

1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学 I

一、(每小题 5, 本题满分 15 分)

- (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.
- (2) 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$. 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.
- (3) 设 S 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算曲面积分 $I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$.

二、填空题:(本题满分 12 分, 每小题 3 分)

- (1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____
- (2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上定义为 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 _____.
- (3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 则 $f(7)$ _____.
- (4) 设 4 阶矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中, $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A| = 4$, $|B| = 1$, 则行列式 $|A+B| =$ _____.

三、选择题(每小题 3 分, 满分 15 分)

- (1) 若函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是 ()
- (A) 与 Δx 等价的无穷小 (B) 与 Δx 同阶的无穷小
- (C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小
- (2) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0
- (A) 取得极大值 (B) 取得极小值
- (C) 某个邻域内单调增加 (D) 某个邻域内单调减少
- (3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则 ()
- (A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$
- (C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处 ()

- (A) 条件收敛 (B) 绝对收敛
(C) 发散 (D) 收敛性不能确定

(5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充分必要条件是 ()

(A) 有一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表出

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

四、(本题满分 6 分)

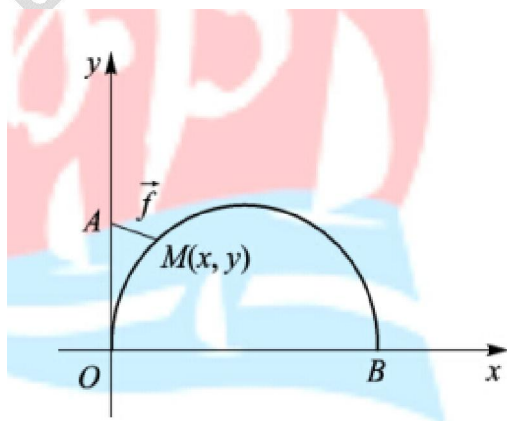
设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离), 质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.



七、(本题满分 6 分)

已知 $AP = PB$ ，其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ， $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 A 及 A^5 。

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，

(1) 求 x 与 y ，(2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P 。

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$ 。证明：在 (a, b) 内存在唯一的 ξ ，使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$ ， $x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$ ， $x = b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍。

十、填空题 (每小题 2 分，满分 6 分)

(1) 设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等。若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$ ，则事件 A 在一次试验中出现的概率为_____。

(2) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为_____。

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布。已知 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ ，

$\Phi(2.5) = 0.9938$ ，则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为_____。

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ，求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率

密度函数 $f_Y(y)$ 。

数学 II

一、(本题满分 15 分, 每小题 5 分)

- (1) 【同数学 I 第一 (1) 题】
- (2) 【同数学 I 第一 (2) 题】
- (3) 【同数学 I 第一 (3) 题】

二、填空题 (本题满分 12 分, 每小题 3 分)

- (1) 【同数学 I 第二 (1) 题】
- (2) 【同数学 I 第二 (2) 题】
- (3) 【同数学 I 第二 (3) 题】
- (4) 【同数学 I 第二 (4) 题】

三、选择题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

- (1) 【同数学 I 第三 (1) 题】
- (2) 【同数学 I 第三 (2) 题】
- (3) 【同数学 I 第三 (3) 题】
- (4) 【同数学 I 第三 (4) 题】
- (5) 【同数学 I 第三 (5) 题】

四、(本题满分 18 分, 每小题 6 分)

- (1) 【同数学 I 第四题】

(2) 计算 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$

- (3) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程, 使平面 π 过已知直线

$$l: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}.$$

五、(本题满分 8 分) 【同数学 I 第五题】

六、(本题满分 9 分) 【同数学 I 第六题】

七、(本题满分 6 分) 【同数学 I 第七题】

八、(本题满分 8 分) 【同数学 I 第八题】

九、(本题满分 9 分) 【同数学 I 第九题】

数学 III

一、填空题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

(1) 若 $f(x) = \begin{cases} e^x (\sin x + \cos x), & x > 0 \\ 2x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ _____

(2) 【同数学 I 第二 (1) 题】

(3) 【同数学 I 第二 (3) 题】

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} =$ _____

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx =$ _____

二、选择题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处切线与 x 轴交点的坐标是 ()

(A) $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ (D) $(1, 0)$

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有 ()

(A) $f(-x) > g(-x)$

(B) $f'(x) < g'(x)$

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$

(3) 【同数学 I 第二 (1) 题】

(4) 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x, (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体体积是 ()

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{4}{3}\pi$

(C) $\frac{2}{3}\pi^2$

(D) $\frac{2}{3}\pi$

(5) 【同数学 I 第三 (5) 题】

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 【同数学 I 第一 (2) 题】

(2) 已知 $y = 1 + xe^{xy}$, 求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$

(3) 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解 (一般解)。

四、(本题满分 12 分)

作函数 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形, 并填写下表.

单调增区间	
单调减区间	
极值点	
极值	
凹(∪) 区间	
凸(∩) 区间	
拐 点	
渐近线	

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形.问这两段铁丝各长为多少

时，正方形与圆形的面积之和为最小？

六、(本题满分 10 分)【同数学 I 第五题 (分值不同)】

七、(本题满分 7 分)

设 $x \geq -1$ ，求 $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$.

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数，且 $m \leq f(x) \leq M$.

(1) 求 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$;

(2) 证明 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m, (a > 0)$.

数学IV

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

(一) 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, $-\infty < x < +\infty$

(1) $f'(x) =$ _____

(2) $f(x)$ 的单调性: _____

(3) $f(x)$ 的奇偶性: _____

(4) $f(x)$ 图形的拐点: _____

(5) $f(x)$ 图形的凹凸性: _____

(6) $f(x)$ 图形的水平渐近线: _____

(二)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

(三)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

(四) 假设 $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$, 那么

(1) 若 A 与 B 互不相容, 则 $P(B) =$ _____

(2) 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(B) =$ _____

二、判断题（本题满分 10 分，每小题答对得 2 分，答错得 -1 分，不答得 0 分，全题最低 0 分）

(1) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在. ()

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x) = 0$. ()

(3) 等式 $\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(a-x)dx$, 对任何实数 a 都成立. ()

(4) 若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵, 且 $AB = 0$, 则 A 的秩必小于 n . ()

(5) 若事件 A , B , C 满足等式 $A \cup B = B \cup C$, 则 $A = B$. ()

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 16 分）

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

(2) 已知 $u + e^u = xy$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(3) 求定积分 $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$

四、(本题满分 6 分, 每小题 3 分)

(1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性

(2) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2$ 都收敛, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

五、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 P 的函数: $D = D(p) = \frac{a}{p^2}$,

$S = S(p) = bp$, 其中 $a > 0$ 和 $b > 0$ 是常数; 价格 P 是时间 t 的函数且满足方程

$\frac{dp}{dt} = k[d(p) - s(p)]$, (k 是常数), 假设当 $t = 0$ 时价格为 1, 试求:

(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 P_e ;

(2) 价格函数 $P(t)$;

(3) 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$

六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y = x^2, (x > 0)$ 上某点 A 处作一切线, 使之与曲线以及 x 轴所围成的面积为 $\frac{1}{12}$,

试求:

(1) 切点 A 的坐标;

(2) 过切点 A 的切线方程;

(3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

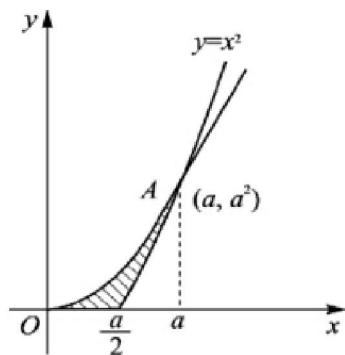
无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学视频文档资料，【公众号：小盆考研】，回复【数学】免费获取

更多考研押题资料视频，【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学预测卷，【公众号：小盆考研】，回复【数学预测】免费获取

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供



七、(本题满分 8 分)

已给线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - k_1x_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2 \end{cases}$$
 , 问 k_1 和 k_2 各取何值时, 方程组无解? 有

唯一解? 无穷解? 在方程组有无穷解的情景下, 试求出一般解.

八、(本题满分 7 分)

已知向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性无关, 设 $\beta_1 = a_1 + a_2$, $\beta_2 = a_2 + a_3$, \dots ,

$\beta_{s-1} = a_{s-1} + a_s$, $\beta_s = a_s + a_1$, 讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性.

九、(本题满分 6 分)

设 A 是三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A 的行列式 $|A| = \frac{1}{2}$, 求行列式 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值.

十、(本题满分 6 分)

玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率是 0.8, 0.1, 0.1, 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 而顾客开箱随机观察 4 只, 若无残次品, 则购买下该玻璃杯, 否则退回. 试求:

- (1) 顾客买下该箱的概率 α ;
- (2) 在顾客买下的一箱中, 确实没有残次品的概率 β .

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔户中被盗索赔户占 20%, 以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

- (1) 写出 X 的概率分布;
- (2) 利用棣莫佛拉普拉斯定理. 求出索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

(附: $\Phi(2.5) = 0.994$, $\Phi(1.5) = 0.993$)

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间 $(1, 2)$ 上服从均匀分布. 试求随机变量 $Y = e^{2x}$ 的概率密度 $f(y)$.

数学 V

一、【同数学IV第一题】

二、【同数学IV第二题】

三、(每小题 4 分, 满分 16 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$

(2) 已知 $u = e^{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

(3) 【同数学IV第三(3)题】

(4) 【同数学IV第三(4)题】

四、(本题满分 6 分)

确定常数 a 和 b , 使函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ 处处可导.

五、(本题满分 8 分) 【同数学III第五题】

六、(本题满分 8 分) 【同数学IV第六题】

七、(本题满分 8 分) 【同数学IV第七题】

八、(本题满分 6 分)

已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2 - 3A - 2E = 0$, E 是单位矩阵. 证明 A 可逆并求出其逆矩阵 A^{-1} .

九、(本题满分 7 分) 【同数学IV第八题】

十、(本题满分 7 分) 【同数学IV第十题】

十一、(本题满分 7 分)

假设有十只同种电器元件, 其中有两只废品, 装配仪器时从这批元件中任取一只, 如是废品, 则扔掉重新任取一只; 若仍是废品, 则扔掉再取一只. 试求在取到正品之前, 已取出的废品只数的分布, 数学期望与方差.

十二、(本题满分 5 分) 【同数学IV第十二题】