杂题选讲

By AzusaCat

2020.10.6

题目很水，大家应该很快就可以切掉。

AGC044D Guess the Password

这是一道交互题。

你有一个长度不超过 128 的密码 S，由大写、小写英文字母和数字构成。

你现在可以询问交互库不超过 850 次，每次可以询问一个串 T，交互库将返回 S 与 T 的编辑距离。

你需要猜出 S（你一开始不知道 S 的长度）。

我们不难发现，如果 T 是 S 的子序列，则编辑距离为 $|S|-|T|$。

我们考虑先计算出 S 中每种字符有多少个，我们只需要询问一次长为 128 的全为某个字符的串，如果该字符在 S 中出现了 x 次，则编辑距离为 $128-x$。

我们假设现在有两个字符串 T_1, T_2，它们的字符集不相交且两个串都是 S 的子序列，则我们可以通过归并用 $O(|T_1| + |T_2|)$ 的询问次数合并成一个新的字符串。

所以我们分治计算，设 `solve(l,r)` 表示返回字符集在 $[l, r]$ 内的最长子序列，当 $l = r$ 时之前已经知道有多少个字符 l 直接返回即可。

总询问次数 $O(L \log_2 |\Sigma|)$。

CF627E Orchestra

在一个 $r \times c$ 的矩阵中有 n 个点，问有多少个连续子矩阵至少包含 k 个点。

$r, c, n \leqslant 3000$，$k \leqslant 10$。

我们先考虑暴力怎么做：我们可以枚举上下边界，然后横着扫一遍，这样的复杂度是 $O(r^3)$（默认 r, c 同阶）的。

我们注意到 n, k 都比较小，是否可以从这里入手?

我们这次先枚举上边界 i，然后我们让下边界 j 扫一遍，同时计算出每个 (i,j) 的答案。

我们考虑确定上下边界后某一个右边界的贡献，如果其左边第 k 个点的坐标为 (x,y)，则贡献为 x。

我们反过来考虑计算点的贡献，设 cnt_i 表示以点 i 为左边第 k 个点的右边界个数，那么答案就是 $\sum cnt_i x_i$。

然后我们考虑删除一个点以后 cnt 的变化，画画图可以发现就是左边 k 个点的 cnt 都向左移了一位（就是 $cnt'_i = cnt_{i+1}$）。

这个我们可以使用双向链表维护，总复杂度 $O(rnk+r^2)$。

有一些细节（横坐标相等怎么办），可以看代码。

AGC044E Random Pawn

给你一个长为 n 的环，你初始随机在某个位置，如果你在点 i，那么你可以结束游戏并获得 A_i 的收益，或者花费 B_i 的代价等概率移到左右两个点之一，问最优决策下的期望收益。$n \leqslant 200000$。

首先我们发现，如果走到了环上的最大值，则一定会停止，所以我们可以在最大值处破环为链（令 0 和 n 都为最大值）。

令 E_i 为从 i 开始的期望收益，那么我们现在也可以写出转移：

$$E_i = \max(A_i, \frac{E_{i-1} + E_{i+1}}{2} - B_i)$$

我们考虑这个题的一个弱化版：$B_i = 0$（这时我们不保证序列两端是最大值），则我们有：

$$E_i = \max(\frac{E_{i-1} + E_{i+1}}{2}, A_i)$$

那么我们有以下结论：点集 $\{(i, E_i)\}$ 在点集 $\{(i, A_i)\} \cup \{(0, 0), (n+1, 0)\}$ 所构成的凸包上。

我们不难发现 E_i 等于 (i, A_i) 和经过 $(i-1, E_{i-1})$ 与 $(i+1, E_{i+1})$ 两点的直线在 $x = i$ 出的纵坐标的较大值，则其一定是凸的；同时不难发现，$\{(i, A_i)\} \cup \{(0,0),(n+1,0)\}$ 构成的凸包一定满足上述条件。

下面我们证明这样的点集是唯一的。为此我们扩展一下状态：给定平面中 n 个点 (x_i, y_i) 和点 $(x_0, f_0), (x_{n+1}, f_{n+1})$，满足 x_i 互不相同且从小到大排列。设$f_i = \max(y_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} f_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} f_{i+1})$，从图形意义上依旧是相邻的两个点形成直线和给定点的较高点。则我们只需要证明 $\{(x_i, f_i)\}$ 的每一个顶点都是给定点集中的点。我们考虑归纳证明。

当 $n = 1$ 时显然成立。

当 $n > 1$ 时，考虑任意添加最后一个点，如果其在前 $n + 1$ 个点形成的凸包内部，则继续；反之新形成的凸包一定由原凸包上点的子集和新加入的点组成。这样一定不会有不属于原点集的点。

所以我们只需要维护给定点集的凸包，由于横坐标还是顺序给出的，所以可以线性解决。

对了，这道题就是「USACO18DEC」Balance Beam P（Orz zzz 早就切了）。

让我们回到这道题，$B_i \neq 0$ 怎么办。

如果没有 B_i，那刚才已经说完了，我们现在考虑把 B_i 消掉。

我们尝试构造一个数列 $\{C_n\}$，那么有

$$E_i - C_i = \max(A_i - C_i, \frac{E_{i-1} - C_{i-1} + E_{i+1} - C_{i+1}}{2} + \frac{C_{i-1} + C_{i+1}}{2} - B_i - C_i)$$

如果我们的 $\{C_n\}$ 能让 $\frac{C_{i-1} + C_{i+1}}{2} - B_i - C_i = 0$，设 $F_i = E_i - C_i, G_i = A_i - C_i$，则有

$$F_i = \max(G_i, \frac{F_{i-1} + F_{i+1}}{2})$$

这个就是上一道题的形式了，C_i 可以随便确定 C_0, C_1 然后直接递推得到（$C_i = 2C_{i-1} + 2B_{i-1} - C_{i-2}$）。

CF516E Drazil and His Happy Friends

有 n 个男生 m 个女生，编号分别为 $0 \sim n-1$ 和 $0 \sim m-1$。

有 b 个男生和 g 个女生是快乐的，其他人是不快乐的。

在第 i 天，编号为 $i \bmod n$ 的男生和编号为 $i \bmod m$ 的女生会一起玩。

如果他们俩中有一个人是快乐的，则另一个人也会变快乐。

求至少要多少天所有人都会变快乐，或者判断不可能所有人都变快乐。

$n,m \leqslant 10^9$，$b,g \leqslant 10^5$。

首先，设 $d = \gcd(n, m)$，由简单的数论知识可知，在任意一天一起玩的男生和女生编号在$\bmod d$ 意义下同余。所以我们可以把所有男生和女生按模 g 的值分组，然后我们只考虑同一组内的情况，即我们把其他组的人都抽出去，那么若求得 r 这一组子问题的答案为 t，那么在原问题中这组的答案即为 $dt + r$（当第 0 天就合法时需要特判）。然后我们只需要对所有组的答案取 $\max$。

现在我们只需要考虑 $\gcd(n,m)=1$ 的情况。由裴蜀定理可知，只要一开始有一个人是快乐的，那么最后所有人都会变快乐。由于只有 $b+g$ 个人快乐，所以当 $d>b+g$ 时肯定至少有一组初始状态没有人快乐，这样 $\gcd(n,m)$ 过大时我们直接输出 `-1` 就好了。

我们考虑分别算出最后一个男生和最后一个女生的变快乐的时间，然后取 $\max$。先考虑女生的情况，男生类似。

我们发现，如果在第 i 天，第 $i \bmod m$ 个女生是快乐的，那么第 i 天，第 $j \bmod n$ 个男生也是快乐的，那么我们考虑过了 n 天以后，第 $j \bmod n$ 个男生会让第 $(i + n) \bmod m$ 个女生变快乐。

那么这可以等价于：n 天以后，第 $i \bmod m$ 个女生让第 $(i + n) \bmod m$ 个女生变快乐了。

简单推广可知，如果第 j 个女生在某一天变快乐了，那么 cn 天后，第 $(j+cn) \bmod m$ 个女生也一定会快乐。那么我们把这个建成最短路模型：

- 对每个女生 k 我们向第 $(k+n) \bmod m$ 个女生连一条边权为 n 的边，这相当于某时刻 k 变得快乐，那么 $k+n$ 时刻 $(k+n) \bmod m$ 会快乐。
- 对每个一开始就快乐的女生 k，从源点 S 向 k 连一条边权为 k 的边。
- 对每个一开始就快乐的男生 k，从 S 向 $k \bmod m$ 连一条边权为 k 的边，即时刻 k 第 $k \bmod m$ 个女生会因该男生变快乐。

这样跑从 S 开始的最短路，求每个点的 dis 的 $\max$ 就是答案。

但是我们发现点数是 10^9 级别的，没法跑，我们观察这个图的性质：第一类边把所有除 S 以外的点练成了一个大环，我们认为 S 直接连向的点为关键点，那么关键点的 dis 即为 S 连向这个点的边权。我们考虑把所有关键点按在环上的顺序排序（可以通过 exgcd 来实现），那么对于连续的两个关键点 A, B，显然 B 前面的那个点是 AB 这一段之间 dis 最大的，我们对所有连续的点对都做一遍取 $\max$ 就是答案。

CF611H New Year and Forgotten Tree

有一棵 n 个节点的树，节点编号为 $1 \sim n$。

记录这棵树的方式是记录下每条边连接的两点的编号。

现在，你不知道这些编号具体是多少，你只知道它们在十进制下的位数。

请你构造出一棵满足要求的树，或判断没有满足要求的树。

$n \leqslant 2 \times 10^5$。

我们认为位数相同的点为同一个颜色的点，则颜色总数 $m = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$。

我们对每种颜色选择一个关键点，则我们有以下结论：如果合法，一定存在一种方案使得关键点之间连成一个连通块，其它点和关键点相连。

那么我们暴力枚举连通块内部的连边方式，一共 m^{m-2} 种。那么现在对于其他的边 (x,y)，要不然是一个颜色为 x 的点连上了颜色为 y 的关键点；要不然是一个颜色为 y 的点连上了颜色为 x 的关键点。而每个颜色剩下的点的个数都确定，则我们可以进行二分图匹配，如果存在完备匹配则有解。

还有一个神仙的 Hall 定理做法，固定 1 为根，那么一条边一定是两个点中的一个为 fa，一个点只能连出一个 fa。这就是一个二分图匹配模型，我们用 Hall 定理检查是否有完备匹配。

「CTS2019」重复

给定一个长为 n 的由小写字母构成的字符串 S，求有多少长为 m 的由小写字母构成的字符串 T，使得无穷个 T 依次接到一起后存在一个长为 n 的字典序比 S 小的子串，对 998244353 取模。

$n, m \leqslant 2000$。

我们记 T^∞ 为无穷多个 T 连接到一起形成的字符串。

我们简单容斥，计算 T^∞ 中不含有字典序小于 S 的子串的 T 的数目（认为这种串为“合法”）。

考虑建立 S 的 KMP 自动机，我们考虑如何判断 T^∞ 是否合法：如果在某一步中走的边小于当前点及其 fail 树中所有点的出边的最大值，则其就形成了一个字典序比 S 小的 S 的前缀，那么继续添加字符后一定不合法。

所以说我们在自动机上只能走两种路：一种回到 0（有若干条重边），一种恰好等于 fail 树出边的最大值。

我们设 $P(T)$ 为 T 在只有上述两种出边的自动机匹配结束后的节点。

我们考虑 $P(T^\infty)$ 的意义，它表示一个最长的同时为 T^∞ 的后缀与 S 的前缀的串。

我们从 $P(T^\infty)$ 开始再匹配一个 T，则其一定会回到 $P(T^\infty)$，即 $P(T^\infty) = P(T^\infty + T)$，证明显然。

同时，对于一个 T，如果从一个节点 u 开始匹配 T 后，如果其又回到了 u，则 $P(T^\infty) = u$。

而且对于任意串 N，我们有 $P(N + T^\infty) = P(T^\infty)$。

则我们有一个重要结论：所有从自动机上某一个点开始匹配 u 走 m 步后重新回到点 u 的串和合法串一一对应。

现在我们可以 dp 了。很显然我们可以枚举 u，然后对每个 u 做一下从 u 开始走 m 步回到 u 的方案数，这样的复杂度是 $O(n^2m)$ 的。

我们注意到这个自动机如果不回到根则出边唯一，所以我们可以预处理根走 k 步到每个节点的方案数，然后只需要枚举 u 和走了几步以后到根就可以优化到 $O(nm)$。

似乎还可以通过求逆优化到 $O(n + m\log m)$。