عنوان الدرس.................... اليوم .... التاريخ / / ١٤

المعادلة التفاضلية

المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى:-

هذه المعادلة على الصورة

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

الحل لهذه المعادلة يمكن كتابته على الصورة $y = \phi(x, c)$ ؛ حيث c ثابت اختياري ، عندما نأخذ c قيماً مختلفة فإننا نحصل على مجموعة من المنحنيات يعرف بالحل العام.

الحل الخاص

هو الحل الذي يمكن الحصول عليه من الحل العام عندما نأخذ الثابت الاختياري قيماً محددة أي $y = \phi(x, c_0)$

معادلات الرتبة الاولى والدرجة تحل بعدة طرق:-

① طريقة فصل المتغيرات

هذا النوع من المعادلات يمكن كتابته في الصورة $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

حيث $f(x)$ دالة في x فقط ، $g(y)$ دالة في y فقط

طريقة الحل

① فصل المتغيرات وكتابة المعادلة في الصورة

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

② إجراء التكامل مباشرة للحصول على الحل

مثال ① أوجد حل المعادلات التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

الحل

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln y = 2\frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{x^2+c}$$

$$y = e^{x^2+c}$$

2 مثال 2

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y} \quad , y(0)=2$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 3x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int e^{y} dy = \int 3x^2 dx$$

$$e^{y} = x^3 + c \quad \text{———} \; (*)$$

at $x=0$, $y=2$ $\qquad y(0)=2$

لإيجاد الثابت بتعويض الشروط

$$e^{2} = 0 + c \Rightarrow c = e^{2}$$

$$e^{y} = x^3 + e^{2}$$

③ $\frac{dy}{dx} = 2x(y^2+1)$

① فصل المتغيرات

$\frac{dy}{y^2+1} = 2x\,dx$

② اجراء التكامل

$\tan^{-1} y = x^2 + c$

$y = \tan(x^2+c)$

④ $dx + xy\,dy = y^2 dx + y\,dy$

① فصل المتغيرات بجمع الحدود المتشابهة

$dx(1 - y^2) = dy(y - xy)$

$dx(1-y^2) = y\,dy(1-x)$

$\int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{-2}\int \frac{-2y\,dy}{1-y^2}$

② تكامل الطرفين

$-\ln(1-x) = \frac{-1}{2}\ln(1-y^2) + \ln c$

$\ln(1-x)^{-1} = \ln(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} + \ln c$

عنوان الدرس........................ اليوم .... التاريخ / / ١٤

$$\ln_e c(1-x)^{-1} = \ln_e (1-y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{c}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$c\sqrt{1-y^2} = 1-x$$

بتربيع الطرفين

$$c^2(1-y^2) = (1-x)^2$$

$$c^2 = c_1$$

$$c_1(1-y^2) = (1-x)^2$$

$$1-y^2 = \frac{(1-x)^2}{c_1}$$

$$y^2-1 = \frac{-(1-x)^2}{c_1}$$

$$y^2 = 1 - \frac{(1-x)^2}{c_1} = \frac{c_1-(1-x)^2}{c_1}$$

$$y = \sqrt{\frac{c_1-(1-x)^2}{c_1}}$$

ثانياً: المعادلة التفاضلية المتجانسة

المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{—} \; 1$$

تسمى معادلة متجانسة إذا كانت كل من $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ دالة متجانسة من نفس الدرجة وفي هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة في الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{أو} \quad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

ونحولها إلى معادلة تقبل فصل المتغيرات وذلك باستخدام التعويض

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{أو} \quad u = \frac{x}{y}$$

if $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu$ P

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

ملاحظة

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow x = yu$$

$$\frac{dx}{dy} = y\frac{du}{dx} + u$$

مثال ← اوجد حل المعادلة

$$(x^3+y^3)\,dx \mp 3xy^2\,dy = 0$$

الحل

$$M = x^3+y^3 \quad , \quad N = 3xy^2$$

أولاً نختبر التجانس

$$f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 = \lambda^3(x^3+y^3) = \lambda^3 g(x,y)$$

$$g(\lambda x,\lambda y) = 3(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3(3xy^2) = \lambda^n f(x,y)$$

$\therefore$ M , N دوال متجانسة من الدرجة الثالثة

لإيجاد الحل نضع الآن

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

عنوان الدرس........ اليوم .... التاريخ / / ١٤

أوجد حل المعادلة

$$(x^3+y^3)dx - 3xy^2dy = 0$$

$$y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \qquad (*)$$

لنضع المعادلة في صورة

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{3xy^2} \quad \text{---} \quad (1)$$

لنعوض (*) في (1)

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{x^3+(xu)^3}{3x(xu)^2} = \frac{x^3+x^3u^3}{3x^3u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{\cancel{x^3}[1+u^3]}{\cancel{x^3}(3u^2)} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^3-3u^3}{3u^2} = \frac{1-2u^3}{3u^2}$$

عنوان الدرس............................ اليوم .... التاريخ / / ١٤

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-2u^3}{(3u^2)du}$$

نفصل المتغيرات

$$\frac{x}{dx} = \frac{(1-2u^3)}{3u^2du} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \frac{-2}{-2}\int\frac{3u^2du}{1-2u^3}$$

$$-6u^2$$

$$\ln x + \ln c = -\frac{1}{2}\ln(1-2u^3) + \ln c$$

$$\ln_e cx = \ln_e(1-2u^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$cx = \frac{1}{\sqrt{1-2u^3}} \Rightarrow 1 = cx\sqrt{1-2u^3}$$

$$\frac{1}{c} = x\sqrt{1-2u^3} \quad , \left(\frac{1}{c} = c_1\right)$$

$$c_1 = x\sqrt{1-2u^3}$$ وتربيع الطرفين

$$c_1^2 = x^2(1-2u^3) \qquad (c_1^2 = c_2)$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$$c_2 = x^2\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right) \Rightarrow c_2 = x^2 - x^2\frac{2y^3}{x^3}$$

$$c_2 = x^2 - \frac{2y^3}{x}$$

#

عنوان الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١١

٣- حل المعادلة التفاضلية ④

$$\left(x \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) - y\right) dx + x\, dy = 0$$

الحل

$x \div$

$$\left(\operatorname{cosec}\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) dx = -dy$$

$dx \div$

$$\operatorname{cosec}\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -\frac{dy}{dx}$$

بالضرب في (-1)

$$\frac{y}{x} - \operatorname{cosec}\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} \quad ⊛ \quad \left(\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

نفرض

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

نعوض في ⊛

$$x\frac{du}{dx} + u = u - \operatorname{cosec} u$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\operatorname{cosec} u$$

نفصل المتغيرات

عنوان الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤

$$\frac{x}{dx} = -\frac{\operatorname{cosec} u}{du}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{dx}{x} = \int \frac{+du}{\operatorname{cosec} u} \quad , \frac{1}{\operatorname{cosec} u} = \sin u$$

$$-\ln x = \int \sin u \, du$$

$$-\ln x = -\cos u + c$$

$$\cos u = \ln x + c$$

$$\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + c$$

لا تكتب
على الهامش

لا تكتب
رقم السؤال: ....

(13) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

(14) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

(15) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

(17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\csc^{-1} x + c$

(18) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

(19) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(20) $\int \frac{-du}{1+u^2} = \cot^{-1} u + c$

(21) $\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} \; \csc^{-1} u + c$

(22) $\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \cos^{-1} u + c$

1. $\int x^{m} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$

3. $\int e^{x} dx = e^{x} + c$

4. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

7. $\int \tan x = \ln \sec x + c$

8. $\int \cot x\, dx = \ln \sin x + c$

9. $\int \sec x\, dx = \ln \sec x + \tan x$

10. $\int \csc x\, dx = \ln \csc x - \cot x$

11. $\int \sec^{2} x\, dx = \tan x + c$

12. $\int \csc^{2} x\, dx = -\cot x + c$