HW2
AI

مهدی شاهنی
9923040

۱ الف) محدودیت‌ها و قیود: یگانی: $x_{43}=2$ $x_{34}=3$ دوگانی: محدودیت سطری و ستونی:

for i = constant

$$x_{ij} \neq x_{ik} \quad \forall j \neq k$$

for j = constant

$$x_{ij} \neq x_{kj} \quad \forall i \neq k$$

محدودیت نابرابری:

$x_{11} < x_{12}$ $x_{14} < x_{24}$ $x_{32} < x_{42}$

$x_{13} < x_{23}$ $x_{22} > x_{32}$

دامنه متغیرها: $x_{ij} \in \{1, \dots, n\} \xrightarrow{n=4} = \{1,2,3,4\}$

ب) بعد از اعمال محدودیت یونری، مقدار دو 2 از دامنه این دو متغیر حذف شد. پس دامنه‌شان $\{1,2,4\}$ و $\{1,2,4\}$ شد.
چون مقدار $x_{14} < x_{24}$ حتما است پس اولی نمی‌تواند مقدار 1 و دومی نمی‌تواند مقدار 4 را بگیرد پس

$x_{14} \in \{1,2\}$ $x_{24} \in \{2,4\}$

ج) حداکثر دامنه 4 است. پس مقدار آن حتما حداکثر 4 خواهد بود. اگر مقداری در آن ردیف یا ستون انتخاب نشده باشد چیزی از دامنه‌اش کم نمی‌شود. اگر نابرابری داشته باشیم از یکی مقدار 4 و از دیگری 1 حذف می‌شود.
تنها خانه‌ای با چنین ویژگی خانه x_{21} است.

د) همانطور که در ب و ج استدلال کردیم، اگر محدودیت یگانی نداشته باشد تنها به دلیل نابرابری مقدار 4 از طرف کوچکتر و 1 از بزرگتر حذف می‌شود پس دامنه‌اش حداکثر سه 3 است.

ه) محدودیت یگانی: حذف 3 از دامنه $\longrightarrow$ $\{1,2,4\}$، حذف 4 به دلیل قرارگیری در طرف کوچکتر نامساوی پس $\{1,2\}$

چون خانه 1,2 در طرف بزرگتر قرار گرفته است پس حتما مقدار 1 را نمی‌گیرد. خانه‌های 2,2 و 4,2 نیز با همین استدلال 1 را نمی‌گیرند
پس مقدار 3,2 حتماً 1 است!

HW2
AI

مهدی شاهینی
9923040

2 الف)

(1,4)
↓ A
(2,4)
↓ B
(2,3)
A ↙ ↘
(1,3) (4,3) → End (1,-1)
B ↙ ↘
(1,2) ? $\boxed{(1,4)}$ → تکراری
A ↓
(3,2)
B ↙ ↘
(-1,1) End ← (3,1) (3,4)
↓ A
? $\boxed{(2,4)}$ → تکراری

ب) فرض کنیم A نقش max و B نقش min دارند.

1 A (1,4) $\min(1) = 1$

2 B (2,4) $\min(1) = 1$

3 A (2,3) $\max(+1, \min(-1, ?_1, ?_2)) = 1$

4 B (1,3) B (4,3) ⇒ End (1,-1)

$\min(\min(-1, ?_2), ?_1)$
$= \min(-1, ?_1, ?_2) \leq -1$

5 $\max(\min(-1, ?_2)) = \min(-1, ?_2)$ A (1,2) A (1,4) $?_1$

6 B (3,2) $\min(-1, ?_2)$

7 (-1,1) End ⇐ A(3,1) -1 A (3,4) $\max(?_2) = ?_2$

8 B (2,4) $?_2$

در سطر 8، $\min(?_2)$ است پس حتما $?_2$ است. در سطر 7، $\max(-1) \leftarrow -1$

$?_2 \leftarrow \max(?_2)$

در سطر 6، $\min(-1, ?_2)$ حتما کران بالا -1 و خروجی حتما از -1 کمتر است.

در سطر 5، اکشن سمت راست $\max(?_1)$ است که همان $?_1$ است. اکشن چپ هم همان خروجی سطر 6 است.

در سطر 4 اکشن راست $\min(+1)$ است که همان $+1$ را بالا می‌دهد.

اکشن چپ، $\min(?_1, \min(-1, ?_2))$ است. پس در واقع $\min(-1, ?_1, ?_2)$ است که کران

بالای آن -1 است. در سطر 3، تابع max داریم. $\max(+1, 4_{Left})$ است. اکشن چپ سطر 4 حداکثر

مقدار -1 دارد پس $\max(+1, -1)$ حتما $+1$ است و همینطور $+1$ بالاتر می‌رود.

در صورتی که هدف این باشد A در سریعترین حالت ببرد پس $-1 \leq \min(-1, ?_1, ?_2)$ باید باشد:

چون کران بالا -1 است پس $?_2$ و $?_1$ اگر بیشتر از -1 باشند خروجی -1 و اگر کمتر از -1 باشند

خروجی عدد کمتر است.

حال در سطر 4 برای اینکه اکشن راست $+1$ و چپ -1 را بدهد پس $?_1$ و $?_2$ حتما بزرگتر از -1 هستند.

در سطر 5، $?_1$ همان مقدار 1 را می‌گیرد و $\min(-1, ?_2) = -1$ خواهد بود. حال $?_2$ همان استیت $(2,4)$

است که B باید انتخاب کند. مثل بالا، آن را هم $+1$ انتخاب می‌کنیم.

ج) الگوریتم، min max، در واقع تعیین کننده اکشن به هنگام اجرای dfs است.

چون dfs را بر درخت پیاده کردیم؛ حلقه داریم و باید به گراف تبدیل شود.

حال برای اینکه الگوریتم این را تشخیص بدهد باید یک DS با $O(1)$ داشته باشیم تا اگر $\{act, state\}$ تکراری بود از آن پرهیز کند

حال دو روش پیش رو داریم تا درخت را هرس کنیم. مقدار آن را $+1$ لحاظ کنیم و از state تکراری و ادامه آن پرهیز کنیم مشابه

بخش ب

اما اگر نخواهیم کل شاخه هرس شود باید fun شاخه لحاظ شود مثلا در این سوال اگر action راست در 6 به 7 هرس شود

چون B است پس $?_2$، مقدار $+\infty$ است و به طرز مشابه در $?_1$، مقدار آن $-\infty$ است.

د) اثبات 1 : $n = 2q$ و هر دو عامل حریصانه بازی می‌کنند. $\Longrightarrow$ در زمان $2(q-1)$ ابتدایی، A از خانه ۱ به q و

B نیز از خانه $2q$ به خانه $(q+1)$ رسیده است. در زمان $2q-1$، چون فردا است نوبت A است؛ چون می‌تواند

به خانه $q+1$ برود پس پرش می‌کند به خانه $(q+2)$ و B در زمان $2q$ به خانه q می‌رود. حال فاصله آنها به ترتیب

$A = |2q-(q+2)| = q-2$ و $B = |1-q| = q+1$ پس عامل A، 3 مرحله زمانی از B جلوتر است و قطعاً برنده می‌شود.

اثبات 2 : در این سؤال حالت 4 خانه حل شد. اگر 6 خانه شوند در زمان 2، A در خانه 2 و B در خانه 5 است پس انگار 4 خانه دارد لذا باز هم A برنده است. در حالت $2q$ نیز در زمان $(2q-4)$ که هر کدام $q-2$ حرکت کرده‌اند باز هم حالت 4 خانه است و باز هم A برنده است. در حالت $2q+2$ در زمان $2q-2$ که هر کدام $q-1$ حرکت کرده‌اند باز هم حالت 4 خانه، و A برنده است. بنابراین طبق قضیه استقرا، A برنده است!

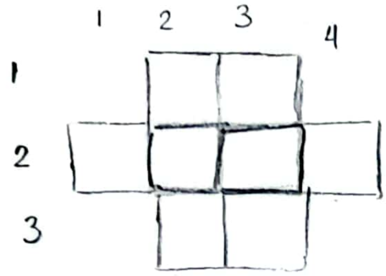
HW2

AI

مهدی شاهینی

9923040

3



(I) $x_{ij} \neq x_{mn} \quad \forall i \neq m \quad \forall j \neq n$

(II) $\begin{cases} |x_{ij} - x_{i(j+1)}| \geq 2 \\ |x_{ij} - x_{(i+1)j}| \geq 2 \\ |x_{ij} - x_{i+1\,j+1}| \geq 2 \end{cases}$

III $x_{ij} \in \{1, 2, 3, \dots, 8\} = U$

$\{1\}, \{3, \dots, 8\}_6 \quad \{3\}, \{1,5,6,7,8\}_5$

$\{8\}, \{1, \dots, 6\}_6 \quad \{5\}, \{1,2,3,7,8\}_5$

$\{2\}, \{4, \dots, 8\}_5 \quad \{4\}, \{1,2,6,7,8\}_5$

$\{7\}, \{1, \dots, 5\}_5 \quad \{6\}, \{1,2,3,4,8\}_5$

II and III $\Rightarrow$

$|x_{12} - x'| \geq 2 \quad x' \in \{x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}\}_4$

$|x_{13} - x'| \geq 2 \quad x' \in \{x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}\}_4$

$|x_{32} - x'| \geq 2 \quad x' \in \{x_{33}, x_{22}, x_{23}, x_{21}\}_4$

$|x_{33} - x'| \geq 2 \quad x' \in \{x_{32}, x_{23}, x_{22}, x_{24}\}_4$

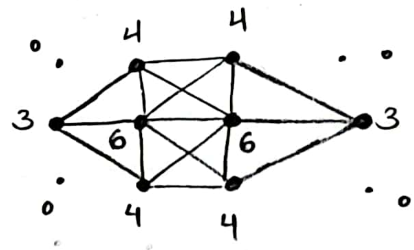
$|x_{21} - x'| \geq 2 \quad x' \in \{x_{12}, x_{22}, x_{32}\}_3$

$|x_{24} - x'| \geq 2 \quad x' \in \{x_{13}, x_{23}, x_{33}\}_3$

$|x_{22} - x'| \geq 2 \quad x' \in (U - x_{24})_6$

$|x_{23} - x'| \geq 2 \quad x' \in (U - x_{21})_6$

اندیس هر کدام تعداد محدودیت ها یا درجه در گراف است.



بنابراین در یک CSP هوشمندانه است ابتدا stateهایی که بیشترین محدودیت را بر بقیه اعمال می کنند، مشخص کنیم.

مطابق بخش III محدودیت ها، ۱ و 8 بیشترین قابلیت همسایه شدن با درجه 6 را دارند پس $x_{22} = 1$ $x_{23} = 8$

" " " " ، خانه های x_{12}, x_{13} و x_{32}, x_{33} باید با یکدیگر و $\{1, 8\}$ همسایه باشند؛ پس در واقع x_{12}, x_{13} باید به ترتیب 3 و 5 باشند. به همین صورت x_{32} و x_{33} به ترتیب 4 و 6 هستند.

متناسب همسایگی ها x_{21}، 7 و x_{24}، 2 انتخاب می شود.

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

مهدی شاهنی
9923040

HW2
AI

۴ الف

L=0 $\longrightarrow$ new states = 1

L=1 $\longrightarrow$ new states $= \binom{n}{1} = n$

L=2 $\longrightarrow$ " $= \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} = n(n-1)$

L=3 $\longrightarrow$ " $= \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{1} = n(n-1)(n-2)$

$\vdots$

L=n-1 $\longrightarrow$ " $= \binom{n}{1}\cdots\binom{n-(n-2)}{1} = n!$

L=n $\longrightarrow$ " $= \binom{n}{1}\cdots\binom{1}{1} = n! \longrightarrow$ تعداد حالات یا stateها در لایه آخر

یعنی تعداد گره‌ها $\sum_{K=1}^{n} K!$ و بیشینه‌اش $n!$ است.

ب) اگر هیچ حالت بردی وجود نداشته باشد؛ چون n خانه داریم پس $\frac{n}{2}$ حرکات را A و $\frac{n}{2}$ حرکات را B انجام می‌دهد

حال اگر $\frac{n}{2}$ خانه‌ها را A پر کند همه خانه‌های باقی‌مانده حتماً با B پر می‌شود پس $\binom{n}{n/2}$ حالت وجود دارد.

5

I) $\overline{WXYZ} \longrightarrow \overline{WXYZ} \overset{2}{\equiv} 1$, II) $W,X,Y,Z \in \{5,\dots,9\}$ (قبل از اعمال محدودیت)

III) $W<X<Y<Z$

محدودیت‌های اولیه سؤال:

الف) محدودیت‌های اولیه + تفسیر و تفصیل آنها:

I, II, III, IV) I and II : $Z \in \{5,7,9\} \longrightarrow$ IV)

تفسیر اولیه از دامنه‌ها:

$W,X,Y \in \{5,6,7,8,9\}$

$Z \in \{5,7,9\}$

ب) چون نابرابری III وجود دارد: 1 اعداد متمایز هستند

2 پس از انتخاب Z، باید 3 رقم کوچکتر باقی مانده باشد/ پس $Z \in \{9\}$ است.

حال که 9 از دامنه اعداد خط خورده داریم $W,X,Y \in \{5,\dots,8\}$ است. $\longleftarrow$ چون نابرابری $W<X$ وجود دارد پس:

$W \neq 8,\ X \neq 5 \longrightarrow W \in \{5,6,7\}\quad X \in \{6,7,8\}$

چون $X<Y$ است: پس ابتدا $W<Y$ پس 5 از دامنه Y خط می‌خورد $X,Y \in \{6,7,8\}$ حال در این نابرابری

$Y \neq 6$ و $X \neq 8$ است پس $Y \in \{7,8\}$ و $X \in \{6,7\}$ است. اگر $X=7$ باشد؛ $W \neq 7$ و اگر $X=6$ باز هم همانطور

پس 7 از دامنه W خط می‌خورد!

$W \in \{5,6\},\ X \in \{6,7\},\ Y = \{7,8\},\ Z \in \{9\}$

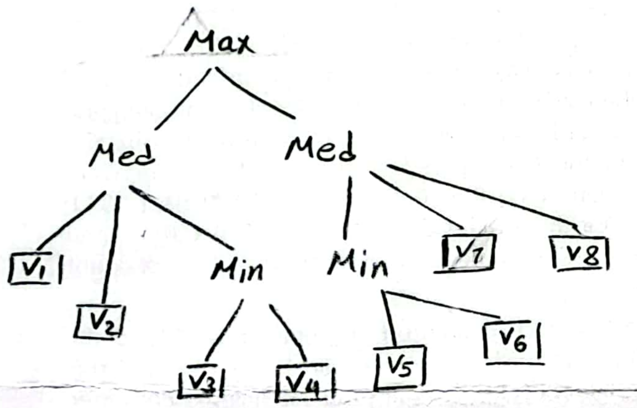
HW2 / AI — ادامه سؤال 5 / 6

مهدی شاهنی
9928040

ج 5) 1 — ابتدای حل مسئله دامنه Z، سه و سایرین 5 بود. چون کوچکترین دامنه را دارد، تعیین مقدار آن به علت وجود نابرابری بر همه متغیرها اثر دارد والبته در صورت وجود مشکل چون دامنه کوچکتری دارد احتمال بیشتری دارد زودتر مشخص شود پس Z

ج 5) 2 — $W \in \{5, ..., 9\}$ چون نابرابری وجود دارد حتماً و انتخاب می‌شود چون اولویت با کوچکترین مقدار است: حتماً 5 انتخاب می‌شود!
هنگامی که الزاماً از یک متغیر شروع به مقداردهی می‌کنیم برای کاهش backtrack باید مقداری را انتخاب کنیم که کمترین دردسر را برای همسایه‌ها داشته باشه! اما وقتی قرار است متغیری را انتخاب کنیم، متغیری را انتخاب می‌کنیم که بیشترین همسایگی و قید را دارد تا اگر دردسر و backtrack وجود دارد در اسرع وقت متوجه شوم.

6



Max $\longrightarrow$ X
Med $\longrightarrow D_1, D_2$
Min $\longrightarrow N_1, N_2$

$N_1 = \min(V_3, V_4)$
$N_2 = \min(V_5, V_6)$
$D_1 = med(V_1, V_2, N_1)$
$D_2 = med(N_2, V_7, V_8)$

$X = \max(D_1, D_2)$

(I) $D_1 \in \{V_1, V_2, N_1\} \longrightarrow$ شرایطی که می‌تواند هرس کردن را فراهم آورد: ⇐ اگر دو مقدار تکراری داشته باشیم
if $V_1 = V_2 \rightarrow D_1 = V_1 = V_2$
N_1 هرس
if $V_3 \leq V_1, V_2 \rightarrow D_1 = \min(V_1, V_2)$ or $med(V_3, V_1, V_2)$
V_4 هرس

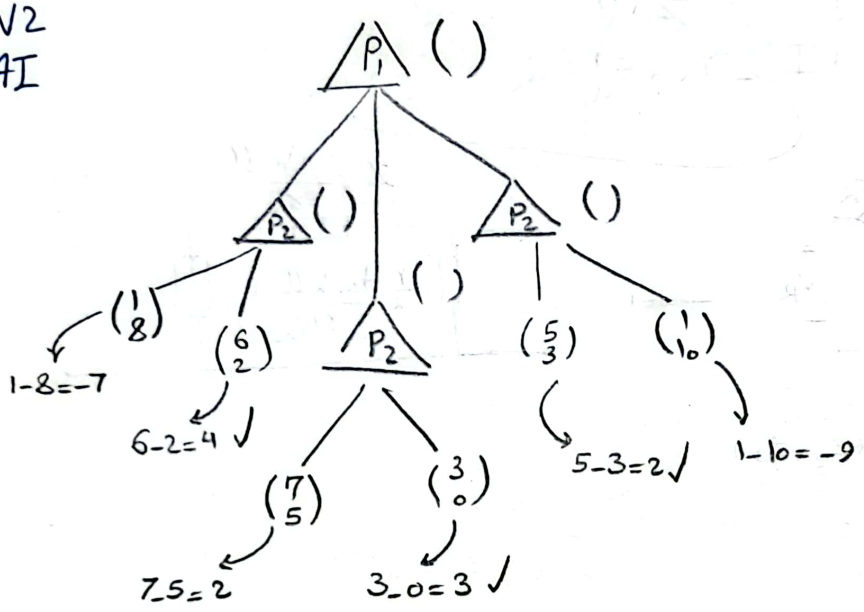
زیرا کران بالای N_1، برابر V_3 می‌شود اگر V_3 کوچکتر از V_1 و V_2 باشد پس جواب به همان صورتی است که گفته شد و نیازی به بررسی V_4 نیست.

II اگر V_5 کوچکتر از D_1 باشد چون کران بالای min است؛ بنابراین اگر خروجی min نیز باشد؛ در ادامه خروجی med هم شود هرگز توسط max انتخاب نمی‌شود پس نیازی به بررسی V_6 نیست!

III همانند بررسی V_7، اگر N_2 و V_7 هر دو کوچکتر از D_1 باشند چون کران بالای D_2 برابر $\max(N_2, V_7)$ است پس max هیچگاه D_2 را انتخاب نمی‌کند و نیازی به بررسی V_8 نیست!

HW2
AI

مهدی شاهسی
9923040



چپ به راست $\binom{6}{2}$ $\binom{3}{0}$ $\binom{5}{3}$ $P_1 = \max(x_1, x_2, x_3) = 6 \Rightarrow \binom{6}{2}$

چون برای بازیکن P_1 فقط مقدار x اهمیت دارد پس اگر مقدار x یک پلیر P_2 کمتر از دیگری باشد قطعاً انتخاب نخواهد شد

به همین خاطر بعد از بررسی $\binom{1}{8}$ بررسی $\binom{6}{2}$ الزامی است. سپس بررسی $\binom{7}{5}$ الزامی است؛ پس از آن $\binom{3}{0}$ الزامی است چون قبل از بررسی مشخص نیست $\binom{7}{5}$ بالاترین گزینه. بررسی $\binom{5}{3}$ الزامی است چون نمی‌دانیم مقدار گره بعدی چند است

سپس در گره $\binom{1}{10}$ چون مقدار x هر دو کمتر از 6 است پس هیچ کدام بالا نمی‌روند و محاسبه 1-10 الزامی نیست

$\overset{x}{x}$ ... در نهایت شاخه‌ای هرس نشد! اما مقدار گره $\binom{1}{10}$ نیازی به محاسبه نداشت.

$\binom{1}{8}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{3}{0}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{1}{10}$

$-x$: $-1 > -6$ $\quad -7 < -3$ $\quad -5 < -1$ $\qquad P(happy)\,P(-x|happy) + P(sad)\,P(-x|sad) = ac+bf$

$x-y$: $-7 < 4$ $\quad 2 < 3$ $\quad 2 > -9$ $\qquad P(h)\,P(x-y|h) + P(s)\,P(x-y|s) = ad+bg$

x^2+y^2: $65 > 40$ $\quad 74 > 9$ $\quad 34 < 101$ $\qquad P(h)\,P(x^2+y^2|h) + P(s)\,P(x^2+y^2|s) = ae+bh$

شاخه چپ: $(ac+bf)(1) + (ad+bg)(6) + (ae+bh)(-5)$

شاخه وسط: $(ac+bf)(3) + (ad+bg)(3) + (ae+bh)(7)$

$P_1 = \max($شاخه چپ, شاخه وسط, شاخه راست$)$

شاخه راست: $(ac+bf)(1) + (ad+bg)(5) + (ae+bh)(1)$