

2007 年硕士研究生入学考试数学一试题及答案解析

一、选择题: (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$. [B]

【分析】 利用已知无穷小量的等价代换公式, 尽量将四个选项先转化为其等价无穷小量, 再进行比较分析找出正确答案.

【详解】 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 有 $1 - e^{\sqrt{x}} = -(e^{\sqrt{x}} - 1) \sim -\sqrt{x}$; $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$;

$$1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x. \quad \text{利用排除法知应选(B).}$$

(2) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$, 渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. [D]

【分析】 先找出无定义点, 确定其是否为对应垂直渐近线; 再考虑水平或斜渐近线.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)] = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线;

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)] = 0$, 所以 $y = 0$ 为水平渐近线;

$$\text{进一步, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - 1 \cdot x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x (1 + e^{-x}) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

于是有斜渐近线: $y = x$. 故应选(D).

(3) 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

则下列结论正确的是

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.
(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$. [C]

【分析】 本题考查定积分的几何意义, 应注意 $f(x)$ 在不同区间段上的符号, 从而搞清楚相应积分与面积的关系.

【详解】 根据定积分的几何意义, 知 $F(2)$ 为半径是 1 的半圆面积: $F(2) = \frac{1}{2}\pi$,

$$F(3) \text{ 是两个半圆面积之差: } F(3) = \frac{1}{2} [\pi \cdot 1^2 - \pi \cdot (\frac{1}{2})^2] = \frac{3}{8} \pi = \frac{3}{4} F(2),$$

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x) dx = -\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = F(3)$$

因此应选(C).

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$. (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

[D]

【分析】 本题为极限的逆问题, 已知某极限存在的情况下, 需要利用极限的四则运算等进行分析讨论.

【详解】 (A),(B)两项中分母的极限为 0, 因此分子的极限也必须为 0, 均可推导出 $f(0)=0$. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 可见(C)也正确,

故应选(D). 事实上, 可举反例: $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|-|-x|}{x} = 0 \text{ 存在, 但 } f(x)=|x| \text{ 在 } x=0 \text{ 处不可导.}$$

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$. 令 $u_n = f(n) (n=1, 2, \dots)$,

则下列结论正确的是

- (A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.
 (C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散. [D]

【分析】 可直接证明或利用反例通过排除法进行讨论.

【详解】 设 $f(x)=x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0, u_1 < u_2$, 但 $\{u_n\} = \{n^2\}$ 发散, 排除(C); 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0, u_1 > u_2$, 但 $\{u_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ 收敛, 排除(B); 又若设 $f(x) = -\ln x$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0, u_1 > u_2$, 但 $\{u_n\} = \{-\ln n\}$ 发散, 排除(A). 故应选(D).

(6) 设曲线 $L: f(x, y)=1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列小于零的是

- (A) $\int_T f(x, y) dx$. (B) $\int_T f(x, y) dy$.
 (C) $\int_T f(x, y) ds$. (D) $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$. [B]

【分析】 直接计算出四个积分的值,从而可确定正确选项。

【详解】 设 M 、 N 点的坐标分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 > y_2$. 先将曲线方程代入积分表达式,再计算有:

$$\int_T f(x, y)dx = \int_T dx = x_2 - x_1 > 0; \quad \int_T f(x, y)dy = \int_T dy = y_2 - y_1 < 0;$$

$$\int_T f(x, y)ds = \int_T ds = s > 0; \quad \int_T f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \int_T df(x, y) = 0.$$

故正确选项为(B).

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$. (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$. [A]

【详解】 用定义进行判定:令

$$x_1(\alpha_1 - \alpha_2) + x_2(\alpha_2 - \alpha_3) + x_3(\alpha_3 - \alpha_1) = 0,$$

得 $(x_1 - x_3)\alpha_1 + (-x_1 + x_2)\alpha_2 + (-x_2 + x_3)\alpha_3 = 0.$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

又
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故上述齐次线性方程组有非零解, 即 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关. 类似可得(B), (C), (D)中的向量组都是线性无关的.

(8) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同, 且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 又不相似.

[B]

【详解】 由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 A 的特征值为 $0, 3, 3$, 而 B 的特征值为 $0, 1, 1$, 从而 A 与 B 不相似.

又 $r(A) = r(B) = 2$, 且 A, B 有相同的正惯性指数, 因此 A 与 B 合同. 故选(B).

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.

(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$. (D) $6p^2(1-p)^2$. [C]

【详解】“第4次射击恰好第2次命中”表示4次射击中第4次命中目标，前3次射击中有1次命中目标，由独立重复性知所求概率为： $C_3^1 p^2 (1-p)^2$. 故选(C).

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关， $f_X(x)f_Y(y)$ 分别表示 X ， Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下， X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

(A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$. (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$. [A]

【详解】因 (X, Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，故 X 与 Y 相互独立，于是 $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$. 因此选(A).

二、填空题：(11—16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$

【分析】先作变量代换，再分部积分。

【详解】
$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} t^3 e^t \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 t d e^t = t e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

(12) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数， $z = f(x^y, y^x)$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot yx^{y-1} + f'_2 \cdot y^x \ln y$.

【详解】利用复合函数求偏导公式，有 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot yx^{y-1} + f'_2 \cdot y^x \ln y$.

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$. 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【详解】特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ，解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. 可见对应齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

设非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的特解为 $y^* = ke^{2x}$ ，代入非齐次方程可得 $k = -2$. 故通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.

(14) 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$ ，则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \frac{4}{3} \sqrt{3}$.

【详解】 由于曲面 Σ 关于平面 $x=0$ 对称, 因此 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$. 又曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$ 具有轮换对称性, 于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (x + |y|) dS &= \iint_{\Sigma} |y| dS = \iint_{\Sigma} |x| dS = \iint_{\Sigma} |z| dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{3} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3} \sqrt{3}.\end{aligned}$$

(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 1.

【详解】 依矩阵乘法直接计算得 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $r(A^3) = 1$.

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\frac{3}{4}$.

【详解】 这是一个几何概型, 设 x, y 为所取的两个数, 则样本空间

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}, \quad \text{记 } A = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega, |x - y| < \frac{1}{2}\}.$$

故 $P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$, 其中 S_A, S_{Ω} 分别表示 A 与 Ω 的面积.

三、解答题: (17—24 小题, 共 86 分.)

(17) (本题满分 11 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

【分析】 由于 D 为闭区域, 在开区域内按无条件极值分析, 而在边界上按条件极值讨论即可.

【详解】 因为 $f'_x(x, y) = 2x - 2xy^2$, $f'_y(x, y) = 4y - 2x^2y$, 解方程:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0, \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases} \quad \text{得开区域内的可能极值点为 } (\pm\sqrt{2}, 1).$$

其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$.

又当 $y=0$ 时, $f(x, y) = x^2$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最大值为 4, 最小值为 0.

当 $x^2 + y^2 = 4, y > 0, -2 < x < 2$, 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2\lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} F'_x = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases} \text{得可能极值点: } (0, 2), (\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}), \text{ 其对应函}$$

$$\text{数值为 } f(0, 2) = 8, f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4}.$$

比较函数值 $2, 0, 4, 8, \frac{7}{4}$, 知 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值为 8 , 最小值为 0 .

(18) (本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy,$$

其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} (0 \leq z \leq 1)$ 的上侧。

【分析】 本题曲面 Σ 不封闭, 可考虑先添加一平面域使其封闭, 在封闭曲面所围成的区域内用高斯公式, 而在添加的平面域上直接投影即可。

【详解】 补充曲面: $\Sigma_1: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$, 取下侧. 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy - \iint_{\Sigma_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (z + 2z)dxdydz + \iint_D 3xydxdy \end{aligned}$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, D 为平面区域 $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

由于区域 D 关于 x 轴对称, 因此 $\iint_D 3xydxdy = 0$. 又

$$\iiint_{\Omega} (z + 2z)dxdydz = 3 \iiint_{\Omega} zdxdy = 3 \int_0^1 zdz \iint_{D_z} dxdy = 3 \int_0^1 z \cdot 2\pi(1-z)dz = \pi.$$

其中 $D_z: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 - z$.

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a)$,

$f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

【分析】 需要证明的结论与导数有关, 自然联想到用微分中值定理。事实上, 若令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则问题转化为证明 $F''(\xi) = 0$, 只需对 $F'(x)$ 用罗尔定理, 关键是找到 $F'(x)$ 的端点函数值相等的区间(特别是两个一阶导数同时为零的点), 而利用 $F(a) = F(b) = 0$, 若能再找一点 $c \in (a, b)$, 使得 $F(c) = 0$, 则在区间 $[a, c], [c, b]$ 上两次利用罗尔定理有一阶导函数相等的两点, 再对 $F'(x)$ 用罗尔定理即可。

【证明】 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, 由题设有 $F(a) = F(b) = 0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得

$$f(x_1) = M = \max_{[a,b]} f(x), g(x_2) = M = \max_{[a,b]} g(x),$$

若 $x_1 = x_2$, 令 $c = x_1$, 则 $F(c) = 0$.

若 $x_1 < x_2$, 因 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$, 从而存在 $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$, 使 $F(c) = 0$.

在区间 $[a, c], [c, b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 有

$$F''(\xi) = 0, \quad \text{即} \quad f''(\xi) = g''(\xi).$$

(20) (本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(I) 证明: $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$;

(II) 求 $y(x)$ 的表达式.

【分析】 先将和函数求一阶、二阶导, 再代入微分方程, 引出系数之间的递推关系。

【详解】 (I) 记 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, 代入微分方程

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, \text{ 有}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$\text{即 } \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n =$$

$$\text{故有 } (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n =$$

$$\text{即 } a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n=1, 2;$$

(III) 由初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 知, $a_0=0, a_1=1$. 于是根据递推关系式

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, \text{ 有 } a_{2n}=0, a_{2n+1} = \frac{1}{n!}. \text{ 故}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = x e^{x^2}.$$

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

【分析】 两个方程有公共解就是(1)与(2)联立起来的非齐次线性方程组有解.

【详解】 将(1)与(2)联立得非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1. \end{cases} \quad (3)$$

若此非齐次线性方程组有解, 则(1)与(2)有公共解, 且(3)的解即为所求全部公共解. 对(3)

的增广矩阵 \bar{A} 作初等行变换得:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是 1° 当 $a=1$ 时, 有 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组(3)有解, 即(1)与(2)有公共解, 其全部公共

解即为③的通解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组③为齐次线性方程组, 其基础解系为: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

所以①与②的全部公共解为 $k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k$ 为任意常数.

2° 当 $a=2$ 时, 有 $r(A)=r(\bar{A})=3$, 方程组③有唯一解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故方程组③的解为: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 即①与②有唯一公}$$

$$\text{共解: 为 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的

一个特征向量, 记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量.

(II) 求矩阵 B .

【分析】 根据特征值的性质可立即得 B 的特征值, 然后由 B 也是对称矩阵可求出其另外两个线性无关的特征向量.

【详解】 (I) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1=A\alpha_1=\alpha_1$,

$$\text{进一步} \quad A^3\alpha_1=\alpha_1, \quad A^5\alpha_1=\alpha_1,$$

$$\text{故} \quad B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1$$

$$=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1$$

$$=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1$$

$$= -2\alpha_1,$$

从而 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 -2 的特征向量.

因 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 及 A 的 3 个特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 得

B 的 3 个特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$.

设 α_2, α_3 为 B 的属于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量, 又

A 为对称矩阵, 得 B 也是对称矩阵, 因此 α_1 与 α_2, α_3 正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1^T \alpha_3 = 0$$

所以 α_2, α_3 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

其基础解系为: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故可取 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即 B 的全部特征值的特征向量为: $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $k_1 \neq 0$, 是不为零的任

意常数, k_2, k_3 是不同时为零的任意常数.

(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

得 $B = P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学视频文档资料，【公众号：小盆考研】，回复【数学】免费获取

更多考研押题资料视频，【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学预测卷，【公众号：小盆考研】，回复【数学预测】免费获取

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【详解】 (I) $P\{X > 2Y\} = \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y}^1 (2 - x - y) dx = \frac{7}{24}.$

(II) 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq Z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^z dy \int_0^{z-y} (2 - x - y) dx \\ &= z^2 - \frac{1}{3} z^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) &= 1 - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 (2 - x - y) dx \\ &= 1 - \frac{1}{3} (2 - z)^3; \end{aligned}$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$.

故 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1, \\ (2 - z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(24) (数 1, 3) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中参数 θ ($0 < \theta < 1$) 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

【详解】 (I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \theta)dx = \int_0^{\theta} \frac{x}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx$

$$= \frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}(1+\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}.$$

令 $\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} = \bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

解方程得 θ 的矩估计量为: $\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$.

(II) $E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D(\bar{X}) + E^2(\bar{X})] = 4\left[\frac{D(X)}{n} + E^2(X)\right],$

而 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, \theta)dx = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx$

$$= \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6}.$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\theta^2 - \frac{1}{12}\theta + \frac{5}{48},$$

故 $E(4\bar{X}^2) = 4\left[\frac{D(X)}{n} + E^2(X)\right] = \frac{3n+1}{3n}\theta^2 + \frac{3n-1}{n}\theta + \frac{3n+5}{12n} \neq \theta^2,$

所以 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.