



层次分析法



层次分析模型

背景

- 日常工作、生活中的决策问题
- 涉及经济、社会等方面的因素
- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化
- Saaty于1970年代提出层次分析法
AHP (Analytic Hierarchy Process)
- AHP——一种**定性**与**定量**相结合的、**系统化**、**层次化**的分析方法

一. 层次分析法的基本步骤

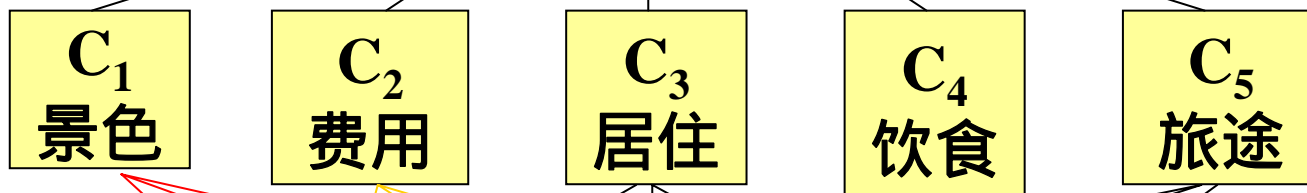
例. 选择旅游地

如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择.

目标层

O(选择旅游地)

准则层



方案层





“选择旅游地”思维过程的归纳

- 将决策问题分为3个层次：目标层O，准则层C，方案层P；每层有若干元素，各层元素间的关系用相连的直线表示。
- 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。
- 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。

层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。



层次分析法的基本步骤

成对比较阵 和权向量

元素之间两两对比，对比采用相对尺度

设要比较各准则 C_1, C_2, \dots, C_n 对目标 O 的重要性

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \quad A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} > 0, a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

选择
旅游地

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \sim$ 成对比较阵

A 是正互反阵

要由 A 确定 C_1, \dots, C_n 对 O 的权向量



成对比较阵和权向量

成对比较的不一致情况

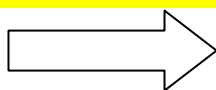
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \dots \\ 2 & 1 & 7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

不一致

$$a_{12} = 1/2 (C_1 : C_2)$$

一致比较

$$a_{13} = 4 (C_1 : C_3)$$



$$a_{23} = 8 (C_2 : C_3)$$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$$W(=1) \Rightarrow w_1, w_2, \dots, w_n$$

$$\text{令 } a_{ij} = w_i / w_j$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \sim \text{权向量}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \end{bmatrix}$$

成对比较阵和权向量

成对比较完全一致的情况

满足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$
的正互反阵 A 称**一致阵**，如

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

一致阵 性质

- A 的秩为 1, A 的唯一非零特征根为 n
- A 的任一行向量是对应于 n 的特征向量
- A 的归一化特征向量可作为权向量

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵 A , 建议用对应于最大特征根 λ 的特征向量作为权向量 w , 即

$$Aw = \lambda w$$



成对比较阵和权向量

比较尺度 a_{ij}

Saaty等人提出1~9尺度—— a_{ij} 取值
1,2,...,9及其互反数1,1/2,...,1/9

- 便于定性到定量的转化：

尺度 a_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_i : C_j$ 的重要性	相同	稍强	强	明显强	绝对强				

$a_{ij} = 1, 1/2, \dots, 1/9 \sim C_i : C_j$ 的重要性与上面相反

- 心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个
- 用1~3, 1~5, ..., 1~17, ..., $1^p \sim 9^p$ ($p=2, 3, 4, 5$), $d+0.1 \sim d+0.9$ ($d=1, 2, 3, 4$)等27种比较尺度对若干实例构造成对比较阵，算出权向量，与实际对比发现，1~9尺度较优。



一致性检验

对 A 确定不一致的允许范围

已知： n 阶一致阵的唯一非零特征根为 n

可证： n 阶正互反阵最大特征根 $\lambda \geq n$ ，且 $\lambda = n$ 时为一致阵

定义一致性指标： $CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$ CI 越大，不一致越严重

为衡量 CI 的大小，引入**随机一致性指标 RI** ——随机模拟得到 a_{ij} ，形成 A ，计算 CI 即得 RI 。

Saaty的结果如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 $CR = CI/RI$

当 $CR < 0.1$ 时，通过一致性检验



“选择旅游地”中 准则层对目标的权 向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根 $\lambda=5.073$

权向量(特征向量) $w=(0.263, 0.475, 0.055, 0.090, 0.110)^T$

$$\text{一致性指标 } CI = \frac{5.073 - 5}{5 - 1} = 0.018$$

随机一致性指标 $RI=1.12$ (查表)

$$\text{一致性比率 } CR = 0.018 / 1.12 = 0.016 < 0.1$$

通过一致
性检验



组合权向量

记第2层（准则）对第1层（目标）

的权向量为 $w^{(2)} = (w_1^{(2)}, \dots, w_n^{(2)})^T$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对 C_1 (景色)
的成对比较阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

方案层对 C_2 (费用)
的成对比较阵

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dots C_n$

$\dots B_n$

最大特征根 λ_1

λ_2

$\dots \lambda_n$

权向量

$w_1^{(3)}$

$w_2^{(3)}$

$\dots w_n^{(3)}$



组合权向量

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5	$w^{(2)}$
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166	0.263
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166	0.475
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668	0.055
						0.090
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3	0.110
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0	

$RI=0.58$ ($n=3$), CI_k 均可通过一致性检验

方案 P_1 对目标的组合权重为 $0.595 \times 0.263 + \dots = 0.300$

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$



组合
权向量

第2层对第1层的权向量

$$w^{(2)} = (w_1^{(2)}, \dots, w_n^{(2)})^T$$

第1层O

第2层 C_1, \dots, C_n

第3层 P_1, \dots, P_m

第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)} = (w_{k1}^{(3)}, \dots, w_{km}^{(3)})^T, k = 1, 2, \dots, n$$

构造矩阵 $W^{(3)} = [w_1^{(3)}, \dots, w_n^{(3)}]$

则第3层对第1层的组合权向量 $w^{(3)} = W^{(3)} w^{(2)}$

第s层对第1层的组合权向量

$$w^{(s)} = W^{(s)} W^{(s-1)} \dots W^{(3)} w^{(2)}$$

其中 $W^{(p)}$ 是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵



层次分析法的基本步骤

1) 建立层次分析结构模型

深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。

2) 构造成对比较阵

用成对比较法和1~9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3) 计算权向量并作一致性检验

对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

4) 计算组合权向量（作组合一致性检验*）

组合权向量可作为决策的定量依据。

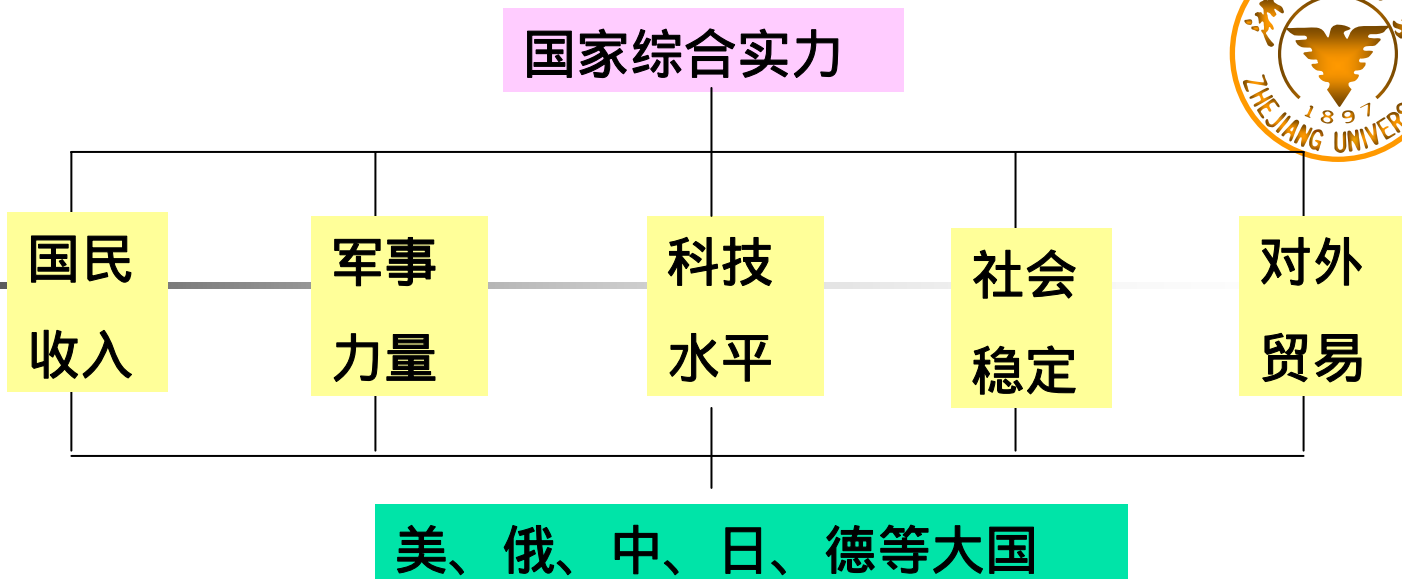


二. 层次分析法的广泛应用

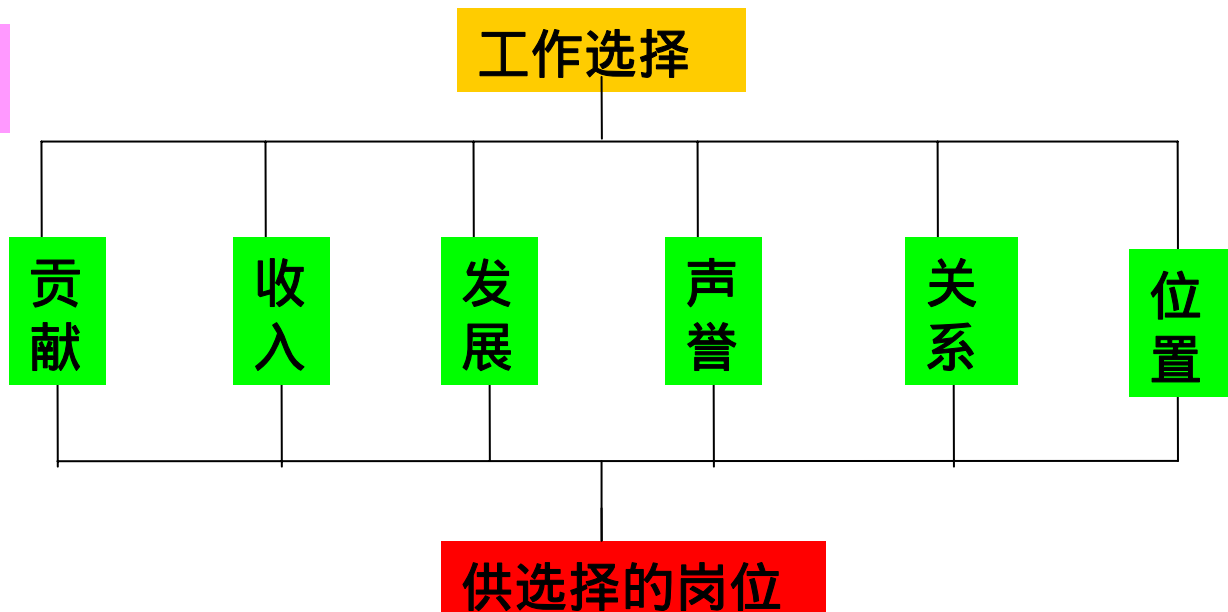
- 应用领域：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。
- 处理问题类型：决策、评价、分析、预测等。
- 建立层次分析结构模型是关键一步，要有主要决策层参与。
- 构造成对比较阵是数量依据，应由经验丰富、判断力强的专家给出。



例1 国家实力分析

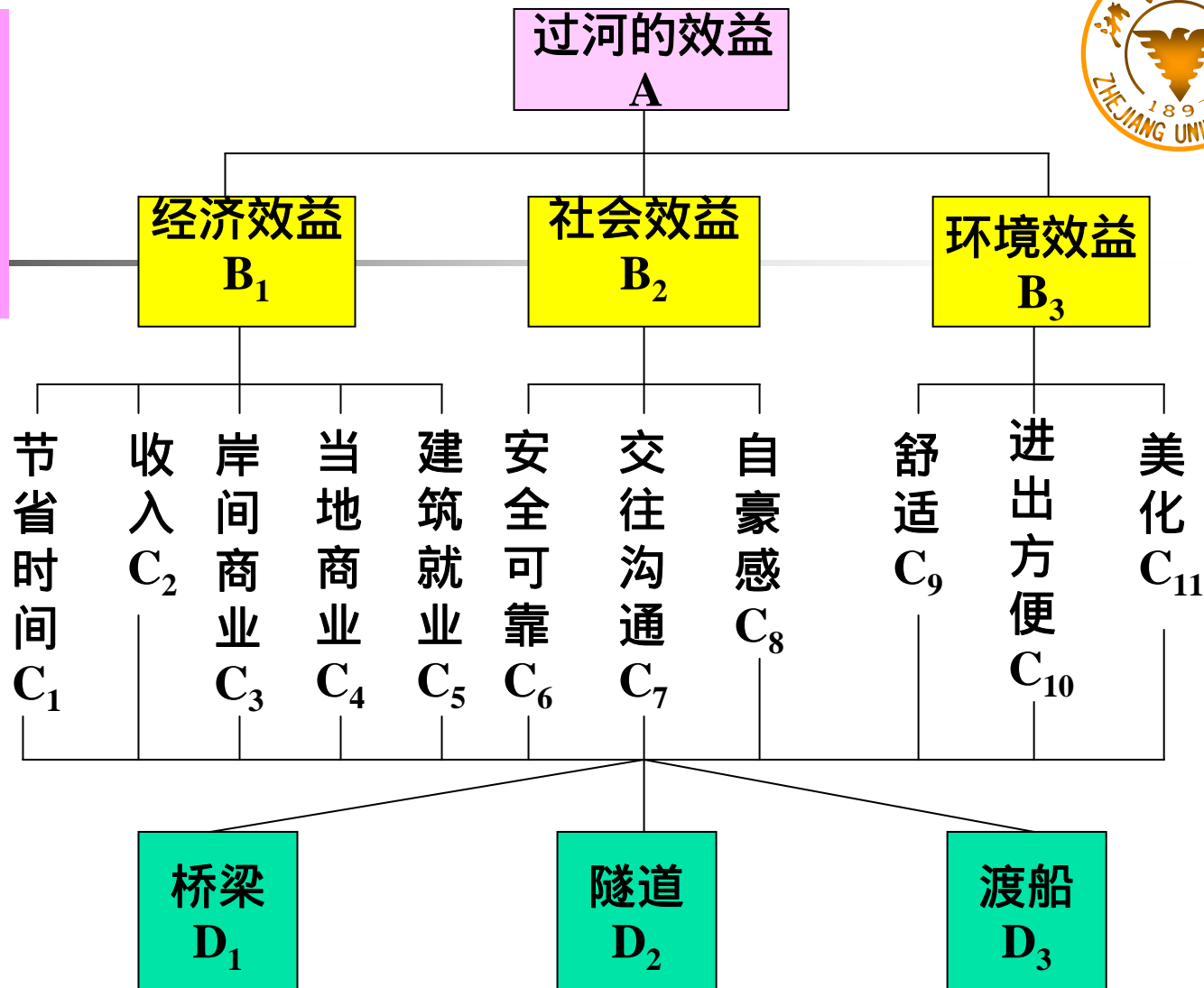


例2 工作选择





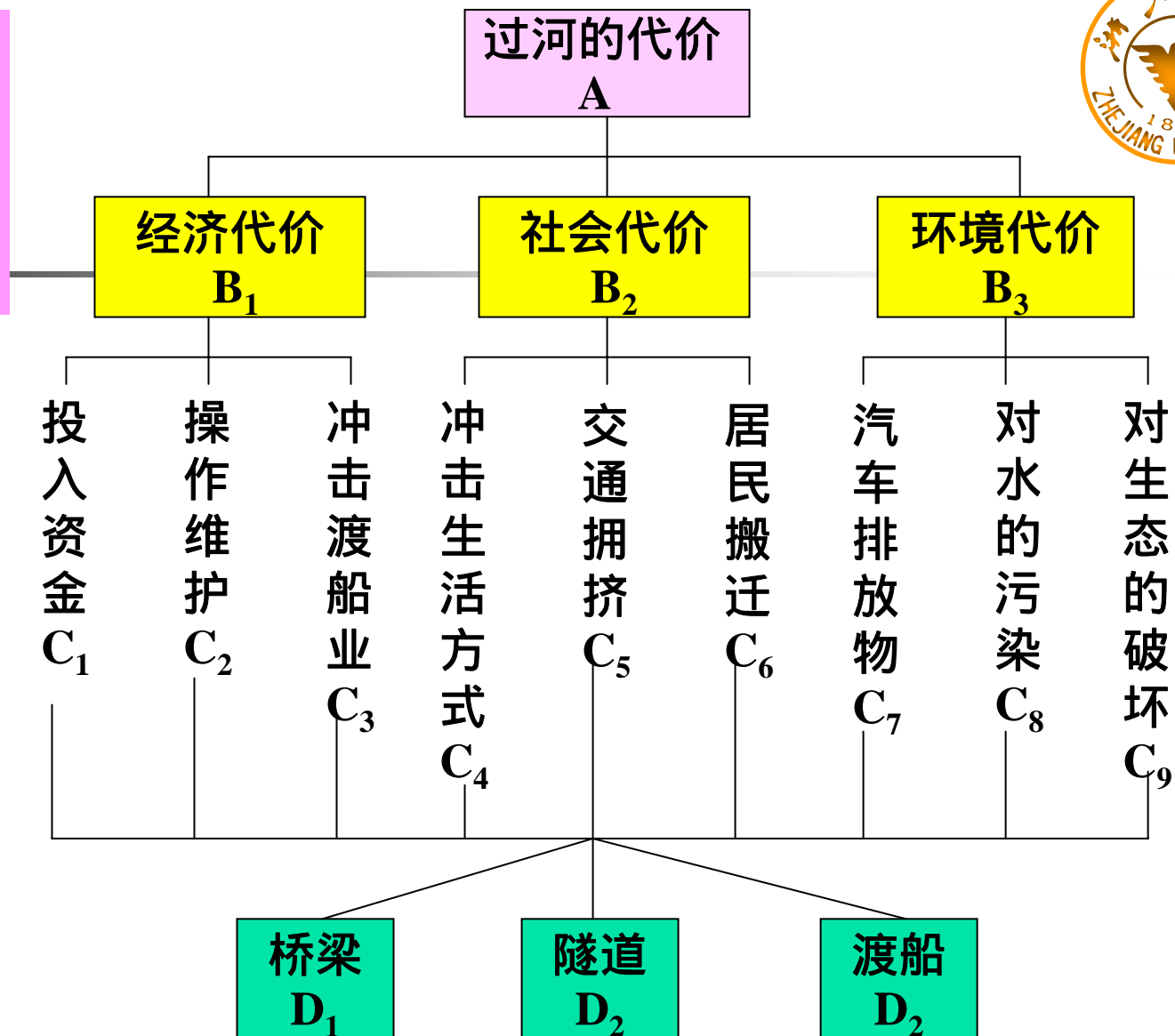
例3 横渡江河、海峡方案的抉择



(1) 过河效益层次结构



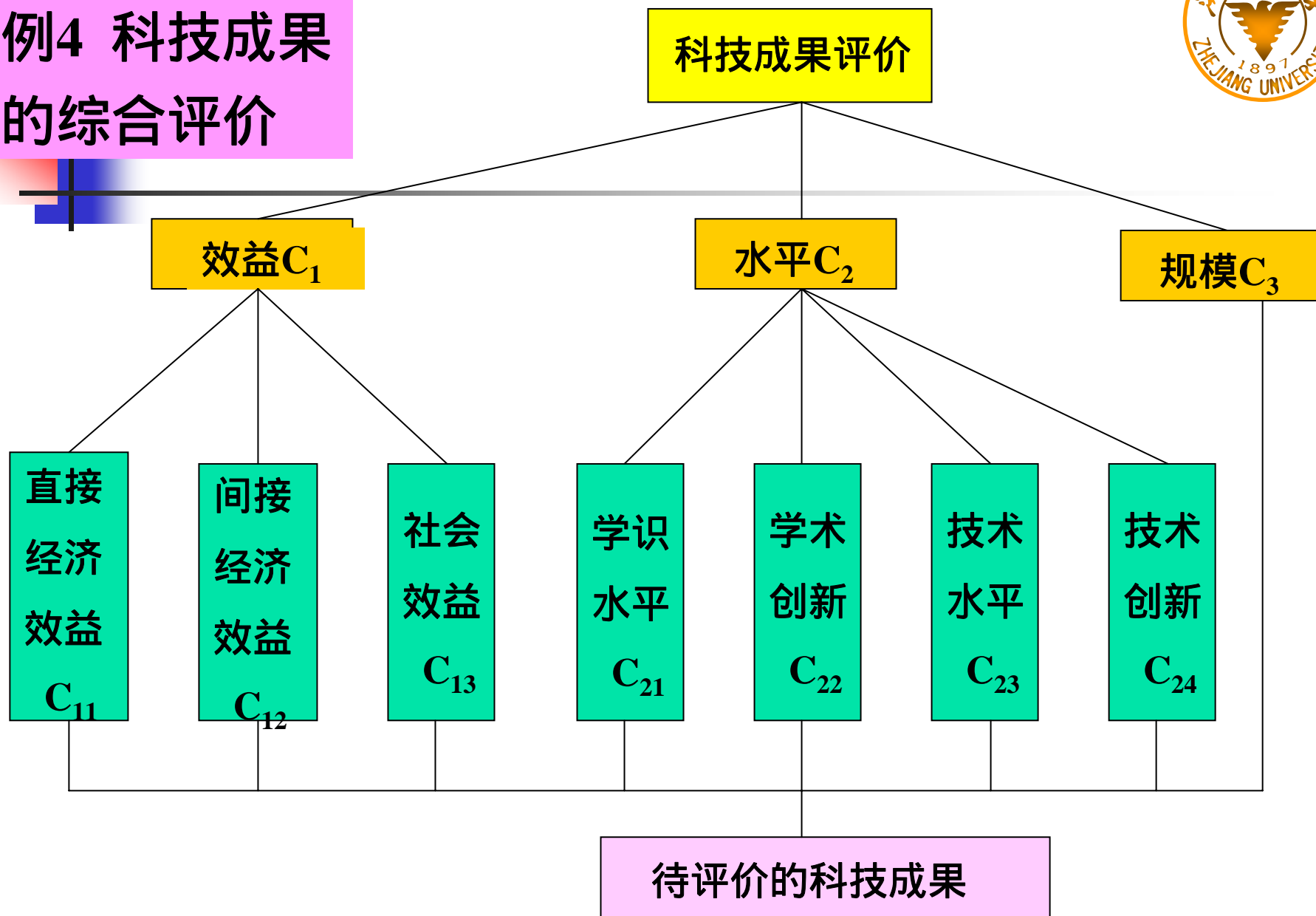
例3 横渡 江河、海峡 方案的抉择



(2) 过河代价层次结构



例4 科技成果 的综合评价





三. 层次分析法的若干问题

- 正互反阵的最大特征根是否为正数？特征向量是否为正向量？一致性指标能否反映正互反阵接近一致阵的程度？
- 怎样简化计算正互反阵的最大特征根和特征向量？
- 为什么用特征向量作为权向量？
- 当层次结构不完全或成对比较阵有空缺时怎样用层次分析法？



1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

定理1 正矩阵 A 的最大特征根 λ 是正单根，对应正特征向量 w ，且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = w$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$



正互反阵的最大特征根是正数，特征向量是正向量。

定理2 n 阶正互反阵 A 的最大特征根 $\lambda \propto n$ ， $\lambda = n$ 是 A 为一致阵的充要条件。



一致性指标 $CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$ 定义合理



2. 正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$ 列向量归一化 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{bmatrix}$ 算术平均 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{bmatrix} = w$

$$Aw = \begin{bmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.286 \end{bmatrix} \quad Aw = \lambda w \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{1.769}{0.587} + \frac{0.974}{0.324} + \frac{0.268}{0.089} \right) = 3.009$$

精确结果: $w = (0.588, 0.322, 0.090)^T$, $\lambda = 3.010$



简化
计算

根法——取列向量的几何平均

幂法——迭代算法

- 1) 任取初始向量 $w^{(0)}$, $k:=0$, 设置精度 ε
- 2) 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}$
- 3) 归一化 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} / \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^{(k+1)}$
- 4) 若 $\max_i |w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)}| < \varepsilon$, 停止;
否则, $k:=k+1$, 转2
- 5) 计算 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$



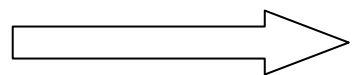
3. 特征向量作为权向量——成对比较的多步累积效应

问题

一致阵 A , 权向量 $w=(w_1, \dots, w_n)^T$, $a_{ij}=w_i/w_j$

A 不一致, 应选权向量 w 使 w_i/w_j 与 a_{ij} 相差尽量小 (对所有 i, j)。

用拟合方法确定 w



$$\min_{w_i (i=1, \dots, n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

非线性
最小二乘

线性化——
对数最小二乘

$$\min_{w_i (i=1, \dots, n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

结果与根法相同



多步累积效应

• 按不同准则确定的权向量不同，特征向量有什么优点。

成对比较

$C_i:C_j$ (直接比较)

$a_{ij} \sim 1$ 步强度

$$A^2 = (a_{ij}^{(2)}) \quad a_{ij}^{(2)} = \sum_{s=1}^n a_{is} a_{sj}$$

$a_{ij}^{(2)} \sim 2$ 步强度

$a_{is}a_{sj} \sim C_i$ 通过 C_s 与 C_j 的比较

更能反映 C_i 对 C_j 的强度

$$A^k = (a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} \sim k \text{步强度}$$

体现多步累积效应

$$\forall i, j, \exists k_0, k > k_0, a_{is}^{(k)} \geq a_{js}^{(k)} \text{ 或 } a_{is}^{(k)} \leq a_{js}^{(k)} (s = 1, \dots, n)$$

\Rightarrow 当 k 足够大, A^k 第 i 行元素反映 C_i 的权重 \Rightarrow 求 A^k 的行和

定理1 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = w$

特征向量体现多步累积效应



4.不完全层次结构中组合权向量的计算

完全层次结构：上层每一元素与下层所有元素相关联

不完全层次结构

例：评价教师贡献的层次结构

设第2层对第1层权向量

$w^{(2)}=(w_1^{(2)},w_2^{(2)})^T$ 已定

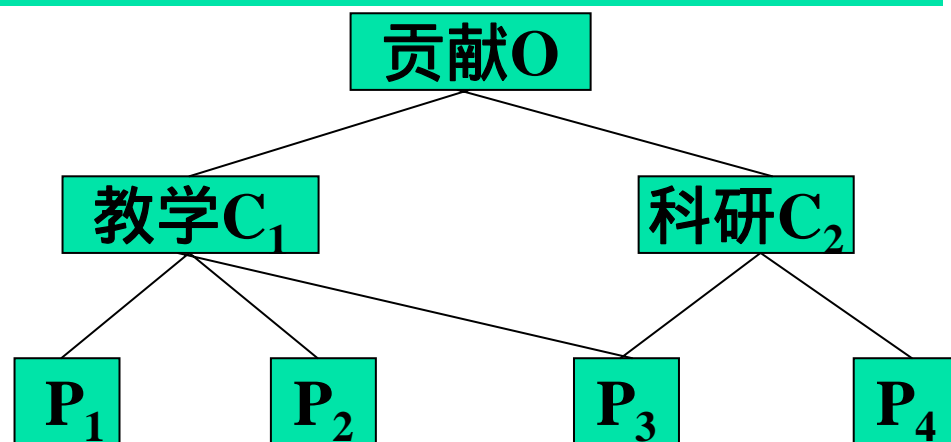
第3层对第2层权向量

$w_1^{(3)}=(w_{11}^{(3)},w_{12}^{(3)},w_{13}^{(3)},0)^T$

$w_2^{(3)}=(0,0,w_{23}^{(3)},w_{24}^{(3)})^T$ 已得
讨论由 $w^{(2)}, W^{(3)}=(w_1^{(3)}, w_2^{(3)})$

计算第3层对第1层权向量

$w^{(3)}$ 的方法



P_1, P_2 只作教学, P_4 只作科研,
 P_3 兼作教学、科研。

C_1, C_2 支配元素的数目不等

考察一个特例：

若 C_1, C_2 重要性相同, $w^{(2)} = (1/2, 1/2)^T$,
 $P_1 \sim P_4$ 能力相同, $w_1^{(3)} = (1/3, 1/3, 1/3, 0)^T, w_2^{(3)} = (0, 0, 1/2, 1/2)^T$

公正的评价应为： $P_1:P_2:P_3:P_4=1:1:2:1$

• 不考虑支配元素数目不等的影响

仍用 $w^{(3)} = W^{(3)} w^{(2)}$ 计算 $\Rightarrow w^{(3)} = (1/6, 1/6, 5/12, 1/4)^T$

• 支配元素越多权重越大

教学、科研任务由上级安排

用支配元素数目 n_1, n_2 对 $w^{(2)}$ 加权修正

$$n_1 = 3, n_2 = 2,$$

$$\tilde{w}^{(2)} = (n_1 w_1^{(2)}, n_2 w_2^{(2)})^T / (n_1 w_1^{(2)} + n_2 w_2^{(2)})$$

$$\tilde{w}^{(2)} = (3/5, 2/5)^T$$

再用 $w^{(3)} = W^{(3)} \tilde{w}^{(2)}$ 计算

$$\Rightarrow w^{(3)} = (1/5, 1/5, 2/5, 1/5)^T$$

• 支配元素越多权重越小

教学、科研靠个人积极性

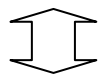


5. 残缺成对比较阵的处理

-例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \theta \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{辅助矩阵}} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

θ 为残缺元素

$$Cw = \lambda w \Rightarrow \lambda = 3, w = (0.5714, 0.2857, 0.1429)^T$$



$$\bar{A}w = \lambda w$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j, a_{ij} \neq \theta \\ 0, & i \neq j, a_{ij} = \theta \\ m_i + 1, & i = j \end{cases}$$

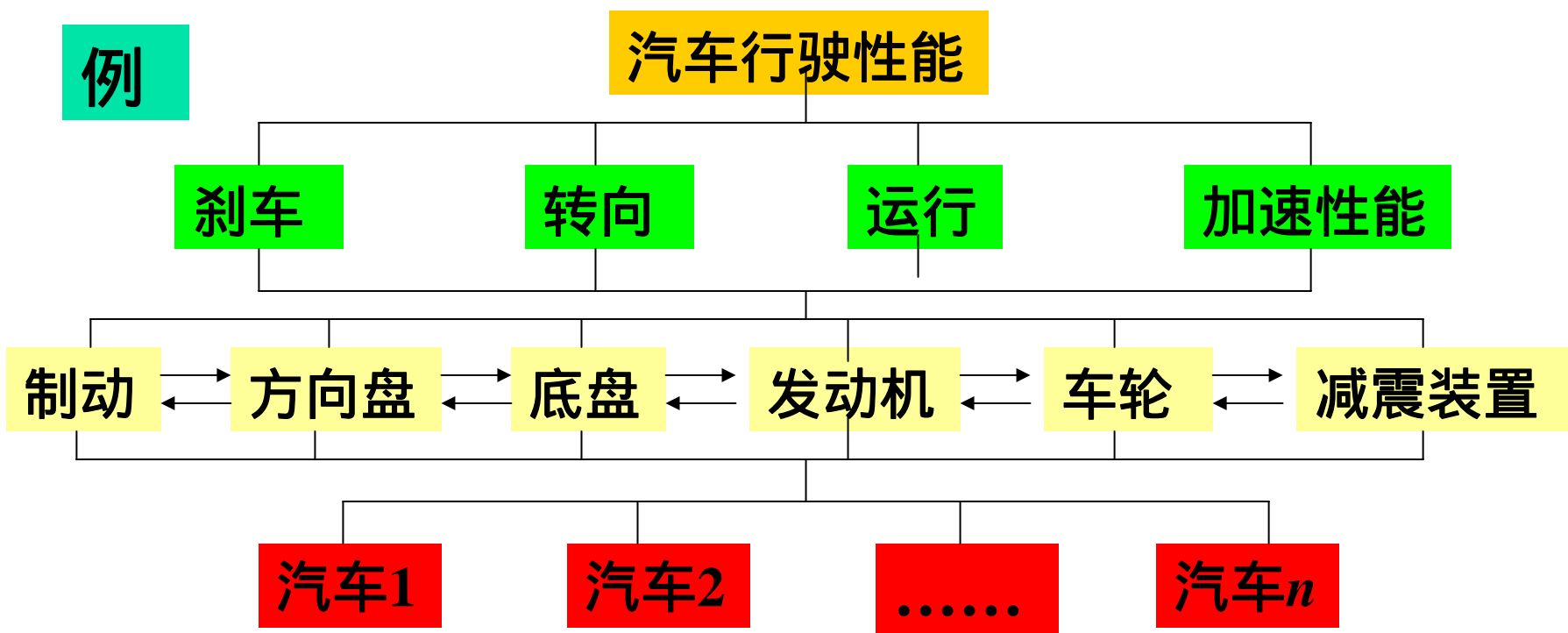
$m_i \sim A$ 第 i 行
中 θ 的个数



6. 更复杂的层次结构

- 递阶层次结构：层内各元素独立，无相互影响和支配；层间自上而下、逐层传递，无反馈和循环。
- 更复杂的层次结构：层内各元素间存在相互影响或支配；层间存在反馈或循环。

例





层次分析法的优点

- **系统性**——将对象视作系统，按照分解、比较、判断、综合的思维方式进行决策——系统分析（与机理分析、测试分析并列）；
- **实用性**——定性与定量相结合，能处理传统的优化方法不能解决的问题；
- **简洁性**——计算简便，结果明确，便于决策者直接了解和掌握。

层次分析法的局限

- **囿旧**——只能从原方案中选优，不能产生新方案；
- **粗略**——定性化为定量，结果粗糙；
- **主观**——主观因素作用大，结果可能难以服人。



Discussions
