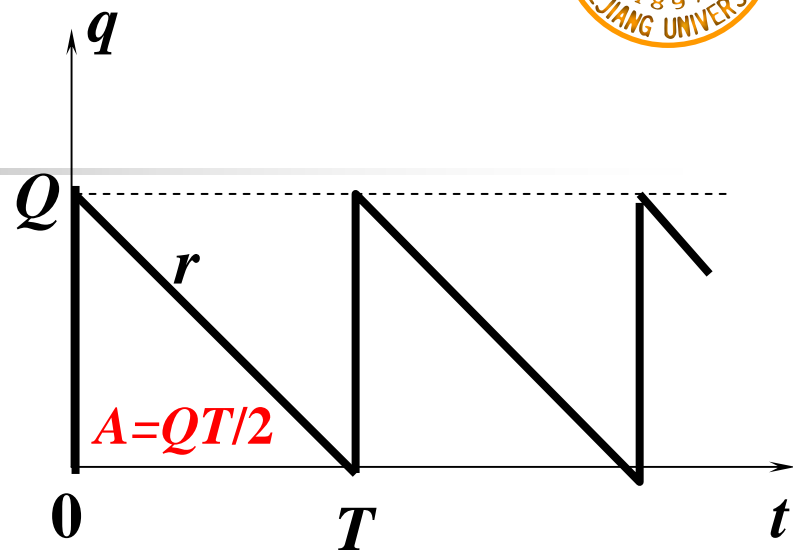
离散问题连续化

贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

$t=0$ 生产 Q 件, $q(0)=Q$, $q(t)$ 以需求速率 r 递减, $q(T)=0$.



$$Q = rT$$



一周期贮存费为
 $c_2 \int_0^T q(t) dt = c_2 A$

一周期
总费用

$$\tilde{C} = c_1 + c_2 \frac{Q}{2} T = c_1 + c_2 \frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值
(目标函数)

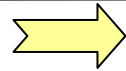
$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2}$$



模型求解

求 T 使 $C(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} \rightarrow \text{Min}$

$$\frac{dC}{dT} = 0$$



$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型分析

$$c_1 \uparrow \Rightarrow T, Q \uparrow$$

$$c_2 \uparrow \Rightarrow T, Q \downarrow$$

$$r \uparrow \Rightarrow T \downarrow, Q \uparrow$$

模型应用

$$c_1=5000, c_2=1, r=100$$

• 回答问题 

$$T=10(\text{天}), Q=1000(\text{件}), C=1000(\text{元})$$



• 经济批量订货公式（EOQ公式）

用于订货、供应、存贮情形

每天需求量 r ，每次订货费 c_1 ，每天每件贮存费 c_2 ，
 T 天订货一次(周期)，每次订货 Q 件，当贮存量降到零时， Q 件立即到货。

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \quad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$$

不允许缺货的存贮模型

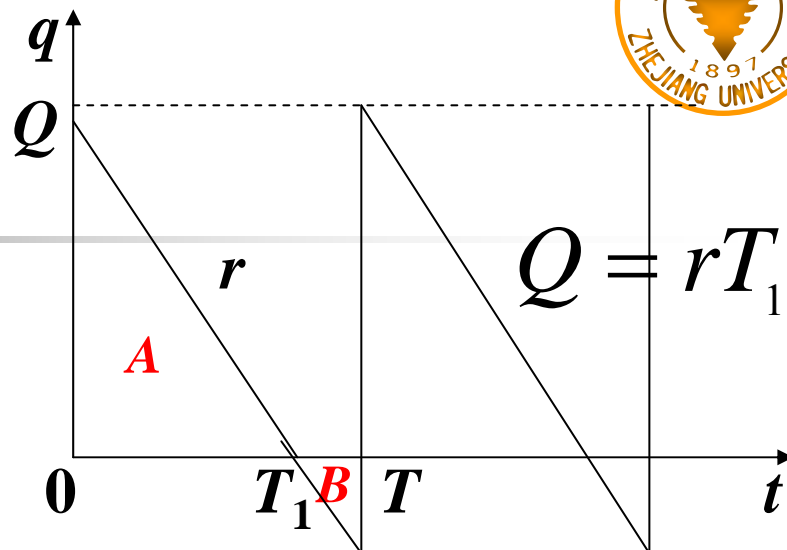
• 问：为什么不考虑生产费用？在什么条件下才不考虑？



允许缺货的存贮模型

当贮存量降到零时仍有需求 r ,
出现缺货, 造成损失

原模型假设: 贮存量降到零时 Q 件
立即生产出来(或立即到货)



现假设: 允许缺货, 每天每件缺货损失费 c_3 , 缺货需补足

周期 T , $t=T_1$ 贮存量降到零

一周期
贮存费 $c_2 \int_0^{T_1} q(t) dt = c_2 A$

一周期
缺货费 $c_3 \int_{T_1}^T |q(t)| dt = c_3 B$

一周期总费用

$$\bar{C} = c_1 + c_2 \frac{QT_1}{2} + c_3 \frac{r(T-T_1)^2}{2}$$



一周期总费用

$$\bar{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2QT_1 + \frac{1}{2}c_3r(T-T_1)^2$$

每天总费用
平均值
(目标函数)

$$C(T, Q) = \frac{\bar{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT - Q)^2}{2rT}$$

求 T, Q 使

$$C(T, Q) \rightarrow \text{Min}$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = 0, \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$$

为与不允许缺货的存贮模型
相比, T 记作 T' , Q 记作 Q'

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$



允许
缺货
模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

不允
许缺
货模
型

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

记 $\mu = \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$

$$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$$

不允
许缺
货

$$\mu > 1 \Rightarrow T' > T, \quad Q' < Q \quad c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$$

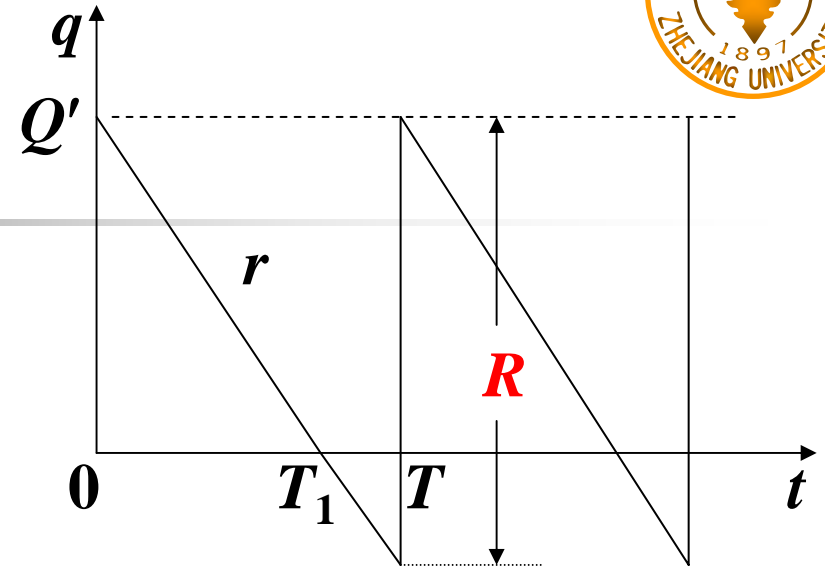
$$\Leftrightarrow c_3 \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow 1 \Rightarrow T' \rightarrow T, \quad Q' \rightarrow Q$$



允许 缺货 模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q' ~每周期初的存贮量

每周期的生产量
 R （或订货量）

$$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$R = \mu Q > Q$ Q ~不允许缺货时的产量(或订货量)



Discussions



2 生猪的出售时机

问题

饲养场每天投入4元资金，用于饲料、人力、设备，**估计**可使80千克重的生猪体重增加2公斤。

市场价格目前为每千克8元，但是**预测**每天会降低0.1元，问生猪应何时出售。

如果**估计**和**预测**有误差，对结果有何影响。

分析

投入资金使生猪体重随时间增加，出售单价随时间减少，故存在最佳出售时机，使利润最大



建模及求解

估计 $r=2$, $g=0.1$

若当前出售, 利润为 $80 \times 8 = 640$ (元)

t 天 出售	生猪体重 $w=80+rt$	销售收入 $R=pw$
	出售价格 $p=8-gt$	资金投入 $C=4t$

利润 $Q=R-C=pw-C$ $Q(t) = (8-gt)(80+rt) - 4t$

求 t 使 $Q(t)$ 最大

$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg} = 10$$

$$Q(10) = 660 > 640$$

10天后出售, 可多得利润20元



敏感性分析

$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg}$$

研究 r, g 变化时对模型结果的影响

估计 $r=2$, $g=0.1$

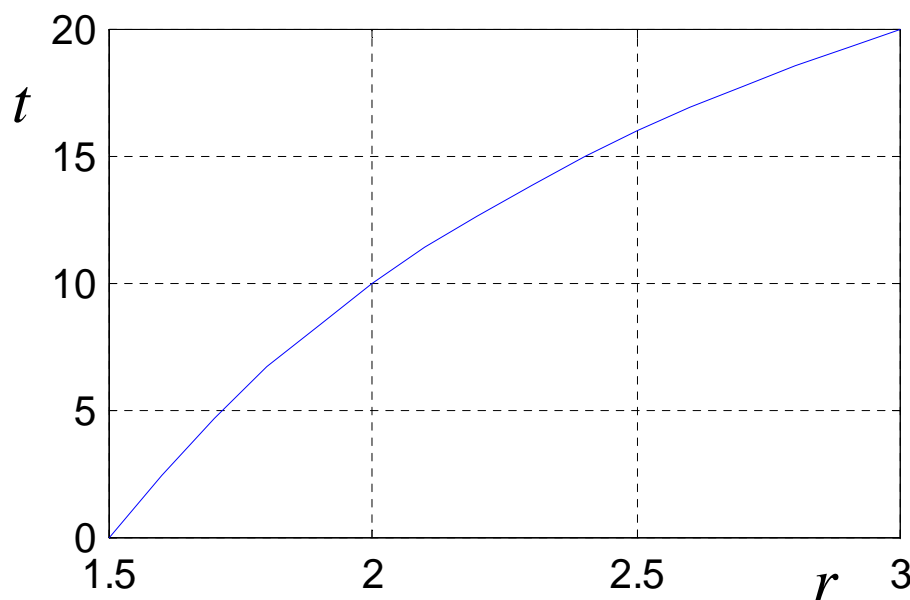
• 设 $g=0.1$ 不变

$$t = \frac{40r - 60}{r}, \quad r \geq 1.5$$

t 对 r 的（相对）敏感度

$$S(t, r) = \frac{\Delta t / t}{\Delta r / r} \approx \frac{dt}{dr} \frac{r}{t}$$

$$S(t, r) \approx \frac{60}{40r - 60} = 3$$



生猪每天体重增加量 r 增加1%，出售时间推迟3%。



敏感性分析

$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg}$$

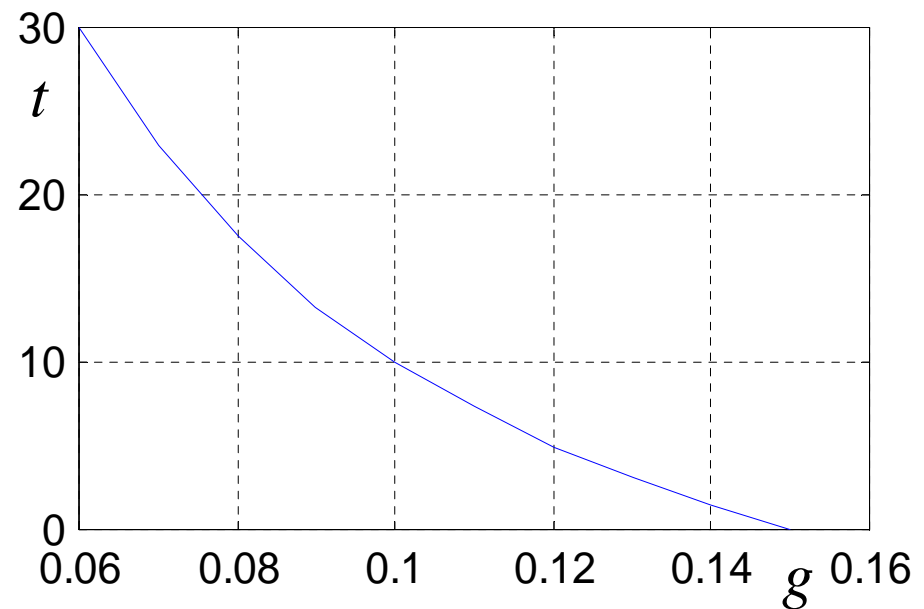
研究 r, g 变化时对模型结果的影响 估计 $r=2$, $g=0.1$

• 设 $r=2$ 不变
$$t = \frac{3 - 20g}{g}, \quad 0 \leq g \leq 0.15$$

t 对 g 的（相对）敏感度

$$S(t, g) = \frac{\Delta t / t}{\Delta g / g} \approx \frac{dt}{dg} \frac{g}{t}$$

$$S(t, g) = -\frac{3}{3 - 20g} = -3$$



生猪价格每天的降低量 g 增加 1%，出售时间提前 3%。



强健性分析

研究 r, g 不是常数时对模型结果的影响

$$w=80+rt \rightarrow w = w(t)$$

$$p=8-gt \rightarrow p = p(t)$$



$$Q(t) = p(t)w(t) - 4t$$

$$Q'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad p'(t)w(t) + p(t)w'(t) = 4$$



每天利润的增值



每天投入的资金

保留生猪直到利润的增值等于每天的费用时出售

由 $S(t, r)=3$ 若 $1.8 \leq w' \leq 2.2$ (10%), 则 $7 \leq t \leq 13$ (30%)

建议过一周后($t=7$)重新估计 p, p', w, w' , 再作计算。



Discussions



3 森林救火

问题

森林失火后，要确定派出消防队员的数量。

队员多，森林损失小，救援费用大；

队员少，森林损失大，救援费用小。

综合考虑损失费和救援费，确定队员数量。

问题分析

记队员人数 x ，失火时刻 $t=0$ ，开始救火时刻 t_1 ，
灭火时刻 t_2 ，时刻 t 森林烧毁面积 $B(t)$ 。

- 损失费 $f_1(x)$ 是 x 的减函数，由烧毁面积 $B(t_2)$ 决定。
- 救援费 $f_2(x)$ 是 x 的增函数，由队员人数和救火时间决定。

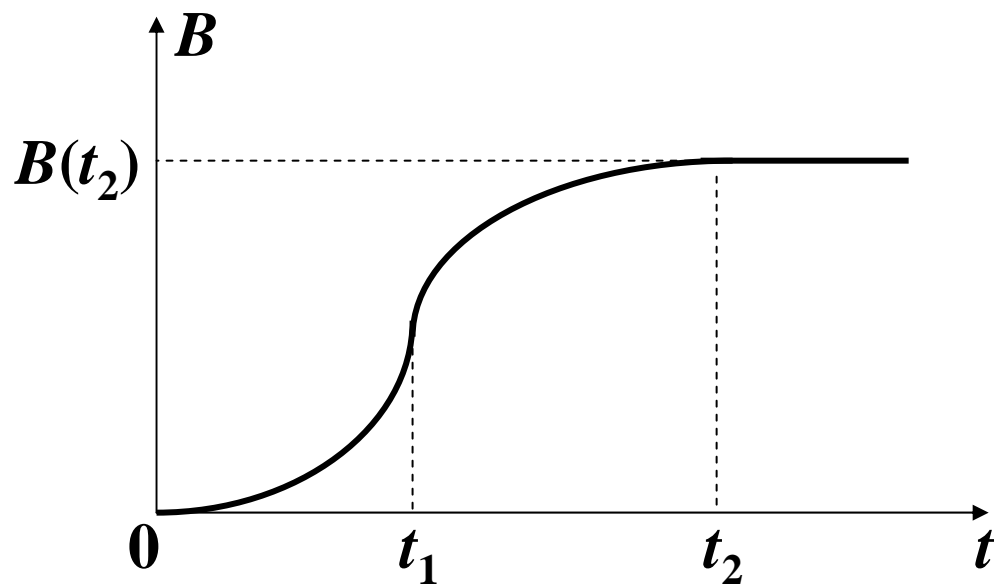
存在恰当的 x ，使 $f_1(x), f_2(x)$ 之和最小

问题分析

- 关键是对 $B(t)$ 作出合理的简化假设.

失火时刻 $t=0$, 开始救火时刻 t_1 , 灭火时刻 t_2 ,
画出时刻 t 森林烧毁面积 $B(t)$ 的大致图形

分析 $B(t)$ 比较困难,
转而讨论森林烧毁
速度 dB/dt .

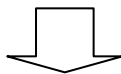


模型假设

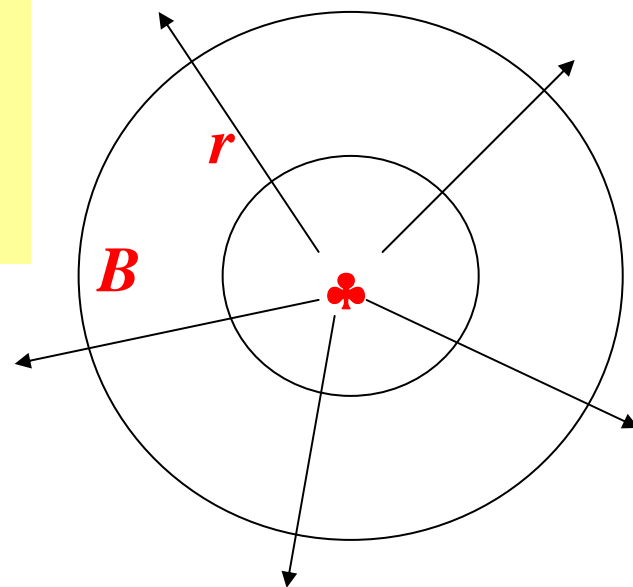
- 1) $0 \leq t \leq t_1$, dB/dt 与 t 成正比, 系数 β (火势蔓延速度)
- 2) $t_1 \leq t \leq t_2$, β 降为 $\beta - \lambda x$ (λ 为队员的平均灭火速度)
- 3) $f_1(x)$ 与 $B(t_2)$ 成正比, 系数 c_1 (烧毁单位面积损失费)
- 4) 每个队员的单位时间灭火费用 c_2 , 一次性费用 c_3

假设1) 的解释

火势以失火点为中心,
均匀向四周呈圆形蔓
延, 半径 r 与 t 成正比



面积 B 与 t^2 成正比,
 dB/dt 与 t 成正比.





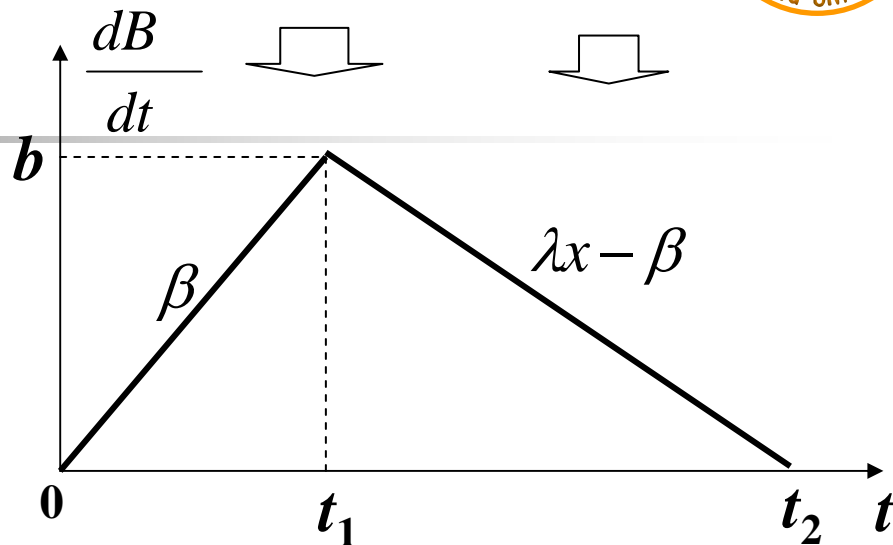
模型建立

$$b = \beta t_1, \quad t_2 - t_1 = \frac{b}{\lambda x - \beta}$$

$$\Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{\beta t_1}{\lambda x - \beta}$$

假设1)

假设2)



$$B(t_2) = \int_0^{t_2} \dot{B}(t) dt = \frac{b t_2}{2} = \frac{\beta t_1^2}{2} + \frac{\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x - \beta)}$$

假设3) 4) $\Rightarrow f_1(x) = c_1 B(t_2), \quad f_2(x) = c_2 x(t_2 - t_1) + c_3 x$

目标函数——总费用

$$C(x) = f_1(x) + f_2(x)$$



模型建立

目标函数——总费用

$$C(x) = \frac{c_1 \beta t_1^2}{2} + \frac{c_1 \beta^2 t_1^2}{2(\lambda x - \beta)} + \frac{c_2 \beta t_1 x}{\lambda x - \beta} + c_3 x$$

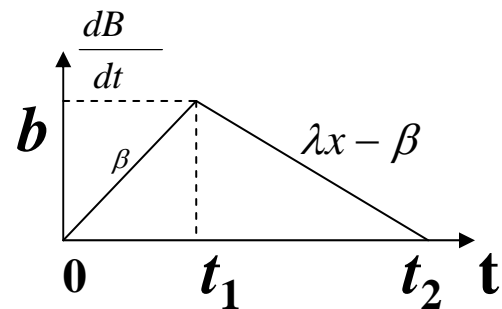
其中 $c_1, c_2, c_3, t_1, \beta, \lambda$ 为已知参数

模型求解

求 x 使 $C(x)$ 最小

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\lambda} + \beta \sqrt{\frac{c_1 \lambda t_1^2 + 2c_2 t_1}{2c_3 \lambda^2}}$$



结果解释

- β/λ 是火势不继续蔓延的最少队员数



结果 解释

$$x = \frac{\beta}{\lambda} + \beta \sqrt{\frac{c_1 \lambda t_1^2 + 2c_2 t_1}{2c_3 \lambda^2}}$$

c_1 ~烧毁单位面积损失费, c_2 ~每个队员单位时间灭火费,
 c_3 ~每个队员一次性费用, t_1 ~开始救火时刻,
 β ~火势蔓延速度, λ ~每个队员平均灭火速度.

$$c_1, t_1, \beta \uparrow \rightarrow x \uparrow$$

$$c_3, \lambda \uparrow \rightarrow x \downarrow$$

$$c_2 \uparrow \rightarrow x \uparrow$$

为什么?

模型 应用

c_1, c_2, c_3 已知, t_1 可估计, β, λ 可设置一系列数值
由模型决定队员数量 x



Discussions

- 模型是否实际？



4 最优价格

问题

根据产品成本 and 市场需求，在产销平衡条件下确定商品价格，使利润最大

假设

- 1) 产量等于销量，记作 x
- 2) 收入与销量 x 成正比，系数 p 即价格
- 3) 支出与产量 x 成正比，系数 q 即成本
- 4) 销量 x 依赖于价格 p , $x(p)$ 是减函数

进一步设 $x(p) = a - bp$, $a, b > 0$

建模 与求解

收入 $I(p) = px$

支出 $C(p) = qx$

利润 $U(p) = I(p) - C(p)$ 求 p 使 $U(p)$ 最大



建模 与求解

使利润 $U(p)$ 最大的最优价格 p^* 满足

$$\left. \frac{dU}{dp} \right|_{p=p^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left. \frac{dI}{dp} \right|_{p=p^*}}_{\text{边际收入}} = \underbrace{\left. \frac{dC}{dp} \right|_{p=p^*}}_{\text{边际支出}}$$

最大利润在边际收入等于边际支出时达到

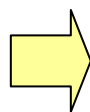
$$I(p) = px$$

$$C(p) = qx$$

$$x(p) = a - bp$$



$$\begin{aligned} U(p) &= I(p) - C(p) \\ &= (p - q)(a - bp) \end{aligned}$$



$$p^* = \frac{q}{2} + \frac{a}{2b}$$

结果 解释

$$p^* = \frac{q}{2} + \frac{a}{2b} \quad x(p) = a - bp, a, b > 0$$



- $q/2 \sim$ 成本的一半

- $b \sim$ 价格上升1单位时销量的下降幅度（需求对价格的敏感度）

$$b \uparrow \rightarrow p^* \downarrow$$

- $a \sim$ 绝对需求(p 很小时的需求)

$$a \uparrow \rightarrow p^* \uparrow$$

思考：如何得到参数 a, b ?



5 血管分支

背景

机体提供能量维持血液在血管中的流动

给血管壁以营养 克服血液流动的阻力

消耗能量取决于血管的几何形状

在长期进化中动物血管的几何形状
已经达到能量最小原则

问题

研究在能量最小原则下，血管分支处
粗细血管半径比例和分岔角度

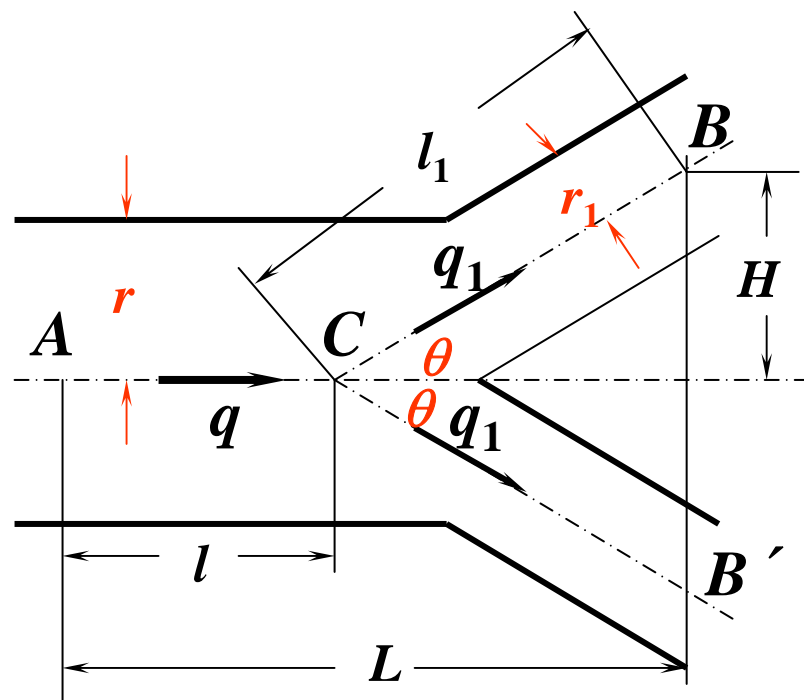
模型假设

一条粗血管和两条细血管在分支点对称地处于同一平面
血液流动近似于粘性流体在刚性管道中的运动

血液给血管壁的能量随管壁的内表面积和体积的增加而增加，管壁厚度近似与血管半径成正比

考察血管AC与CB, CB'

$$q=2q_1 \quad r/r_1, \theta?$$





模型假设

粘性流体在刚性管道中运动

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu l}$$

$\Delta p \sim A, C$ 压力差,
 $\mu \sim$ 粘性系数

克服阻力消耗能量

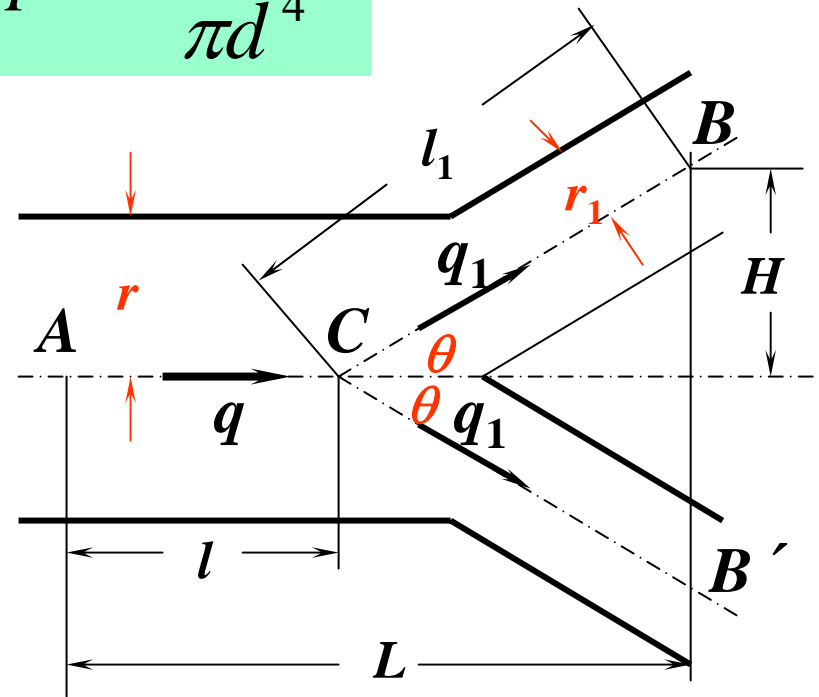
$$E_1 = q \Delta p = \frac{8 \mu q^2 l}{\pi d^4}$$

提供营养消耗能量

管壁内表面积 $2\pi r l$

管壁体积 $\pi(d^2 + 2rd)l$,
管壁厚度 d 与 r 成正比

$$E_2 = b r^\alpha l, 1 \leq \alpha \leq 2$$



模型建立

克服阻力消耗能量

$$E_1 = q \Delta p = \frac{8 \mu q^2 l}{\pi d^4}$$

提供营养消耗能量

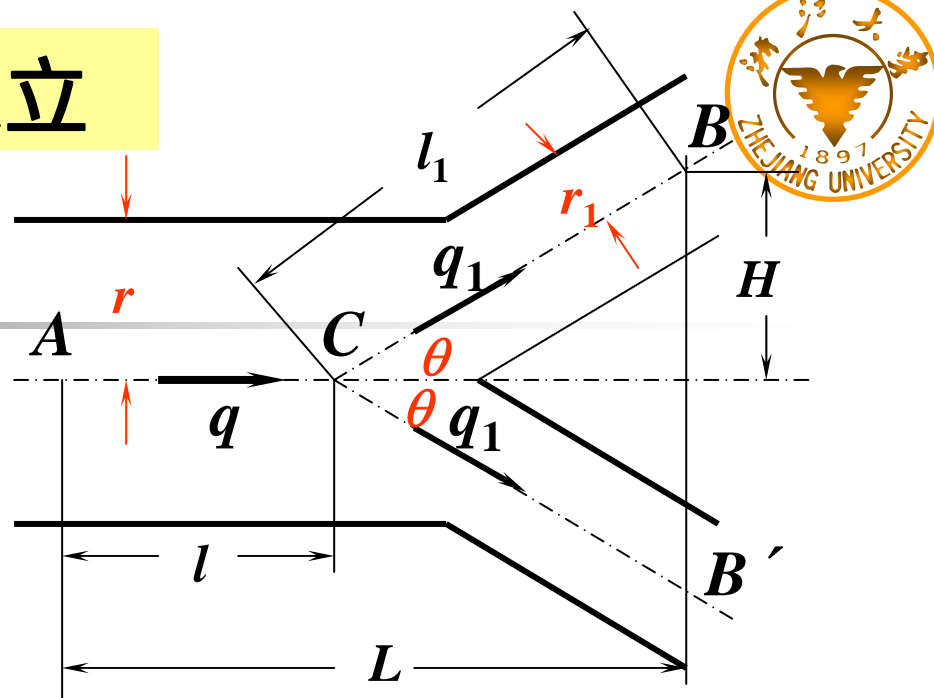
$$E_2 = b r^\alpha l, 1 \leq \alpha \leq 2$$

机体为血流提供能量

$$l = L - H / \tan \theta, \quad l_1 = L - H / \sin \theta$$

$$E = E_1 + E_2 = (k q^2 / r^4 + b r^\alpha) l + (k q_1^2 / r_1^4 + b r_1^\alpha) 2 l_1$$

$$E(r, r_1, \theta) = (k q^2 / r^4 + b r^\alpha) (L - H / \tan \theta) + (k q_1^2 / r_1^4 + b r_1^\alpha) 2 H / \sin \theta$$



模型求解

$$E(r, r_1, \theta) = (kq^2 / r^4 + br^\alpha)(L - H / \tan \theta) + (kq_1^2 / r_1^4 + br_1^\alpha)2H / \sin \theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r_1} = 0$$

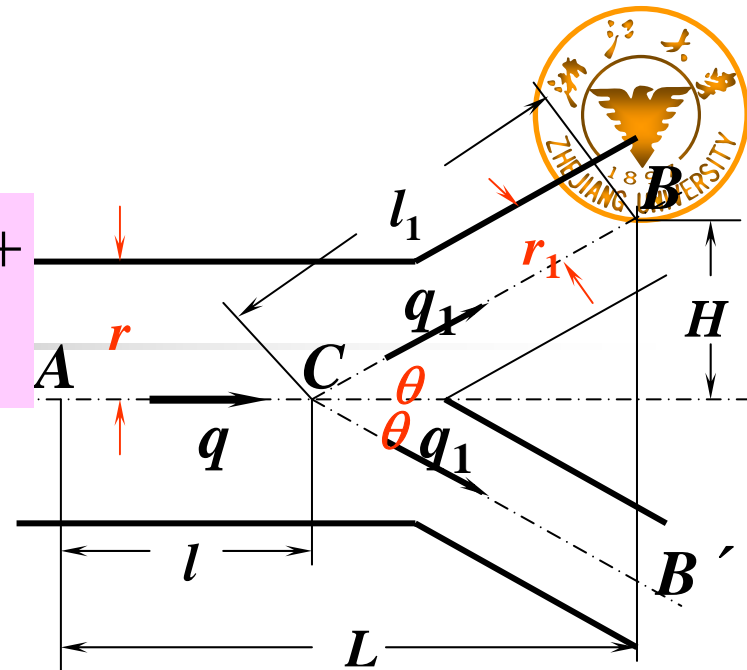
$$b\alpha r^{\alpha-1} - 4kq^2 / r^5 = 0$$

$$b\alpha r_1^{\alpha-1} - 4kq^2 / r_1^5 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad \cos \theta = 2 \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-4}$$

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

$$1.26 \leq r / r_1 \leq 1.32, \quad 37^\circ \leq \theta \leq 49^\circ$$



$$\frac{r}{r_1} = 4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$\cos \theta = 2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

模型 解释

$$\frac{r}{r_1} = 4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$1.26 \leq r / r_1 \leq 1.32$$

$$37^\circ \leq \theta \leq 49^\circ$$



生物学家：结果与观察大致吻合

推论

大动脉到毛细血管有 n 次分岔

$n=?$

大动脉半径 r_{\max} , 毛细血管半径 r_{\min}

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

观察：狗的血管

$$r_{\max} / r_{\min} \approx 1000 \approx 4^5$$

$$n \approx 5(\alpha + 4)$$

$$1 \leq \alpha \leq 2 \quad n \approx 25 \sim 30$$

血管总条数

$$2^n \approx 2^{25} \sim 2^{30} \approx 3 \times 10^7 \sim 10^9$$

6 消费者均衡

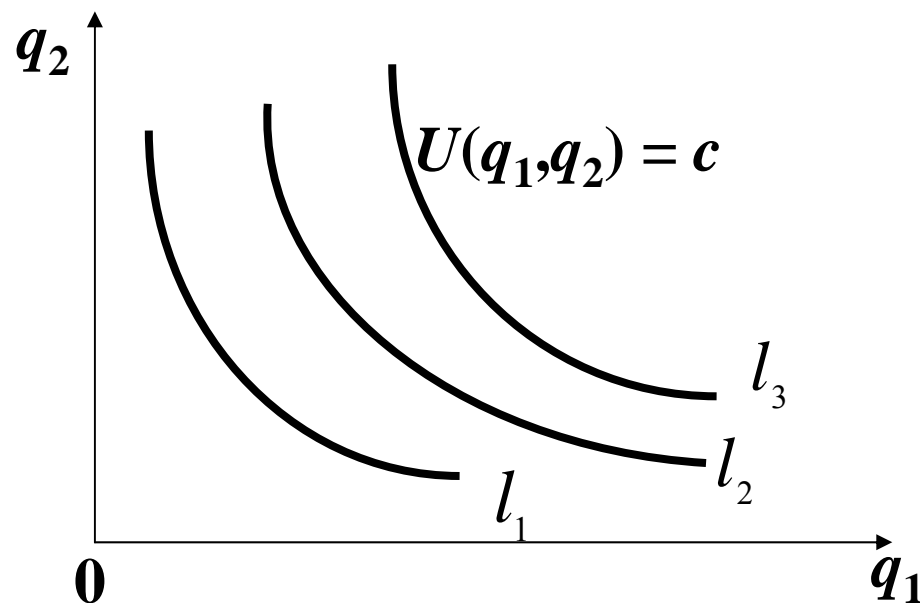


问题

消费者对甲乙两种商品的偏爱程度用无差别曲线族表示，问他如何分配一定数量的钱，购买这两种商品，以达到最大的满意度。

设甲乙数量为 q_1, q_2 ，消费者的无差别曲线族（单调减、下凸、不相交），记作 $U(q_1, q_2) = c$

$U(q_1, q_2) \sim$ 效用函数



已知甲乙价格 p_1, p_2 ，有钱 s ，试分配 s ，购买甲乙数量 q_1, q_2 ，使 $U(q_1, q_2)$ 最大。

模型 及 求解

已知价格 p_1, p_2 , 钱 s ,
求 q_1, q_2 , 或 $p_1 q_1 / p_2 q_2$,
使 $U(q_1, q_2)$ 最大



$$\begin{aligned} \max \quad & Z = U(q_1, q_2) \\ \text{s.t.} \quad & p_1 q_1 + p_2 q_2 = s \end{aligned}$$

$$L = U + \lambda(p_1 q_1 + p_2 q_2), \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1,2) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

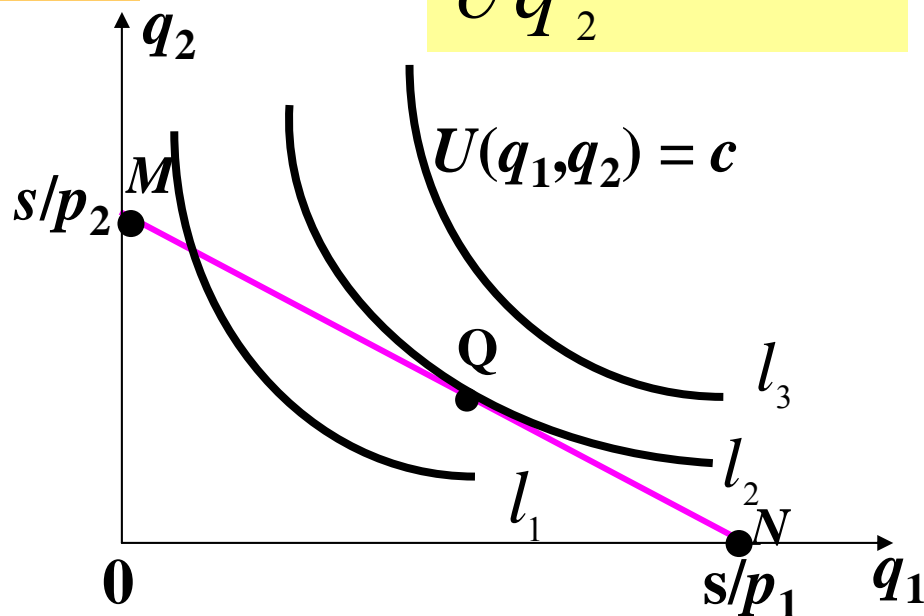
几何 解释

直线MN: $p_1 q_1 + p_2 q_2 = s$

最优解Q: MN与 l_2 切点

斜率 $K_{MN} = -p_1 / p_2$

$$K_{l_2} = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1} / \frac{\partial U}{\partial q_2}$$



结果 解释

$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}$ —— 边际效用

消费者均衡状态在两种商品的边际效用之比恰等于它们价格之比时达到。

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

效用函数 $U(q_1, q_2)$ 应满足的条件

A. $U(q_1, q_2) = c$ 所确定的函数 $q_2 = q_2(q_1)$ 单调减、下凸

B. $\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} > 0$

$$B \Rightarrow A$$

• 解释 B 的实际意义

效用函数 $U(q_1, q_2)$ 几种常用的形式

$$1. U = \left(\frac{\alpha}{q_1} + \frac{\beta}{q_2} \right)^{-1}, \alpha, \beta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \sqrt{\frac{\alpha p_1}{\beta p_2}}$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- 消费者均衡状态下购买两种商品费用之比与二者价格之比的平方根成正比。
- $U(q_1, q_2)$ 中参数 α, β 分别表示消费者对甲乙两种商品的偏爱程度。

效用函数 $U(q_1, q_2)$ 几种常用的形式

$$2. U = q_1^\lambda q_2^\mu, \quad 0 < \lambda, \mu < 1$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- 购买两种商品费用之比与二者价格无关。
- $U(q_1, q_2)$ 中参数 λ, μ 分别表示对甲乙的偏爱程度。

$$3. U = (a\sqrt{q_1} + b\sqrt{q_2})^2, \quad a, b > 0$$

思考：如何推广到 $m (> 2)$ 种商品的情况



7 冰山运输

背景

- 波斯湾地区水资源贫乏，淡化海水的成本为每立方米0.1英镑。
- 专家建议从9600千米远的南极用拖船运送冰山，取代淡化海水
- 从经济角度研究冰山运输的可行性。

建模准备

1. 日租金和最大运量

船 型	小	中	大
日租金（英镑）	4.0	6.2	8.0
最大运量（米 ³ ）	5×10^5	10^6	10^7



建模准备

2. 燃料消耗（英镑/千米）

冰山体积(米 ³) 船速(千米/小时)			
	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

3. 融化速率（米/天）

与南极距离 (千米) 船速(千米/小时)			
	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6



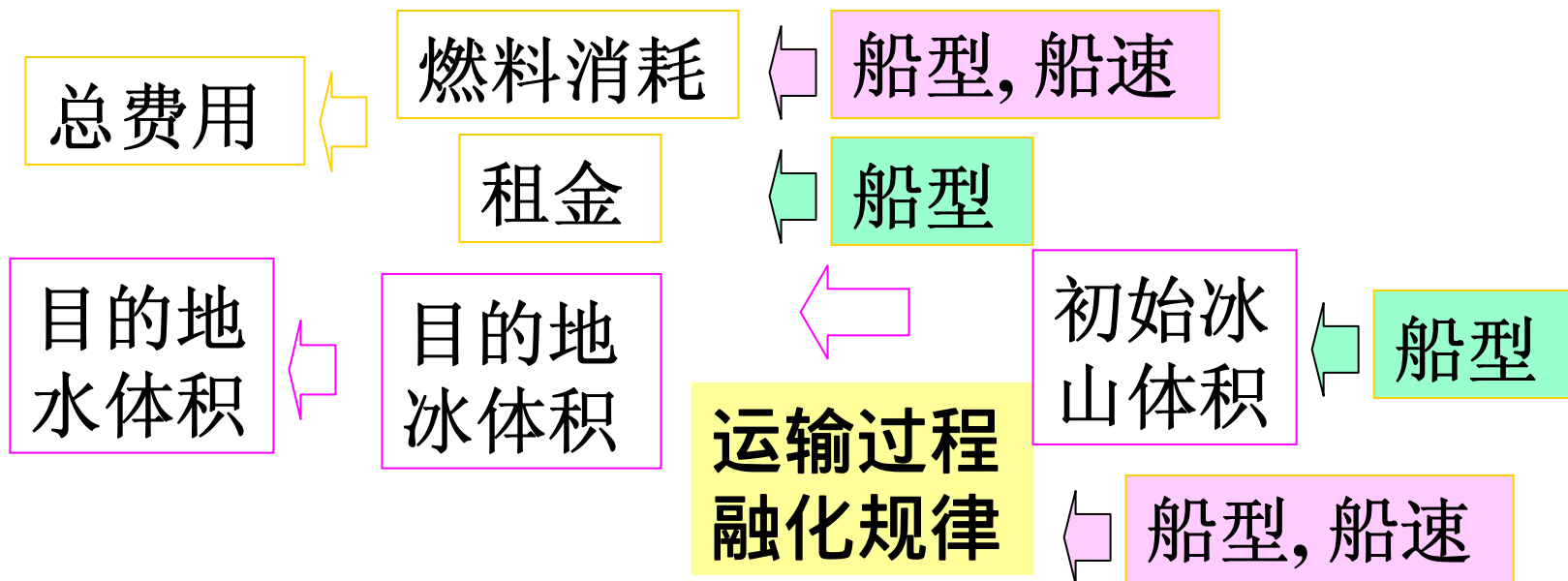
建模目的

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立方米水的费用最低，并与淡化海水的费用比较

模型假设

- 航行过程中船速不变，总距离**9600**千米
- 冰山呈球形，球面各点融化速率相同
- 到达目的地后，每立方米冰可融化**0.85**立方米水

建模分析





模型建立

1. 冰山融化规律

船速 u (千米/小时)
与南极距离 d (千米)
融化速率 r (米/天)

$\begin{matrix} d \\ r \end{matrix}$	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

r 是 u 的线性函数;
 $d < 4000$ 时 u 与 d 成正比
 $d > 4000$ 时 u 与 d 无关.

航行 t 天

$$d = 24ut$$

第 t 天融化速率

$$r = \begin{cases} a_1 d (1 + bu), & 0 \leq d \leq 4000 \\ a_2 (1 + bu), & d > 4000 \end{cases}$$

$$a_1 = 6.5 \times 10^{-5}, a_2 = 0.2, b = 0.4$$

$$r_t = \begin{cases} 1.56 \times 10^{-3} u (1 + 0.4u) t, & 0 \leq t \leq \frac{1000}{6u} \\ 0.2(1 + 0.4u), & t > \frac{1000}{6u} \end{cases}$$



1. 冰山融化规律

冰山初始半径 R_0 , 航行 t 天时半径

$$R_t = R_0 - \sum_{k=1}^t r_k$$

冰山初始体积 $V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3$ t 天时体积 $V_t = \frac{4\pi}{3} R_t^3$

选定 u, V_0 , 航行
 t 天时冰山体积

$$V(u, V_0, t) = \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^t r_k \right)^3$$

总航行天数 $T = \frac{9600}{24u} = \frac{400}{u}$

到达目的地
时冰山体积

$$V(u, V_0) = \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{t=1}^T r_t \right)^3$$



2. 燃料消耗

燃料消耗 q_1 (英镑/千米)

q_1 对 u 线性, 对 $\log_{10} V$ 线性

$\begin{matrix} V \\ u \backslash q_1 \end{matrix}$	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

$$q_1 = c_1(u + c_2)(\log_{10} V + c_3), \quad c_1 = 0.3, c_2 = 6, c_3 = -1$$

选定 u, V_0 , 航行第 t 天燃料消耗 q (英镑/天)

$$\begin{aligned} q(u, V_0, t) &= 24u \cdot c_1(u + c_2)[\log_{10} V(u, V_0, t) + c_3] \\ &= 7.2u(u + 6) \left[\log_{10} \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^t r_k \right)^3 - 1 \right] \end{aligned}$$

燃料消耗总费用

$$Q(u, V_0) = \sum_{t=1}^T q(u, V_0, t)$$



3. 运送每立方米水费用

冰山初始体积 V_0 的日租金 $f(V_0)$ （英镑）

V_0	5×10^5	10^6	10^7
$f(V_0)$	4.0	6.2	8.0

$$\text{航行天数 } T = \frac{400}{u}$$

拖船租金费用

$$R(u, V_0) = f(V_0) \cdot \frac{400}{u}$$

总燃料消耗费用

$$Q(u, V_0) = \sum_{t=1}^T 7.2u(u+6) \left[\log_{10} \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^t r_k \right)^3 - 1 \right]$$

冰山运输总费用

$$S(u, V_0) = R(u, V_0) + Q(u, V_0)$$



3. 运送每立方米水费用

到达目的地
时冰山体积

$$V(u, V_0) = \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{t=1}^T r_t \right)^3$$

冰山到达目的地
后得到的水体积

$$W(u, V_0) = 0.85V(u, V_0)$$

冰山运输总费用

$$S(u, V_0) = R(u, V_0) + Q(u, V_0)$$

运送每
立方米
水费用

$$Y(u, V_0) = \frac{S(u, V_0)}{W(u, V_0)}$$



模型求解

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立方米水的费用最低

求 u, V_0 使 $Y(u, V_0)$ 最小

V_0 只能取离散值
经验公式很粗糙

取几组 (V_0, u) 用枚举法计算

$V_0 \backslash u$	3	3.5	4	4.5	5
10^7	0.0723	0.0683	0.0649	0.0663	0.0658
5×10^6	0.2251	0.2013	0.1834	0.1842	0.1790
10^6	78.9032	9.8220	6.2138	5.4647	4.5102

$u=4 \sim 5$ (千米/小时), $V_0 = 10^7$ (米³), $Y(u, V_0)$ 最小



结果分析

大型拖船 $V_0 = 10^7$ (米³), 船速 $u = 4 \sim 5$ (千米/小时), 冰山到达目的地后每立方米水的费用 $Y(u, V_0)$ 约 0.065 (英镑)

虽然 0.065 英镑略低于淡化海水的成本 0.1 英镑, 但是模型假设和构造非常简化与粗糙。

由于未考虑影响航行的种种不利因素, 冰山到达目的地后实际体积会显著小于 $V(u, V_0)$ 。

有关部门认为, 只有当计算出的 $Y(u, V_0)$ 显著低于淡化海水的成本时, 才考虑其可行性。

A decorative graphic consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.

Discussions
