المحاضرة رقم (6)

تعريف:

يعرف التفاضل التام للدالة $F(x,y)$ و يرمز له بالرمز dF ، و يحسب بالصيغة التالية:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

(٦)*المعادلة التامة :

تعريف:

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

هي معادلة تامة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ (يسمى شرط التمام)

و لإيجاد حلول هكذا معادلات نتبع الآتي :

(١) نفرض أن الحل هو الدالة $F(x,y)$ حيث أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \qquad (2)$$

(٢) نكامل (١) جزئياً بالنسبة ل x و نفرض أن ثابت التكامل دالة في y ، فنحصل على:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + f(y) \qquad (i)$$

(أو نكامل (٢) جزئياً بالنسبة ل y و نفرض أن ثابت التكامل دالة في x ، فنحصل على:

$$(F(x,y) = \int N(x,y)dy + g(x) \qquad (ii)$$

(٣) نفاضل (i) جزئياً بالنسبة ل y و نقارن الناتج مع المعادلة (٢) لإيجاد قيمة ثابت التكامل الذي تم إفتراضه $f(y)$ لتعويضه في الحل.

(أو نفاضل (ii) جزئياً بالنسبة ل x و نقارن الناتج مع المعادلة (١) لإيجاد قيمة ثابت التكامل الذي تم إفتراضه $g(x)$ لتعويضه في الحل)

مثال:

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$(i) \quad \left(3y^2x^2 + e^{2x}\right)dx + \left(2x^3y+1\right)dy = 0$$

الحل:

نلاحظ أن: $M = 3y^2x^2 + e^{2x}$ و أن $N = 2x^3y+1$ ، و منه نجد أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6yx^2 \quad \text{، و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6yx^2$$

و منه نجد أن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ، و عليه المعادلة تامة.

لإيجاد الحل نفرض أن الحل هو الدالة $F(x,y)$ حيث أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 3y^2x^2 + e^{2x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = 2x^3y+1 \qquad (2)$$

نكامل (١) جزئياً بالنسبة ل x و نفرض أن ثابت التكامل دالة في y ، فنحصل على:

$$F(x,y) = \int \left(3y^2x^2 + e^{2x}\right)dx + f(y)$$

و منه نجد أن:

$$F(x,y) = y^2x^3 + \frac{1}{2}e^{2x} + f(y) \qquad *$$

نفاضل * جزئياً بالنسبة ل y و نقارن الناتج مع المعادلة (٢) لإيجاد قيمة ثابت التكامل الذي تم إفتراضه $f(y)$ ، فنحصل على:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yx^3 + 0 + f'(y) = 2x^3y+1$$

بالمقارنة نجد أن: $f'(y) = 1$

بالتكامل نجد أن (نكامل جزئياً بالنسبة ل y): $f(y) = y + C$

إذن الحل هو (نعوض في *):

$$F(x,y) = y^2 x^3 + \frac{1}{2}e^{2x} + y + C$$

$$(ii)\quad (\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$$

الحل:

نلاحظ أن: $M = \cos y + y\cos x$ و أن $N = \sin x - x\sin y$ ، و منه نجد أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y + \cos x \quad \text{، و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x - \sin y$$

و منه نجد أن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ، و عليه المعادلة تامة.

لإيجاد الحل نفرض أن الحل هو الدالة $F(x,y)$ حيث أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \cos y + y\cos x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \sin x - x\sin y \qquad (2)$$

نكامل (٢) جزئياً بالنسبة ل y و نفرض أن ثابت التكامل دالة في x ، فنحصل على:

$$F(x,y) = \int (\sin x - x\sin y)dy + g(x)$$

و منه نجد أن:

$$F(x,y) = y\sin x + x\cos y + g(x) \qquad *$$

نفاضل * جزئياً بالنسبة ل x و نقارن الناتج مع المعادلة (١) لإيجاد قيمة ثابت التكامل الذي تم إفتراضه $g(x)$ ، فنحصل على:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos x + \cos y + g'(x) = \cos y + y\cos x$$

بالمقارنة نجد أن: $g'(x) = 0$