差分方程模型

差分方程模型

1 市场经济中的蛛网模型

2 减肥计划——节食与运动

3 差分形式的阻滞增长模型

4 按年龄分组的种群增长

1 市场经济中的蛛网模型

现象

供大于求 ⇨ 价格下降 ⇨ 减少产量

⇧ 数量与价格在振荡 ⇩

增加产量 ⇦ 价格上涨 ⇦ 供不应求

问题

描述商品数量与价格的变化规律

商品数量与价格的振荡在什么条件下趋向稳定

当不稳定时政府能采取什么干预手段使之稳定

蛛网模型

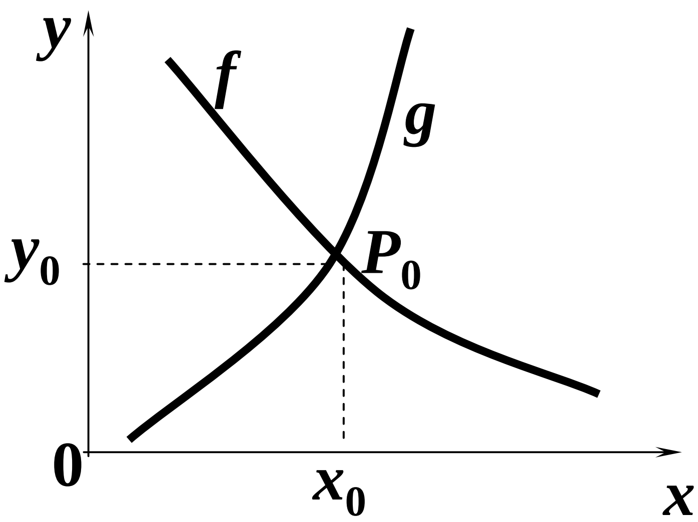
x_k~第k时段商品数量；y_k~第k时段商品价格

消费者的需求关系 ⇨ 需求函数 $y_k = f(x_k)$ 减函数

生产者的供应关系 ⇨ 供应函数 $x_{k+1} = h(y_k)$ 增函数

⇕

$$y_k = g(x_{k+1})$$



f与g的交点$P_0(x_0,y_0)$ ~ 平衡点

一旦$x_k=x_0$，则$y_k=y_0$,

$x_{k+1},x_{k+2},\ldots=x_0$, $y_{k+1},y_{k+2},\ldots=y_0$

蛛网模型

$y_k = f(x_k)$ $x_{k+1} = h(y_k) \Leftrightarrow y_k = g(x_{k+1})$

设x_1偏离x_0

$x_1 \to y_1 \to x_2 \to y_2 \to x_3 \to \cdots$

$x_k \to x_0,\ y_k \to y_0$

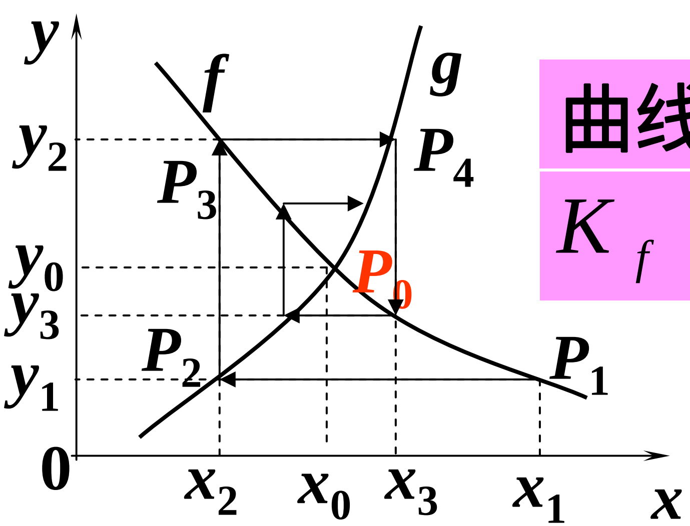
$x_k \not\to x_0,\ y_k \not\to y_0$

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \to P_0$

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \not\to P_0$

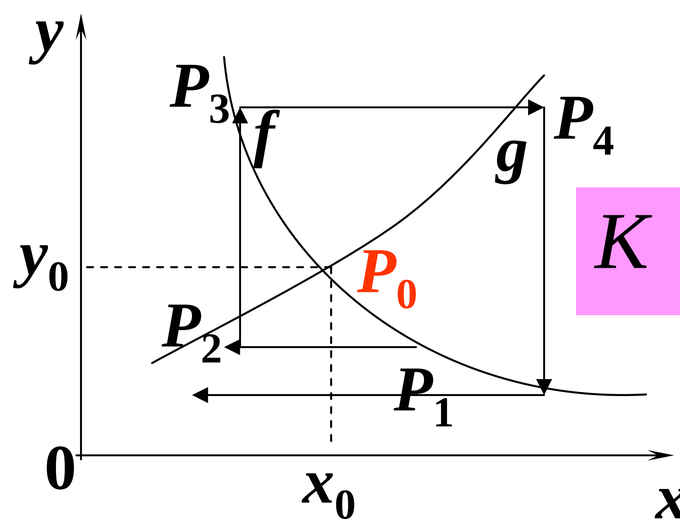
P_0是稳定平衡点

P_0是不稳定平衡点



曲线斜率

$K_f < K_g$



$K_f > K_g$

方 程 模 型

在P_0点附近用直线近似曲线

$$y_k = f(x_k) \Longrightarrow y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (\alpha > 0)$$

$$x_{k+1} = h(y_k) \Longrightarrow x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (\beta > 0)$$

$$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0)$$

$$x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k (x_1 - x_0)$$

$\alpha\beta < 1$ $(\alpha < 1/\beta)$ $\Rightarrow$ $x_k \to x_0$ **P_0稳定** $K_f < K_g$

$\alpha\beta > 1$ $(\alpha > 1/\beta)$ $\Rightarrow$ $x_k \to \infty$ **P_0不稳定** $K_f > K_g$

方程模型与蛛网模型的一致 $\alpha = K_f \quad 1/\beta = K_g$

结果解释

考察α,β的含义

x_k~第k时段商品数量；y_k~第k时段商品价格

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$$

α ~ 商品数量减少1单位, 价格上涨幅度

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0)$$

β ~ 价格上涨1单位, (下时段)供应的增量

α ~ 消费者对需求的敏感程度

α小, 有利于经济稳定

β ~ 生产者对价格的敏感程度

β小, 有利于经济稳定

⇨ $\alpha\beta < 1$ 经济稳定

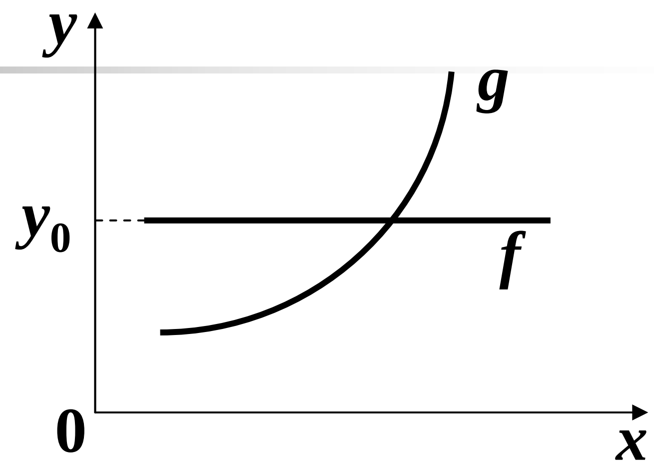
结果解释

经济不稳定时政府的干预办法

1. 使 α 尽量小，如 $\alpha=0$

⇨ 需求曲线变为水平

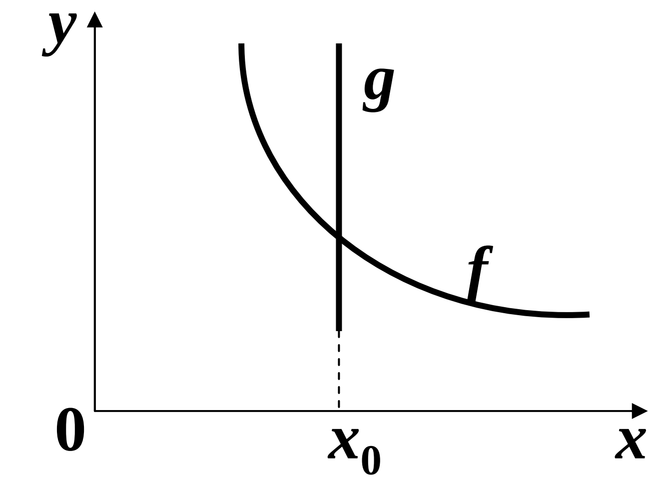
以行政手段控制价格不变



2. 使 β 尽量小，如 $\beta=0$

⇨ 供应曲线变为竖直

靠经济实力控制数量不变



模型的推广

生产者管理水平提高

$$x_{k+1} = h(y_k)$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1} = h\left(\frac{y_k + y_{k-1}}{2}\right)$$

• 生产者根据当前时段和前一时段的价格决定下一时段的产量。

设供应函数为 $x_{k+1} - x_0 = \beta[(y_k + y_{k-1})/2 - y_0]$

需求函数不变 $y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$

$$\Rightarrow \quad 2x_{k+2} + \alpha\beta x_{k+1} + \alpha\beta x_k = 2(1+\alpha\beta)x_0, \; k = 1,2,\cdots$$

二阶线性常系数差分方程

x_0为平衡点

研究平衡点稳定，即$k\to\infty$, $x_k\to x_0$的条件

模型的推广

$$2x_{k+2}+\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=2(1+\alpha\beta)x_0$$

方程通解 $x_k=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$ (c_1, c_2由初始条件确定)

$\lambda_{1,2}$~特征根，即方程 $2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$ 的根

平衡点稳定，即$k\to\infty$, $x_k\to x_0$的条件: $|\lambda_{1,2}|<1$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \Rightarrow |\lambda_{1,2}|=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$$

平衡点稳定条件 $\alpha\beta<2$

比原来的条件 $\alpha\beta<1$ 放宽了

2 减肥计划——节食与运动

背景

- 体重指数**BMI=*w*(kg)/*l*²(m²).** **18.5<BMI<25～正常；BMI>25～超重；BMI>30～肥胖.**
- 多数减肥食品达不到减肥目标，或不能维持
- 通过控制饮食和适当的运动，在不伤害身体的前提下，达到减轻体重并维持下去的目标

分析

- 体重变化由体内能量守恒破坏引起
- 饮食（吸收热量）引起体重增加
- 代谢和运动（消耗热量）引起体重减少

模型假设

1）体重增加正比于吸收的热量——每8000千卡增加体重1千克；

2）代谢引起的体重减少正比于体重——每周每公斤体重消耗200千卡～320千卡(因人而异), 相当于70千克的人每天消耗2000千卡～3200千卡；

3）运动引起的体重减少正比于体重，且与运动形式有关；

4）为了安全与健康，每周体重减少不宜超过1.5千克，每周吸收热量不要小于10000千卡。

减肥计划

某甲体重100千克，目前每周吸收20000千卡热量，体重维持不变。现欲减肥至75千克。

1）在不运动的情况下安排一个两阶段计划。

第一阶段：每周减肥1千克，每周吸收热量逐渐减少，直至达到下限（10000千卡）；

第二阶段：每周吸收热量保持下限，减肥达到目标

2）若要加快进程，第二阶段增加运动，试安排计划。

3）给出达到目标后维持体重的方案。

基本模型

$w(k)$ ~ 第k周(末)体重　　$c(k)$ ~第k周吸收热量

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta w(k)$$

$\alpha = 1/8000$(千克/千卡)　β ~ 代谢消耗系数(因人而异)

1）不运动情况的两阶段减肥计划

- 确定某甲的代谢消耗系数

每周吸收20000千卡 w=100千克不变

$$\Rightarrow w = w + \alpha c - \beta w \qquad \beta = \frac{\alpha c}{w} = \frac{20000}{8000 \times 100} = 0.025$$

即每周每千克体重消耗 20000/100=200千卡

1）不运动情况的两阶段减肥计划

- 第一阶段: **w(k)每周减1千克, c(k)减至下限10000千卡**

$$w(k)-w(k+1)=1 \qquad w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta w(k)$$

$$\Rightarrow \quad c(k+1)=\frac{1}{\alpha}[\beta w(k)-1] \qquad w(k)=w(0)-k$$

$$\Rightarrow \quad c(k+1)=\frac{\beta}{\alpha}w(0)-\frac{1}{\alpha}(1+\beta k)$$

$$\alpha=1/8000$$

$$\beta=0.025$$

$$=12000-200k \geq C_m=10000 \quad \Rightarrow \quad k\leq 10$$

第一阶段10周, 每周减1千克，第10周末体重90千克

吸收热量为 $c(k+1)=12000-200k,\ \ k=0,1,\cdots 9$

1）不运动情况的两阶段减肥计划

- 第二阶段：每周$c(k)$保持C_m, $w(k)$减至75千克

基本模型 $w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta w(k)$

$$\Rightarrow \boxed{w(k+1)=(1-\beta)w(k)+\alpha C_m}$$

$$w(k+n)=(1-\beta)^n w(k)+\alpha C_m[1+(1-\beta)+\cdots+(1-\beta)^{n-1}]$$

$$=(1-\beta)^n[w(k)-\frac{\alpha C_m}{\beta}]+\frac{\alpha C_m}{\beta}$$

以 $\beta=0.025,\ \alpha=\frac{1}{8000},\ C_m=10000$ 代入得

$$\boxed{w(k+n)=0.975^n[w(k)-50]+50}$$

- 第二阶段：每周$c(k)$保持C_m, $w(k)$减至75千克

$$w(k+n)=0.975^n[w(k)-50]+50$$

已知 $w(k)=90$, 要求 $w(k+n)=75$, 求n

$$75=0.975^n(90-50)+50$$

$$n=\frac{\lg(25/40)}{\lg 0.975}=19$$

第二阶段19周, 每周吸收热量保持10000千卡, 体重按

$w(n)=40\times 0.975^n+50\ (n=1,2,\cdots,19)$ **减少至75千克。**

2）第二阶段增加运动的减肥计划

根据资料每小时每千克体重消耗的热量 γ (千卡):

跑步	跳舞	乒乓	自行车(中速)	游泳(50米/分)
7.0	3.0	4.4	2.5	7.9

基本模型

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - (\beta + \alpha\gamma t) w(k)$$

t~每周运动时间(小时)

取 $\alpha\gamma t = 0.003$，即 $\gamma t = 24$

$$\beta(=0.025) \to \beta' = \beta + \alpha\gamma t (=0.028)$$

$$w(k+n) = (1-\beta')^n [w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta'}] + \frac{\alpha C_m}{\beta'}$$

$$75 = 0.972^n (90 - 44.6) + 44.6 \Rightarrow n = 14$$

运动 γt=24 (每周跳舞8小时或自行车10小时), 14周即可。

3）达到目标体重75千克后维持不变的方案

每周吸收热量$c(k)$保持某常数C，使体重w不变

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-(\beta+\alpha\gamma t)w(k)$$

$$\Rightarrow \quad w=w+\alpha C-(\beta+\alpha\gamma t)w \quad \Rightarrow \quad C=\frac{(\beta+\alpha\gamma t)w}{\alpha}$$

- 不运动 $C=8000\times 0.025\times 75=15000$ (千卡)
- 运动(内容同前) $C=8000\times 0.028\times 75=16800$(千卡)

3 差分形式的阻滞增长模型

连续形式的阻滞增长模型 (Logistic模型)

$x(t)$ ~某种群 t 时刻的数量(人口)

$$\dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

$t \to \infty$, $x \to N$, $x=N$是稳定平衡点(与r大小无关)

离散形式

y_k ~某种群第k代的数量(人口)

$$y_{k+1} - y_k = ry_k(1 - \frac{y_k}{N}),\ k = 1,2,\cdots$$

若$y_k=N$，则$y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots =N$

$y^*=N$ 是平衡点

讨论平衡点的稳定性，即$k \to \infty$, $y_k \to N$ ？

离散形式阻滞增长模型的平衡点及其稳定性

$$y_{k+1} - y_k = r y_k \left(1 - \frac{y_k}{N}\right) \quad (1) \Rightarrow y_{k+1} = (r+1) y_k \left[1 - \frac{r}{(r+1)N} y_k\right]$$

变量代换 $x_k = \frac{r}{(r+1)N} y_k$

$$x_{k+1} = b x_k (1 - x_k) \quad (2)$$

记 $b = r + 1$　　一阶(非线性)差分方程

(1)的平衡点 $y^* = N$ $\Leftrightarrow$ (2)的平衡点 $x^* = \frac{r}{r+1} = 1 - \frac{1}{b}$

讨论 x^* 的稳定性

补充知识

一阶非线性差分方程 $x_{k+1}=f(x_k)$ (1) 的平衡点及稳定性

(1)的平衡点 x^*——代数方程 $x=f(x)$的根

(1)的近似线性方程 $x_{k+1}=f(x^*)+f'(x^*)(x_k-x^*)$ (2)

稳定性判断 **x^*也是(2)的平衡点**

$\left|f'(x^*)\right|<1$ **x^*是(2)和(1)的稳定平衡点**

$\left|f'(x^*)\right|>1$ **x^*是(2)和(1)的不稳定平衡点**

$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$ 的平衡点及其稳定性

$b = r + 1$

平衡点 $x = f(x) = bx(1 - x)$ $\Rightarrow$ $x^* = 1 - \frac{1}{b}$

另一平衡点为 $x=0$

稳定性 $f'(x^*) = b(1 - 2x^*) = 2 - b$

$f'(0) = b > 1$

$|f'(x^*)| < 1 \Leftrightarrow 1 < b < 3 \Leftrightarrow x^*$ 稳定

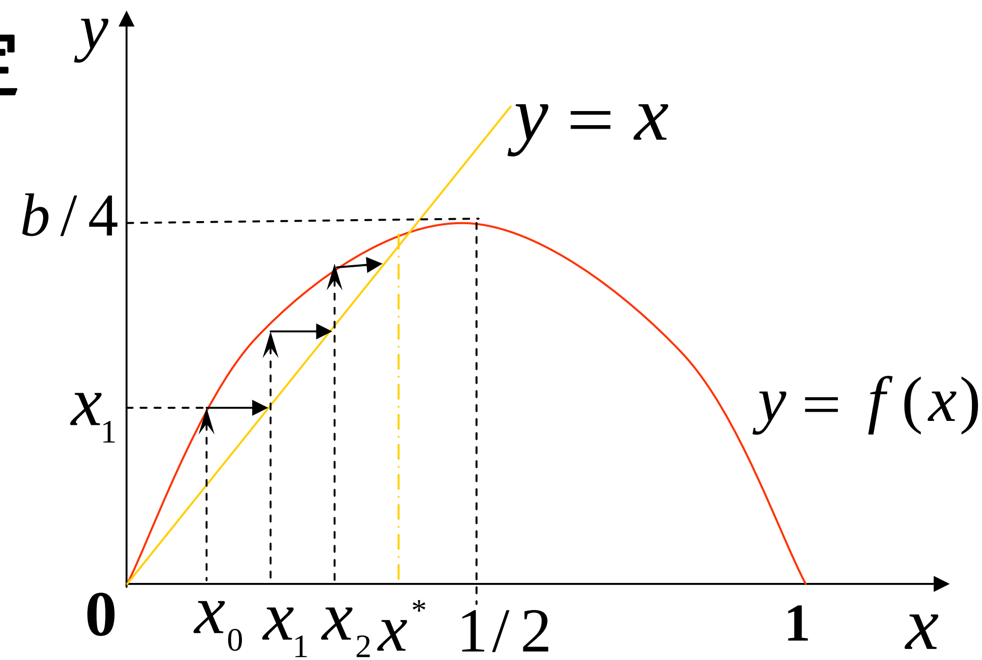
不稳定

$b > 3 \ (|f'(x^*)| > 1) \Leftrightarrow x^*$ 不稳定

(1) $1 < b < 2$

$\Rightarrow x^* = 1 - 1/b < 1/2$

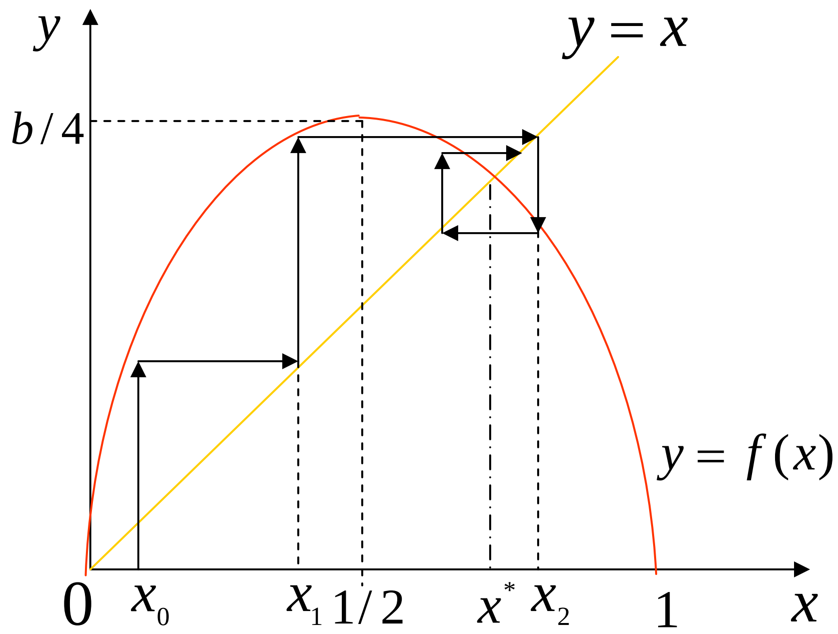
x_k(单调增) $\rightarrow x^*$



$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$ 的平衡点及其稳定性

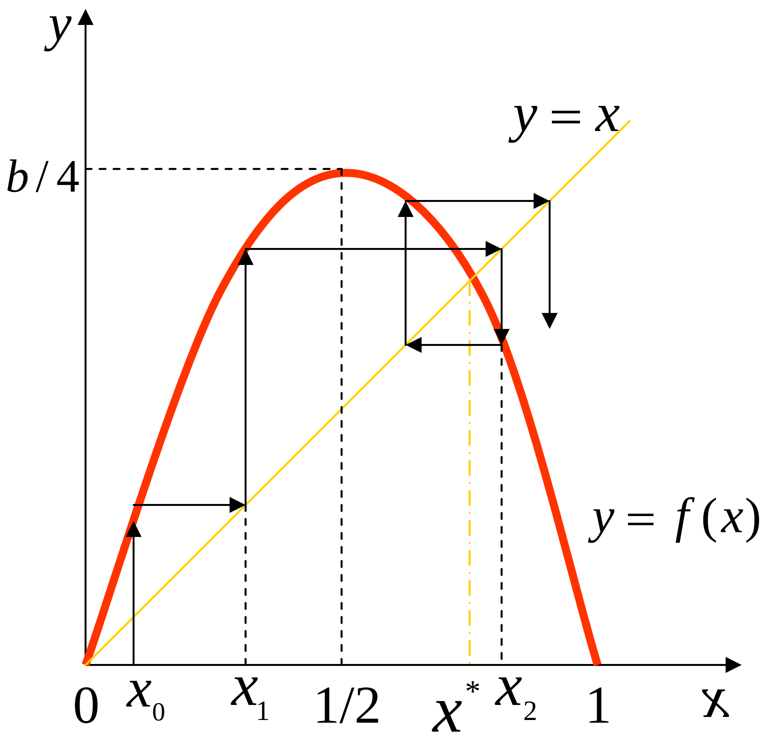
(2) $2 < b < 3$

$x^* = 1 - 1/b > 1/2$



x_k（振荡地）$\to x^*$

(3) $b > 3$



x_k（不）$\to x^*$

k	b=1.7	b=2.6	b=3.3	b=3.45	b=3.55
0	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
1	0.2720	0.4160	0.5280	0.5520	0.5680
2	0.3366	0.6317	0.8224	0.8532	0.8711
3	0.3796	0.6049	0.4820	0.4322	0.3987
…	…	…	…	…	…
91	0.4118	0.6154	0.4794	0.4327	0.3548
92	0.4118	0.6154	0.8236	0.8469	0.8127
93	0.4118	0.6154	0.4794	0.4474	0.5405
94	0.4118	0.6154	0.8236	0.8530	0.8817
95	0.4118	0.6154	0.4794	0.4327	0.3703
96	0.4118	0.6154	0.8236	0.8469	0.8278
97	0.4118	0.6154	0.4794	0.4474	0.5060
98	0.4118	0.6154	0.8236	0.8530	0.8874
99	0.4118	0.6154	0.4794	0.4327	0.3548
100	0.4118	0.6154	0.8236	0.8469	0.8127

数值计算结果

$$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$$

初值 x_0=0.2

b <3, $x \rightarrow x^* = 1 - \frac{1}{b}$

b=3.3, $x\rightarrow$两个极限点

b=3.45, $x\rightarrow$4个极限点

b=3.55, $x\rightarrow$8个极限点

倍周期收敛——x^*不稳定情况的进一步讨论

$b=3.3$ $\quad x_k$(不)$\to x^*$ $\quad$ 子序列 $x_{2k}\to x_1^*,\ x_{2k+1}\to x_2^*$

单周期不收敛

2倍周期收敛

$$x_{k+1}=f(x_k) \qquad x_{k+2}=f(x_{k+1})=f(f(x_k))=f^{(2)}(x_k) \quad (*)$$

$$x=f(f(x))=b\cdot bx(1-x)[1-bx(1-x)] \qquad f(x)=bx(1-x)$$

(*)的平衡点 $\quad x^*=1-\dfrac{1}{b} \qquad x_{1,2}^*=\dfrac{b+1\mp\sqrt{b^2-2b-3}}{2b}$

$$x_1^*=f(x_2^*),\quad x_2^*=f(x_1^*) \qquad 0<x_1^*<x^*<x_2^*<1$$

x^*不稳定，研究x_1^*, x_2^*的稳定性

倍周期收敛

$$x_{1,2}^{*}=\frac{b+1\mp\sqrt{b^{2}-2b-3}}{2b}$$ 的稳定性

$$[f^{(2)}(x)]'=[f'(x)]^2 \qquad (f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_1^*}=(f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_2^*}=f'(x_1^*)f'(x_2^*)$$

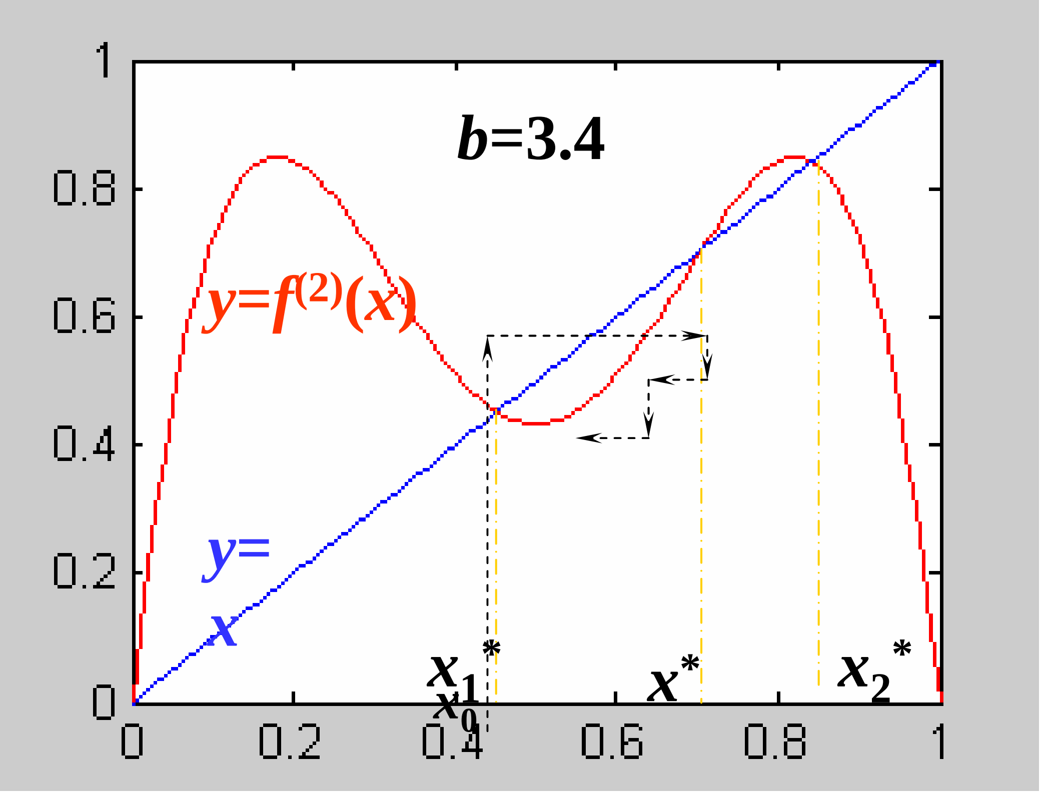
$$f'(x)=b(1-2x) \qquad (f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_1^*,x_2^*}=b^2(1-2x_1^*)(1-2x_2^*)$$

$$\left|(f^{(2)}(x_{1,2}^*))'\right|<1$$

⇩

$$b<1+\sqrt{6}\doteq 3.449$$

$$x_{2k}\to x_1^*,\ \ x_{2k+1}\to x_2^*$$



倍周期收敛的进一步讨论

$b > 3.45 \Rightarrow \left|(f^{(2)}(x_{1,2}^*))'\right| > 1$ ⇨ x_1^*, x_2^* (及x^*)不稳定

出现4个收敛子序列 $x_{4k}, x_{4k+1}, x_{4k+2}, x_{4k+3}$

平衡点及其稳定性需研究 $x_{k+4} = f^{(4)}(x_k)$

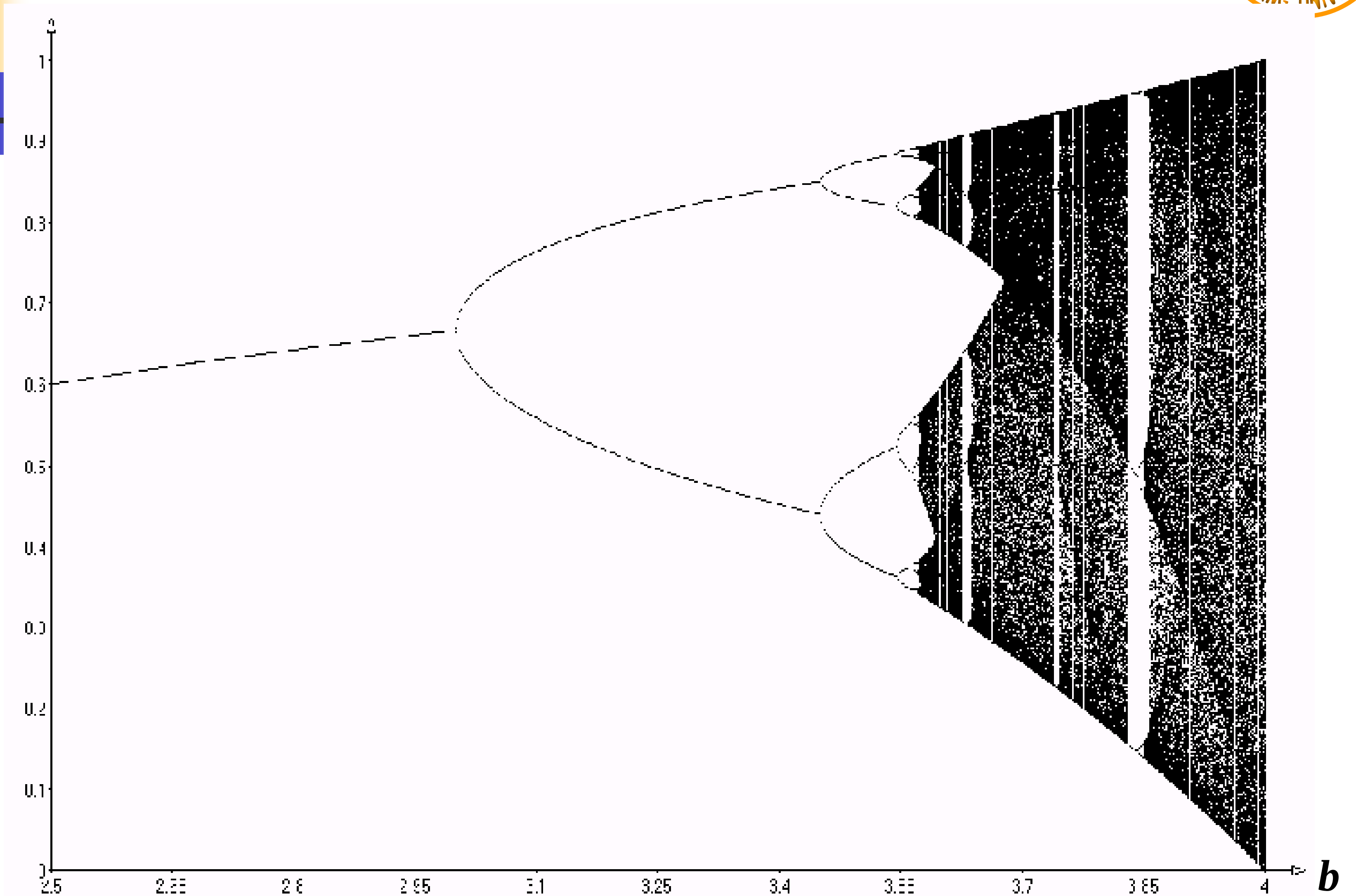
$3.449 < b < 3.544$ 时有4个稳定平衡点 ⇨ 4倍周期收敛

2^n倍周期收敛, n=1,2,… b_n~ 2^n倍周期收敛的上界

$b_0=3, b_1=3.449, b_2=3.544, \ldots$ $n\to\infty, b_n\to 3.57$

$b>3.57$, 不存在任何收敛子序列 ⇨ 混沌现象

$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$ 的收敛、分岔及混沌现象



4　按年龄分组的种群增长

- 不同年龄组的繁殖率和死亡率不同
- 以雌性个体数量为对象
- 建立差分方程模型，讨论稳定状况下种群的增长规律

假设与建模

- 种群按年龄大小等分为n个年龄组，记$i=1,2,\ldots,n$
- 时间离散为时段，长度与年龄组区间相等，记$k=1,2,\ldots$
- 第i 年龄组1雌性个体在1时段内的繁殖率为b_i
- 第i 年龄组在1时段内的死亡率为d_i, 存活率为$s_i=1- d_i$

假设与建模

$x_i(k)$~时段k第i 年龄组的种群数量

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k)$$

(设至少1个b_i>0)

$$x_{i+1}(k+1)=s_i x_i(k),\ i=1,2,\cdots,n-1$$

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

~Leslie矩阵(L矩阵)

$$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots x_n(k)]^T$$

~按年龄组的分布向量

$$x(k+1)=Lx(k)$$

$$x(k)=L^k x(0)$$

预测任意时段种群

按年龄组的分布

稳定状态分析的数学知识

- L矩阵存在正单特征根λ_1， $|\lambda_k| \le \lambda_1, k = 2,3,\cdots n$

特征向量 $x^* = \left[1, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_1^2}, \cdots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right]^T$

- 若L矩阵存在b_i, b_{i+1}>0, 则 $|\lambda_k| < \lambda_1, k = 2,3,\cdots,n$

且 $\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = cx^*$，c是由$b_i$, s_i, $x(0)$决定的常数

解释

$x(k) = L^k x(0)$　L对角化　$L = P[diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)]P^{-1}$

$L^k = P[diag(\lambda_1^k, \cdots \lambda_n^k)]P^{-1}$　P的第1列是x^*

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = Pdiag(1,0,\cdots 0)P^{-1}x(0) = cx^*$$

稳态分析——*k*充分大种群按年龄组的分布

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x(k)}{\lambda_1^k}=cx^*$$

1) $x(k)\approx c\lambda^k x^*$

~种群按年龄组的分布趋向稳定，x^*称稳定分布, 与初始分布无关。

2) $x(k+1)\approx \lambda x(k)$

$\Rightarrow x_i(k+1)\approx \lambda x_i(k)$

~各年龄组种群数量按同一倍数增减， λ称固有增长率

与基本模型 $x(k+1)=Lx(k)$ 比较

3）λ=1时 $x(k+1)\approx x(k)\approx cx^*$

$$x^*=\left[1,s_1,s_1s_2,\cdots s_1s_2\cdots s_{n-1}\right]^T$$

~各年龄组种群数量不变

稳态分析

3) **λ=1时** $Lx^* = x^*$ $\quad x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots s_1 s_2 \cdots s_{n-1}]^T$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad b_1 + b_2 s_1 + \cdots + b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1} = 1$$

～1个个体在整个存活期内的繁殖数量为1

4) $x(k) \approx c\lambda^k x^*, \quad x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots, s_{n-1}]^T$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1}(k) \approx s_i x_i(k), \; i = 1,2,\cdots,n-1$$

～存活率 s_i是同一时段的 x_{i+1}与 x_i之比

（与s_i的定义 $x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k)$ 比较）