

数学建模 (Mathematic Modeling)

国防科技大学

第九讲



第九讲

- ▶ 主要内容：介绍随机决策模型和随机服务模型。



1、风险决策问题



1、风险决策问题

例 1 某公司为了扩大市场，要举办一个产品展销会，会址打算选择甲、乙、丙三地。获利情况与会址及天气有关。据气象台预报，估计三种天气（晴、阴、雨）可能发生的概率为 0.3, 0.5, 0.2, 其收益情况见表 1。现要确定会址，使收益最大。

天气 概率	$N_1(\text{晴})$ $p_1 = 0.3$	$N_2(\text{阴})$ $p_2 = 0.5$	$N_3(\text{雨})$ $p_3 = 0.2$
$A_1(\text{甲地})$	4	5	1
$A_2(\text{乙地})$	6	4	1.5
$A_3(\text{丙地})$	7	2	1.2

当各状态出现的概率可以通过某种途径得到时，称为风险决策问题。对这类决策问题，介绍两种决策准则及方法。



(1) 最大可能准则



(1) 最大可能准则

选择一种发生概率最大的状态作为决策依据，其余状态不考虑，称为最大可能准则。

(1) 最大可能准则

选择一种发生概率最大的状态作为决策依据，其余状态不考虑，称为最大可能准则。

按此准则，选择 A_1 （甲地）

(2) 期望值准则



(2) 期望值准则

依各个方案的收益值的期望值作为决策依据，称为期望值准则。



(2) 期望值准则

依各个方案的收益值的期望值作为决策依据，称为期望值准则。

$$E(A_1) = 4 \times 0.3 + 5 \times 0.5 + 1 \times 0.3 = 4.0$$

$$E(A_2) = 6 \times 0.3 + 4 \times 0.5 + 1.5 \times 0.3 = 4.25$$

$$E(A_3) = 7 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 1.2 \times 0.3 = 3.46$$

(2) 期望值准则

依各个方案的收益值的期望值作为决策依据，称为期望值准则。

$$E(A_1) = 4 \times 0.3 + 5 \times 0.5 + 1 \times 0.3 = 4.0$$

$$E(A_2) = 6 \times 0.3 + 4 \times 0.5 + 1.5 \times 0.3 = 4.25$$

$$E(A_3) = 7 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 1.2 \times 0.3 = 3.46$$

依期望值准则，选择 A_2 （乙地）

一次性决策，以最大可能准则为先，长期多次决策，以期望值准则为先。如报童售报问题。



期望值准则应用的比较广泛，但也不一定合理，例如某人花 20 万元买了一辆汽车。汽车发生事故的可能性为 0.1%。若投保，每年要交保险费 300 元。

$$\text{投保时损失值期望} = 300 \times \frac{99.9}{100} \approx 300 \text{ 元}$$

$$\text{不投保时损失值期望} = 200000 \times \frac{0.1}{100} = 200 \text{ 元}$$

故按照期望值准则，应取“不投保”决策，但事实上，多数车主会投保。

例 2 12 月 23 日 L 先生想购买一件圣诞节礼物，有两种类型供选择，普通型 27.95\$，高级型 39.95\$。按经验估计，24 日普通型有 50% 的可能性会削价为 25.95\$，然而也可能 24 日普通型售完了，那么他就必须买高级型的，他估计这种可能性有 20%，请问 L 先生该如何决策？

两种方案，分别计算费用期望值。

24 日购买，他将支付

$$D = \begin{cases} 25.95 & p = 0.5 \\ 27.95 & p = 0.3 \\ 39.95 & p = 0.2 \end{cases}$$

$$D_0 - D = \begin{cases} 2.00 & p = 0.5 \\ 0.00 & p = 0.3 \\ -12.00 & p = 0.2 \end{cases}$$

$$E(D_0 - D) = 2 \times 0.5 + 0 \times 0.3 - 12 \times 0.2 = -1.4(\$)$$

∴ 最好立即购买。

2、不确定型决策



2、不确定型决策

当状态 N_1, N_2, \dots, N_n 发生的概率无法估计时，称为不确定型决策问题。

设 a_{ij} 表示在状态 N_j 下采取方案 A_i 的收益值。

几种决策准则



几种决策准则

(1) 乐观决策准则（极大极大准则，Hurwicz criterion）

几种决策准则

(1) 乐观决策准则（极大极大准则，Hurwicz criterion）

着眼于获取最大利润，基于对自然状态作最乐观的估计之上，以 $\max_i \max_j a_{ij}$ 所对应的行动方案作为决策。

例 3 某电视机公司为明年广告方面的投资考虑了三种方案:

S_1 : 维持今年水平; S_2 : 增加 500 万; S_3 : 增加 2000 万

但电视机的销售量依赖于经济形势, 明年的经济形势也有三种可能: 好、平、差。市场调研人员对三种经济形势下三种投资方案的利润作了预测

增投资	利润 (百万元)			纯利润 (百万元)		
	好	平	差	好	平	差
$S_1(0)$	10	0	-5	10	0	-5
$S_2(5)$	25	10	5	20	5	-0
$S_3(20)$	50	30	14	30	10	-6

例 3 某电视机公司为明年广告方面的投资考虑了三种方案:

S_1 : 维持今年水平; S_2 : 增加 500 万; S_3 : 增加 2000 万

但电视机的销售量依赖于经济形势, 明年的经济形势也有三种可能: 好、平、差。市场调研人员对三种经济形势下三种投资方案的利润作了预测

增投资	利润 (百万元)			纯利润 (百万元)		
	好	平	差	好	平	差
$S_1(0)$	10	0	-5	10	0	-5
$S_2(5)$	25	10	5	20	5	-0
$S_3(20)$	50	30	14	30	10	-6

按照极大极大准则, 选择方案 S_3 .

(2) 悲观准则（极大极小准则，Wald criterion）



(2) 悲观准则（极大极小准则，Wald criterion）

着眼于在最坏的情况下获得最大的利润，基于对自然状态作最悲观的估计之上，以 $\max_i \min_j a_{ij}$ 所对应的行动方案为决策。

S_1, S_2, S_3 的最小利润分别为 -5, 0, -6, 按照极大极小准则, 选择方案 S_2 .



(3) 极小极大准则 (Savage criterion)



(3) 极小极大准则 (Savage criterion)

着眼于最大后悔指数最小的准则。

经济形势	好	平	差
S_1	20	10	5
S_2	10	5	0
S_3	0	0	6

表: 后悔指数表

(3) 极小极大准则 (Savage criterion)

着眼于最大后悔指数最小的准则。

经济形势	好	平	差
S_1	20	10	5
S_2	10	5	0
S_3	0	0	6

表: 后悔指数表

按照极小极大准则, 选择方案 S_3 .

与极大极大准则未必相同，例如，利润表为

10	0	-5		20	10	5	
20	5	0	⇒ 后悔指数	10	5	0	⇒ 选择 S_2
30	10	-11		0	0	11	

与极大极大准则未必相同，例如，利润表为

10	0	-5		20	10	5	
20	5	0	⇒ 后悔指数	10	5	0	⇒ 选择 S_2
30	10	-11		0	0	11	

适用于风险很大的情形。

(4) 等可能准则 (Laplace criterion)



(4) 等可能准则 (Laplace criterion)

基于各个状态等概率出现的假设，用期望值决策。

$$\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{3}(10 + 0 - 5) = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}(20 + 5 + 0) = \frac{25}{3} \\ \frac{1}{3}(30 + 10 - 6) = \frac{34}{3} \end{array}$$

(4) 等可能准则 (Laplace criterion)

基于各个状态等概率出现的假设，用期望值决策。

$$\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{3}(10 + 0 - 5) = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}(20 + 5 + 0) = \frac{25}{3} \\ \frac{1}{3}(30 + 10 - 6) = \frac{34}{3} \end{array}$$

故在此准则下取 S_3 .

显然，在作重大决策时，不可能不对未来的自然状态作出一定的估计。因此，在大部分情况下以下准则是比较合理的。



(5) 具备状态信息的决策准则（期望值准则）



(5) 具备状态信息的决策准则（期望值准则）

当具备状态出现的概率信息时，问题即化为了风险决策问题，一般按期望值准则决策。



随机服务系统



随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。



随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

顾客流通常假设为 Poisson 过程，即在长为 t 的段内到达的人数

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

其中 λ 为单位时间内到达人数的平均值。

随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

顾客流通常假设为 Poisson 过程，即在长为 t 的段内到达的人数

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

其中 λ 为单位时间内到达人数的平均值。

服务时间通常假设为指数分布。

随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

顾客流通常假设为 Poisson 过程，即在长为 t 的段内到达的人数

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

其中 λ 为单位时间内到达人数的平均值。

服务时间通常假设为指数分布。

排队规则

- ▶ 先到先服务 (FIFO)
- ▶ 优先权服务
- ▶ 多服务系统服务方式
- ▶ 电梯规则

排队系统的符号表示:

来到过程 (M) / 服务分布 (M) / 服务员个数 (D) /
系统容量 (K)

M ——Poisson 过程及指数分布

D ——服务时间长度或到来间隔是常数

例：

一条电话线路的问询服务	$M/M/1$
四条电话线路的电话交换台	$M/M/4$
充分大的停车场	$M/M/\infty$
一个医生的诊所	$M/M/1/4$
加油站	$M/D/1/5$

例：

一条电话线路的问询服务	$M/M/1$
四条电话线路的电话交换台	$M/M/4$
充分大的停车场	$M/M/\infty$
一个医生的诊所	$M/M/1/4$
加油站	$M/D/1/5$

主要关心以下几个数字：

- ▶ 队伍长度
- ▶ 顾客等待时间
- ▶ 忙期和闲期
- ▶ 利用率

1、 $M/M/1$ 系统



1、M/M/1 系统

设 λ 为来到率（单位时间内来到的平均人数）， μ 为服务率（单位时间内接受服务的平均人数），则相应的来到间隔的平均值为 $\frac{1}{\lambda}$ ，服务时间的平均值 $\frac{1}{\mu}$ 。

$$\frac{\lambda}{\mu} \triangleq \rho$$

ρ 称为服务强度

不妨设 $\rho < 1$ （即服务快于来到），否则系统中的顾客数将趋于无穷大。

记 N 为平稳状态下系统中的顾客数， W 为等待时间， S 为服务时间，则

$$E(N) = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$E(W) = \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$E(W + S) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

例 1 某医院某科室有一位医生值班，每小时平均有 4 个病人，医生每小时平均可诊 5 个病人。如要满足 99% 以上的病人有座位，至少应设多少个座位？如果每小时可诊 6 个病人，可减小多少个座位？病人平均等待时间是多少？

解 设病人到来服从 Poisson 分布，医生诊断时间服从指数分布（M/M/1 系统），则 $\lambda = 4, \mu = 5, \rho = 4/5 = 0.8 < 1$.

$$L_1 = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.8}{1 - 0.8} = 4(\text{人})$$

$$W_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{4}{4} = 1(\text{小时})$$

为满足 99% 以上的病人有座, 设应设 m 个座位, 则

$$P\{\text{候诊病人数} \leq m\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^m \rho^n (1 - \rho) = 1 - \rho^{m+1} \geq 0.99 \quad \rho_n = \rho^n (1 - \rho)$$

$$\Rightarrow \rho^{m+1} \leq 0.01 \Rightarrow m \geq \frac{\ln 0.01}{\ln \rho} - 1 \approx 20 (\text{个})$$

\therefore 至少应设 20 个座位。

若 $\lambda = 4, \mu = 6$, 则 $\rho = 4/6 = 2/3 < 1$

$$m \geq \frac{\ln 0.01}{\ln 2/3} - 1 = 11(\text{个})$$

\therefore 可减少 9 个座位。

$$W_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2/3}{1 - 2/3} = \frac{1}{2}(\text{小时})$$

例 2 某工厂平均每天有一台机器发生故障而需要修理，机器的故障数服从 Poisson 分布。每台机器每停工一天损失 20 元。现有 2 个修理工 A 和 B，A 每天平均能修理 1.2 台机器，工资为 3 元；B 每天平均能修理 1.5 台机器，工资为 10 元。两个工人修理机器的时间设为指数分布，问工厂应录用哪位工人？

解 用 N 表示一天中等待修理的机器数, 即 $N = L_1$, 则工厂每天的损失为

$$R = N \cdot 20 + C \quad (C \text{ 为修理工工资})$$

若录用工人 A, $\lambda = 1, \mu = 1.2$

$$\rho = 1/1.2 = 5/6$$

$$N = L_1 = \frac{\rho}{1 - \rho} = 5(\text{台})$$

$$R = 5 \times 20 + 3 = 103(\text{元})$$

若录用 B, $\lambda = 1$, $\mu = 1.5$

$$\rho = 1/1.5 = 2/3$$

$$N = L_1 = \frac{\rho}{1 - \rho} = 2(\text{台})$$

$$R = 2 \times 20 + 10 = 50 (\text{元})$$

故录用 B 更合算。

2、 $M/M/S$ 系统



2、M/M/S 系统

以 $S = 2$ 为例，设两个服务员的平均服务时间同为 μ . 有两种服务方式。

(1) M/M/2 系统

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$$

$$L_2 = \frac{2\rho_2}{1 - \rho_2^2}$$

$$W_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{2\rho_2}{\lambda(1 - \rho_2^2)}$$

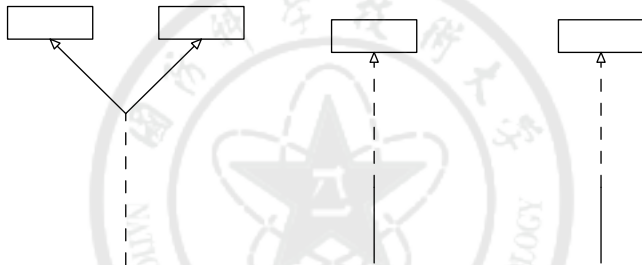
(2) 两个 M/M/1 系统

$$\rho = \frac{\lambda/2}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu} = \rho_2$$

$$L'_1 = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}$$

$$\therefore 2L'_1 = \frac{2\rho_2}{1 - \rho_2} > L_2$$

$$W'_1 = \frac{L'_1}{\lambda'_1} = \frac{2\rho_2}{\lambda(1 - \rho_2)} > W_2$$



M/M/S 系统的平均队长与平均逗留时间:

$$L_S = S\rho + \frac{(S\rho)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} P_0$$

$$W_S = \frac{1}{\lambda} L_S$$

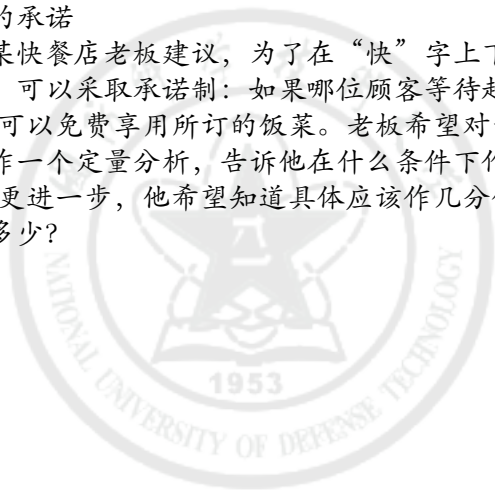
其中: $\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$, $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{S-1} \frac{(S\rho)^k}{k!} + \frac{(S\rho)^S}{S!(1-\rho)} \right]^{-1}$

快餐店的承诺



快餐店的承诺

有人向某快餐店老板建议，为了在“快”字上下功夫，吸引更多的顾客，可以采取承诺制：如果哪位顾客等待超过一定时间，那么他可以免费享用所订的饭菜。老板希望对于由此承诺带来的利弊作一个定量分析，告诉他在什么条件下作这种承诺才不会亏本，更进一步，他希望知道具体应该作几分钟的承诺，利润能增加多少？



快餐店的承诺

有人向某快餐店老板建议，为了在“快”字上下功夫，吸引更多的顾客，可以采取承诺制：如果哪位顾客等待超过一定时间，那么他可以免费享用所订的饭菜。老板希望对于由此承诺带来的利弊作一个定量分析，告诉他在什么条件下作这种承诺才不会亏本，更进一步，他希望知道具体应该作几分钟的承诺，利润能增加多少？

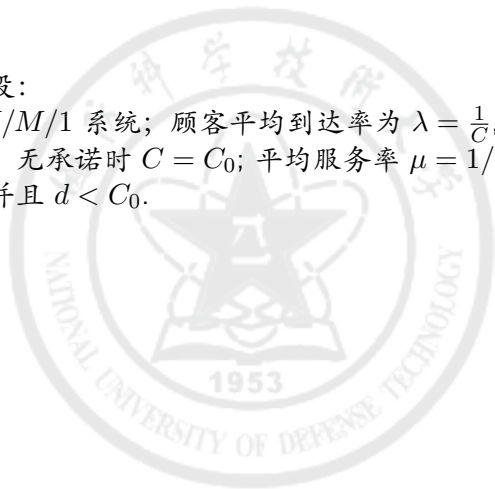
该快餐店服务过程是：首先顾客在订餐处订餐、交款，服务员开具订单与收据，上面均标明了订餐时刻，这个时刻为这位顾客等待时间的起始时刻。订单立即送往厨房，厨房只有一位厨师，按订单到达的顺序配餐，配一份立即送往顾客手中，并核对收据，若发现顾客等待时间超过店方的承诺时间，则退还所收款项。

模型假设:



模型假设:

(1) $M/M/1$ 系统; 顾客平均到达率为 $\lambda = \frac{1}{C}$, C 为平均到达时间间隔, 无承诺时 $C = C_0$; 平均服务率 $\mu = 1/d$, d 为平均服务时间, 并且 $d < C_0$.



模型假设:

(1) $M/M/1$ 系统; 顾客平均到达率为 $\lambda = \frac{1}{C}$, C 为平均到达时间间隔, 无承诺时 $C = C_0$; 平均服务率 $\mu = 1/d$, d 为平均服务时间, 并且 $d < C_0$.

(2) 店方承诺时间 u . 在一定范围内 C 与 u 成正比, 并且存在 u_0 , 当 $u \geq u_0$ 时承诺将对顾客失去吸引力。

模型假设:

(1) $M/M/1$ 系统; 顾客平均到达率为 $\lambda = \frac{1}{C}$, C 为平均到达时间间隔, 无承诺时 $C = C_0$; 平均服务率 $\mu = 1/d$, d 为平均服务时间, 并且 $d < C_0$.

(2) 店方承诺时间 u . 在一定范围内 C 与 u 成正比, 并且存在 u_0 , 当 $u \geq u_0$ 时承诺将对顾客失去吸引力。

(3) 对每位顾客的收费与成本之比为 p/q , 近似为常数 $r(> 1)$.

模型建立:



模型建立：
根据假设可设

$$C(u) = \begin{cases} \frac{C_0}{u_0} u, & \frac{du_0}{C_0} < u < u_0 \\ C_0 & u \geq u_0 \end{cases}$$

对 M/M/1 系统, 顾客等待时间 w 服从参数为 $\mu - \lambda$ 的指数分布, 即

$$P\{W > t\} = e^{-(\mu-\lambda)t} = e^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{c})t}$$

店方在一名顾客处获得的利润为

$$Q(w) = \begin{cases} p - q & w \leq u \\ -q & w > u \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EQ &= (p - q) \cdot P(w \leq u) - q \cdot P(w > u) \\ &= p - q - p \cdot P(w > u) \\ &= p - q - p e^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{c})u} \end{aligned}$$

单位时间的平均利润为

$$\frac{1}{C}EQ = \frac{1}{C}[p - q - p e^{-(\frac{1}{d} - \frac{1}{c})u}] = \frac{1}{qC}[r - 1 - r e^{-(\frac{1}{d} - \frac{1}{c})u}]$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{C}[r - 1 - r e^{-(\frac{1}{d} - \frac{1}{c})u}] \rightarrow \max$$

其中

$$C(u) = \begin{cases} \frac{C_0}{u_0}u, & \frac{du_0}{C_0} < u < u_0 \\ C_0 & u \geq u_0 \end{cases}$$

模型求解：略

