

A forgómozgás vizsgálata

Mérést végezte: Bódy Lőrinc András

2020. Március 3.

1. A mérés célja

Célom volt a forgó merev testekre érvényes $\beta\Theta = M$ mozgástörvény igazolása volt, ahol $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ a szöggyorsulás, M a forgatónyomaték, Θ pedig a tehetetlenségi nyomaték. A mérést két rögzített tengely körül forgó próbatesttel végeztem el, így az általánosabb $\Theta_{ij}\beta_j = M_i$ törvénynek csak a fentebbi, "vetületi" alakjára van szükség. Egyben a próbatestek a tengely körüli tehetetlenségi nyomatékát is megmértem, és összevetettem az alakjuknak megfelelő képlet szerinti értékkel.

2. Mérőeszközök

- Mérőállvány
- Rajta tűcsapágyas felfüggesztés
- Korong próbatest (rajta tárcsa a fonal számára)
- Rúd próbatest (rajta tárcsa a fonal számára)
- Fénykapuval felszerelt csiga
- 0.05 kg-os súlyok készlete
- DAQ (Science Workshop 750 Interface és Data Studio szoftver)
- Tolómérő
- Vonalzó
- Mérleg

3. A mérés rövid leírása

A tolómérővel és a vonalzóval megmértem a próbatestek méreteit, a mérleggel pedig a tömegüket, hogy a tehetetlenségi nyomatékukat kiszámíthassam. Megmértem még a tárcsák átmérőjét is (a tárcsa sugara játsza az erőkar szerepét),

továbbá egy tengelyel összeépített referenciatárcsa tömegét is megmértem, mivel a tengelyeket nem lehet kihúzni a próbatestekből, és nélkülük mérni meg a tömegeket.

A gyorsulás mérése során a vízszintes tengely körül forgó próbatestel egy tengelyre rögzített tárcsára egy rétegben fonalat csévélttem fel, amelynek másik végén az egyenletes húzóerőt biztosító súly van. (ezt 0.15 kg és 0.35 kg között változtatom) Ezután mindkét próbatestre és minden súlyra háromszor engedem, hogy a csigán átvett fonal lecsévélődjön és a próbatest forgásba jöjjön. A csiga forgási sebességét a küllői között átvilágító fénykapu regisztrálja, majd az adatgyűjtés leállítása után a próbatest forgását kézzel megállítom.

Az egy-egy lecsévélődés során felvett sebességértékeket az adatgyűjtőszoftver az idő függvényében ábrázolja, és egyenest illeszt rájuk, melynek meredeksége adja meg a gyorsulást (A DAQ úgy van kalibrálva, hogy a kötél gyorsulását mérje).

4. Mérési adatok

A korong: Tömege 1.512 kg, sugara $R = 0.1095$ m, a fonaltárcsa sugara $r = 2.45$ mm = 0.002 45 m

m_i (kg)	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$a_{0i}(\frac{m}{s^2})$	0.0007	0.0011	0.0014	0.0017	0.0020
$a_{1i}(\frac{m}{s^2})$	0.0007	0.0011	0.0014	0.0017	0.0020
$a_{2i}(\frac{m}{s^2})$	0.0007	0.0010	0.0014	0.0017	0.0020

A rúd: Tömege 0.847 kg, sugara (henger alakú volt) $R = 10.975$ mm = 0.010 975 m, hosszúsága $L = 0.25$ m, a fonaltárcsa sugara $r = 2.45$ mm = 0.002 45 m.

m_i (kg)	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$a_{0i}(\frac{m}{s^2})$	0.0015	0.0021	0.0024	0.0031	0.0037
$a_{1i}(\frac{m}{s^2})$	0.0015	0.0022	0.0025	0.0030	0.0037
$a_{2i}(\frac{m}{s^2})$	0.0015	0.0019	0.0024	0.0029	0.0036

A referencia-fonaltárcsa tömegét 0.009 kg-nak találtam, a g értékére $9.81 \frac{m}{s^2}$ -et használtam.

5. Számítások

A mozgásegyenletek:

$$\Theta\beta = Kr - M_s; \quad ma = mg - K; \quad a = r\beta$$

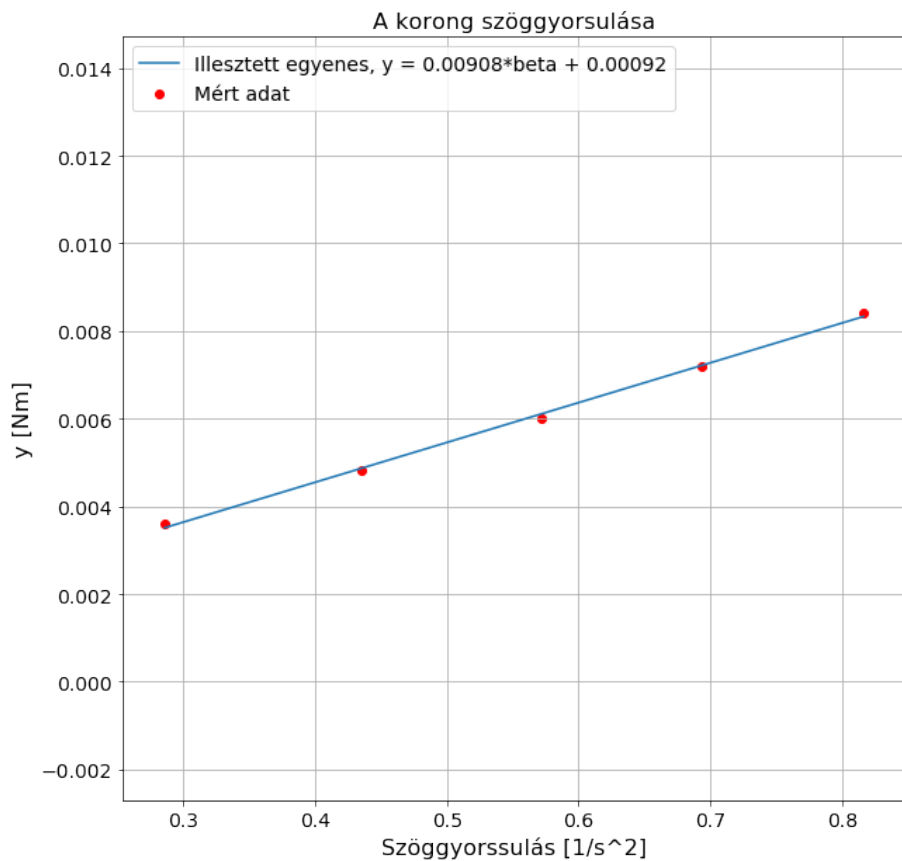
Ahol a a fonal (és egyben a tárcsa peremének) gyorsulása, K a fonalban ébredő kötélérő, M_s a tengelynél ható surlódási forgatónyomaték, m pedig a fonal végére akasztott tömeg. Ezeket egymásba írva nyerjük a

$$\Theta\beta + M_s = mr(g - r\beta)$$

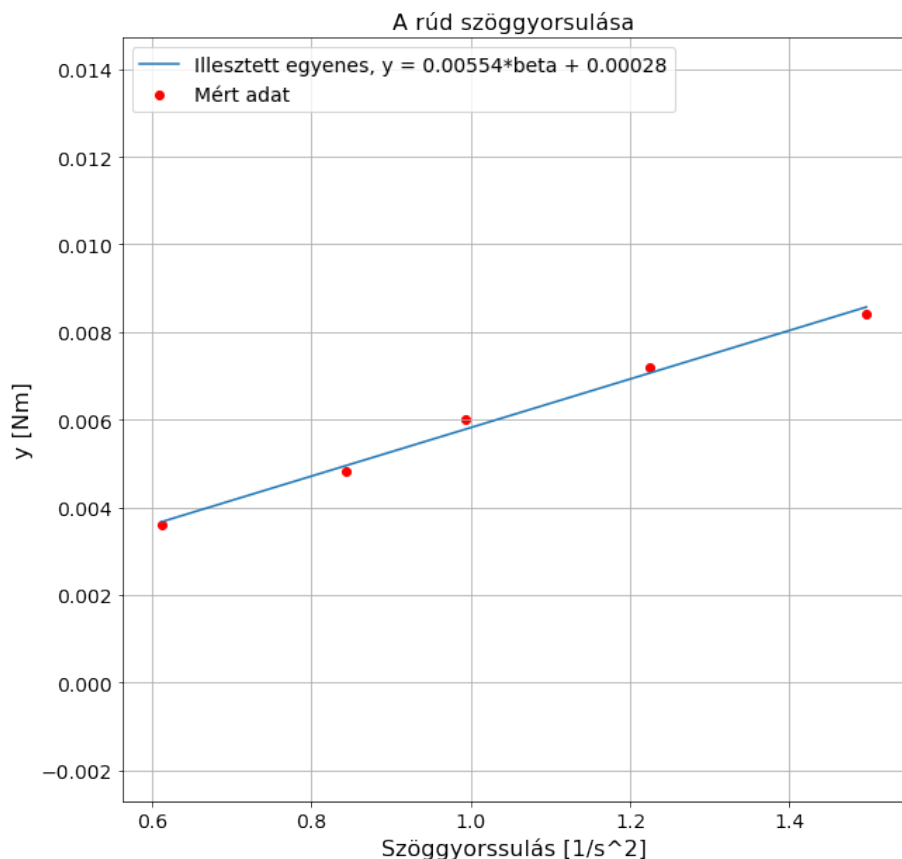
összefüggést. A mérési leírás jelöléseit követve legyen $y = mr(g - a)$, így

$$y = \Theta\beta + M_s$$

Ezután y -t β függvényében ábrázoltam, és egyenest illesztettem a legkisebb négyzetek módszerével, melynek meredeksége adja meg Θ -t. Ehhez a -ként az azonos tömegek mellett felvett három gyorsulás átlagát használtam.



m_i (kg)	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
a_{0i} ($\frac{m}{s^2}$)	0.0007	0.0011	0.0014	0.0017	0.0020
a_{1i} ($\frac{m}{s^2}$)	0.0007	0.0011	0.0014	0.0017	0.0020
a_{2i} ($\frac{m}{s^2}$)	0.0007	0.0010	0.0014	0.0017	0.0020
$a_i = (a_{0i} + a_{1i} + a_{2i})/3$ ($\frac{m}{s^2}$)	0.00070	0.00107	0.00140	0.00170	0.00200
$\beta_i = \frac{a_i}{r}$ ($\frac{1}{s^2}$)	0.28571	0.43537	0.57143	0.69388	0.81633
$y_i = m_i r (g - a_i)$ (Nm)	0.00360	0.00481	0.00601	0.00721	0.00841
$Y(\beta_i)$ (Nm)	0.00351	0.00487	0.00611	0.00722	0.00833
$\Delta y_i = Y(\beta_i) - y_i$ (Nm)	-0.00009	0.00006	0.00010	0.00001	-0.00008



m_i (kg)	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
a_{0i} ($\frac{m}{s^2}$)	0.0015	0.0021	0.0024	0.0031	0.0037
a_{1i} ($\frac{m}{s^2}$)	0.0015	0.0022	0.0025	0.0030	0.0037
a_{2i} ($\frac{m}{s^2}$)	0.0015	0.0019	0.0024	0.0029	0.0036
$a_i = (a_{0i} + a_{1i} + a_{2i})/3$ ($\frac{m}{s^2}$)	0.00150	0.00207	0.00243	0.00300	0.00367
$\beta_i = \frac{a_i}{r}$ ($\frac{1}{s^2}$)	0.61224	0.84354	0.99320	1.22449	1.49660
$y_i = m_i r (g - a_i)$ (Nm)	0.00360	0.00481	0.00601	0.00721	0.00841
$Y(\beta_i)$ (Nm)	0.00367	0.00495	0.00578	0.00706	0.00857
$\Delta y_i = Y(\beta_i) - y_i$ (Nm)	0.00007	0.00015	-0.00023	-0.00015	0.00016

6. Hibaszámítás

A mérési hiba egyik forrása a számítógépes sebességmérés bizonytalansága. Nem tudom, milyen frekvenciával mintavételez a fénykapu, de feltételezem, ez a hibaforrás nem túlságosan nagy. A hibát a mérési leírásnak megfelelően a szim-

metrikus téglalapmódszerrel becsültem meg:

$$\Delta\Theta = \frac{2 \max(|\Delta y_i|)}{\max(\beta_i) - \min(\beta_i)}$$

Ez alapján $\Delta\Theta_{korong} = 0.000\,37\,\text{kgm}^2$ és $\Delta\Theta_{rud} = 0.000\,51\,\text{kgm}^2$

További hibaforrás r mérésének hibája, ezt a téglalapmódszeres becslés nem tartalmazza, mivel ez lényegében szisztematikus hiba, minden mérési pontot ugyanúgy szoroz. Mivel azonban a tárcsa sugarát egy Vernier-skálával felszerelt tolómérővel, igen gondosan mértem meg, ez valószínűleg nem nagyobb 0.025 mm-nél (a tárcsa átmérőjét mértem egy 0.1 mm skálájú eszközzel.)

7. Diszkusszió

A korong tehetetlenségi nyomatékának elméleti képlete alapján: $\Theta_{korong} = 0.5mR^2 = 0.009\,065\,\text{kgm}^2$, a rúdra pedig: $\Theta_{rd} = \frac{1}{12}m(3R^2+L^2) = 0.004\,437\,\text{kgm}^2$.

A mérési leírás szerint úgy tekintve, hogy ennek relatív hibája a tömegmérés relatív hibája, az pedig megegyezik a referencia-fonaltárcsa tömegével:

$$\Delta\Theta_{elm} = \Theta_{elm} \frac{M_{ref}}{M}$$

Az eredmények táblázatos formában:

Θ (kgm ²)	Mért	Számított
Korong	$9.08 \pm 0.37 \times 10^{-3}$	$9.06 \pm 0.05 \times 10^{-3}$
Rúd	$5.54 \pm 0.51 \times 10^{-3}$	$4.43 \pm 0.048 \times 10^{-3}$

A merev test mozgástörvénye igazolódott. A korong próbatestre a mért és a számított érték igen jól egyezik, a rúd alakúra azonban már nincs hibán belüli egyezés. Ennek egyik lehetséges oka, hogyha a mért gyorsulás adatokban hiba van (a táblázatban valóban látható, hogy a rúd egy húzó súly mellett mért gyorsulásainak nagyobb a szórása). Mivel a rúd tehetetlenségi nyomatéka kisebb, nagyobb szögsebességet ér el, és így kevesebb mérési pont rögzítésére van lehetőség, illetve számomra nehezebb volt időben leállítani a mérést és még a fonal letekeredése előtt megállítani a forgást.