

Poročilo okrivanja 1-D ODE v Lorenzovem sistemu

15. december 2020

Odkrivanje 1-D ODE enačb sem poganjal na Lorenzovem sistemu enačb:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z,\end{aligned}$$

pri začetnih pogojih $x_0 := 0.1, y_0 := 0.3, z_0 := 0.4$. Začetni pogoji so isti v vseh primerih skozi celotno poročilo. Parametri σ, ρ in β pa se sredi poročila spremenijo. Najprej sem obravnaval nekaotične parametre, nato pa še znano kaotične parametre z vrednostmi $\sigma := 10, \rho := 28$ in $\beta := 8/3$.

0.1 Domnevno nekaotični parametri

Najprej sem algoritem pognal pri nekaotičnih subjektivno naključno izbranih parametrih $\sigma := 1.3, \rho := -15$ in $\beta := 3.4$. Navedeni izbrani parametri se na splošno smatrajo kot nenormalni, saj je vsaj eden izmed parametrov (ρ) negativen. Podatkovno množico sem generiral tako, da sem simuliral Lorenzov sistem:

prva enačba $dx/dt = \sigma * (y - x)$: najde rešitev $-1.3 * x + 1.3 * y$ ali v 50 samplih, resitev ima napako reda $10 * (-9)$.

druga enačba $dy/dt = \sigma * (y - x)$: najde rešitev v 4500 ali 6500 samplih, resitev $-9.99969912689157 * x * z - 9.99918437188885 * x + 0.0193086499353945 * y - 1.09610736513107 * z = -10 * x * z - 10 * x + 0.02 * y - z$ oz. $-10.0 * x * z - 10.0 * x - 2.28910354326151 * y = 10 * x * z - 10 * x + 2 * y$ ima napako velikosti 004348586258407 reda $10 * (-6)$ oz. $10 * (-4)$.

Tako velik odmik od pravilne resitve $-15 * x - x * z - y$ pripisujem trenutno nastavljeni omejitvi v implementaciji optimizacijskega algoritma, ki omejuje parametre na interval $[-10, 10]$. Parameter v členu $-10 * x$ je tako lahko po absolutni vrednosti največ 10, torej ne more biti -15, kot je v izvorni enačbi. Predvidevam, da se zato zgodi kompenzacija nad ostalimi parametri v ostalih členih enačbe. Predvidevam še, da se bo pri rahljanju omejitve iz $[-10, 10]$ na $[-20, 20]$ napaka popravila na napako reda $10 * (-9)$ kot pri ostalih dveh enačbah.

tretja enačba $dz/dt = \sigma * (y - x)$: najde rešitev $-1.3 * x + 1.3 * y$ ali v 50 samplih, resitev ima napako velikosti reda $10 * (-9)$.

Sledi poročilo o poganjanju pri kaotičnih parametrih: $\sigma := 10, \rho := 28, \beta := 8/3$

Ker je ρ po absolutni vrednosti spet večji od 10, tj. od nastavljenih mej za parametre optimizacijskega algoritma in so ostali dve vrednosti znotraj mej, napovedujem, da bodo v najboljšem primeru podobni rezultati kot v nekaotičnem primeru. Oziroma, pri drugi ena”bi pričakujem $\sigma^* = 10, \rho^* = 10, \beta^* = 7$.

0.2 Kaotični rezultati

V odkrivanju prve enačbe algoritem odkrije enačbo:

$$-9.85764357227234 * x + 9.9333747564978 * y$$

oz.

$$-9.55829580188787 * x + 9.78920618974904 * y + 0.0232261285460231$$

v manj kot 50 vzorcih, medtem ko ima rešitev napako velikosti $2.94709382690573e-06$ oz. $2.4772067855792343e-06$.

V odkrivanju druge enačbe algoritem odkrije enačbo:

$$-0.670382396435091 * x * z + 10.0 * x + 6.94013313376156 * y$$

$$-0.877950876789105 * x * z + 9.99535400929563 * x + 7.38550161602604 * y - 0.617064542958862$$

v 6500 vzorcih, enačba ima napako velikosti $0.0033668325250160443 = 3.4 \cdot 10^{-3}$ oz. $0.00018803715641311185 = 1.9 \cdot 10^{-4}$. Medtem, ko je izmed vseh vzorčenih enačb, najmanjša opažena napaka reda 10^{-5} .

V odkrivanju tretje enačbe algoritem odkrije enačbo:

$$\frac{dz}{dt} = 0.991337569095305 * x * y - 2.56521319047224 * z$$

v manj kot 100 vzorcih, enačba ima napako velikosti $9.178140365155879e-05 = 9.2 \cdot 10^{-5}$, kar je v okviru najmanjšega opaženega reda velikosti napake.

1 Poročilo v tabeli

Celotno poročilo je stisnjeno tudi v naslednji tabeli:

tip enačbe oz. para- metri	leva stran enačbe	najdena desna stran enačbe vs. izvorna enačba	napaka enac"be	število po- treb- nih vzor- cev	hramba rezul- tatov	top 1%
nekaotična, $\frac{dx}{dt}$		$-1.303 * x + 1.303 * y$	$\cdot 10^{-9}$	50		
tj. $\sigma =$		$-1.3 * x + 1.3 * y$				
$1.3, \rho =$	$\frac{dy}{dt}$	$-10.0 * x * z - 10.0 * x - 2.289 * y$	$8 \cdot 10^{-4}$	100		
$-15, \beta =$		$-x * z - 15 * x - y$				
3.4	$\frac{dz}{dt}$	$1.054 * x * y - 3.402 * z$	$2.205 \cdot 10^{-9}$	6500		
		$x * y - 3.4 * z$				
nekaotična, $\frac{dx}{dt}$		$-9.857 * x + 9.933 * y$	$2.947 \cdot 10^{-6}$	50		
tj. $\sigma =$		$-10 * x + 10 * y$				
$10, \rho =$	$\frac{dy}{dt}$	$-0.670 * x * z + 10.0 * x + 6.940 * y$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	100		
$28, \beta =$		$-x * z + 28 * x - y$				
2.66666	$\frac{dz}{dt}$	$0.991 * x * y - 2.565 * z$	$9.2 \cdot 10^{-5}$	6500		
		$x * y - 2.66666 * z$				