Gauss-Markov feltevések

Ahhoz, hogy az OLS elven becsült lineáris regressziónak fennálljanak bizonyos előnyös tulajdonságai, meghatározott feltevéseknek teljesülniük kell:

1. **Modell linearitás**: Feltesszük, hogy az Y és az X közötti kapcsolat lineárisan leírható
2. Az adatok a sokaság **véletlen mintái**. A legtöbbször használt i.i.d. ennél szigorúbb, tehát teljesíti a véletlen mintás feltevést.
3. X mátrix **teljes oszlop rangú**. Ezen feltevés alpján tehát nincs egzakt multikolinearitás. Ha ezt nem teszük fel, akkor $(X^T X)$ nem lenne invertálható tetszőleges X esetén.
4. $\mathbb{E}[\epsilon|X] = 0$. Ez a feltevés (0 feltételes átlag) alapján a hibatagok átlaga 0. Ebből következik, hogy $\mathbb{E}(Y) = X\beta$.
5. $\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X] = \sigma^2 I$. Ezen feltevés szerint a hibatagok homoszkedasztikusak és autokorrelálatlanok.

OLS torzítatlanság

A Gauss-Markov feltevések (1.-4.) alapján $\hat{\beta}_{OLS}$ torzítatlan becslője β-nak. $\mathbb{E}[\hat{\beta}_{OLS}] - \beta = 0$

Bizonyítás

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_{OLS}] = \mathbb{E}[(X^TX)^{-1}X^TY] = \mathbb{E}[(X^TX)^{-1}X^T(X\beta + \epsilon)]$$

$$= \mathbb{E}[(X^TX)^{-1}X^TX\beta] + \mathbb{E}[(X^TX)^{-1}X^T\epsilon]$$

- Ismerjük fel, hogy $(X^TX)^{-1}X^TX = I$, és $\mathbb{E}[\beta] = \beta$ így

$$= \beta + \mathbb{E}[(X^TX)^{-1}X^T\epsilon]$$

- A 4. Gauss-Markov feltevés ($\mathbb{E}(\epsilon|X) = 0$) alapján

$$= \beta$$

$$\implies \mathbb{E}[\hat{\beta}_{OLS}] - \beta = 0$$

OLS kovariancia mátrix

A Gauss-Markov feltevések (1.-5.) alapján $\mathbb{V}[\hat{\beta}_{OLS}] = \sigma^2(X^TX)^{-1}$

Bizonyítás

$$\mathbb{V}[\hat{\beta}_{OLS}] = \mathbb{E}[(\hat{\beta}_{OLS} - \mathbb{E}[\hat{\beta}_{OLS}])(\hat{\beta}_{OLS} - \mathbb{E}[\hat{\beta}_{OLS}])^T]$$

$$= \mathbb{E}[(\hat{\beta}_{OLS} - \beta)(\hat{\beta}_{OLS} - \beta)^T]$$

$$= \mathbb{E}[[(X^TX)^{-1}X^T\epsilon] * [(X^TX)^{-1}X^T\epsilon)^T]]$$

$$= \mathbb{E}[(X^TX)^{-1}X^T\epsilon\epsilon^TX(X^TX)^{-1}]$$

$$= (\mathsf{X}^TX)^{-1}X^T\,\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T]X(X^TX)^{-1}$$

- Az 5. Gauss-Markov feltevés ($\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X] = \sigma^2 I$) alapján

$$= (\mathsf{X}^TX)^{-1}X^T\sigma^2 IX(X^TX)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1} = \sigma^2(X^TX)^{-1}$$

Gauss-Markov tétel

Gauss-Markov tétel

Ha teljesül mindegyik feltétel (1.-5.), akkor a **lineáris, torzítatlan becslők körében** az OLS-becslő **minimális varianciájú** (azaz hatásos).

Más szavakkal elmondva, az OLS-becslő **B**est, **L**inear, **U**nbiased, **E**fficient becslő, tehát **BLUE** estimator.

Általánosított regressziós modell

Az 5.Gauss-Markov feltevés ($\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X] = \sigma^2 I$) szerint a hibatagok homoszkedasztikusak és autokorrelálatlanok. Ez a feltevés gyakran túlzottan szigorú, és nem fedi le azokat az eseteket amelyekkel adatelmezés során talákozunk.

Ha a $\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X]$ mátrix főátlójának elemei nem azonosak, akkor a hibatagok nem homoszkedasztikusak, amennyiben a főátlón kívüli elemek különböznek nullától, akkor a hibatagok között korreláció áll fent.

Bármely tetszőleges pozitív skalár σ^2 mellett definiálható $V(X) \equiv \mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X]/\sigma^2$ és feltesszük, hogy $V(X)$ nem szinguláris, és előre ismert. Ekkor:

$$\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X] = \sigma^2 V(X), \text{ ahol } V(X) \text{ n} \times \text{n nem szinguláris mátrix.}$$

Amennyiben az 5.Gauss-Markov feltevést felváltjuk az előző egyenlent eredményére ($\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T|X] = \sigma^2 V(X)$) – amely annyit feltételez, hogy a feltételes második momentum nem szinguláris – akkor az úgynevezett **áltatlánosított regressziós modellt** kapjuk.

Következmények

Azok a következtetések, amelyek az 5. feltevés meglétét alkalmazták nem lesznek validak az általánosított regressziós modell esetén. Tételesen:

1. Az OLS elvű becslés esetén a Gauss-Markov tétel nem érvényes, a

$$\hat{\beta} \equiv (X^T X)^{-1} X^T Y$$

   nem a legkisebb varianciájú a lineáris, torzítatlan becslők körében (nem BLUE)
2. A t-érték nem követ t-eloszlást, tehát a t-teszt nem valid
3. A kis mintás Wald statisztika nem követ F-eloszlást, tehát a F-teszt nem valid
4. Az OLS becslő továbbra is torzítatlan, mert a levezetéshez erre a feltevésre nem volt szükség (lásd itt)

G-M feltevések az áltatlánosított regresszió esetén

Mivel $V(X)$ – továbbiakban V – szimmetrikus és pozitív szemidefinit, ezért létezik olyan n×n C mátix, amelyre igaz, hogy:

$$V^{-1} = C^T C.$$

Ez dekompozíció nem egyedi (*not unique*), tehát több C mátrixra is igaz. Ez alapján felírható egy új regressziós model a következő transzformációval:

$$\tilde{Y} \equiv CY, \tilde{X} \equiv CX, \tilde{\epsilon} \equiv C\epsilon.$$

1. **Modell linearitás**: $\tilde{y} = \tilde{X}\beta + \tilde{\epsilon}$
2. Az adatok a sokaság **véletlen mintái**.
3. $rank(\tilde{X}) = rank(X)$, mivel C nem szinguláris. $\tilde{X}$ **teljes oszlop rangú**.
4. $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}|\tilde{X}] = C\,\mathbb{E}[\epsilon|X] = 0$. A hibatagok átlaga transzformációt követően is 0.
5. $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}^T|\tilde{X}] = \sigma^2 CVC^T = \sigma^2 I$.

GLS becslés

Mivel a transzformált modellre teljesülnek a Gauss-Markov feltevések, ezért a Gauss-Markov tételből következik, hogy az általánosított regressziós modellre alkalmazott OLS elvű becslő minimális varianciájú lesz a lineáris, torzítatlan becslők körében. Ezt a becslőt nevezzük **általánosított legkisebb négyzetek módszerének, vagy GLS elvű becslőnek**.

GLS paraméter becslés

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\tilde{X}^T\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T\tilde{y}$$

$$= [(\mathsf{CX})^T(CX)]^{-1}(CX)^TCy$$

$$= (\mathsf{X}^TC^TCX)^{-1}(X^TC^TCy)$$

$$= (\mathsf{X}^TV^{-1}X)^{-1}(X^TV^{-1}y)$$

GLS feltételes variancia

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}_{GLS}|X) = \sigma^2(X^TV^{-1}X)^{-1}$$

GLS tulajdonságok

Kismintás tulajdonságok:

1. A GLS elvű becslő torzítatlan ($\mathbb{E}(\hat{\beta}_{GLS}|X) = \beta$)
2. A feltételes variancia arányos V-vel:$\mathbb{V}(\hat{\beta}_{GLS}|X) = \sigma^2(X^TV^{-1}X)^{-1}$
3. A GLS elvű becslő hatékony, tehát minden lineáris, torzítatlan becslőnek legalább akkora a feltételes varianciája, mint a GLS feltételes varianciája.

Limitációk:

1. Amennyiben a 4. Gauss-Markov feltevés sérül ($\mathbb{E}(\tilde{\epsilon}|\tilde{X}) \neq 0$), úgy a GLS nem lesz torzítatlan. Ez a tuladonság az OLS esetén is fennáll, de utóbbi nagymintás tulajdonságai ezt a hátrányt orvosolják. A GLS esetében nincsenek ilyen pozitív nagymintás tulajdonságok.
2. A gyakorlatban nem ismerjük V mátrixot, és ezt becsülnünk kell. Ebben az esetben **Megvalósítható GLS/Feasible GLS** becslőről beszélünk.

FGLS becslés lépései

A Feasible GLS elvű becslés lépései:

1. Becsüld meg $\hat{\beta}$ koefficienseket OLS elvű becslővel.
2. A kapott koefficiens vektor segítségével számítsd ki a modell hibáit (ϵ).
3. A négyzetes hibákra becsülj egy kiegészítő regressziót ($\hat{\omega}$).
4. A becsült koefficiensek ($\hat{\omega}$) alapján elítsd elő $\hat{V}$ variancia mátrixot.
5. $\hat{V}$-t felhasználva transzformáld X és Y változókat ($\tilde{X}$, $\tilde{Y}$).
6. A transzformált változókon becsüld meg $\hat{\beta}_{GLS}$ koefficienseket OLS elvű becslővel.