第七章 拉格朗日松弛算法

当一个组合优化问题被判定为 NP 完全或 NP 难时，解决这个问题的常用方法是构造启发式算法，求尽量接近最优解的可行解。这些算法包括第二章至第六章的局部搜索算法、禁忌搜索、模拟退火、遗传算法、蚁群优化算法和人工神经网络等等。以极小优化目标函数为例，这些算法给出最优值的上界，第一章的 1.4 节给出这些算法的目标值同最优目标值关系的示意图如下：

目标值

一步法的目标值
改进法的目标值
基于数学规划：分支定界启发式，割平面启发式，线性规划松弛再对解可行化，拉格朗日松弛可行化等的目标值，
现代优化算法：禁忌搜索，模拟退火，遗传算法，蚁群优化算法，人工神经网络等的目标值
其它：如限制解空间，分解法，组合算法等的目标值

最优值

下界算法：
线性规划松弛，拉格朗日松弛等的目标值

评价算法好坏的一个标准是考察它所计算的目标值同最优目标值的差别。由于组合优化问题的难度，求解最优值有时是非常困难的。解决这个难点的一个有效方法是通过计算下界，用上界和下界的差来评价算法。拉格朗日(Lagrange)松弛算法就是求解下界的一种方法。由于拉格朗日松弛算法的实现比较简单和有比较好的性质，它不仅可以用来评价算法的效果，同时可以用在其他算法中，以提高算法的效率。拉格朗日松弛算法包含两部分内容：一方面是提供下界，另一方面则演变为拉格朗日松弛启发式算法。

本章 7.1 节介绍一些数学规划松弛的方法，7.2 节给出拉格朗日松弛的理论，7.3 节进一步讨论拉格朗日松弛的适用模型和更一般的结论，7.4 节讨论拉格朗日松弛算法，7.5 节给出一个应用案例——能力约束单机排序问题。

7.1 基于规划论的松弛方法

在此仅以整数规划为基础讨论，可在混合整数规划问题中作相应的讨论。整数规划的数学模型为

$$\begin{aligned} z_1 &= \min c^T x \\ s.t.\ Ax &\ge b \\ x &\in Z_+^n, \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

其中，决策变量 x 为 n 维列向量，c 为 n 维列向量，A 为 $m \times n$ 矩阵，b 为 m 维列向量；系数 c，A 和 b 取整数，Z_+^n 表示非负整数集合。

1．线性规划松弛

在(7.1.1)中将整数变量约束松弛为实数，就可以得到

$$
\begin{aligned}
z_{LP} &= \min c^T x \\
& s.t.\ Ax \ge b \\
& \quad x \in R_+^n .
\end{aligned} \tag{7.1.2}
$$

称(7.1.2)为(7.1.1)的线性规划松弛。线性规划松弛扩大了整数规划的可行解区域。若记

$$S = \left\{ x \in Z_+^n \mid Ax \ge b \right\},\quad S' = \left\{ x \in R_+^n \mid Ax \ge b \right\},$$

则有 $S \subseteq S'$，于是得到结论：

定理 7.1.1 $z_{LP} \le z_1$。

定理 7.1.1 说明线性规划松弛得到整数规划的一个下界。可以通过单纯形算法或多项式时间的内点算法[1]，求得(7.1.2)的线性规划的最优解。

当 S 中的一个解 x_0 满足 $c^T x_0 = z_{LP}$ 时，推出 x_0 为(7.1.1)的最优解。作为求解整数规划问题启发式算法的一部分，线性规划松弛适用于整数规划问题中决策变量是比较大的整数。对这样的问题，启发式算法的两阶段为：第一阶段将整数规划问题松弛为线性规划问题，求解线性规划问题的最优解；第二阶段将线性规划的最优解按四舍五入或类似的原则整数化，同时考虑解的可行。

2．对偶规划松弛方法

线性规划(7.1.2)的对偶形式为

$$
\begin{aligned}
z_{DP} &= \max y^T b \\
& s.t.\ A^T y \le c \\
& \quad y \in R_+^n ,
\end{aligned} \tag{7.1.3}
$$

其中，决策 y 是一个 m 维列向量。

(7.1.2)和(7.1.3)都为线性规划问题，它们的计算方法相同，且由对偶理论得到 $z_{DP} = z_{LP} \le z_1$。至于采用(7.1.2)或(7.1.3)中哪一个求(7.1.1)的下界，需比较哪一个计算简单。无论如何，单纯形算法和内点算法在实际应用中都可能因为耗时过大而不能满足要求。如在一个循环计算的算法中，每一次循环需要求解一个线性规划问题，当循环的步数较大时，这样无论用单纯形算法还是内点算法都会感到计算时间过多，可能无法满足计算时间的要求。

3．代理(surrogate)松弛法

当(7.1.1)的约束过多时，代理松弛法是通过一个约束

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{i_k j}\right) x_j \ge \sum_{k=1}^{K} b_{i_k}$$

替代(7.1.1)中的 K 个约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_k j} x_j \ge b_{i_k},\ k = 1,2,\cdots,K 。$$

极端的情况可以用一个约束

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) x_j \ge \sum_{i=1}^{m} b_i$$

松弛约束 $Ax \ge b$。代理松弛法保证目标函数、整数变量约束不变，且因约束的减少造成计算量的减少。

4．拉格朗日松弛方法

拉格朗日松弛方法的基本原理是：将造成问题难的约束吸收到目标函数中，并使得目标函数仍保持线性性，使得问题容易求解。产生对它的研究兴趣主要基于下面的原因：

第一，一些组合优化问题是 NP 难，除非 P=NP，否则在现有的约束条件下不存在求最优解的多项式时间算法。但在原有的问题中减少一些约束后，求解问题的难度就大大的减少，

使得减少一些约束后的问题在多项式时间内求得最优解。由此，将这些减少的约束称为难约束。对于线性整数规划问题，将难约束吸收到目标函数后，问题又变的容易求解。这时解的质量完全依赖于吸收到目标函数时所选取的参数。

例 7.1.1 集合覆盖问题(The set covering problem)

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，所有元素 $a_{ij}\in\{0,1\}$，且每一列对应一个费用 $c_j\,(j=1,2,\cdots,n)$。$a_{ij}=1$ 表示第 j 列覆盖第 i 行。集合覆盖问题是以最小的费用选择一些列使得这些列覆盖所有的行。它的数学模型为

$$z_{SC}=\min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{7.1.4}$$

$$\text{(SC)}\qquad s.t.\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge 1,\ \ i=1,2,\cdots,m, \tag{7.1.5}$$

$$x_j\in\{0,1\},\ \ j=1,2,\cdots,n. \tag{7.1.6}$$

集合覆盖问题是NP难[2]。若将(7.1.5)松弛，可得优化问题

$$\begin{aligned} z_{LRSC}(\lambda)=\min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(1-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)\\ s.t.\quad x_j\in\{0,1\},\ j=1,2,\cdots,n,\\ \lambda\ge 0.\end{aligned}$$

记

$$d_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{ij}\ ,$$

则松弛后的模型为

$$\begin{aligned} z_{LRSC}(\lambda)=\min\sum_{j=1}^{n}d_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\\ s.t.\quad x_j\in\{0,1\},\ j=1,2,\cdots,n,\\ \lambda\ge 0.\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

(7.1.7)很容易求得最优解

$$x_j^*=\begin{cases}1, & 若 d_j\le 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

最优值为

$$z_{LRSC}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}d_jx_j^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\ .$$

从松弛和求解的过程中看出：对给定的 $\lambda\ge 0$，满足(7.1.5)和(7.1.6)的一个可行解自然满足(7.1.7)的约束，因此，$z_{LRSC}(\lambda)\le z_{SC}$ 且 $z_{LRSC}(\lambda)$ 是 SC 问题的一个下界。若(7.1.7)的一个可行解不满足约束(7.1.5)时，即存在 i，使得 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j<1,$ 可以通过调节 λ_i，使其增大而惩罚解的不可行性。于是 $z_{LRSC}(\lambda)$ 同 z_{SC} 的差距依赖于 $\lambda\ge 0$ 的选取。还可以看出松弛后的最优解非常容易得到，只需判别 d_j 的正负号。□

第二，实际的计算结果证实拉格朗日松弛方法所给的下界相当不错，且计算时间可以接受。同时，可以进一步利用拉格朗日松弛的基本原理构造基于拉格朗日松弛的启发式算法。

由上面四种松弛方法，可以给予松弛一个定义：

定义 7.6.1 问题

(RP) $$z_R = \min_{x \in S_R} z_R(x)$$

满足下列两条性质时，RP 称为整数规划(7.1.1)的一个松弛(relaxation)：

(1) 可行解区域兼容： $S \subseteq S_R$；

(2) 目标函数兼容：$cx \ge z_R(x),\ \forall x \in S$

其中，S_R 表示一个解集合，$z_R(x)$ 为实函数。

定理 7.1.2 若 RP 无可行解，则(7.1.1)也无可行解；若(7.1.1)有可行解，则 $z_1 \ge z_R$。

证明：当 RP 无可行解时，由可行解区域兼容性，$S = \varnothing$。当(7.1.1)可行时，(7.1.1)的最优解为 RP 的一个可行解，所以 $z_1 \ge z_R$。□

7.2 拉格朗日松弛理论

理论告示我们，如果一个整数规划问题可以在多项式时间内求得最优解，没有必要用更复杂的算法去求解。当面对一个 NP 难的整数规划问题时，除非 P=NP，构造多项式时间的最优算法已不可能。本章是在整数规划问题为 NP 难的前提下讨论它的松弛方法。为了适合拉格朗日松弛方法的讨论，将整数规划问题 IP 描述为

(IP)
$$\begin{aligned} z_{IP} &= \min c^T x \\ s.t.\ \ & Ax \ge b \ \ (\text{复杂约束}) \\ & Bx \ge d \ \ (\text{简单约束}) \\ & x \in Z_+^n, \end{aligned}$$

其中，(A,b)为 $m\times(n+1)$整数矩阵，(B,d)为 $l\times(n+1)$整数矩阵。记 IP 的可行解区域为

$$S = \{x \in Z_+^n \mid Ax \ge b, Bx \ge d\}\text{。}$$

在 IP 模型中，$Ax \ge b$ 为复杂约束的名称来自于：如果将该项约束去掉，则 IP 可以在多项式时间求到最优解，即假定

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ s.t.\ & Bx \ge d \ \ (\text{简单约束}) \\ & x \in Z_+^n, \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

可在多项式时间内求得最优解。

对给定的 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T \ge 0$，IP 对λ的拉格朗日松弛(在不对λ的取值产生混淆时，简称为 LR)定义为：

(LR)
$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) &= \min c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ s.t.\ \ & Bx \ge d \\ & x \in Z_+^n. \end{aligned}$$

LR 的可行解区域记为 $S_{LR} = \{x \in Z_+^n \mid Bx \ge d\}$。

定理 7.2.1 LR 同(7.2.1)有相同的复杂性，且若 IP 的可行解区域非空，则

$$\forall \lambda \ge 0 \Rightarrow z_{LR}(\lambda) \le z_{IP}\text{。}$$

证明：令

$$g(x,\lambda) = c^T x + \lambda^T (b - Ax),$$

则

$$g(x,\lambda) = (c^T - \lambda^T A)x + \lambda^T b$$

为 x 的线性函数。而 $\lambda^T b$ 为常数，又因它们的约束相同，故 LR 同(7.2.1)的复杂性相同。很明显看出 $S \subseteq S_{LR}$ 且

$$\forall \lambda \ge 0, x \in S \Rightarrow c^T x + \lambda^T (b - Ax) \le c^T x 。$$

由定理 7.1.2 得到 $\forall \lambda \ge 0 \Rightarrow z_{LR}(\lambda) \le z_{IP}$。□

定理 7.2.1 说明拉格朗日松弛是 IP 的下界，我们的目的是求与 z_{IP} 最接近的下界。于是需要求解

(LD) $$z_{LD} = \max_{\lambda \ge 0} z_{LR}(\lambda) 。$$

问题 LD 称为 IP 的拉格朗日对偶。用下例来理解拉格朗日松弛和对偶等概念。先定义凸集和凸包的概念。

定义 7.2.1 若 $\forall x, y \in D$，满足

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in D, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

则称集合 D 为一个凸集。

对离散点集合 $Q = \{P_i | i = 1,2,\cdots\}$，它的凸包定义为

$$Con(Q) = \{P = \sum_i \alpha_i P_i | \alpha_i \ge 0 \text{实数}, \sum_i \alpha_i = 1\} 。$$

很容易验证 *Con*(*Q*)为凸集。

例 7.2.1 假设整数规划问题 IP

$$\begin{aligned} z_{IP} = \min & -7x_1 - 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - 2x_2 \ge -4 \\ & -5x_1 - x_2 \ge -20 \\ & 2x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ & x_1 \ge 2 \\ & -x_2 \ge -4 \\ & x \in Z_+^2. \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

的第一个约束为复杂约束，那么拉格朗日松弛后的模型 LR 为

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = \min & [-(7+\lambda)x_1 - (2-2\lambda)x_2] - 4\lambda \\ s.t. \quad & -5x_1 - x_2 \ge -20 \quad (l1) \\ & 2x_1 + 2x_2 \ge 7 \quad (l2) \\ & x_1 \ge 2 \quad (l3) \\ & -x_2 \ge -4 \quad (l4) \\ & x \in Z_+^2. \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

问题(7.2.3)可以用图解的方法简单求解。图解形式如示意图 7.2.1。

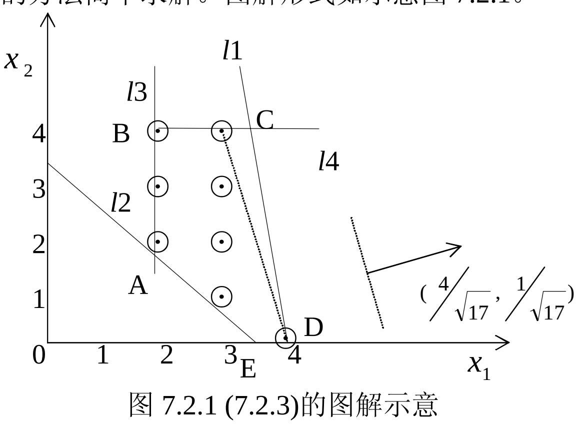

图 7.2.1 (7.2.3)的图解示意

其中，⊙表示整数点，ABCDE 分别表示(7.2.3)的可行解集的极点，图中的四条直线分别代表(7.2.3)四个约束取等号时的直线方程。

当 $\lambda = 0$ 时，目标函数的下降方向是 $(7,2)^T$，图解 (7.2.3) 的最优解为 $(3,4)^T$，

$z_{LR}(0)=-29$。

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，目标函数的下降方向是(7.5,1) ^{T}，图解(7.2.3)的最优解为(4,0) ^{T}，$z_{LR}(\dfrac{1}{2})=-32$。

当 $\lambda=1$时，目标函数的下降方向是(8,0)^T，图解(7.2.3)的最优解为(4,0)^T，$z_{LR}(1)=-32$。

由目标函数可知，$(7+\lambda,2-2\lambda)^T$ 为目标函数的下降方向。当 λ 在 $[0,+\infty)$ 变动时，单位化的方向从 $(\dfrac{7}{\sqrt{53}},\dfrac{2}{\sqrt{53}})^T$ 顺时针变化到

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\frac{7+\lambda}{\sqrt{53+6\lambda+5\lambda^2}},\frac{2-2\lambda}{\sqrt{53+6\lambda+5\lambda^2}})^T=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})^T。$$

于是，只可能在两点(3,4) ^{T}和(4,0) ^{T}达到最优解。根据图 7.2.1 中的方向变化求得目标值。过(3,4) ^{T}和(4,0) ^{T}两点的直线方程为 $y+4x=16$，在图 7.2.1 中用虚线表示，它的一个垂直方向是 $\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}},\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)^T$。此时求得满足

$$(\frac{7+\lambda}{\sqrt{11+6\lambda+5\lambda^2}},\frac{2-2\lambda}{\sqrt{11+6\lambda+5\lambda^2}})^T=\left(\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^T,$$

的 $\lambda^*=\dfrac{1}{9}$。当 $0\le\lambda\le\lambda^*$ 时，最优解为(3,4) ^{T}。当 $\lambda^*\le\lambda$ 时，最优解为(4,0) ^{T}。综合得到

$$z_{LR}(\lambda)=\begin{cases}-29+\lambda, & \text{当} 0\le\lambda\le\dfrac{1}{9},\\ -28-8\lambda, & \text{当}\lambda\ge\dfrac{1}{9}.\end{cases} \tag{7.2.4}$$

由(7.2.4)解出(7.2.2)的拉格朗日对偶问题目标值为

$$z_{LD}=z_{LR}(\frac{1}{9})=-28\frac{8}{9}。$$

记(7.2.2)的简单约束（即(7.2.3)的约束）的可行解集合为 Q，则

Q={(2,2) ^{T},(2,3) ^{T},(2,4) ^{T},(3,1) ^{T},(3,2) ^{T},(3,3) ^{T},(3,4) ^{T},(4,0) ^{T} }。

达到 $z_{LD}=-28\dfrac{8}{9}$ 的极点是 $\lambda=\dfrac{1}{9}$,x=(4,0) ^{T}和 $\lambda=\dfrac{1}{9}$,x=(3,4) ^{T}。同时，由图 7.2.1 直观看出，在(4,0) ^{T}和(3,4) ^{T}点连接直线上（图 7.2.1 中用虚线表示）的任何一点都有相同的目标值 $z_{LD}=-28\dfrac{8}{9}$。

考虑复杂约束 $x_1-2x_2\ge-4$，很容易验证：直线 $x_1-2x_2=-4$ 同过(4,0) ^{T}和(3,4) ^{T}两点的直线相交于 $x^*=(\dfrac{28}{9},\dfrac{32}{9})^T$。

综合上面的讨论，$z_{LD}=c^Tx^*$ 且 $x^*\in\{x\in Con(Q)|x_1-2x_2\ge-4\}$。□

下面定理说明例 7.2.1 最后一个结论有普遍性。

定理 7.2.2 若拉格朗日对偶的目标值 z_{LD} 有限，则

$$z_{LD}=\min\{c^Tx|Ax\ge b,x\in Con(Q)\},$$

其中

$$Q=\{x|Bx\ge d,x\in Z_+^n\}。$$

证明：

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) &= \min_{x\in Q}\left(c^T - \lambda^T A\right)x + \lambda^T b \\ &= \min_{x\in Con(Q)}\left(c^T - \lambda^T A\right)x + \lambda^T b \\ &= \min_{x\in Con(Q)}[c^T x + \lambda^T(b - Ax)]. \end{aligned}$$

设 $Con(Q)$的极点为$\{x^k | k\in K\}$，极方向为$\{r^j | j\in J\}$，则

$$\min_{x\in Q}(c^T - \lambda^T A)x + \lambda^T b = \begin{cases} -\infty, & \text{若存在} j\in J \text{满足} (c^T - \lambda^T A)r^j < 0, \\ c^T x^k + \lambda^T(b - Ax^k), & \text{其它}, k\in K. \end{cases}.$$

而由 z_{LD} 有限，则有

$$\begin{cases} \text{存在}\lambda \ge 0, \forall j\in J, \text{使得}(c^T - \lambda^T A)r^j \ge 0, \\ z_{LD} = \max\limits_{\lambda\ge 0} z_{LR}(\lambda) = \max\limits_{\lambda\ge 0}\min\limits_{k\in K}\left[c^T x^k + \lambda^T(b - Ax^k)\right]. \end{cases}$$

这一结论等价为

$$\begin{aligned} z_{LD} = {} & \max \eta \\ s.t.\ \ & c^T x^k + \lambda^T(b - Ax^k) \ge \eta, \quad \forall k\in K \\ & (c^T - \lambda^T A)r^j \ge 0, \quad \forall j\in J \\ & \lambda \ge 0. \end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned} z_{LD} = {} & \max \eta \\ s.t.\ \ & \eta + \lambda^T(Ax^k - b) \le c^T x^k, \quad \forall k\in K \\ & \lambda^T A r^j \le c^T r^j, \quad \forall j\in J \\ & \lambda \ge 0. \end{aligned}$$

由线性规划的对偶理论，上式的对偶线性规划为

$$\begin{aligned} z_{LD} = {} & \min c^T\left(\sum_{k\in K}\alpha_k x^k + \sum_{j\in J}\beta_j r^j\right) \\ s.t.\ \ & \sum_{k\in K}\alpha_k = 1 \\ & A\left(\sum_{k\in K}\alpha_k x^k + \sum_{j\in J}\beta_j r^j\right) \ge b\left(\sum_{k\in K}\alpha_k\right) \\ & \alpha_k \ge 0, k\in K; \beta_j \ge 0, j\in J. \end{aligned}$$

最终整理得到

$$\begin{aligned} z_{LD} = {} & \min_{x\in Con(Q)} c^T x \\ s.t.\ \ & Ax \ge b \\ = {} & \min\left\{c^T x | Ax \ge b, x\in Con(Q)\right\}. \end{aligned}$$

□

推论 7.2.1 对任给 c，整数规划问题 IP 和拉格朗日对偶 LD 的目标值 $z_{IP} = z_{LD}$ 的充要条件是

$$Con\left(Q \cap \left\{x\in R_+^n | Ax \ge b\right\}\right) = Con(Q) \cap \left\{x\in R_+^n | Ax \ge b\right\}.$$

证明：很容易看出

$$Q \cap \left\{x\in R_+^n | Ax \ge b\right\} \subseteq Con(Q) \cap \left\{x\in R_+^n | Ax \ge b\right\},$$

得到

$$Con\left(Q\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}\right)\subseteq Con(Con(Q)\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\})$$
$$=Con(Q)\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}.$$

再由定理 7.2.2，得到

$$z_{IP}=\min_{x\in Con\left(Q\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}\right)}c^Tx\le z_{LD}=\min_{x\in Con(Q)\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}}c^Tx\text{。}$$

若对任给的 c 满足：$z_{IP}=z_{LD}$，则得到

$$Con\left(Q\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}\right)=Con(Q)\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}\text{。}$$

由此证明了必要性。由上面的推导，充分性的证明明显成立。□

例 7.2.2(续例 7.2.1) 例 7.2.1 中的

$$Q=\{(2,2)^T,(2,3)^T,(2,4)^T,(3,1)^T,(3,2)^T,(3,3)^T,(3,4)^T,(4,0)^T\}\text{。}$$

记

$$S_1=Con(Q\cap\{x\in R_+^n|x_1-2x_2\ge -4\}),$$
$$S_2=Con(Q)\cap\{x\in R_+^n|x_1-2x_2\ge -4\}\text{。}$$

它们的区域图形表示见图 7.2.2。S_1 区域为图 7.2.2(a)的虚线所围部分。S_2 区域为图 7.2.2(b)的黑粗线所围部分。

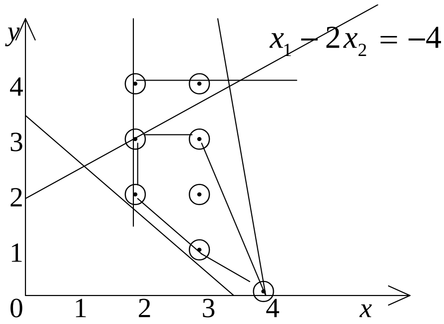

图 7.2.2(a) S_1 区域

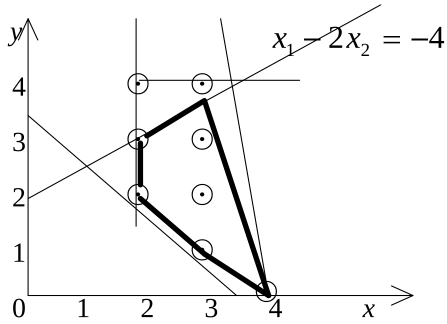

图 7.2.2(b) S_2 区域

由推论 7.2.1 可以看出，$z_{IP}-z_{LD}$ 的差值同下面两个因素有关。第一是目标函数中的 c。推论 7.2.1 中的结论是对所有的 c 讨论得到的，但可能存在一个 c 使得 $z_{IP}=z_{LD}$，例 7.2.2 中 c^T=(1,0)时，则，

$$\begin{aligned} z_{IP}=\min\ & x_1 \\ s.t.\quad & x_1-2x_2\ge -4 \\ & -5x_1-x_2\ge -20 \\ & 2x_1+2x_2\ge 7 \\ & x_1\ge 2 \\ & -x_2\ge -4 \\ & x\in Z_+^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda)=\min\ & [(1-\lambda)x_1+2\lambda x_2]-4\lambda \\ s.t.\quad & -5x_1-x_2\ge -20 \\ & 2x_1+2x_2\ge 7 \\ & x_1\ge 2 \\ & -x_2\ge -4 \\ & x\in Z_+^2. \end{aligned}$$

解出 $z_{IP}=2$。$(2,2)^T$和$(2,3)^T$两点的直线方程为 $x=2$，它的一个垂直方向是 $(-1,0)^T$。此时，求满足

$$(\frac{\lambda-1}{\sqrt{1-2\lambda+5\lambda^2}},\frac{-2\lambda}{\sqrt{1-2\lambda+5\lambda^2}})^T=(-1,0)^T,$$

的 $\lambda^*=0$。当 $\lambda=\lambda^*=0$ 时，松弛的一个最优解为$(2,2)^T$。于是 $z_{LR}(\lambda^*)=2$。

第二个因素是可行解的区域。由图 7.2.2(a)和图 7.2.2(b)中 S_1 区域和 S_2 区域的不同，存在c使得 $z_{IP}-z_{LD}$ 不为零。例 7.2.1 中，$z_{LD}=-28\frac{8}{9}$，在 $\lambda^*=\frac{1}{9}$ 达到拉格朗日对偶问题的最优值，它的一个最优解是$(4,0)^T$；$z_{IP}=-28$，一个最优解也为$(4,0)^T$。从这个结论可以看出，即使拉格朗日松弛在某一个 λ 求到的最优解为原问题(7.2.2)的可行解，我们不能断言 $z_{IP}=z_{LR}(\lambda)$。□

如果拉格朗日对偶在 $\lambda=0$ 时达到最优值，且它的最优解是 IP 的一个可行解，此时，原问题 IP 同松弛问题 LR 为同一个目标函数，所以有 $z_{IP}=z_{LR}(\lambda)$。

IP 的线性规划松弛为

$$(\mathrm{LP})\quad \begin{aligned} & z_{LP}=\min c^T x \\ & s.t.\ \ Ax\ge b\ \ (\text{复杂约束}) \\ & \qquad Bx\ge d\ \ (\text{简单约束}) \\ & \qquad x\in R_+^n. \end{aligned}$$

继续研究例 7.2.1 还可以发现：已经得到 $z_{IP}=-28$，$z_{LD}=-28\frac{8}{9}$。再用图解法，可得到线性规划松弛的最优解为$(\frac{36}{11},\frac{40}{11})^T$，最优值为 $z_{LP}=-30\frac{2}{11}$。

定理 7.2.3 若线性规划松弛 LP 存在可行解，则 $z_{LP}\le z_{LD}\le z_{IP}$。

证明：因为

$$\begin{aligned} Q\cap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\} &\subseteq Con(Q)\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\} \\ &\subseteq\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}, \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} Con(Q\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}) &\subseteq Con(Q)\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\} \\ &\subseteq\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}, \end{aligned}$$

再由定理 7.2.2，推出

$$z_{IP}\ge z_{LD}\ge z_{LP}\text{。}\square$$

由定理 7.2.3 得到，采用拉格朗日松弛对偶后的目标值 z_{LD} 是 IP 的一个下界且不比 z_{LP} 差，因此可能出现差距 $z_{LD}-z_{LP}$。这解释了例 7.2.2 结束时给出的直观结论。

推论 7.2.2 若 $\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}$ 的所有极点为整数点，则对任意的 c 有 $z_{LD}=z_{LP}$。

证明：从定理 7.2.3 的证明过程中得到

$$Con(Q)\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\}\subseteq\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}\bigcap\left\{x\in R_+^n|Ax\ge b\right\},$$

当 $\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}$ 的所有极点为整数点时，

$$\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}=Con(Q),$$

于是

$$Con(Q)\cap\left\{x\in R_+^n \mid Ax\ge b\right\}=\left\{x\in R_+^n \mid Bx\ge d\right\}\cap\left\{x\in R_+^n \mid Ax\ge b\right\},$$

再由定理 7.2.2 得到结论。□

定理 7.2.3 告诉我们，拉格朗日对偶的目标值是 IP 问题的一个下界，那么，这个下界与 IP 的目标值有多大的差距？

定理 7.2.4 $z_{IP}-z_{LD}\le\varepsilon(\varepsilon\ge 0)$ 的充分必要条件是存在

$$\lambda^*\ge 0 \text{ 和 } x^*\in\left\{x\in Z_+^n \mid Ax\ge b, Bx\ge d\right\}$$

满足

$$\lambda^{*T}(b-Ax^*)\ge -\delta_1(\delta_1\ge 0),$$
$$z(\lambda^*,x^*)=c^Tx^*+\lambda^{*T}(b-Ax^*)\le z_{LR}(\lambda^*)+\delta_2(\delta_2\ge 0),$$
$$\delta_1+\delta_2\le\varepsilon。$$

证明：充分性：

$$\begin{aligned}z_{LD}&\ge z_{LR}(\lambda^*)\ge z(\lambda^*,x^*)-\delta_2\\&\ge cx^*-\delta_1-\delta_2\ge z_{IP}-\delta_1-\delta_2.\end{aligned}$$

必要性：

记 x^* 为 IP 的最优解，λ^* 为 LD 的最优解，则有

$$\begin{aligned}z_{LD}&=z_{LR}(\lambda^*)=c^Tx^*+\lambda^{*T}(b-Ax^*)+z_{LR}(\lambda^*)-z(\lambda^*,x^*)\\&=z_{IP}+\lambda^{*T}(b-Ax^*)+z_{LR}(\lambda^*)-z(\lambda^*,x^*).\end{aligned}$$

由条件 $z_{IP}-z_{LD}\le\varepsilon(\varepsilon\ge 0)$ 推出

$$\lambda^{*T}(b-Ax^*)+z_{LR}(\lambda^*)-z(\lambda^*,x^*)\ge-\varepsilon,$$

记

$$\lambda^{*T}(b-Ax^*)=-\delta_1,\quad z_{LR}(\lambda^*)-z(\lambda^*,x^*)=-\delta_2,$$

则得到

$$\lambda^{*T}(b-Ax^*)=-\delta_1(\delta_1\ge 0),$$
$$z(\lambda^*,x^*)=c^Tx^*+\lambda^{*T}(b-Ax^*)=z_{LR}(\lambda^*)+\delta_2(\delta_2\ge 0),$$
$$\delta_1+\delta_2\le\varepsilon。□$$

可以用定理 7.2.4 的充分条件来估计一个算法同拉格朗日松弛下界的距离。

例 7.2.3(续例 7.2.1) 当 $\lambda^*=\dfrac{1}{9}$ 时，$x^*=(4,0)^T$ 为(7.2.2)问题的一个可行解，此时，

$$\lambda^*(b-Ax^*)=\frac{1}{9}(-4-4)=-\delta_1,$$

$$z(\lambda^*,x^*)=c^Tx^*+\lambda^*(b-Ax^*)=-28-\frac{8}{9}=-28\frac{8}{9}=z_{LR}(\lambda^*)+\delta_2,$$

其中，$\delta_2=0$。于是 $\varepsilon=\delta_1+\delta_2=\dfrac{8}{9}$，故有 $z_{IP}-z_{LD}\le\dfrac{8}{9}$。

一般的情况下，无法估计的那么精确，但也可以用定理 7.2.4 的充分条件估计 $z_{IP}-z_{LD}$。如 $\lambda^*=\dfrac{1}{2}$ 时，$x^*=(4,0)^T$ 为(7.2.2)问题的一个可行解，此时，

$$\lambda^*(b-Ax^*)=\frac{1}{2}(-4-4)=-\delta_1,$$
$$z(\lambda^*,x^*)=c^Tx^*+\lambda^*(b-Ax^*)=-28-4=-32=z_{LR}(\lambda^*)+\delta_2,$$

其中，$\delta_2 = -32 - z_{LR}(\lambda^*) = -32 + 28 + 4 = 0$。于是$\varepsilon = \delta_1 + \delta_2 = 4$，故有$z_{IP} - z_{LD} \le 4$。□

从上面的讨论看出，只有给出较好的λ^*和x^*，才能得到$z_{IP} - z_{LD}$较好的估计值。在有多种约束组合可松弛的拉格朗日松弛问题中，我们的目的是选使$z_{IP} - z_{LD}$值最小的松弛。

7.3 拉格朗日松弛的进一步讨论

在前二节中，我们仅就标准的拉格朗日松弛进行了讨论。在实际应用中还可能出现其他的形式。本节针对一些常见的问题分类讨论。

1．等号约束的松弛

将等号约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

写成两个标准形式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad 和 \quad \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \ge -b_i。$$

对应拉格朗日乘子$\lambda_{i1} \ge 0, \lambda_{i2} \ge 0$。在目标函数中出现

$$\lambda_{i1}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) + \lambda_{i2}(-b_i - \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j) = (\lambda_{i1} - \lambda_{i2})(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)。$$

令$\lambda_i = \lambda_{i1} - \lambda_{i2}$，则松弛后对应的$\lambda_i$没有正负号约束。

2．LR 最优解同 LP 最优解的关系

若对给定的$\lambda \ge 0$，

$$\text{(LR)} \quad \begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = \min\ & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ s.t.\ & Bx \ge d \\ & x \in Z_+^n. \end{aligned}$$

的最优解$x(\lambda)$为 IP 的一个可行解，则有$z_{LR}(\lambda) \le z_{IP}$。值得注意的是并不能得到$c^T x(\lambda) = z_{IP}$，用下例说明这个结论。

例 7.3.1 集合覆盖问题

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ s.t.\ & x_1 + x_3 \ge 1 \\ & x_1 + x_4 \ge 1 \\ & x_2 + x_3 + x_4 \ge 1 \\ & x_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3,4, \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

直观的结果是最优解为$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0, z_{IP} = 5$。拉格朗日松弛三个约束，

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = \min & (2 - \lambda_1 - \lambda_2)x_1 + (3 - \lambda_3)x_2 \\ & + (4 - \lambda_1 - \lambda_3)x_3 + (5 - \lambda_2 - \lambda_3)x_4 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ s.t.\ & x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$时，

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = \min & -6x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 12 \\ s.t.\ & x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,3,4, \end{aligned}$$

其最优解为：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, z_{IP} = -2$。该解为(7.3.1)问题的一个可行解，但

$$c^T x = (1,2,3,4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 10 \neq z_{IP}。$$

由此得到：当松弛后问题的一个最优解为原问题(7.3.1)的一个可行解时，并不能得到该解为原问题的最优解。□

当拉格朗日松弛后的一个最优解为原问题 IP 的一个可行解时，在什么样的条件下，该解为 IP 的一个最优解？

定理 7.3.1 $z_{IP} = z_{LD}$ 的充分必要条件是存在 $\lambda^* \geq 0$ 和 x^* 为 IP 的可行解，满足 $\lambda^{*T}(b - Ax^*) = 0$ 且 $z_{LR}(\lambda^*) = z(\lambda^*, x^*)$。

证明：定理 7.2.4 的直接推论。□

当拉格朗日松弛后对应 $\lambda^* \geq 0$ 的一个最优解 x^* 为原问题 IP 的一个可行解时，此时已有 $z_{LR}(\lambda^*) = z(\lambda^*, x^*)$，只需 $\lambda^{*T}(b - Ax^*) = 0$ 时，有 $z_{IP} = z_{LD}$。这是对上面问题的回答。

3．拉格朗日松弛的整数性

定义 7.3.1 若 LR($\forall \lambda \geq 0$)的最优解与其整数约束 $x \in Z_+^n$ 无关，即

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = &\min c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ s.t.\quad & Bx \geq d \\ & x \in Z_+^n, \end{aligned}$$

与 LR 的线性松弛

$$\text{(LRL)}\qquad \begin{aligned} z_{LRL}(\lambda) = &\min c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ s.t.\quad & Bx \geq d \\ & x \in R_+^n, \end{aligned}$$

的最优值相同，则称该问题的拉格朗日松弛具有整数性。

从整数性可以看出，若 LR 具有整数性，则对任意的 $\lambda \geq 0$，最优解在 $\left\{x \in R_+^n \middle| Bx \geq d\right\}$ 的一个极点达到且该极点一定是整数点。

例 7.3.2(续例 7.1.1) 例 7.1.1 的集合覆盖问题 SC 的拉格朗日松弛为

$$\text{(LRSC)}\qquad \begin{aligned} z_{LRSC}(\lambda) = &\min \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \\ s.t.\quad & x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,\cdots,n, \end{aligned}$$

其中

$$d_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}。$$

上面公式的线性规划模型为

$$\text{(LSC)}\qquad \begin{aligned} z_{LSC}(\lambda) = &\min \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \\ s.t.\quad & 0 \leq x_j \leq 1, j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

LRSC 和 LSC 的最优解都为

$$x_j^* = \begin{cases} 1, & 若 d_j \leq 0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

由此可知 LRSC 具有整数性。□

定理 7.3.2 若 LR 具有整数性，则$z_{LD}=z_{LP}$。

证明：记

$$Q'=\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\},$$

$$z_{LRL}(\lambda)=\min_{x\in Q'}c^Tx+\lambda^T(b-Ax),$$

$$z'_{LD}=\max_{\lambda\ge 0}z_{LRL}(\lambda)。$$

同定理 7.2.2 的证明相同，有

$$z'_{LD}=\min\left\{c^Tx|Ax\ge b,x\in Con(Q')\right\}=\min\left\{c^Tx|Ax\ge b,x\in Q'\right\}=z_{LP}。$$

由$z_{LRL}(\lambda)$定义，存在$\lambda^*\ge 0$使

$$z_{LP}=z'_{LD}=z_{LRL}(\lambda^*)。$$

由整数性得到：

$$z_{LP}=z_{LRL}(\lambda^*)=z_{LR}(\lambda^*)\le z_{LD}。$$

再由定理 7.2.3 得到$z_{LP}=z_{LD}$。□

定理 7.3.2 同推论 7.2.2 的结论极为相似，值得注意的是推论 7.2.2 要求$Q'=\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}$的所有极点为整数点，这样可以保证$z_{LP}=z_{LD}$，说明拉格朗日对偶问题的最优值与 IP 问题的线性规划松弛最优值无差距。但定理 7.3.2 的条件比推论 7.2.2 更弱一些，并不要求$Q'=\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}$的所有极点为整数点，只需对应任一λ，LRL 的最优解为整数点，达到最优目标值$z_{LRL}(\lambda)$，可从例 7.3.3 中看出。由此得到的结论是$z_{LP}=z_{LD}$，表示线性规划松弛的最优值同拉格朗日对偶的最优值相同，即采用拉格朗日松弛的效果不比线性规划松弛好。

例 7.3.3 整数规划问题和它的拉格朗日松弛分别为(7.3.3)和(7.3.4)。

$$\begin{aligned}z_{IP}=\min&-7x_1-2x_2\\ s.t.\quad & x_1-2x_2\ge -4\\ &-4x_1-x_2\ge -16\\ &2x_1+2x_2\ge 7\\ &x_1\ge 2\\ &-x_2\ge -4\\ &x\in Z_+^2.\end{aligned}\tag{7.3.3}$$

$$\begin{aligned}z_{LR}(\lambda)=\min&[-(7+\lambda)x_1-(2-2\lambda)x_2]-4\lambda\\ s.t.\quad &-4x_1-x_2\ge -16\\ &2x_1+2x_2\ge 7\\ &x_1\ge 2\\ &-x_2\ge -4\\ &x\in Z_+^2.\end{aligned}\tag{7.3.4}$$

同例 7.2.1 非常相似，将例 7.2.1 中(7.2.2)的第二个约束$-5x_1-x_2\ge -20$变更为$-4x_1-x_2\ge -16$，按定理 7.3.2 证明中的符号，

$$\begin{aligned}Q'&=\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}\\ &=\{x\in R_+^n|-4x_1-x_2\ge -16,\ 2x_1+2x_2\ge 7,\ x_1\ge 2,-x_2\ge -4\}.\end{aligned}$$

用图 7.3.1 表示解集合Q'包括：粗黑线内部和边界。

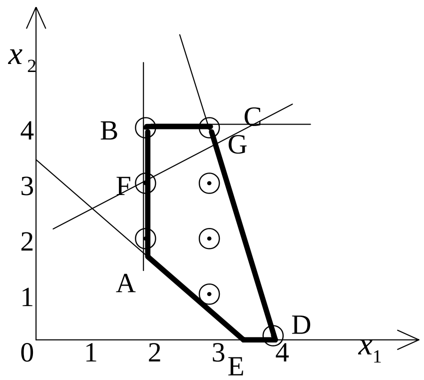

图 7.3.1 Q'集合示意图

很明显，它的极点为A、B、C、D、E，且A=(2,3/2)^{T}和E=(7/2,0) ^{T}不是整数点。因此，由推论 7.2.2 无法得到$z_{LP}=z_{LD}$。

与例 7.2.1 相同的分析，得到$\lambda^*=\dfrac{1}{9}$。当$0\le\lambda\le\lambda^*$时，最优解为(3,4)^T。当$\lambda^*\le\lambda$时，最优解为(4,0)^T。而LRL问题在本例的可行解区域为图 7.3.1 的粗黑线内部，同上面相同的讨论，他们对每一个$\lambda\ge0$的最优值相同，即具有整数性。于是

$$z_{LR}(\lambda)=z_{LRL}(\lambda)=\begin{cases}-29+\lambda, & 当0\le\lambda\le\dfrac{1}{9},\\ -28-8\lambda, & 当\lambda\ge\dfrac{1}{9},\end{cases}$$

解得(7.3.3)的拉格朗日对偶问题目标值为

$$z_{LD}=z_{LR}(\frac{1}{9})=-28\frac{8}{9}。$$

线性规划松弛的可行解区域为

$$S'=\left\{x\in R_+^2\left|\begin{array}{l}x_1-2x_2\ge-4,\ -4x_1-x_2\ge-16,\\ 2x_1+2x_2\ge7,\ x_1\ge2,-x_2\ge-4.\end{array}\right.\right\}$$

它的所有极点为图 7.3.1 中的 A、F、G、D 和 E，即极点是

$$\left\{(2,\frac{3}{2})^T,(2,3)^T,(\frac{28}{9},\frac{32}{9})^T,(4,0)^T,(\frac{7}{2},0)^T\right\},$$

于是最优值$z_{LP}=-7\times\dfrac{28}{9}-2\times\dfrac{32}{9}=-28\dfrac{8}{9}=z_{LD}$。验证了定理 7.3.2 的结论。□

在例 7.3.3 的条件下，

$$z_{LD}=z_{LP}=-28\frac{8}{9}\ne z_{IP}=-28,$$

但并不是说$Q'=\left\{x\in R_+^n|Bx\ge d\right\}$的某一个极点不是整数点时，不存在$z_{LD}=z_{LP}=z_{IP}$。

例 7.3.4(续例 7.3.3) 继续例 7.3.3 的讨论，将(7.3.3)中的约束$x_1-2x_2\ge-4$更改为$x_1-x_2\ge-1$，即模型为：

$$\begin{aligned} z_{IP} = \min & -7x_1 - 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 \ge -1 \\ & -4x_1 - x_2 \ge -16 \\ & 2x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ & x_1 \qquad \ge 2 \\ & \quad -x_2 \ge -4 \\ & x \in Z_+^2. \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = \min & [-(7+\lambda)x_1 - (2-\lambda)x_2] - \lambda \\ s.t. \quad & -4x_1 - x_2 \ge -16 \\ & 2x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ & x_1 \qquad \ge 2 \\ & \quad -x_2 \ge -4 \\ & x \in Z_+^2. \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

图 7.3.1 中的 A 点 $(2,\dfrac{3}{2})^T$ 是 $Q'=\left\{x \in R_+^n | Bx \ge d\right\}$ 的一个极点。与例 7.2.1 和例 7.3.3 相同的讨论，拉格朗日松弛问题(7.3.6)目标函数下降的方向从 $(\dfrac{7}{\sqrt{53}},\dfrac{2}{\sqrt{53}})^T$ 顺时针变化到

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\frac{7+\lambda}{\sqrt{53+10\lambda+2\lambda^2}},\frac{2-\lambda}{\sqrt{53+10\lambda+2\lambda^2}})^T=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})^T。$$

于是，只可能在两点$(3,4)^T$和$(4,0)^T$达到最优解。根据图中方向变化求得目标值。$(3,4)^T$和$(4,0)^T$两点的直线方程为 $y+4x=16$，它的一个垂直方向是 $(\dfrac{4}{\sqrt{17}},\dfrac{1}{\sqrt{17}})^T$。此时求解λ满足

$$(\frac{7+\lambda}{\sqrt{53+10\lambda+2\lambda^2}},\frac{2-\lambda}{\sqrt{53+10\lambda+2\lambda^2}})^T=(\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}})^T,$$

得到 $\lambda^*=\dfrac{1}{5}$。当 $0\le\lambda\le\lambda^*$ 时，最优解为$(3,4)^T$。当 $\lambda^*\le\lambda$ 时，最优解为$(4,0)^T$。于是

$$z_{LR}(\lambda)=\begin{cases} -29, & \text{当}0\le\lambda\le\dfrac{1}{5}, \\ -28-5\lambda, & \text{当}\lambda\ge\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

由此解(7.3.5)，得拉格朗日对偶问题目标值为

$$z_{LD}=z_{LR}(\frac{1}{5})=-29。$$

很容易验证 $x^*=(3,4)^T$ 为 IP 和 LP 的最优解，目标值满足 $z_{LD}=z_{LP}=z_{IP}=-29$。□

4．拉格朗日分解

拉格朗日分解(decomposition)的基本思想是：将整数规划问题 IP 改写成

$$
\begin{aligned}
z_{IP} = \min c^T x & \\
s.t.\ Ax \ge b & \\
x = y & \\
By \ge d & \\
x, y \in Z_+^n, &
\end{aligned}
\tag{7.3.7}
$$

其中，增加辅助变量 y，使得约束 $x = y$ 耦合 $Ax \ge b$ 和 $Bx \ge d$ 两组约束。采用拉格朗日松弛的方法去掉(7.3.7)中的约束 $x = y$，对任意 λ 得

$$
\begin{aligned}
& \min c^T x + \lambda^T (x - y) \\
& s.t.\ Ax \ge b \\
& \quad By \ge d \\
& \quad x, y \in Z_+^n.
\end{aligned}
\tag{7.3.8}
$$

由目标函数的线性性，(7.3.8)等价于

$$
\begin{aligned}
z_{LR1}(\lambda) = \min c^T x + \lambda^T x & \\
s.t.\ Ax \ge b & \\
x \in Z_+^n, &
\end{aligned}
\tag{7.3.9}
$$

和

$$
\begin{aligned}
z_{LR2}(\lambda) = \min -\lambda^T y & \\
s.t.\ By \ge d & \\
y \in Z_+^n. &
\end{aligned}
\tag{7.3.10}
$$

IP 问题松弛并且分解为(7.3.9)和(7.3.10)两个整数规划问题。它们每一个选 IP 的一部分约束作为自己的约束，使得每一个问题的问题规模减少。更重要的是分解的目的：寻求(7.3.9)和(7.3.10)的整数规划分解，并可以相对简单的求解。这同拉格朗日松弛的原理相同。(7.3.9)和(7.3.10)称为 IP 的拉格朗日分解。

由于拉格朗日分解是拉格朗日松弛的一种特殊情况，很容易验证

$$z_{LR1}(\lambda) + z_{LR2}(\lambda) \le z_{IP} 。$$

它的对偶问题是

$$z_{LD} = \max_{\lambda} z_{LR1}(\lambda) + z_{LR2}(\lambda) 。\tag{7.3.11}$$

有关的理论和计算同拉格朗日松弛相同。

5．增加拉格朗日松弛的约束

有时，拉格朗日松弛使得约束过于宽松，此时增加一些约束可以提高松弛后问题的计算效果。值得注意的是不能因为增加约束而使得问题的复杂性有本质的不同，即拉格朗日松弛问题从一个多项式问题转化为 NP-hard 问题。

例 7.3.5(续例 7.1.1) 当集合覆盖问题松弛所有的约束时，拉格朗日松弛问题为

$$
\begin{aligned}
z_{LRSC1}(\lambda) = \min & \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \\
s.t.\quad & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,\cdots,n, \\
& \lambda \ge 0.
\end{aligned}
\tag{7.3.12}
$$

其中

$$d_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} ,$$

最优解为

$$x_j^* = \begin{cases} 1, & \text{若} d_j \le 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

从集合覆盖问题的本身可知：任意选定一行，则非零元素对应的列被选用的行覆盖；由此，n 列中存在不超过 m 列的一个列集合（每个列只少有一个 1）覆盖 m 行。增加约束

$$1 \le \sum_{j=1}^{n} x_j \le m,$$

使得(7.3.12)变为

$$\begin{aligned} z_{LRSC2}(\lambda) = \min & \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \\ s.t. \quad & 1 \le \sum_{j=1}^{n} x_j \le m, \\ & x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,\cdots,n, \\ & \lambda \ge 0. \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

不难证明，(7.3.13)是集合覆盖 SC 的一个松弛，且对任意 $\lambda \ge 0$，有

$$z_{LRSC1}(\lambda) \le z_{LRSC2}(\lambda) \le z_{SC} \text{。} \square$$

7.4 拉格朗日松弛算法

拉格朗日松弛算法主要包括次梯度优化算法和拉格朗日松弛启发式算法。它们的两个主要应用是给出 IP 问题的下界和构造基于拉格朗日松弛的启发式算法。由前面的讨论可知，每一个λ对应的 $z_{LR}(\lambda)$ 都可以作为 IP 的下界，下界的最佳值为 z_{LD}。求解 z_{LD} 的过程采用类似非线性规划的梯度——次梯度优化算法。进一步可以将次梯度算法扩展为拉格朗日松弛启发式算法。它的两个主要步骤是：第一步是确定一个λ及求解对应 LR 的最优解 x；第二步是当 x 不是 IP 的可行解时，将其可行化。

7.4.1 次梯度优化算法

次梯度优化（Subgradient Optimization）算法的思想与非线性规划的梯度下降思想相同。拉格朗日对偶问题希望 IP 的下界 $z_{LR}(\lambda)$ 尽可能大，于是按 $z_{LR}(\lambda)$ 的上升方向渐渐逼近 z_{LD}。次梯度优化算法就是根据 $z_{LR}(\lambda)$ 本身的分段线性性而构造。

定义 7.4.1 函数 $g: R^m \to R$ 满足

$$\forall x_1, x_2 \in R^m, 0 \le \alpha \le 1: \ g(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \ge \alpha g(x^1) + (1-\alpha) g(x^2),$$

则称 g(x)为凹函数。

定理 7.4.1 若 LR 的可行解集合 Q 是有限个整数点的集合，函数

$$z_{LR}(\lambda) = \min\left\{c^T x + \lambda^T (b - Ax) | x \in Q\right\}$$

是凹函数。

证明：由于 Q 是有限个整数点的集合，记这些点为 $x^k (k = 1,2,\cdots,K)$，于是

$$z_{LR}(\lambda) = \min_{1 \le k \le K}\left\{c^T x^k + \lambda^T (b - Ax^k)\right\} \text{。}$$

记达到最优值的点为 q，则

$$z_{LR}(\lambda) = c^T x^q + \lambda^T (b - Ax^q) \text{。}$$

对 $\forall \lambda^1, \lambda^2$ 及 $\lambda = \alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2, 0 \le \alpha \le 1$，有

$$z_{LR}(\lambda)=c^Tx^q+\lambda^T(b-Ax^q)$$
$$=\alpha\left[c^Tx+(\lambda^1)^T(b-Ax^q)\right]+(1-\alpha)\left[c^Tx+(\lambda^2)^T(b-Ax^q)\right]$$
$$\geq \alpha z_{LR}(\lambda^1)+(1-\alpha)z_{LR}(\lambda^2).$$

因此，$z_{LR}(\lambda)$ 为凹函数。□

定理 7.4.2 函数 g(x) 是凹函数的充分必要条件为 $\forall x^*\in R^m$，存在 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_m)^T\in R^m$，使得

$$\forall x\in R^m{:}\,g(x^*)+s^T(x-x^*)\geq g(x)\text{。}$$

证明：“必要性”：假设 g(x) 为凹函数。对 $H=\{(x,z)|z\leq g(x)\}$ 和 $\forall(x^1,z^1),(x^2,z^2)\in H$，有

$$\alpha(x^1,z^1)+(1-\alpha)(x^2,z^2)=(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2,\alpha z^1+(1-\alpha)z^2)$$

满足

$$g(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2)\geq\alpha g(x^1)+(1-\alpha)g(x^2)\geq\alpha z^1+(1-\alpha)z^2,$$

所以，$\alpha(x^1,z^1)+(1-\alpha)(x^2,z^2)\in H$，故 H 为凸集。而 $(x^*,g(x^*))$ 是 H 的一个边界点，于是存在一个过点 $(x^*,g(x^*))$ 和由法方向 s 生成的支撑超平面 $\pi{:}\,g(x^*)+s^T(x-x^*)$ 满足

$$g(x^*)+s^T(x-x^*)\geq g(x)\text{。}$$

必要性得证。

“充分性”：$\forall x^1,x^2,0\leq\alpha\leq 1,\ x^*=\alpha x^1+(1-\alpha x^2)$，有

$$g(x^*)+s^T(x^1-x^*)\geq g(x^1),\ \ g(x^*)+s^T(x^2-x^*)\geq g(x^2),$$

进一步

$$g(x^*)+s^T(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2-x^*)\geq\alpha g(x^1)+(1-\alpha)g(x^2),$$

即

$$g(x^*)\geq\alpha g(x^1)+(1-\alpha)g(x^2)\text{。}\square$$

图 7.4.1 为定理 7.4.1 结论的一个示意图，$z_{LR}(\lambda)$ 是每一个极点达到最优的分段线性函数曲线

$$z_{LR}(\lambda)=c^Tx^q+\lambda^T(b-Ax^q)\text{。}$$

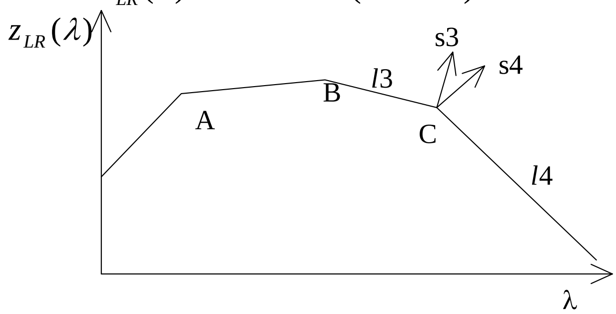

图 7.4.1 $z_{LR}(\lambda)$ 函数曲线示意图

其中，每一条直线表示最优解在某一个极点达到时的目标值。点 C 的两个方向 s3 和 s3 分别垂直于 l3 和 l4。沿 s3 和 s4 所夹部分的任何一个向量都可以作为满足定理 7.4.2 的方向而建立一个超平面。这样的方向在 $z_{LR}(\lambda)$ 可微时是唯一的，但在诸如 A、B 和 C 点时不是唯一的。光滑函数的梯度法在此不再可行。因此定义广义的梯度——次梯度(subgradient)。

定义 7.4.2 若 $g{:}\,R^m\to R$ 为凹函数，在 $x^*\in R^m$ 向量 $s\in R^m$ 满足

$$\forall x\in R^m{:}\,g(x^*)+s^T(x-x^*)\geq g(x),$$

则称 $s\in R^m$ 为 $g(x)$在 x^* 的一个次梯度。$g(x)$在 x^* 的所有次梯度组成的集合记为 $\partial g(x^*)$。

定理 7.4.3 若 $g(x)$为凹函数，x^* 为 $\max\left\{g(x)|x\in R^m\right\}$ 最优解的充分必要条件是 $0\in\partial g(x^*)$。

证明：

$$0\in\partial g(x^*)\Leftrightarrow 0(x-x^*)\ge g(x)-g(x^*),\forall x\in R^m$$
$$\Leftrightarrow g(x)\le g(x^*),\forall x\in R^m.$$ □

定理 7.4.4 设 LR 的可行解集合 Q 由有限个整数点组成，它的极点为 $x^k\,(k\in K)$，有

$$z_{LR}(\lambda^*)=\min_{k\in K}\left\{c^Tx^k+\lambda^{*T}(b-Ax^k)\right\}。$$

记

$$I=\left\{i|z_{LR}(\lambda)=c^Tx^i+\lambda^{*T}(b-Ax^i)\right\},\tag{7.4.1}$$

则对任选 $i\in I$，

$$s^i=b-Ax^i\tag{7.4.2}$$

为 $z_{LR}(\lambda)$ 在 λ^* 点的一个次梯度。且

$$\left\{s|s=\sum_{i\in I}\alpha_is^i,\sum_{i\in I}\alpha_i=1,\alpha_i\ge 0\right\}\in\partial g(\lambda^*),$$

即所有 I 中的满足(7.4.2)的方向凸组合形成 λ^* 点的次梯度子集合。

证明：若 s^i 如(7.4.2)得到，再由(7.4.1)推导出

$$\begin{aligned}(s^i)^T(\lambda-\lambda^*)&=\lambda^T(b-Ax^i)-\lambda^{*T}(b-Ax^i)\\&=c^Tx^i+\lambda^T(b-Ax^i)-\left[c^Tx^i+\lambda^{*T}(b-Ax^i)\right]\\&\ge z_{LR}(\lambda)-z_{LR}(\lambda^*).\end{aligned}$$

所以，(7.4.2)定义的 s^i 为一个次梯度。

类似方法可以得到所有 I 中的满足(7.4.2)的方向凸组合形成 λ 点的次梯度子集合。□

由定理 7.4.1 有关 $z_{LR}(\lambda)$ 的凹性和借助图 7.4.1，若 λ^* 不是 $z_{LR}(\lambda)$ 的最大值点，相交的两个达到目标值的平面 $\pi_1{:}c^Tx^i+\lambda^T(b-Ax^i)(\lambda\in D_1)$ 和 $\pi_2{:}c^Tx^j+\lambda^T(b-Ax^j)(\lambda\in D_2)$ 满足 $\lambda^*\in D_1\cap D_2$，且两个平面的法方向交角不超过 90 度，也就是 $\partial z_{LR}(\lambda^*)$ 内的所有次梯度方向夹角不超过 90 度。

定理 7.4.1 推出 $z_{LR}(\lambda)$ 是凹函数。由凹函数的特性，知 $z_{LR}(\lambda)$ 在定义域内的任何一个开集内是连续函数。当 λ^* 是光滑点时，由定理 7.4.1 和定理 7.4.4 知次梯度唯一，是函数 $z_{LR}(\lambda)$ 的梯度方向，因此沿此梯度方向上升最快。在 λ^* 的一个邻域内 $z_{LR}(\lambda)$ 沿此方向上升。

当 λ^* 不是光滑点时，由 $z_{LR}(\lambda)$ 的连续性和(7.4.1)和(7.4.2)，在 λ^* 的一个邻域内 $\lambda=\max\left\{\lambda^*+\theta\ s^i,0\right\}$ 时，其中θ是一个充分小的正数，存在 $j\in I$，使得目标函数

$$z_{LR}(\lambda)=c^Tx^j+\lambda^T(b-Ax^j),$$

于是，由 $\partial z_{LR}(\lambda^*)$ 内的所有次梯度方向夹角不超过 90 度的结论，得到

$$z_{LR}(\lambda)-z_{LR}(\lambda^*)=(\lambda-\lambda^*)^T(b-Ax^j)\ge\theta(b-Ax^i)^T(b-Ax^j)\ge 0,\forall i\in I。$$

上面的讨论已经提示如何构造拉格朗日松弛算法，使得 $z_{LR}(\lambda)$ 逐步上升。基本步骤是：对给定的 λ^* 计算 $z_{LR}(\lambda^*)$；由(7.4.1)和(7.4.2)计算 λ^* 的一个次梯度，若次梯度满足定理 7.4.3 的充分性则达到最优解；否则以这个次梯度寻求 $z_{LR}(\lambda)$ 上升的方向。总结为算法：

次梯度优化算法

STEP1 任选一个初始拉格朗日乘子 λ^1，t=1；

STEP2 对 λ^t，从 $\partial g(\lambda^t)$ 中任选一个次梯度 s^t；若 s^t=0，则 λ^t 达到最优解而停止计算；否则 $\lambda^{t+1} = \max\left\{\lambda^t + \theta_t s^t, 0\right\}$，$t$：=$t$+1，重复 STEP2。

在 STEP2 中，θ_t 满足

$$\sum_{t=1}^{\infty}\theta_t = \infty,\ \text{且}\theta_t \to 0, t\to\infty\text{。} \tag{7.4.3}$$

(7.4.3)是拉格朗日对偶问题收敛的理论结果[3]。由次梯度优化算法可知，$z_{LR}(\lambda)$ 是一个凹函数，代替光滑函数的梯度上升法，它是一个次梯度上升算法。也就有非线性规划收敛的理论结果(7.4.3)。实际计算中，不可能如同(7.4.3)那样迭代无穷多次，因此产生多样的确定 θ_t 的方法和具体执行次梯度优化算法的技术问题。下面就主要的问题分类讨论。

1. θ_t 的选取。

实际计算的目的是尽快得到一个可以接受的下界或是对已经得到的一个解可行化，无论如何，常常采用启发式的方法。其中一类方法是

$$\theta_t = \theta_0\rho^t,\ \ 0<\rho<1\text{。} \tag{7.4.4}$$

这类方法使 θ_t 以指数速度下降，因此迭代次数较少。另一类方法是

$$\theta_t = \frac{z_{UP}(t) - z_{LB}(t)}{\|s^t\|^2}\beta_t, \tag{7.4.5}$$

其中，$0\le\beta_t\le 2$，一般取 $\beta_0 = 2$。当 $z_{LR}(\lambda)$ 上升时，β_t 不变，当 $z_{LR}(\lambda)$ 在给定的若干步没有变化时，则取其一半。(7.4.5)中的 $z_{UP}(t)$ 为 IP 最优目标值的一个上界。可以用一个可行解的目标值确定，也可以通过估计的方法得到。$z_{UP}(t)$ 可随 t 的变化而逐步修正。$z_{LB}(t)$ 是 $z_{LR}(\lambda^t)$ 的一个下界，一般选取 $z_{LB}(t) = z_{LR}(\lambda^t)$，但有时为了计算简单，只取一个固定值。(7.4.5)的主要思想是用 $z_{UP}(t) - z_{LB}(t)$ 修正变化的速度。

2. 停止原则

（1）迭代次数不超过 T。这是一种最为简单的原则。无论解的质量如何，到达迭代步数则停止。由此很容易控制计算的复杂性，但解的质量无法保证。

（2）$s^t = 0 \in \partial z_{LR}(\lambda^t)$。这是最为理想的状态，由定理 7.4.3，$\lambda^t$ 达到拉格朗日对偶问题的最优解。在实际计算中，由于问题的复杂性和计算机本身的计算误差，这样的结果较难达到，常常用 $\|s^t\|\le\varepsilon$（ε为给定的非负数）来代替。

（3）$z_{UP}(t) = z_{LB}(t)$。在 $z_{UP}(t)$和$z_{LB}(t)$ 可变时，这种情况表示已得到 IP 的最优解，最优值为 $z_{IP} = z_{UP}(t) = z_{LB}(t)$。

（4）λ^t 或目标值 $z_{LR}(\lambda^t)$ 在规定的步数内变化不超过一个给定的值。这时认为目标值不可能再变化，因此，停止运算。

具体应用中，可以采用以上停止原则之一，也可以综合运用。

7.4.2 拉格朗日启发式算法

拉格朗日松弛的一个主要工作是提供 IP 的一个下界。LR 问题的一个比较好的下界所对应的解也应该同 IP 的最优解相近。在这样的逻辑下，产生了拉格朗日启发式算法。拉格朗日松弛启发式算法主要包含两个部分。第一部分就是拉格朗日的次梯度优化计算。由于第一部分得到的 LR 的解不一定为 IP 的可行解，第二部分就是对第一部分得到的解可行化。

例 7.4.1 假设集合覆盖 SC 问题通过拉格朗日松弛得到一个解 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，当 x 不是 SC 问题的一个可行解时，即存在 i 使得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

时，一个直观的可行化方法是：求 k 满足

$$c_k = \min_{1 \le j \le n} \left\{ c_j \mid a_{ij} = 1 \right\},$$

使得 $x_k = 1$。

重复以上的判别和计算直至所有的行被覆盖。这样得到的算法是基于拉格朗日松弛的启发式算法。所得的解为可行解。□

拉格朗日松弛启发式算法总结为：

第一阶段：次梯度优化。由启发式算法的特性，次梯度优化时不一定要求得到 z_{LD}，这样有很多基于次梯度优化的启发式方法。

第二阶段：可行化。在 LR 的解不可行时，对其可行化。

系数修正法就是拉格朗日松弛启发式算法的一种形式。在给以 λ^0 后，类似次梯度优化算法，系统地调整拉格朗日系数，以改进 LR 的下界。这一方法的优点是计算量较次梯度优化少且每一步使 LR 的下界上升。它的缺点是所得的下界可能比较差，修正的方法依赖于问题本身。我们先从下面的示例了解系数修正法。

例 7.4.2 对集合覆盖问题

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ s.t.\ & x_1 + x_3 \ge 1 \\ & x_1 + x_4 \ge 1 \\ & x_2 + x_3 + x_4 \ge 1 \\ & x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

假设 $\lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 1.6, \lambda_3 = 2.2$.

$$\begin{aligned} z_{LR}(\lambda) = \min\{-1.1x_1 + 0.8x_2 + 0.3x_3 + 1.2x_4\} + 5.3 \\ s.t. \qquad x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

$z_{LR}(\lambda)$ 的最优解为 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0, z_{LR}(\lambda) = 4.2$。

第三行没有被覆盖，在可覆盖第三行中选费用最小列

$$\delta = \min\{0.8, 0.3, 1.2\} = 0.3,$$

替代

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.6 \\ 2.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.6 \\ 2.5 \end{pmatrix},$$

得到

$$z_{LR}(\lambda) = \min\{-1.1x_1 + 0.5x_2 + 0.9x_4\} + 5.6 = 4.5。$$

LR 的最优解为 $x_1 = x_3 = 1, x_2 = x_4 = 0$。用算法表示为

STEP0 初始化 λ^0，t=0；

STEP2 计算 $z_{LR}(\lambda^t)$；

STEP3 若所有行被覆盖，停止计算；否则，记 $s_i = 1$ 表示第 i 行没有被覆盖，在没有被覆盖的行中任选一个行 k，计算

$$\delta_k = \min\{d_j \mid a_{kj} = 1, s_k = 1\},$$

其中 $d_j = c_j - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l$；

STEP4 $\lambda_i^{t+1}=\begin{cases}\lambda_k^t+\delta_k, i=k,\\ \lambda_i^t, \quad i\neq k,\end{cases}$ t=t+1,返回 STEP2。

例 7.4.2 不同于次梯度优化算法是迭代步长取为 1。因此它是一种启发式的算法。□

7.5 拉格朗日松弛在能力约束单机排序问题中的应用

柔性制造单元的排序问题是约束单机排序问题的一类，其特点是生产的多样性以满足市场的不同需求，但受生产能力的限制，必须对其生产进行调度，以期达到最优的生产效益。加之每一个顾客对产品的需求量、完成时间等的要求不尽相同，因此我们提出一个加权目标的可拆分约束单机排序问题[4]。

本节首先建立了一个加权目标约束单机排序问题的数学模型，并证明了该问题为 NP-hard，然后给出一个简单的启发式算法和一个拉格朗日松弛算法并研究其最优解的性质。最后，对这两个算法的计算结果进行了对比分析。

假设 n 种产品的外部需求为{ d_i, i=1,2,...,n}。加权目标约束单机排序问题的数学模型(WCS)(Weighted Capacitated Single machine scheduling)如下：

$$Z=\min\sum_{i=1}^{n}w_iT_i \tag{7.5.1}$$

$$s.t. \quad \sum_{t=1}^{T_i}x_{it}=d_i, \quad i=1,2,\cdots,n, \tag{7.5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{a_ix_{it}+s_iY_{it}\}\le c_t, t=1,2,\cdots,\max\{T_i|i=1,2,\cdots,n\}, \tag{7.5.3}$$

$$Y_{it}=\begin{cases}1, & 若 x_{it}>0,\\ 0, & 其它,\end{cases} \quad T_i=\max\{t|x_{it}>0\}, i=1,2,\cdots,n; t=1,2,\cdots, \tag{7.5.4}$$

$$x_{it}\ge 0, i=1,2,\cdots,n; t=1,2,\cdots, \tag{7.5.5}$$

其中，w_i： 产品 i 的权因子，T_i：完成需求 d_i 所需的时段，x_{it}：时段 t 产品 i 的生产批量，a_i：产品 i 的单位产品所占用的能力，s_i：产品 i 的生产准备所占用的能力，c_t：t 时段的可供能力总量。

模型 WCS 中，x_{it}，Y_{it}，T_i 为变量，x_{it} 为决策变量，决定每一产品在各时段的生产批量，Y_{it} 和 T_i 为 x_{it} 的应变量，由(7.5.4)式表示。(7.5.1)为目标函数，使完成所有需求 d_i (i=1, 2, ..., n)所需的时段的加权平均值最小，该目标函数中的权因子是基于用户对产品需求的紧迫性、重要性等因素来决定的。(7.5.2)表示总产量与总需求平衡。(7.5.3)为能力约束方程。由(7.5.4)可以看出，WCS 是一个非线性的混合整数规划问题。

定理7.5.1 WCS的问题复杂性为强NP-hard。

证明: 定义一个 3-partition 问题为：3T 个元素满足

$$\frac{D}{4}<d_i<\frac{D}{2}, i=1,2,\cdots,3T, \quad \sum_{i=1}^{3T}d_i=TD,$$

是否能将上面 3T 个元素划分成 T 部分，使得每部分包含三个元素且三元素之和为 D?

按下列条件构造一个判定问题：对给定 T，在 WCS 中，设 w_i=1，a_i=1，s_i=A>D>0，产品需求为 $d_i, i=1,2,\cdots,n$。它们满足。

$$n=3T, \quad \sum_{i=1}^{3T}d_i=TD, \quad \frac{D}{4}<d_i<\frac{D}{2}, \quad c_t=D+3A, D>0。$$

是否有

$$\sum_{i=1}^{n} w_i T_i \le \frac{3}{2}(1+T)T \text{ ?} \tag{7.5.6}$$

首先，非常容易验证 3-partition问题的任何一个“是”实例是WCS判定问题的一个“是”实例。因为每一时段的能力约束为D+3A，所以最多可以生产 3 种产品。又n=3T，d_i>0，由(7.5.6)，必须在T时段内完成所有的产品加工，这样在T时段内每一时段正好生产 3 个产品，且不允许任一产品拆分，因为任何一个产品拆分必增加一个生产准备占用。于是，WCS的一个“是”实例是 3-partition问题的一个“是”实例。反之，对WCS判定问题的任何一个“是”实例，由它的条件，限定每个时段能且只能生产三个产品，还必须在T个时段内完成。由此证明 3-partition问题多项式转换为WCS的判定问题。已知 3-partition问题是强NP-C[2]，于是该WCS判定问题为强NP-C，因此，优化问题WCS为强NP-hard。□

下面构造一个简单而直观的算法。该算法的基本思想是将{w_i, i=1, 2, ..., n}中较大权数所对应产品尽可能早的完成，以达到目标(7.5.1)最小。

算法 A

STEP0 S=∅，U={1, 2, ..., n}。从第一个时段 t=1 开始；

STEP1 当$U \ne \varnothing$时，w_{i*}=max{w_i | i∈ U}，依时段 t 能力约束(7.5.3)情况将 i*尽可能往前安排直到d_{i*}全部生产。可能出现下几种情况：

a) 若 i*的全部需求d_{i*}没有全部生产，且时段 t 的能力足以满足产品 i* 的生产准备占用，则以 t 时段的最大余能力生产产品 i*，产品 i*的未能加工部分到 t +1 时段生产，t=t+1，返回 STEP1。

b) 若 i*的全部需求d_{i*}已全部生产，则 S=S+{i*}。当 S={1, 2, ..., n}时，停止，否则 U=U-S，返回 STEP1。

c) 若 i*的全部需求d_{i*}没有全部生产，且无法在该时段生产，则 U=U-{i*}，返回 STEP1。

STEP2　若 U= ∅，S≠ {1, 2, ..., n}，则 t=t+1，U={1, 2, ..., n}-S，返回 STEP1。

这一算法实际是一种贪婪算法。从直观看，这一算法同背包问题的贪婪算法非常相象。不同的是，WCS 要求所有的外部需求都得完成，而背包问题中在能力不够时，某些物品可以不装。下例表明算法 A 的最坏界为无限。

例7.5.1 设产品数n=6，生产准备占用能力s_i=5 (i=1, 2, ..., 6)，单位产品占用能力a_i=1 (i=1, ..., 6)，其他系数如下：

w_1=1.05, w_2=1.04, w_3=1.03, w_4=1.02, w_5=1.01, w_6=1.00,

d_1=6，d_2=5，d_3=4，d_4=3，d_5=2，d_6=1, c_1=25, c_2=26, $c_t=5+\dfrac{1}{2^{t-2}}$ (t>2)。

由算法 A 计算得：在 T=1 时段，生产d_1=6，d_2=5，能力结余 4，因为s_i=5(i=1, ⋯, 6)，所以无法再安排其他生产。在 T=2，生产d_3=4，d_4=3，d_5=2，能力还余 2。同 T=1 相同的道理，d_6=1 只能在 t > 2 的时段安排。因s_i=5，$\sum_{t=3}^{\infty}\dfrac{1}{2^{t-2}}=1$，故有$d_6$=1 的完成期$T_6 \to +\infty$。从例中所给系数可以安排生产计划，在 T=1 和 T=2 两个时段完成所有的外部需求。如 T=1 时生产d_2=5、d_4=3、d_5=2，T=2 时生产d_1=6、d_3=4、d_6=1。因此，算法 A 在最坏情况下无界。□

在给出拉格朗日松弛算法之前，先研究 WCS 的拉格朗日松弛理论。从 WCS 的模型中可以看出，能力约束(7.5.3)将各产品联系在一起，因此对约束(7.5.3)进行拉格朗日松弛。因T_i是一个变量，是目标函数中需要优化的变量，而拉格朗日乘子的维数为T=$\max\{T_i | i=1,2,\cdots,n\}$，是一个变量。技术处理的方法是假设 T 充分大，即认为产品可以

在有限的时段内加工完成。

对于充分大的 T，拉格朗日松弛后的数学模型 LRP 是：

LRP

$$Z = \max_{\lambda} Z(\lambda)$$
$$= \max_{\lambda} \min_{X} \{\sum_{i=1}^{n} w_i T_i + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \{\sum_{i=1}^{n} [a_i x_{it} + s_i Y_{it}] - c_t\}\}$$

s.t.　(7.5.2), (7.5.4), (7.5.5)和 $\lambda_t \geq 0$。

其中，$X=(x_{it})_{n\times T}$，一个 $n\times T$ 的变量矩阵，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_T)$。

由于松弛了(7.5.3)，(7.5.2)、(7.5.4)和(7.5.5)所决定的模型LRP是无能力约束的单机排序问题，对给定充分大的T，各产品的完工时间都可在T时段内完成，即$1\leq T_i \leq T$。因拉格朗日松弛后目标函数的惩罚性，使得T ($1\leq T_i \leq T$)在一个充分大的范围内取值。在技术处理LRP时，T可以从1逐步增加。对给定的T，等价于当$t>T$取 $\lambda_t = 0$。

记

$$g(X,T,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} w_i T_i + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \{\sum_{i=1}^{n} [a_i x_{it} + s_i Y_{it}] - c_t\}, \tag{7.5.7}$$

则(7.5.7)可以改写为下列形式：

$$g(X,T,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} [w_i T_i + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t a_i x_{it} + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t s_i Y_{it}] - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_t, \tag{7.5.8}$$

再记

$$h(i,X,T,\lambda) = w_i T_i + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t a_i x_{it} + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t s_i Y_{it}, \tag{7.5.9}$$

由(7.5.7)，(7.5.8)和(7.5.9)可推出

$$\max_{\lambda} Z(\lambda) = \max_{\lambda} \min_{X} \{\sum_{i=1}^{n} w_i T_i + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \{\sum_{i=1}^{n} [a_i x_{it} + s_i Y_{it}] - c_t\}\}$$
$$= \max_{\lambda} \min_{X} g(X,T,\lambda)$$
$$= \max_{\lambda} \{\sum_{i=1}^{n} \min_{X} h(i,X,T,\lambda) - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_t\}。$$

LRP 可以表示如下：

$$Z = \max_{\lambda} \{\sum_{i=1}^{n} \min_{X} h(i,X,T,\lambda) - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_t\} \tag{7.5.10}$$

s.t.　(7.5.2), (7.5.4), (7.5.5)和 $\lambda_t \geq 0$。

求解 LRP 就可分成两步。首先，当 $\lambda \geqslant 0$ 为定数时求解下子问题：

SUBP

$$\min_{X} h(i,X,T,\lambda) = \min_{X} \{w_i T_i + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t a_i x_{it} + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t s_i Y_{it}\} \tag{7.5.11}$$

s.t. (7.5.2)，(7.5.4)和(7.5.5)，

得

$$Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \min_{X} h(i,X,T,\lambda) - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t c_t, \tag{7.5.12}$$

而后，再从所有的 $\lambda \geq 0$ 中对(7.5.12)求最大值。

定理 7.5.2 对给定充分大的 T，若 λ_t (t=1,2,...,T)已知且非负，则 SUBP 一定有下列形式的最优解，

$$x_{it}=\begin{cases}d_i, & 存在某一t^*,0\le t=t^*\le T,\\ 0, & t\ne t^*。\end{cases}$$

证明 设 x_{it}^* (t=1,2,...,T)为 SUBP 的最优解。设 $t=t_1$，t_2，…，t_m 时，$x_{it}^*>0$。令 λ_{t^*}=min{λ_t | x_{it} >0}。根据(7.5.11)，很易得

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{T}\lambda_t a_i x_{it}+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t s_i Y_{it}\\ &\ge \lambda_{t^*}a_i d_i+\lambda_{t^*}s_i Y_{it^*}\\ &\ge \lambda_{t^*}a_i d_i+\lambda_{t^*}s_i,\end{aligned}$$

且由 $w_i T_i\ge w_i t^*$，推出，

$$x_{it}^{**}=\begin{cases}d_i, & t=t^*,\\ 0, & t\ne t^*,\end{cases}$$

为最优解。结论得证。文中后续的拉格朗日算法正是基于此结论，逐步迭代逼近最优解。□

由定理 7.5.2，求解 SUBP 的最优解只需判断

$$\begin{aligned}&w_i t^*+\lambda_{t^*}\{a_i d_i+s_i\}\\ &\le w_i t+\lambda_t\{a_i d_i+s_i\},\qquad 0\le\forall t\le T。\end{aligned}\tag{7.5.13}$$

计算出(7.5.13)的 t^*最多需要 T^2 次比较，所以当 λ 确定时，求 SUBP 的最优解相当容易。此时，可得到{ x_{it}，Y_{it}，i=1, 2, ..., n，t=1, 2, ..., T}。我们还必须求解 λ 使得 $Z(\lambda)$接近或等于 Z。当 $X=\{x_{it}|i=1,2,\cdots,n;t=1,2,\cdots,T\}$ 为满足(7.5.13)的最优解时，下列向量 $v(X)$=(v(1, X), v(2, X) , ...,v(T, X))

$$v(t,X)=\{\sum_{i=1}^{n}[a_i x_{it}+s_i Y_{it}]-c_t\}^+,\qquad t=1,2,\cdots,T,\tag{7.5.14}$$

为 LRP 满足(7.4.2)的次梯度(练习题)，其中，$x^+=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

采用(7.4.5)的迭代步长法和以下两条判停准则：

(1) 给定迭代步数上限；

(2) 给定充分小的 ε >0，$\sum_{t=1}^{T}v^2(t,X^k)<\varepsilon$ 时。

由拉格朗日松弛判停后，所得到的解 X 不一定是 WCS 的可行解。当为 WCS 的不可行解时，需进行解的可行性修改。修改的原则是，若时段 t 的排序超过其能力，尽量将权数大的所对应的产品前移到尚有余能力的时段生产。若前移不行，则尽可能将权数小的产品后移至有能力余量的一个时段生产，以达解的可行。若前两方案都达不到可行解，则以再增加时段来完成。

算法 B

STEP0 T=1，$\lambda^0(1)=0$，Z^*为算法 A 求得的目标值，k=0。

STEP1 解 SUBP，以(7.5.13)分别求出 SUBP 中每一产品的最优解，再以(7.5.14)求次梯度 $v(X)$，最后由(7.4.5)求解 θ_k，$\lambda^{k+1}=\max\{0,\lambda^k+\theta_t v(X)\}$。若不满足判停准则，

(i) 当 $\lambda^{k+1}(T)=0$ 时，k=k+1，返回 STEP1；

(ii) 当 $\lambda^{k+1}(T)>0$ 时，T=T+1，$\lambda^{k+1}(T)=0$，k=k+1， 返回 STEP1；若满足判停准则，

到 STEP2。

STEP2 若所求解为 WCS 的可行解，停止。否则，按上面讨论进行可行性处理。

以上算法在 PC-386 采用 Turbo C 编程，分别就 n=30 个产品，将产品需求分为四类，每类各产生 10 个正态分布的数据文件，其正态分布的均值和方差见表 7.5.1。每一时段的能力约束分别为 w_i 与 s_i 均值之和的 1，2，4，6 倍，a_i 都取 1。因此，由四类产品需求及四类能力约束的组合，共 16 组。每组 10 个数据文件，共 160 个数据文件进行验证。

表 7.5.1 数据分类

项目	均值	方差	项目	均值	方差
权因子 w	50	10	产品需求 2	10	2
生产准备 s	10	2	产品需求 3	40	10
产品需求 1	5	1	产品需求 4	100	10

计算中，拉格朗日松弛的判停迭代次数为 200 次，ε=0.01。计算结果见表 7.5.2，其中，比例(a ：b)为能力约束与 s_i 和 d_i 两项均值和的比，Z_A 为算法 A 的计算结果，Z_{LB} 为算法 B 的拉格朗日松弛下界，Z_B 为算法 B 可行化后的最终结果。表中 Z_A，Z_B，Z_{LB} 为对应 10 个数据文件计算结果的平均值，GAP1 和 GAP2 按如下定义

$$GAP1 = \frac{Z_B - Z_{LB}}{Z_{LB}}, \qquad GAP2 = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_{LB}}。$$

表 7.5.2 计算结果的平均值

组数(比例)	Z_A	Z_{LB}	Z_B	GAP1	GAP2
1 (1:1)	35047.40	20322.76	31008.30	0.53	0.27
2 (1:1)	32969.50	20167.81	34853.10	0.73	-0.15
3 (1:1)	25631.60	19267.57	32511.30	0.69	-1.08
4 (1:1)	25018.20	20249.87	28256.20	0.40	-1.89
5 (2:1)	13987.60	10440.72	13747.10	0.32	0.07
6 (2:1)	13073.20	10430.44	13644.60	0.31	-0.22
7 (2:1)	11943.60	10195.26	11924.10	0.17	0.01
8 (2:1)	11383.80	10527.58	11382.20	0.08	0.00
9 (4:1)	6504.60	5646.47	6246.80	0.11	0.30
10 (4:1)	6361.10	5655.45	6247.40	0.10	0.16
11 (4:1)	6100.40	5518.72	5915.40	0.07	0.32
12 (4:1)	6016.90	5675.72	5837.60	0.03	0.53
13 (6:1)	4406.00	4045.23	4309.20	0.07	0.27
14 (6:1)	4376.70	4047.10	4380.80	0.08	0
15 (6:1)	4303.90	3957.02	4188.80	0.06	0.33
16 (6:1)	4255.90	4054.58	4224.00	0.04	0.16

从计算结果可以看出，当每一时段能力平均意义下只能完成一个或两个产品时(1:1 或 2:1 部分)，算法 A 的结果比较好，八组中，有四组结果好于算法 B，一组相同，三组次于算法 B，从直观解释，此时可根据权因子大小排序。但当每时段可完成多类产品时，算法 B 的结果好于算法 A，八组都不次于算法 A，特别是第十二组差值高达 0.53。同时还可以看出，当每时段可完成产品数越多时，拉格朗日松弛算法所得下界 Z_{LB} 和 B 的相对误差变得越小。从计算结果综合来说，拉格朗日松弛算法对能力约束单机排序问题是比较适用的。

练习题

1. 证明：(7.5.14)是 LRP 满足(7.4.2)的次梯度。
2. 与松弛相对应的一个概念是限制。整数规划 IP 的一个限制问题

$$z_R = \min\{z_R(x) | x \in S_r\}$$

满足(a) $S_R \subseteq S = \left\{x \in Z_+^n | Ax \ge b, Bx \ge d\right\}$，(b) $z_R(x) \ge cx$。

(i) 通过什么样的处理方法可以实现 IP 的限制？

(ii) 能得到怎样的结论？

3. 整数规划问题

$$\min 7x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$s.t.\ \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_3 \ge b$$
$$x \in Z_+^3.$$

分别用图解的方法就下面条件求上面整数规划问题的拉格朗日对偶最优值。

(i) $b = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$时，拉格朗日松弛第一个约束；

(ii) $b = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$时，拉格朗日松弛第二个约束的值；

(iii) (i)和(ii)的值是否有差别？b 为多少时，(i)和(ii)的值相等且与上面整数规划的目标值相？

4. 整数规划问题

$$\max 2x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\ \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}x_2 \le \begin{pmatrix}28\\27\\1\end{pmatrix}$$
$$x \in Z_+^2.$$

对上面整数规划问题按下面各条件分别讨论：

(i) 证明：采用拉格朗日松弛上面整数规划中的任何两个约束，则拉格朗日对偶值等于上面整数规划的线性规划松弛的最优值。

(ii) 寻找一个目标函数使得(i)不成立。

(iii) 证明：拉格朗日松弛任何一个约束的拉格朗日对偶值都是线性规划松弛的改进。

(iv) 将(i)-(iv)用图解法表示出来。

5. 就下面整数规划问题分别松弛两个约束的两种拉格朗日松弛方法

$$\max \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$
$$s.t.\ \sum_j x_{ij} \le 1,\ \ i \in M$$
$$\sum_i l_i x_{ij} \le b_j\ \ j \in N$$
$$x \in \{0,1\}^{|M|\times|N|}.$$

比较它们在下面个方面的优劣势：

(i) 松弛后的子问题是否容易求解？

(ii) 拉格朗日对偶是否容易求解？

(iii) 拉格朗日对偶值的优劣？

6. 就下面整数规划问题分别松弛两个约束的两种拉格朗日松弛方法

$$
\begin{aligned}
\min & \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} h_{ij} y_{ij} + \sum_{j\in N} c_j x_j \\
s.t. & \sum_j y_{ij} \le a_i, \ i \in M \\
& \sum_i y_{ij} \le b_j x_j, \ j \in N \\
& y_{ij} \le \min(a_i, b_j) x_j, \ i \in M, j \in N \\
& y \in R_+^{mn}, x \in \{0,1\}^{|N|}.
\end{aligned}
$$

讨论拉格朗日松弛各种约束的优劣性。

7. 考虑无约束单机排序问题：n 个工件在一台机器上加工，p_j、r_j 和 w_j 分别是工件 j 的加工时间、最早开工时间和权数。这些是已知参数。记 t_j 为工件 j 的开工时间。极小化加权开工时间的单机排序问题，使 $\sum_{1\le j\le n} w_j t_j$ 最小。若没有最早开工时间的限制，即所有 r_j=0，最优加工顺序是按 $\frac{w_j}{p_j}(j=1,2,\cdots,n)$ 从大到小加工。如何建立这个问题的数学模型和进行拉格朗日松弛以得到问题的一个下界？

8. 考虑第四章 4.6 节的生产批量问题，怎样应用拉格朗日松弛得到问题的一个下界？怎样构造一个基于拉格朗日松弛的启发式算法，以得到问题的一个可行解？

9. 通过数值计算的方法验证对练习 7 的分析结果。

10. 就关心的组合优化问题应用拉格朗日松弛算法。

参考文献

1. Khachian L G. A polynonial algorithm for linear programming. Doklady Akad. Nauk USSR, 1979, 244(5):1093~1096

2. Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractibility: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, 1979

3. Fisher M L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems, Management Science, 1981, 27(1):1~18

4. Xing W, Zhang J, Jiang Q et al. Capacitated single flexible manufacturing cell with setups: model, complexity and Lagrangean relaxation. In: Ding-Zhu Du et al ed. Operations Research and Its Applications. 1995, 162~170