

Wykład 2.

Transformata Fouriera

Transformata Fouriera jest podstawowym narzędziem analizy harmoniczej i teorii analizy i przetwarzania sygnału. Z punktu widzenia teorii matematycznej transformata Fouriera jest narzędziem występującym w przypadku analizy przestrzeni $L^2(G)$, funkcji całkowalnych z kwadratem na grupie przemiennej G . W zastosowaniach transformaty Fouriera używamy najczęściej gdy $G = \mathbf{R}$ (grupą są liczby rzeczywiste z dodawaniem), $G = [0, 2\pi]$ (grupą są liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 2\pi]$, z utożsamionymi końcami, działaniem jest dodawanie modulo 2π) oraz $G = \mathbb{Z}_n$ (grupą są liczby całkowite $\{0, 1, \dots, n-1\}$ z dodawaniem modulo n). Transformata Fouriera przetwarza funkcję z danej przestrzeni w ten sposób, że wyeksponowane są jej własności okresowe, częstotliwościowe (tak zwane spektrum funkcji). Przekształcenie jest bezstratne, i funkcja może zostać zrekonstruowana ze swojej transformaty Fouriera. Transformata Fouriera po raz pierwszy pojawiła się przy okazji badania zjawiska przepływu ciepła, obecnie pojawia się w wielu dziedzinach matematyki i w wielu praktycznych zastosowaniach. Opiszemy teraz kolejno wymienione wyżej konkretne przykłady. Tradycyjnie zastosowanie transformaty Fouriera oznacza się przez dodanie do symbolu funkcji daszka $\hat{\cdot}$.

(a) Transformata Fouriera w $L^2(\mathbf{R})$. Transformata zadana jest wzorem

$$(2.1) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-i x \xi} dx, \quad f \in L^2(\mathbf{R}).$$

W tym przypadku transformata jest przekształceniem $L^2(\mathbf{R})$ w siebie, $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$. Przekształcenie odwrotne do transformaty, czyli rekonstrukcja funkcji dane jest podobnym wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{i \xi x} d\xi.$$

Prawdziwa jest następująca równość, często nazywana równością Plancherela.

$$\|\hat{f}\| = \sqrt{2\pi} \|f\|.$$

Przykład. Obliczymy transformatę funkcji charakterystycznej odcinka $[-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Podstawiamy do wzoru

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-i x \xi} dx = \int_{-1}^1 e^{-i x \xi} dx = \frac{1}{-i \xi} e^{-i x \xi} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{1}{-i \xi} (e^{-i \xi} - e^{i \xi}) = \frac{2 \sin \xi}{\xi}.$$

Funkcja podcałkowa $f(x)e^{-i x \xi}$ może nie być całkowalna na \mathbf{R} (założyliśmy tylko że jest całkowalna z kwadratem). Wtedy transformatę możemy wyliczyć ze wzoru

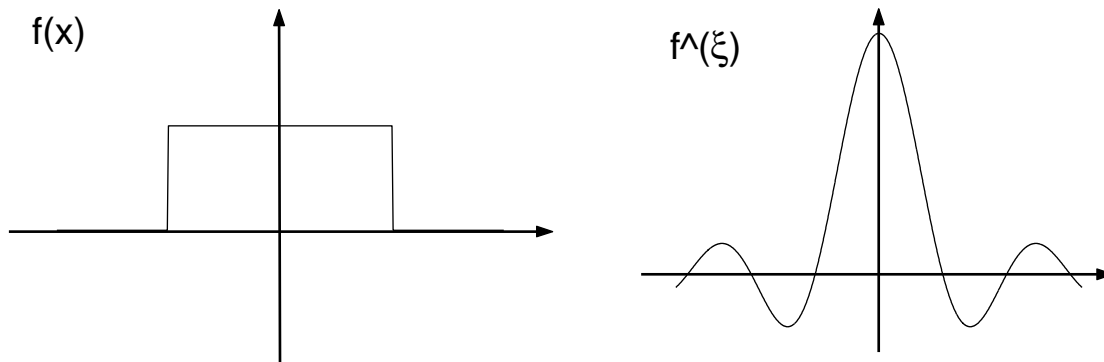
$$(2.1') \quad \hat{f}(\xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) e^{-i x \xi} dx \quad \text{granica w } L^2(\mathbf{R}).$$

Własności. Przy założeniu, że wszystkie występujące funkcje należą do $L^2(\mathbf{R})$ mamy następujące wzory.

Przesunięcie w czasie

$$g(x) = f(x - c) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = e^{-i u \xi} \hat{f}(\xi),$$

1



Przykład funkcji na prostej i jej transformaty Fouriera

modulacja

$$g(x) = e^{i\omega x} f(x) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \omega),$$

skalowanie

$$g(x) = f(x/s) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = s \hat{f}(s\xi), \quad s > 0,$$

pochodna w czasie

$$g(x) = f'(x) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = i \xi \hat{f}(\xi),$$

pochodna w spektrum

$$g(x) = -i x f(x) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}'(\xi).$$

Jako zastosowanie powyższych własności policzymy transformatę Fouriera funkcji Gaussa

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Obliczymy pochodną transformaty. Będziemy różniczkowali pod znakiem całki i zastosujemy całkowanie przez części.

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \frac{d}{d\xi} (e^{-i x \xi}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} (-i x) e^{-i x \xi} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2/2}) e^{-i x \xi} dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} (e^{-i x \xi}) dx = (-i)^2 \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i x \xi} dx \\ &= -\xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Nietrudno pokazać, że funkcja $F(\xi)$ spełniająca powyższe równanie różniczkowe musi mieć postać

$$F(\xi) = F(0) e^{-\xi^2/2}.$$

Wartość $\hat{f}(0)$ to jedna z dobrze znanych całek

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Tak więc ostatecznie

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi/2}.$$

(b) Transformata Fouriera w $L^2([0, 2\pi])$. W tym przypadku transformata jest po prostu rozkładem funkcji na współczynniki bazowe względem układu Fouriera (stąd zbieżność nazwy). Funkcji przyporządkowany jest jej ciąg współczynników Fouriera

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i n x} dx.$$

Jest to przekształcenie $L^2([0, 2\pi])$ w $L^2(\mathbf{Z}) = \{ \{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \}$, zachowujące długość wektorów

$$\|\hat{f}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx} = \|f\|.$$

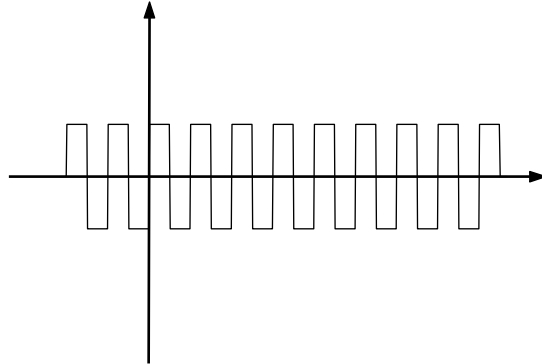
Przekształceniem odwrotnym jest szereg Fouriera

$$(2.2) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i n x},$$

gdzie zbieżność i równość zachodzi w $L^2([0, 2\pi])$, zgodnie z (1.3).

Przykład. Obliczmy współczynniki Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$



Symetryczna fala prostokątna

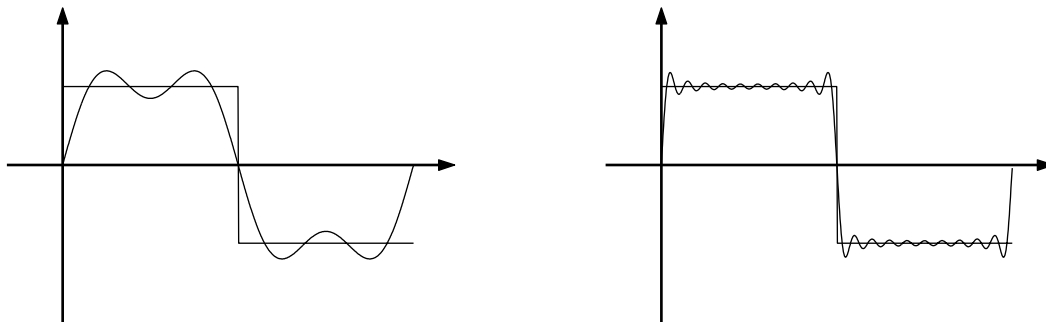
f jest bardzo pospolitą, często spotykaną w praktyce funkcją. Jeżeli rozważyć ją jako okresową funkcję na całej prostej \mathbf{R} , to jest zwykła fala prostokątna. Sygnały takie pojawiają się w każdym układzie elektronicznym zawierającym mikroprocesory.

Obliczmy najpierw $\hat{f}(0)$. Podstawiając do wzoru otrzymujemy

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -1 dx = 0.$$

Teraz obliczmy pozostałe współczynniki. Niech $n \neq 0$. Rozdzielając całkę jak poprzednio otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-inx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{x=0}^\pi - \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{x=\pi}^{2\pi} \\
 (2.3) \quad &= \frac{1}{-2\pi in} (e^{-in\pi} - e^{-in0} - e^{-in2\pi} + e^{-in\pi}) = \frac{1}{-2\pi in} (2(-1)^n - 2) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{i\pi n} & n \text{ nieparzyste} \\ 0 & n \text{ parzyste.} \end{cases}
 \end{aligned}$$



Przybliżenie funkcji f harmonicznymi do 3 i do 19 włącznie.

Otrzymujemy więc z (2.2) następujące rozwinięcie naszej funkcji $f(x)$ w szereg

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} e^{inx} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} (e^{inx} - e^{-inx}) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin nx \\
 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Można udowodnić, że równość powyższa zachodzi w każdym punkcie przedziału $[0, 2\pi]$, z wyjątkiem $0, \pi, 2\pi$ (w tych punktach prawa strona jest 0). Analizując kolejne sumy częściowe powyższego rozwinięcia możemy zauważyć zjawisko Gibbsa: po obu stronach nieciągłości skokowej funkcji f w jej przybliżeniu pojawiają się lokalne maksima. Ich wysokość nie zmniejsza się, natomiast przesuwają się w stronę nieciągłości, i stają się coraz bardziej strome. Elektrycy nazywają je zakłóceniami szpilekowymi. Takie szpilki pojawiają się zawsze przy skokach analizowanej funkcji f , i ich wysokość jest proporcjonalna do wysokości skoku. Jako zastosowanie (2.3) otrzymamy następującą równość

$$(2.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Stosując (2.3) i równość Plancherela

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

otrzymujemy

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} = 2 \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} = 1,$$

czyli

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ parzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Łącząc powyższe równości otrzymujemy (2.4).

(c) Transformata Fouriera w $L^2(\mathbb{Z}_n)$, tak zwana „dyskretna transformata Fouriera”. Elementami $L^2(\mathbb{Z}_n)$ są wektory o n współrzędnych $x = (x(0), x(1), \dots, x(n-1))$. W tym przypadku transformata Fouriera jest to przekształcenie $L^2(\mathbb{Z}_n)$ na siebie, zadane wzorem

$$\hat{x}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} x(j) e^{-i j k / n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Jak łatwo sprawdzić odwrotna transformata Fouriera dana jest wzorem

$$x(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{x}(j) e^{i j k / n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

i zachodzi równość Plancherela

$$\|\hat{x}\| = \sqrt{n} \|x\|, \quad \|x\| = \sqrt{|x(0)|^2 + \dots + |x(n-1)|^2}.$$

Dyskretna transformata Fouriera bardzo często pojawia się w zastosowaniach. Jest używana do numerycznego obliczania ciągłej transformaty (funkcja na \mathbf{R} jest najpierw próbkowana), oraz istnieje szybki algorytm do jej obliczania - tak zwana szybka transformata Fouriera (FFT).

Zróbmy jeszcze następującą obserwację. Niech $a < b$ będą dowolnymi liczbami i rozważmy następującą funkcję f na prostej

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b], \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Funkcja f „żyje” więc jedynie na odcinku $[a, b]$. Z drugiej strony, jak łatwo policzyć

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i \xi(a+b)/2} \frac{2 \sin\left(\xi \frac{(b-a)}{2}\right)}{\xi}.$$

Transformata „żyje” więc na całej prostej, maleje powoli, tak jak $1/\xi$. Mówimy, że transformata Fouriera nie jest lokalna: zmiana funkcji która jest ograniczona tylko do jakiegoś, być może bardzo małego, przedziału powoduje zmianę transformaty na całej prostej. Patrząc się na transformatę funkcji łatwo

jest zauważyć występowanie oscylacji – transformata jest duża w okolicy odpowiedniej częstotliwości. Nie jest natomiast łatwo, bez obliczania transformaty odwrotnej, stwierdzić, gdzie ta oscylacja miała miejsce. Tą własność transformaty można ująć bardzo konkretnie, jako tak zwaną zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Niech $f \in L^2(\mathbf{R})$. Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$m = \frac{1}{\|f\|} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx,$$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\|f\|} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

m i ζ oznaczają więc wartości oczekiwane (średnie) $|f|^2$ i $|\hat{f}|^2$. Wprowadźmy też oznaczenia na odchylenia standardowe wokół tych średnich

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\|f\|} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 |f(x)|^2 dx$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \zeta)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Zasada Nieoznaczoności Heisenberga. Dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność

$$\sigma_x \sigma_\xi \geq \frac{1}{2}.$$

Równość zachodzi tylko dla funkcji Gaussa.

Innymi słowy, jeżeli $|f(x)|^2$ jest skupiona wokół swojej średniej, to $|\hat{f}(\xi)|^2$ musi być rozproszona, i na odwrót.

Sploty

Wprowadzimy pojęcie splotu funkcji. Podobnie jak w przypadku transformaty Fouriera pojęcie splotu można zawsze wprowadzić dla funkcji określonych na przestrzeni, która jest również grupą przemienną. Wprowadzimy więc splot dwóch funkcji na prostej \mathbf{R}

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy, \quad x \in \mathbf{R},$$

dwóch funkcji na odcinku $[0, 2\pi]$

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - y)g(y) dy, \quad x \in [0, 2\pi],$$

dwóch ciągów nieskończonych $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\beta = \{\beta_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{k-l}\beta_l, \quad k \in \mathbb{Z},$$

oraz dwóch ciągów skończonych $\alpha, \beta \in L^2(\mathbb{Z}_n)$

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{k-l}\beta_l, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

W przypadku splotu na odcinku $[0, 2\pi]$ różnicę $x - y$ pod całką należy rozumieć modulo 2π , albo funkcję f traktować jako okresową na prostej. Podobnie, w przypadku splotu ciągów skończonych różnicę $k - l$ pod sumą rozumiemy jako różnicę modulo n , albo ciąg α traktujemy jako ciąg nieskończony okresowy, o okresie n . W każdym przypadku splot jest przemienny, co można łatwo pokazać przez zamianę zmiennych lub indeksu sumowania. Będziemy korzystać z następujących własności splotów.

Własności. (a) Na prostej

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), \quad \widehat{f \cdot g}(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi),$$

na odcinku

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad \widehat{f \cdot g}(n) = (\hat{f} * \hat{g})_n \quad (\text{splot ciągów}),$$

oraz dla ciągów skończonych

$$(\widehat{\alpha * \beta})_k = \hat{\alpha}_k \hat{\beta}_k, \quad (\widehat{\alpha \cdot \beta})_k = (\hat{\alpha} * \hat{\beta})_k.$$

Splot $f * g$ dwóch funkcji z $L^2(\mathbf{R})$ jest funkcją ciągłą, ale nie musi być ani całkowalna ani całkowalna z kwadratem. W takiej sytuacji transformatę Fouriera $\widehat{f * g}$ można policzyć podobnie jak we wzorze (2.1').

Znaczenie splotów dla analizy sygnałów bierze się stąd, że większość operacji przekształcających sygnały w praktyce ma właśnie postać splotu. Innymi słowy, większość operacji na sygnałach można przedstawić jako splot z pewną funkcją. Biorąc pod uwagę powyższe własności oznacza to że operacje na sygnałach, po stronie transformaty Fouriera, mają postać mnożenia przez funkcję. Operacje takie nazywamy filtrami.