# 2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷及答案解析

**一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的**

（1）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】（D）

【解析】根据导数的定义：

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\bullet|x|}{x}=0$, 可导；

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\bullet\sqrt{|x|}}{x}=0$, 可导；

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=0$, 可导；

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{|x|}^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$, 极限不存在，

故选 D。

（2）过点 $(1,0,0),(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为（　）

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$　　(D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$

【答案】（B）

【解析】过 $(1,0,0),(0,1,0)$ 的已知曲面的切平面只有两个，显然 $z=0$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切，排除 C、D

曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $(2x,2y,-1)$，

对于A选项, $x+y-z=1$ 的法向量为 $(1,1,-1)$, 可得 $x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}$,

代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y-z=1$ 中 $z$ 不相等，排除 $A$，故选 $B$.

（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　）

(A) $\sin 1+\cos 1$ (B) $2\sin 1+\cos 1$

(C) $2\sin 1+2\cos 1$ (D) $2\sin 1+3\cos 1$

【答案】（B）

【解析】$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}=\cos l+2\sin 1$$

故选 B.

（4）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$,则（ ）

(A) $M>N>K$ (B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$ (D) $K>N>M$

【答案】（C）

【解析】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\pi.$

$$1+x<e^x(x\neq 0)\Rightarrow\frac{1+x}{e^2}<1\Rightarrow N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi<M$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi=M$$

故$K>M>N$,应选 C。

（5）下列矩阵中与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（ ）

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】（A）

【解析】 令$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则特征值$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$，

则特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

当$\lambda=1$时，$E-J=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知$r(E-J)=2$.

$A$选项，令$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$解得$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

此时当$\lambda=1$时，$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知$e(E-A)=2$.

$B$选项，令$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵$B$所有的特征值为1,1,1.当$\lambda=1$时，$r(E-B)=1$.

C选项，令$C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵$C$所有的特征值为1,1,1.当$\lambda=1$时，$r(E-C)=1$.

$D$选项，令$D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵$D$所有的特征值为1,1,1.当$\lambda=1$时，$r(E-D)=1$.

由于矩阵相似，则相关矩阵$E-A$与$E-J$也相似，则r(E-A)=r(E-J).

可知答案选 A。

（6）设$A$、$B$为$n$阶矩阵，记$r(X)$为矩阵$X$的秩，$(X,Y)$表示分块矩阵，则（　）

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A,B)=r(A^TB^T)$

【答案】（A）

【解析】 设$C=AB$，则可知$C$的列向量可以由$A$的列向量线性表示，则$r(A,C)=r(A,AB)=r(A)$.

（7） 设随机变量 $X$ 的概率密度 $f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，且$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则$P\{X<0\}=$（　）

(A) 0.2　　(B) 0.3　　(C) 0.4　　(D) 0.5

【答案】（A）

【解析】由$f(1+x)=f(1-x)$知，$f(x)$关于$x=1$对称，故$P\{X<0\}=P\{X>2\}$

$\because P\{X<0\}+P\{0\le X\le 2\}+P\{X>2\}=1$，$P\{0\le X\le 2\}=\int_0^2 f(x)dx=0.6$

$\therefore 2P\{X<0\}=0.4\Rightarrow P\{X<0\}=0.2$

（8）设总体$X$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right),X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，据此样本检测：

假设：$H_0$：$\mu=\mu_0$，$H_1$：$\mu\ne\mu_0$，则（　）

(A) 如果在检验水平$\alpha=0.05$下拒绝$H_0$，那么在检验水平$\alpha=0.01$下必拒绝$H_0$

(B) 如果在检验水平$\alpha=0.05$下拒绝$H_0$，那么在检验水平$\alpha=0.01$必接受$H_0$

(C) 如果在检验水平$\alpha=0.05$下接受$H_0$，那么在检验水平$\alpha=0.01$下必拒绝$H_0$

(D) 如果在检验水平$\alpha=0.05$下接受$H_0$，那么在检验水平$\alpha=0.01$下必接受$H_0$

【答案】(A)

【解析】$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$, 故$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

所以$\alpha_1=0.05$时，拒绝域为:$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.025},u_{0.025}$为上$\alpha$分位点

$\alpha_2$=0.001时，拒绝域为:$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.0005}$.

又因为$u_{0.025}>u_{0.0005}$,故选$A$.

**二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。**

（9）若$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 则$k=$________.

【答案】-2

【解析】由$e=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)\frac{1}{\sin kx}}$, 得

$$1=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin kx}\cdot\frac{-1\tan x}{1+\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{-1\tan x}{kx}=\frac{-2}{k},$$

故$k=-2$.

（10）设函数$f\left(x\right)$具有2阶连续导数，若曲线$y=f\left(x\right)$过点$\left(0,0\right)$且与曲线$y=2^x$在点$\left(1,2\right)$处相切，则$\int_0^1 xf''\left(x\right)dx=$________.

【答案】$2\ln 2-2$

【解析】$\int_0^1 xf''(x)dx = xf'(x)\big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = f'(1) - f(1) + f(0) = 2\ln 2 - 2 + 0 = 2\ln 2 - 2$

（11）设$F(x,y,z) = xy\vec{i} - yz\vec{j} + zx\vec{k}$, 则$rotF\left(1,1,0\right) =$ ________.

【答案】$(1,0,-1)$

【解析】$F(x,y,z) = xy\vec{i} - yz\vec{j} + zx\vec{k}$

$$rotF(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix} = y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}$$

$\therefore rotF(1,1,0) = (1,0,-1)$

（12）设$L$为球面$x^2 + y^2 + z^2 = 1$与平面$x + y + z = 0$的交线，则$\oint_L xyds =$ ________.

【答案】0

【解析】由曲线$L$关于$xoz$面对称，被积函数关于$y$是奇函数，故$\oint_L xyds = 0$.

（13）设2阶矩阵$A$有两个不同特征值，$\alpha_1, \alpha_2$是$A$的线性无关的特征向量，且满足$A^2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = \alpha_1 + \alpha_2$，

则$|A| =$________.

【答案】-1

【解析】由$A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)$，可知$A^2$有特征值1，对应的特征向量为$\alpha_1 + \alpha_2$.

则可知$A$的特征值只能取1或$-1$.由于矩阵$A$有2个不同的特征值，则可知$A$的特征值恰好为1和$-1$. 则

$|A| = 1 \times (-1) = -1$.

（14）设随机事件$A$与$B$相互独立，$A$与$C$相互独立，$BC = \varnothing$，若

$$P\left(A\right) = P\left(B\right) = \frac{1}{2}, P = \left(AC\left|AB \cup C\right.\right) = \frac{1}{4},$$

则$P\left(C\right) =$________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】$P\left\{AC\left|AB \cup C\right.\right\} = \dfrac{P\left\{AC(AB \cup C)\right\}}{P(AB \cup C)} = \dfrac{P(AC)}{P(AB) + P(C) - P(ABC)} = \dfrac{1}{4}$

$$\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B) + P(C) - P(ABC)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + P(C) - 0} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}.$$

**三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx.$

【解析】原式$=\int \arctan\sqrt{e^x-1}d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$

再用整体代换去根号：

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx \underline{\underline{t=\sqrt{e^x-1}}} \int\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t}\frac{2t}{\left(t^2+1\right)}dt$$

$$=\frac{2}{3}t^3+2t+C=\frac{2}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}+C$$

即原式$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$

（16）（本题满分 10 分）

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

【解析】设圆的半径为$x$，正方形的边长为$y$，正三角形的边长为$z$，则$2\pi x+4y+3z=2$,其面积和

$S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^3$,即是求$S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^3$在约束条件$2\pi+4y+3z=2$下的最小值是否存在.

设$L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$,

$$\begin{cases} L'_x=2\pi x+2\pi\lambda=0\\ L'_y=2y+4\lambda=0\\ L'_z=\frac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0\\ L'_x=2\pi x+4y+3z-2=0\end{cases},\text{解得}\begin{cases} x=\frac{1}{x+4+3\sqrt{3}}\\ y=\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$$(唯一驻点).由实际问题可知，最小值一定存在，

且在（$\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$）取得最小值，且最小值为$\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

（17）（本题满分 10 分）

设$\Sigma$是曲面$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}xdydz+\left(y^3+2\right)dzdx+z^3dxdy.$$

【解析】补面$\sum_0$：$x=0,3y^2+3z^2\le 1$的后侧，则

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy$$
$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy-\iint_{\Sigma_0} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy$$
$$=\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dxdydz-0\text{(其中}\Omega\text{为}\Sigma\text{与}\Sigma_0\text{所围成的半椭球体)}$$
$$=\int_0^1 dx\iint_{y^2+z^2\le\frac{1-x^2}{3}}(1+3y^2+3z^2)dydz$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}}(1+3r^2)rdr=2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}}dx$$
$$=2\pi\int_0^1\frac{3-4x^2+x^4}{12}dx=\frac{14\pi}{45}.$$

（18）（本题满分 10 分）

已知微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是$R$上的连续函数.

（I）若$f(x)=x$,求方程的通解；

（II）若$f(x)$是周期为$T$的函数，证明：方程存在唯一的以$T$为周期的解.

【解析】（I）$y=e^{-x}\left(\int xe^xdx+C\right)=Ce^{-x}+x-1$

（II）

微分方程解函数为$y(x)=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^tdt+C\right)$

则$y(x+T)=e^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}f(t)e^tdt+C\right)\overset{t-T=u}{=}e^{-x-T}\left(\int_{-T}^x f(u+T)e^{u+T}du+C\right)$

$=e^{-x}\left(\int_{-T}^x f(u)e^udu+Ce^{-T}\right)=e^{-x}\left(\int_{-T}^0 f(u)e^udu+\int_0^x f(u)e^udu+Ce^{-T}\right)$

若$e^{-x}\left(\int_{-T}^0 f(u)e^udu+\int_0^x f(u)e^udu+Ce^{-T}\right)=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^tdt+C\right)$

即$C=\frac{1}{1-e^{-T}}\int_{-T}^0 f(u)e^udu$时$y(x+T)=y(x)$.

由于$C=\frac{1}{1-e^{-T}}\int_{-T}^0 f(u)e^udu$为确定常数，故符合条件的周期解$y(x)$唯一.

（19）（本题满分 10 分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$,证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】$x_1>0$,假设$x_k 0$,

由$x>0,e^x-1>x>0$可知$x_{k+1}=\ln\frac{e^{x_k}-1}{x_k}>\ln 1=0.$

故数列$\{x_n\}$有下界.

$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$

令$f(x)=xe^x-(e^x-1)$,则$f'(x)=xe^x>0$,故$f(x)$单调增加

当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$,故$0<\frac{e^x-1}{xe^x}<1$,所以$x_{n+1}-x_n<0$

数列$\{x_n\}$单调减少

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x_n}-1)$

$Ae^A=e^A-1$,解得$A$=0，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$=0.

（20）（本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数

(I) 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

(II) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

由$f(x_1,x_2,x_3)$=$(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2=0$,则应有

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_1+ax_3=0\end{cases}.\text{令}A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

即$Ax=0$.

【解析】(I) 由$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$.

可知当$a=2$时，方程组有非零解$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,其中$k$为任意常数

当$a\neq2$时，方程组只有零解.

当$a\neq2$时，此时显然可知二次型正定，则此时对应的规范形为：

$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当$a=2$时，

(II) 方法一：（正交变换法）令二次型对应的实对称矩阵为$B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&0\\3&0&6\end{pmatrix}$，则由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-3\\1&\lambda-2&0\\-3&0&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-10\lambda+18)=0,$$

解得$\lambda_1=5+\sqrt{7}$，$\lambda_2=5-\sqrt{7}$，$\lambda_3=0$.

则可知规范形为：$f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

方法二：（配方法）由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2-x_1x_2+3x_1x_3)^2+2x_2^2+6x_3^2=2(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2.$$

$$令\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3) \\ z_2=\sqrt{\frac{3}{2}}(x_2+x_3) \\ z_3=x_3 \end{cases}，得规范形为f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2.$$

（21）（本题满分 11 分）

已知$a$是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求$a$;

(II) 求满足$AP=B$的可逆矩阵$P$.

【解析】(I) 由于$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=0$, 则可知$|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=1-a+2-1=0, a=2.$

$$由(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&0&1&1\\0&3&-6&0&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

(II) 解得$p_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, p_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}, p_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$.

故解得可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, 其中$k_2\neq k_3$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量$X$与$Y$相互独立，$X$的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$,$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布.

令$Z=XY$.

(I) 求$Cov(X,Z)$;

(II) 求$Z$的概率分布.

$$Cov(X,Z)=E(XZ)-EXEZ$$

【解析】(I) $EX=0$，$EX^2=1$，$EY=\lambda\Rightarrow E(XZ)=E(X^2Y)=\lambda$

$$Cov(X,Z)=E(XZ)-EXEZ=\lambda.$$

$Z$的取值为$0,\pm1,\pm2,\cdots,$

(II)

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,\ Y=0\}+P\{X=1,\ Y=0\}=\frac{1}{2}P\{Y=0\}+\frac{1}{2}P\{Y=0\}=e^{-\lambda}$$

$$P\{Z=k\}=P\{X=1,\ Y=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P\{Z=-k\}=P\{X=-1,\ Y=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\text{其中}k=1,2,\cdots.$$

（23）（本题满分 11 分）

设总体$X$的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本记$\sigma$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$.

(I) 求$\hat{\sigma}$;

(II) 求$E\hat{\sigma}$和$D(\hat{\sigma})$.

【解析】(I)

$$\text{设}L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}},-\infty<x_i<+\infty,\text{则}$$

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{1}{2}-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma})$$

$$\therefore\text{令}\frac{d\ln L}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}(-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2})=0\Rightarrow\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

(II)

$$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\sigma$$

$$D\hat{\sigma}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i|=\frac{1}{n}D|X|=\frac{1}{n}(EX^2-E^2|X|)=\frac{1}{n}(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx-\sigma^2)$$

$$=\frac{1}{n}(\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx-\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}.$$