数学建模
（Mathematic Modeling）

国防科技大学

第四讲

第四讲

- 主要内容：介绍线性规划模型和动态规划模型。

一、建立模型

线性规划问题：求多变量线性函数在线性约束条件下的最优值。

一、建立模型

线性规划问题：求多变量线性函数在线性约束条件下的最优值。

线性规划问题的一般形式：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

线性规划问题的标准形式:

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (\geqslant 0) \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

[说明] 任意线性规划问题可化为标准形式。具体如下：

1. 目标函数标准化 $\max z = \min(-z)$
2. 约束条件标准化
   假设约束条件中有不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

或

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

引入新变量 x_{n+1}, x_{n+2}（称为松弛变量），则以上两式等价于以下两式：

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \quad x_{n+1} \geqslant 0 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+2} = b_i \quad x_{n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

3. 自由变量标准化

若变量 x_j 无约束，可引入两个新变量 x_j', x_j''，
令 $x_j = x_j' - x_j'', x_j', x_j'' \geqslant 0.$
故以下我们只考虑标准形式，也可以用矩阵形式表示为

$$\min z = c'x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geqslant 0$$

一般要求，$rk(A_{m\times n}) = m, \quad m < n.$

例 1　某工厂制造 A，B 两种产品，制造产品 A 每吨需用煤 9 吨，用电 4 千瓦，3 个工作日；制造产品 B 每吨需用煤 5 吨，用电 5 千瓦，10 个工作日。已知制造产品 A 和 B 每吨分别获利 7000 元和 12000 元。现该厂只有煤 360 吨，电 200 千瓦，工作日 300 个可以利用，问 A，B 两种产品各应生产多少吨才能获利最大?

[解]　x_1, x_2 分别表示 A，B 两种产品的计划生产数（单位：吨），f 表示利润（单位：千元），则

$$f = 7x_1 + 12x_2$$

耗煤量为 $9x_1 + 5x_2$, 耗电量为 $4x_1 + 5x_2$, 耗工作日 $3x_1 + 10x_2$, 于是得规划模型:

[解]　x_1, x_2 分别表示 A，B 两种产品的计划生产数（单位：吨），f 表示利润（单位：千元），则

$$f = 7x_1 + 12x_2$$

耗煤量为 $9x_1 + 5x_2$, 耗电量为 $4x_1 + 5x_2$, 耗工作日 $3x_1 + 10x_2$, 于是得规划模型：

$$\max f = 7x_1 + 12x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 2 设某工厂有甲、乙、丙、丁四个车间，生产 A、B、C、D、E、F 六种产品，根据机车性能和以前的生产情况，得知生产每单位产品所需各车间的工作时数、每个车间在一个季度工作时数的上限以及产品的价格，如下表所示：

	A	B	C	D	E	F	每个车间每季度工作时数上限
甲	0.01	0.01	0.01	0.03	0.03	0.03	850
乙	0.02			0.05			700
丙		0.02			0.05		100
丁			0.03			0.08	900
单价(元)	0.40	0.28	0.32	0.72	0.64	0.60	

问：每种产品每季度各应生产多少，才能使这个工厂每季度生产总值达到最大？

[解]　以 $x_1 \sim x_6$ 分别表示每季度生产 A、B、C、D、E、F 的单位数，于是它们需满足

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.02 & & & 0.05 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 850 \\ 700 \\ 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geqslant 0$$

目标函数为

$$\max f = 0.40x_1 + 0.28x_2 + 0.32x_3 + 0.72x_4 + 0.64x_5 + 0.60x_6$$

引入松弛变量 x_7, x_8, x_9, x_{10}，化成标准型

$$\min g = -0.40x_1 - 0.28x_2 - 0.32x_3 - 0.72x_4 - 0.64x_5 - 0.60x_6$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 1 & & & \\ 0.02 & & & 0.05 & & & & 1 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & & & & 1 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 850 \\ 700 \\ 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 10$$

二、线性规划问题求解

二、线性规划问题求解

1. 可行域几何特征

满足约束条件的解称为可行解，所有可行解构成的集合称为可行域，满足目标式的可行解称为最优解。

二、线性规划问题求解

1. 可行域几何特征

满足约束条件的解称为可行解，所有可行解构成的集合称为可行域，满足目标式的可行解称为最优解。

定理 1

i 线性规划问题的可行域是一个凸多边形；

ii 线性规划问题如果存在最优解，则最优解必在可行域的顶点处达到。

二、线性规划问题求解

1. 可行域几何特征

满足约束条件的解称为可行解，所有可行解构成的集合称为可行域，满足目标式的可行解称为最优解。

定理 1

i 线性规划问题的可行域是一个凸多边形；

ii 线性规划问题如果存在最优解，则最优解必在可行域的顶点处达到。

可行域的顶点称为基本可行解。

2. 单纯形法

2. 单纯形法

基本思想：从可行域的一个顶点（基本可行解）出发，转换到另一个顶点，并且使目标函数值逐步减小，有限步后可得到最优解。

2. 单纯形法

基本思想：从可行域的一个顶点（基本可行解）出发，转换到另一个顶点，并且使目标函数值逐步减小，有限步后可得到最优解。

将系数矩阵 A 表示为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 a_j 是 m 维向量，是 A 的第 j 列。

由于 $rk(A)=m$，故 A 中有 m 个线性无关的列，不妨设 A 中前 m 个列线性无关，即 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 线性无关。

记$A=(E,F)$,E称为基础解矩阵。$X_E=(x_1,x_2,\ldots,x_m)'$,
$X_F=(x_{m+1},\ldots,x_n)'$, $C_E=(c_1,\cdots,c_m)'$, $C_F=(c_{m+1},\ldots,c_n)'$,
则规划问题可写成

记$A=(E,F)$,E称为基础解矩阵。$X_E=(x_1,x_2,\ldots,x_m)'$, $X_F=(x_{m+1},\ldots,x_n)'$, $C_E=(c_1,\cdots,c_m)'$, $C_F=(c_{m+1},\ldots,c_n)'$, 则规划问题可写成

$$\min z = C_E'X_E + C_F'X_F$$

s.t.

$$EX_E + FX_F = b$$

$$X_E \geqslant 0, X_F \geqslant 0$$

对矩阵 (E,F,b) 作初等变换，使 E 化为单位矩阵，即

$$(E,F,b)\rightarrow(I_m,E^{-1}F,E^{-1}b)$$

记 $\bar{b}=E^{-1}b=(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m)'$, $G=E^{-1}F=(g_{ij})$,
$L=C_F'-C_E'G=(l_1,\ldots,l_{n-m})'$

对矩阵 (E, F, b) 作初等变换，使 E 化为单位矩阵，即

$$(E, F, b) \to (I_m, E^{-1}F, E^{-1}b)$$

记 $\bar{b} = E^{-1}b = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)'$, $G = E^{-1}F = (g_{ij})$,
$L = C_F' - C_E'G = (l_1, \ldots, l_{n-m})'$

$$\min z = C_E' E^{-1} b + L' X_F$$

s.t.

$$X_E + GX_F = \bar{b}$$

$$X_E \geq 0, X_F \geqslant 0$$

可以看出，若 $\bar{b} \geqslant 0$，则 $X_E = E^{-1}b = \bar{b}, X_F = 0$ 是可行解，又若 $L \geqslant 0$，则是最优解。

可以看出，若 $\bar{b} \geqslant 0$，则 $X_E = E^{-1}b = \bar{b}, X_F = 0$ 是可行解， 又若 $L \geqslant 0$，则是最优解。

若存在 $l_k < 0$，$(1 \leq k \leq n-m)$，并且 G 的第 k 列中元素均 $\leqslant 0$，则可取

$$x_j = 0, j = m+1, m+2, \cdots, n, j \neq m+k.$$

并令 $X_E = \bar{b} - GX_F$， $x_{m+k} \geqslant 0$ 于是 $X = (X_E, X_F)$ 是可行解，并且 $z = C_E' E^{-1} b + l_k x_{m+k}$， 由于 $l_k < 0$，故 z 无下界，即此时没有最优解。

仍设存在 $l_k < 0$，$(1 \le k \le n-m)$，由上述讨论知，若假设问题有最优解，则 G 的第 k 列元素中至少有一个 > 0，于是可进行变量置换，即用原来的一个非基变量与一个基变量置换位置， 且使得目标函数值下降，这是一次迭代，经有限次这样的迭代，便可得到最优解。

单纯形法步骤：

单纯形法步骤：

第一步：$A=(E,F)$.

单纯形法步骤:

第一步: $A=(E,F)$.

第二步: 计算 $\bar{b}=E^{-1}b, G=E^{-1}F, L=C_F'-C_E'G$.

单纯形法步骤：

第一步：$A=(E,F)$.

第二步：计算 $\bar{b}=E^{-1}b, G=E^{-1}F, L=C_F'-C_E'G$.

第三步：若 $L\geqslant 0$，则$X_E=\bar{b}, X_F=0$ 为最优解，STOP

若有 $l_k<0$，而所有 $g_{ik}\leqslant 0, i=1,2,\ldots m$，则无最优解，STOP

单纯形法步骤：

第一步：$A=(E,F)$.

第二步：计算 $\bar{b}=E^{-1}b, G=E^{-1}F, L=C'_F-C'_E G$.

第三步：若 $L\geqslant 0$，则$X_E=\bar{b}, X_F=0$ 为最优解，STOP

若有 $l_k<0$，而所有 $g_{ik}\leqslant 0, i=1,2,\ldots m$，则无最优解，STOP

否则，存在 i 使得 $g_{ik}>0$，取

$$Q=\min_{1\le i\le m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{g_{ik}}|g_{ik}>0\right\}=\frac{\bar{b}_i}{g_{ik}}$$

将 A 中的第 $m+k$ 列（F 中的第 k 列）与 A 中的第 i 列（也是 E 中的第 i 列）互换位置，构成新的基础解阵 E^*，然后回到第一步。

由于单纯形法能保证每步迭代均使得目标函数严格下降，故不会出现重复现象，所以经有限步迭代后必可得到最优解。

例 3　求解线性规划问题

$$\min z = -0.40x_1 - 0.28x_2 - 0.32x_3 - 0.72x_4 - 0.64x_5 - 0.60x_6$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 1 & & & \\ 0.02 & & & 0.05 & & & & 1 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & & & & 1 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 850 \\ 700 \\ 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 10$$

[解]　显然，有一个基础解阵为 $E=(a_7,a_8,a_9,a_{10})=I_4$，

于是 $F=(a_1,\ldots,a_6)$， $C'_E=(0,0,0,0)$，

$C'_F=(-0.40,-0.28,-0.32,-0.72,-0.64,-0.60)$，

$b'=(850,700,100,900)$,

[解]　显然，有一个基础解阵为 $E=(a_7,a_8,a_9,a_{10})=I_4$，

于是 $F=(a_1,\ldots,a_6)$，　$C_E'=(0,0,0,0)$，

$C_F'=(-0.40,-0.28,-0.32,-0.72,-0.64,-0.60)$，

$b'=(850,700,100,900)$,

计算得：$\bar{b}=E^{-1}b=b$,

$G=E^{-1}F=F$，　$L=C_F'-C_E'G=C_F'$

由于这时所有 $l_k < 0$，任取一个作为进入变量，例如 x_1，计算

由于这时所有 $l_k < 0$， 任取一个作为进入变量，例如 x_1，计算

$$
\begin{aligned}
Q &= \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{g_{i1}}\,|g_{i1}>0\right\}\\
&= \min\left\{\frac{\bar{b}_1}{g_{11}},\frac{\bar{b}_2}{g_{21}}\right\}\\
&= \min\left\{\frac{850}{0.01},\frac{700}{0.02}\right\}\\
&= \frac{700}{0.02}
\end{aligned}
$$

故退出变量为 x_8. 新的基变量为 x_7, x_1, x_9, x_{10}，基础解阵为

故退出变量为 x_8. 新的基变量为 x_7, x_1, x_9, x_{10}，基础解阵为

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.01 & & \\ & 0.02 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & & \\ & 50 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

相应地 $$F = \begin{pmatrix} & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 1 & & & 0.05 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 \end{pmatrix}$$

$$G = E^{-1}F = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.01 & 0.01 & 0.005 & 0.03 & 0.03 \\ 50 & & & 2.5 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = E^{-1}b = (500, 35000, 100, 900)'$$

$$C'_E = (0, -0.4, 0, 0) \quad C'_F = (0, -0.28, -0.32, -0.72, -0.64, -0.60)$$

$$\begin{aligned} L &= C'_F - C'_E G = C'_F - (-20, 0, 0, -1, 0, 0) \\ &= (20, -0.28, -0.32, 0.28, -0.64, -0.60)' \end{aligned}$$

可选取的引入变量为 x_2, x_3, x_5, x_6，取 x_2 为引入变量，计算

$$\begin{aligned} Q &= \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{g_{i2}} | g_{i2}>0\right\} \\ &= \min\left\{\frac{\bar{b}_1}{g_{12}}, \frac{\bar{b}_3}{g_{32}}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{500}{0.01}, \frac{100}{0.02}\right\} \\ &= \frac{100}{0.02} \end{aligned}$$

故 x_9 为退出变量。新的基变量为 x_7, x_1, x_2, x_{10}. 以下迭代过程省略。再经过一次迭代得到最优解为： $x_1 = 35000$, $x_2 = 5000$, $x_3 = 3000$。

三、 整数规划

割平面法，分支定界法（自学）

四、0-1规划

四、0-1规划

例 4 （AMCM-88B）要把七种不同规格的包装箱装到两辆铁路平板车上去，各包装箱宽、高均相同，但厚度 t（厘米）与重量 w（公斤）不同。下表给出各包装箱的厚度、重量及数量。

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
厚度 t	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0
重量 w	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000
件数 n	8	7	9	6	6	4	8

每辆平板车有 10.2 米长的地方可用来装包装箱，载重 40 吨。由于当地货运限制，对 c_5, c_6, c_7 类包装箱总数有一个特别限制：该类箱子总厚度不超过 302.7（厘米）。试把包装箱装到平板车上去使得浪费空间最小。

1、问题分析

1、问题分析

题中所有的包装箱共重 89 吨，而两辆平板车只能载 80 吨，因此不能都装下，问题是装哪些箱子，使剩余空间最小。

2、模型

2、模型

设 x_{ij} = 第 i 辆车装 C_j 类箱子的个数， $i = 1, 2;$ $j = 1, 2, \ldots, 7$

2、模型

设 $x_{ij} =$ 第 i 辆车装 C_j 类箱子的个数， $i = 1, 2;$ $j = 1, 2, \ldots, 7$

自然约束 $x_{ij} \in Z^{+};$

2、模型

设 $x_{ij}=$ 第 i 辆车装 C_j 类箱子的个数， $i=1,2;$ $j=1,2,\ldots,7$

自然约束 $x_{ij}\in Z^{+};$

箱数约束 $x_{1j}+x_{2j}\leqslant n_j;$ $j=1,2,\ldots 7$

2、模型

设 $x_{ij}=$ 第 i 辆车装 C_j 类箱子的个数， $i=1,2;$
$j=1,2,\ldots,7$

自然约束 $x_{ij}\in Z^+;$

箱数约束 $x_{1j}+x_{2j}\leqslant n_j;\ j=1,2,\ldots 7$

重量约束

$$2x_{i1}+3x_{i2}+x_{i3}+0.5x_{i4}+4x_{i5}+2x_{i6}+x_{i7}\leqslant 40,\quad i=1,2$$

厚度约束

$$0.487x_{i1} + 0.520x_{i2} + 0.613x_{i3} + 0.720x_{i4} + 0.487x_{i5}$$
$$+0.520x_{i6} + 0.640x_{i7} \leqslant 10.2, \quad i = 1, 2$$

厚度约束

$$0.487x_{i1} + 0.520x_{i2} + 0.613x_{i3} + 0.720x_{i4} + 0.487x_{i5}$$
$$+0.520x_{i6} + 0.640x_{i7} \leqslant 10.2, \quad i = 1, 2$$

特别约束 $0.487x_{i5} + 0.520x_{i6} + 0.64x_{i7} \leqslant 3.027 \quad i = 1, 2$

厚度约束

$$0.487x_{i1}+0.520x_{i2}+0.613x_{i3}+0.720x_{i4}+0.487x_{i5}$$

$$+0.520x_{i6}+0.640x_{i7}\leqslant 10.2,\quad i=1,2$$

特别约束 $0.487x_{i5}+0.520x_{i6}+0.64x_{i7}\leqslant 3.027\quad i=1,2$

目标函数

$$\max z=\sum_{i=1}^{2}[0.487x_{i1}+0.520x_{i2}+0.613x_{i3}+0.720x_{i4}$$

$$+0.487x_{i5}+0.520x_{i6}+0.640x_{i7}]$$

补充题　求解平板车装载问题。

例 5　生产率问题

某车间有四项工作需要完成，现已找到四个人做这些工作，经过试用，得到这四个人做每一项工作的相对生产率指数，列表如下

工作 \ 人员	1	2	3	4
1	5	7	10	3
2	3	6	8	4
3	4	3	6	2
4	1	4	2	10

假定每个人只能分派一项工作，并希望分派后总的生产率最高，应如何分派工作？

穷举，4！种分法。
令

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{分派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件工作}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则目标函数

穷举，4! 种分法。

令

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{分派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件工作}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则目标函数

$$\begin{aligned}z \; = \; & 5x_{11}+7x_{12}+10x_{13}+3x_{14}+3x_{21}+6x_{22}+8x_{23}+4x_{24}\\ & +4x_{31}+3x_{32}+6x_{33}+2x_{34}+x_{41}+4x_{42}+2x_{43}+10x_{44}\\ & \to \max\end{aligned}$$

每个人做一项工作

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

每个人做一项工作

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

每项工作有一人做

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

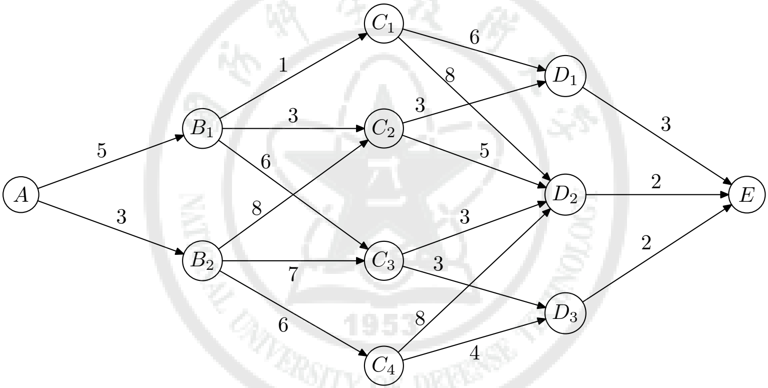
动态规划模型

动态规划模型

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种方法。多阶段决策问题，是指一个问题可以分为若干个阶段， 每一阶段需要做出决策，而一个阶段的决策，常常会影响下一个阶段的决策。要在各个阶段决定一个最优决策， 使整个系统达到最佳的效果。

通过以下一个典型例子，说明如何建立动态规划模型。

例 1　最短路线问题



先引入几个概念

先引入几个概念

状态——每一阶段的起点位置

决策——由一个状态变到另一个状态的选择

x_k——第 k 阶段的状态，称为状态变量

$u_k(x_k)$——从 x_k 出发所作出的决策，称为决策变量

$D_k(x_k)$——第 k 阶段中所有允许决策的集合

状态转移方程——$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k(x_k))$

$d_k(x_k, u_k)$——从状态 x_k 出发，采取决策 u_k，转移到状态 x_{k+1} 的效益

$f_k(x_k)$——从状态 x_k 出发到终点的最优效益

最短路问题的动态规划最优化原理

最短路问题的动态规划最优化原理

假设一条最短路线经过状态 x_k，那么，这条路线上从 x_k 到终点的一段，是从 x_k 出发到终点的所有路线中最短的。

逆序法（回溯法）：从后向前逐步求出各点到终点的最佳路线，最后得到由起点到终点的最短路线。

逆序法（回溯法）：从后向前逐步求出各点到终点的最佳路线，最后得到由起点到终点的最短路线。

最短路问题的动态规划模型，归纳为下述递推公式：

$$\begin{cases} f_5(x_5) = 0 \\ f_k(x_k) = \min\limits_{u_k} \{d_k(x_k, u_k(x_k)) + f_{k+1}(u_k(x_k))\}, \quad k = 4, 3, 2, 1 \end{cases}$$

① 从最后一段开始，$k = 4$

$$f_4(D_1) = 3, \quad f_4(D_2) = 2, \quad f_4(D_3) = 2$$

① 从最后一段开始，$k=4$

$$f_4(D_1)=3,\quad f_4(D_2)=2,\quad f_4(D_3)=2$$

② $k=3$，有 4 个状态 C_i，$i=1,2,3,4.$ 计算各状态出发到终点的效益 $f_3(C_i)$：

$$f_3(C_1)=\min\left\{\begin{array}{c} d(C_1,D_1)+f_4(D_1) \\ d(C_1,D_2)+f_4(D_2) \end{array}\right\}=\min\left\{\begin{array}{c} 6+3 \\ 8+2 \end{array}\right\}=9$$

$$u_3(C_1)=D_1$$

最短路径：$C_1\to D_1\to E$

$$f_3(C_2) = \min \left\{ \begin{array}{c} d(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d(C_2, D_2) + f_4(D_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{c} 3+3 \\ 5+2 \end{array} \right\} = 6$$

$$u_3(C_2) = D_1$$

最短路径：$C_2 \to D_1 \to E$

$$f_3(C_3) = \min \left\{ \begin{array}{c} d(C_3, D_2) + f_4(D_2) \\ d(C_3, D_3) + f_4(D_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{c} 3+2 \\ 3+2 \end{array} \right\} = 5$$

$$u_3(C_3) = D_2 \text{或} D_3$$

最短路径：$C_3 \to D_2\text{或}D_3 \to E$

$$f_3(C_4) = \min\left\{\begin{array}{c} d(C_4, D_2) + f_4(D_2) \\ d(C_4, D_3) + f_4(D_3) \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{c} 8+2 \\ 4+2 \end{array}\right\} = 6$$

$$u_3(C_4) = D_3$$

最短路径：$C_4 \rightarrow D_3 \rightarrow E$

③ $k=2$时，有两个状态，每个状态有3个决策可选。

$$f_2(B_1)=\min\left\{\begin{array}{c} d(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ d(B_1,C_2)+f_3(C_2) \\ d(B_1,C_3)+f_3(C_3) \end{array}\right\}=\min\left\{\begin{array}{c} 1+9 \\ 3+6 \\ 6+5 \end{array}\right\}=9$$

$$u_2(B_1)=C_2$$

最短路径：$B_1\to C_2\to D_1\to E$

$$f_2(B_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} d(B_2, C_2) + f_3(C_2) \\ d(B_2, C_3) + f_3(C_3) \\ d(B_2, C_4) + f_3(C_4) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 8+6 \\ 7+5 \\ 6+6 \end{array} \right\} = 12$$

$$u_2(B_2) = C_3 \text{或} C_4$$

最短路径：$B_2 \to C_3 \to D_2 \text{或} D_3 \to E$ 或者 $B_2 \to C_4 \to D_3 \to E$

④ $k=1$ 时,

$$f_1(A)=\min\left\{\begin{array}{l} d(A,B_1)+f_2(B_1) \\ d(A,B_2)+f_2(B_2) \end{array}\right\}=\min\left\{\begin{array}{l} 5+9 \\ 3+12 \end{array}\right\}=14$$

$$u_1(A)=B_1$$

最短路径: $A\to B_1\to C_2\to D_1\to E$ 路径长为: 14

Bellman 动态规划最优化原理

Bellman 动态规划最优化原理

整个过程的最优策略应具有性质：无论过去的状态和决策如何，对当前状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略。

再看一个动态规划方法解整数规划问题的例子。

再看一个动态规划方法解整数规划问题的例子。

例 2 （货物装载问题）一辆载重量为 20 吨的卡车，有三种不同货物待运， 各种货物的单件重量及价值见表。我们希望用该车一次装载的货物价值最大，应如何装载？

货 物	重量（吨）	价 值
1	3	4
2	4	5
3	5	6

设三种货物的装载件数分别为 x_1, x_2, x_3，整数规划模型：

设三种货物的装载件数分别为 x_1, x_2, x_3，整数规划模型：

$$\max G = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

s.t.

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{是正整数.}$$

应用动态规划方法求解。分段考虑:

应用动态规划方法求解。分段考虑：
令 $G_1 = 4x_1$， $3x_1 \le \lambda$,

$$G_2 = 4x_1 + 5x_2, \quad 3x_1 + 4x_2 \le \lambda$$

$$G_3 = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le \lambda$$

定义： $g_k(\lambda) = \max\limits_{x_k} G_k(\lambda)$

则要求的是 $g_3(20)$

$k = 3$:

若 x_3 给定，则此车装运的最大价值为

$$6x_3 + g_2(20 - 5x_3)$$

故

$$\begin{aligned} g_3(20) &= \max_{0 \leq x_3 \leqslant [20/5]} \{6x_3 + g_2(20 - 5x_3)\} \\ &= \max\{0 + g_2(20), 6 + g_2(15), 12 + g_2(10), \\ &\qquad 18 + g_2(5), 24 + g_2(0)\} \end{aligned}$$

$k=2$:

在 x_3 已确定的条件下，若 x_2 给定，则此车装运的最大价值为

$$5x_2+g_1(\lambda-4x_2)$$

故 $g_2(0)=0$

$$g_2(5)=\max_{0\le x_2\le[5/4]}\{5x_2+g_1(5-4x_2)\}=\max\{0+\underset{4}{g_1(5)},5+\underset{5}{g_1(1)}\}$$

$$
\begin{aligned}
g_2(10) &= \max_{0\le x_2\le [{}^{10}/_4]} \{5x_2 + g_1(10-4x_2)\} \\
&= \max\{0+\underset{12}{g_1(10)}, 5+\underset{13}{g_1(6)}, 10+\underset{10}{g_1(2)}\}
\end{aligned}
$$

$$
g_2(15) = \max\{0+\underset{20}{g_1(15)}, 5+\underset{17}{g_1(11)}, 10+\underset{18}{g_1(7)}, 15+\underset{19}{g_1(3)}\}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2(20) &= \max\{0+\underset{24}{g_1(20)}, 5+\underset{25}{g_1(16)}, 10+\underset{26}{g_1(12)}, 15+\underset{23}{g_1(8)}, \\
&\qquad 20+\underset{21}{g_1(4)}, 25+\underset{25}{g_1(0)}\}
\end{aligned}
$$

$k=1$:

$$g_1(\lambda)=\max_{0\leq x_1\leq[\lambda/3]} 4x_1=4[\frac{\lambda}{3}] \quad \lambda=0,1,2,\cdots,20$$

λ	$g_1(\lambda)$	$x_1^*(\lambda)$	λ	$g_1(\lambda)$	$x_1^*(\lambda)$
0-2	0	0	12-14	16	4
3-5	4	1	15-17	20	5
6-8	8	2	18-20	24	6
9-11	12	3			

从而有

λ	$g_2(\lambda)$	$x_2^*(\lambda)$
5	5	1
10	13	1
15	20	0
20	26	2

$$\text{所以 } g_3(20) = \max\{\underset{26}{0+26}, \underset{26}{6+20}, \underset{25}{12+13}, \underset{23}{18+5}, \underset{24}{24}\} = 26$$

$$x_3^* = 0 \quad \text{或} \quad 1$$

故最优解为 $x_1^* = 4 \quad x_2^* = 2 \quad x_3^* = 0$ 或 $x_1^* = 5 \quad x_2^* = 0$
$x_3^* = 1$

最大装载价值 $G = 26$