بالتكامل نجد أن (نكامل جزئياً بالنسبة ل x): $g(x) = C$

إذن الحل هو (نعوض في *):

$$F(x,y) = y\sin x + x\cos y + C$$

(٧)*المعادلة الغير التامة التي يمكن تحويلها إلى معادلة تامة:

تعريف:

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

معادلة غير تامة إذا لم تحقق شرط التمام ، أي أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

و لإيجاد حلول هكذا معادلات نحولها إلى معادلات تامة و من ثم نوجد حلها ، و لإجراء ذلك نتبع الآتي :

(١) نوجد الدالة $\mu(x)$ بإعتبارها دالة في x فقط (أو $\mu(y)$ بإعتبارها دالة في y فقط) و التي تسمى عامل التكامل بإستخدام إحدى الصيغتين التاليتين:

$$ln\,\mu(x) = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx \qquad (1)$$

أو:

$$ln\,\mu(y) = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy \qquad (2)$$

(٢) نضرب المعادلة المراد حلها في عامل التكامل فنحصل على معادلة تفاضلية تامة ، و نوجد حلها كما سبق.

مثال:

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad xy^2dx - (x^2y+1)dy = 0$$

الحل:

M , N

نلاحظ أن: $M = xy^2$ و أن $N = -x^2 y - 1$ ، و منه نجد أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \quad \text{، و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2yx$$

و منه نجد أن $\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y}$ ، و عليه فإن المعادلة غير تامة.

لإيجاد الحل أولاً نحسب عامل التكامل :

$$\ln \mu(y) = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy = \int \frac{-2xy - 2xy}{xy^2} dy$$

$$= \int \frac{-4xy}{xy^2} dy = \int \frac{-4}{y} dy = -4 \ln y = \ln y^{-4}$$

و منه نجد أن:

$$\mu(y) = y^{-4}$$

بضرب المعادلة في الدالة $\mu(y)$ نحصل لاعلى:

$$xy^{-2} dx - \left(x^2 y^{-3} + y^{-4}\right) dy = 0$$

ومنه نجد أن: $M = xy^{-2}$ و أن $N = -x^2 y^{-3} - y^{-4}$ ، و عليه:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy^{-3} \quad \text{، و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy^{-3}$$

و منه نجد أن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ، و عليه فإن المعادلة تامة.

لإيجاد الحل نفرض أن الحل هو الدالة $F(x,y)$ حيث أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = xy^{-2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = -x^2 y^{-3} - y^{-4} \qquad (2)$$

نكامل (١) جزئياً بالنسبة ل x و نفرض أن ثابت التكامل دالة في y ، فنحصل على:

$$F(x,y) = \int xy^{-2} dx + f(y)$$

و منه نجد أن:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^{-2} + f(y) \qquad *$$

نفاضل * جزئياً بالنسبة ل y و نقارن الناتج مع المعادلة (٢) لإيجاد قيمة ثابت التكامل الذي تم إفتراضه $f(y)$ ، فنحصل على:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 y^{-3} + f'(y) = -x^2 y^{-3} - y^{-4}$$

بالمقارنة نجد أن: $f'(y) = -y^{-4}$

بالتكامل نجد أن (نكامل جزئياً بالنسبة ل y): $f(y) = \frac{1}{3}y^{-3} + C$

إذن الحل هو (نعوض في *):

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^{-2} + \frac{1}{3}y^{-3} + C$$

$$(2) \quad \left(x y^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2\right)dx + x y^2 dy = 0$$

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن: $M = xy^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2$ و أن $N = xy^2$ ، و منه نجد أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 + y^2 \quad \text{، و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y^2$$

و منه نجد أن $\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y}$ ، و عليه فإن المعادلة غير تامة. لإيجاد الحل أولاً نحسب عامل التكامل :

$$\ln \mu(x) = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx = \int \frac{3xy^2 + y^2 - y^2}{xy^2} dx$$

$$= \int \frac{3xy^2}{xy^2} dx = \int 3\, dx = 3x$$

و منه نجد أن: $\mu(x) = e^{3x}$

بضرب المعادلة في الدالة $\mu(x)$ نحصل لاعلى:

$$\left(xy^3e^{3x}+\frac{1}{3}y^3e^{3x}-2e^{3x}\right)dx \;+\; xy^2e^{3x}\,dy = 0$$

ومنه نجد أن: $M = xy^3e^{3x}+\frac{1}{3}y^3e^{3x}-2e^{3x}$ و أن $N = xy^2e^{3x}$ ، و عليه:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2e^{3x}+y^2e^{3x} \quad \text{، و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3xy^2e^{3x}+y^2e^{3x}$$

و منه نجد أن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ، و عليه فإن المعادلة تامة.

لإيجاد الحل نفرض أن الحل هو الدالة $F(x,y)$ حيث أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = xy^3e^{3x}+\frac{1}{3}y^3e^{3x}-2e^{3x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = xy^2e^{3x} \qquad (2)$$

نكامل (٢) جزئياً بالنسبة ل y و نفرض أن ثابت التكامل دالة في x ، فنحصل على:

$$F(x,y) = \int xy^2e^{3x}\,dy + g(x)$$

و منه نجد أن:

$$F(x,y) = \frac{1}{3}xy^3e^{3x} + g(x) \qquad *$$

نفاضل * جزئياً بالنسبة ل x و نقارن الناتج مع المعادلة (١) لإيجاد قيمة ثابت التكامل الذي تم إفتراضه $g(x)$ ، فنحصل على:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xy^3e^{3x}+\frac{1}{3}y^3e^{3x} + g'(x) = xy^3e^{3x}+\frac{1}{3}y^3e^{3x}-2e^{3x}$$

بالمقارنة نجد أن: $g'(x) = -2e^{3x}$

بالتكامل نجد أن (نكامل جزئياً بالنسبة ل x): $g(x) = -\frac{2}{3}e^{3x}+C$

إذن الحل هو (نعوض في *):

$$F(x,y) = \frac{1}{3}xy^3e^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x} + C$$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية العلوم -قسم الرياضيات

محاضرات مقرر المعادلات التفاضلية الإعتيادية

محاضرة رقم (7)

*المعادلة الخطية :

المعادلة الخطية هي المعادلة التي تكتب في الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

حيث أن $p(x)$, $q(x)$ دوال في x، و لإيجاد حلول هكذا معادلات نتبع الآتي :

١- نحسب الدالة $\mu(x)$ و التي تسمى عامل التكامل بإستخدام العلاقة :

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

٢- نوجد الحل بإستخدام العلاقة :

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx$$

مثال:

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$(i)\quad \frac{dy}{dx} + 2y = x$$

الحل: واضح أن $p(x) = 2$ ، و $q(x) = x$ ، عليه نحسب عامل التكامل $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

لإيجاد الحل نستخدم العلاقة :

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx = \frac{1}{e^{2x}}\int xe^{2x}dx$$

نحسب التكامل بالتجزئة و ذلك بوضع :

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{2x}\,dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

و منه نجد أن : (تذكر أن $\int u\,dv = uv - \int v\,du$)

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{e^{2x}}\left[\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{e^{2x}}\left[\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\right) - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right] = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}\right]$$

$$(ii)\quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3$$

__الحل:__ واضح أن $p(x) = \frac{-1}{x}$ ، و $q(x) = x^3$ ، نحسب عامل التكامل $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

لإيجاد الحل نستخدم العلاقة :

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)\,dx = \frac{1}{\frac{1}{x}}\int \frac{1}{x}.x^3\,dx$$

$$= x\int x^2\,dx = x\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{x^4}{3} + Cx$$

__*معادلة برنولي :__

معادلة برنولي هي المعادلة التفاضلية التي تكتب في الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).y^n \qquad (1)$$

أو في الصورة :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \qquad (2)$$

حيث أن $q(x)$, $p(x)$ دوال في x.