# 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、选择题：1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．**

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是：（　　）

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$ .

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题错误的是：（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

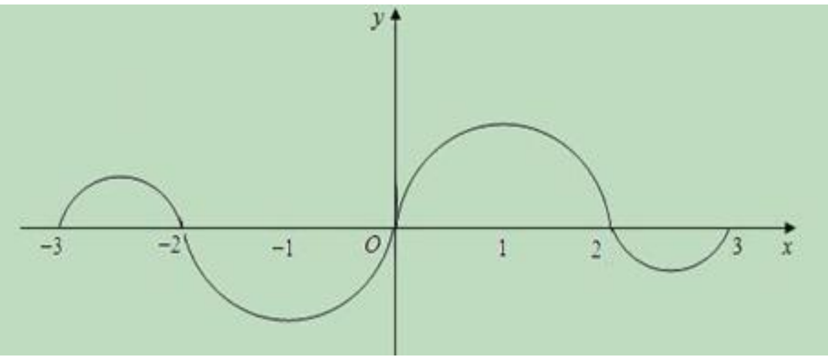
(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 $1$ 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为 $2$ 的上、下半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是：（　　）

(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$




(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于：（　　）

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

(5) 设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$，其中 $Q,p$ 分别表示需要量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 $1$，则商品的价格是：（　　）

(A) $10$　　(B) $20$　　(C) $30$　　(D) $40$

(6) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为：（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(7) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是：(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

(8) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$：(　　)

(A) 合同，且相似　　(B) 合同，但不相似

(C) 不合同，但相似　　(D) 既不合同，也不相似

(9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为$p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第$2$次命中目标的概率为：(　　)

(A)$3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$　　(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

(10) 设随机变量$(X,Y)$服从二维正态分布，且$X$与$Y$不相关，$f_X(x),f_Y(y)$分别表示$X,Y$的概率密度，则在$Y=y$条件下，$X$的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为：(　　)

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

**二、填空题：11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．**

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

(12) 设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$________.

(13) 设$f(u,v)$是二元可微函数，$z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(14) 微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^3$满足$y|_{x=1}=1$的特解为$y=$________.

(15) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^3$的秩为________.

(16) 在区间$(0,1)$中随机地取两个数，则这两数之差的绝对值小于$\dfrac{1}{2}$的概率为________.

**三、解答题：17～24 小题，共 86 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

(17) (本题满分 10 分)

设函数$y=y(x)$由方程$y\ln y-x+y=0$确定，试判断曲线$y=y(x)$在点$(1,1)$附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$.

(19) (本题满分 11 分)

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内二阶可导且存在相等的最大值，又$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，

证明：

(I) 存在$\eta\in(a,b)$,使得$f(\eta)=g(\eta)$；

(II) 存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20) (本题满分 10 分)

将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$展开成$x-1$的幂级数，并指出其收敛区间.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ ①与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ ②有公共解，求$a$的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设$3$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1$的一个特征向量.记

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为$3$阶单位矩阵.

(I) 验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\boldsymbol{B}$的特征向量，并求$\boldsymbol{B}$的全部特征值与特征向量；

(II) 求矩阵$\boldsymbol{B}$.

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$

(I) 求$P\{X>2Y\}$；

(II)求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

(24) (本题满分 11 分)

设总体$X$的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,其中参数$\theta(0<\theta<1)$未知，$X_1,X_2,\ldots X_n$是来自总体$X$的

简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值.

(I) 求参数$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}$；

(II) 判断$4\overline{X}^2$是否为$\theta^2$的无偏估计量，并说明理由.（相当于判断$E$（$4\overline{X^2}$)是否为$\theta^2$）

# 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题：1~6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}, f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________.

(3) 设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f\left(4x^2-y^2\right)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$________.

(4) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $B$ 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$________.

(5) 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$______.

(6) 设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X$ 的简单随机样本，其样本方差 $S^2$，则 $E(S^2)=$________.

**二、选择题：7~14 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.**

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，$\Delta x$ 为自变量 $x$ 在 $x_0$ 处的增量，$\Delta y$ 与 $dy$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则：（　　）

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$　　(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(h^2\right)}{h^2}=1$，则：（　　）

(A) $f(0)=0$ 且 $f_-'(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f_-'(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f_+'(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f_+'(0)$ 存在

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数：（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

(10) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个的解 $y_1(x),y_2(x)$，$C$ 为任意常数，则该方程的通解是：

(A) $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$　　(B) $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$

(C) $C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$　　(D) $y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$

(11) 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知$(x_0,y_0)$是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，下列选项正确的是：(　　)

(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$，则$f_y'(x_0,y_0)=0$　　(B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$，则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y'(x_0,y_0)=0$　　(D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(12) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，下列选项正确的是：(　　)

(A) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

(B) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

(C) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

(D) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

(13) 设$\boldsymbol{A}$为$3$阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第$2$行加到第$1$行得$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第$1$列的$-1$倍加到第$2$列得$\boldsymbol{C}$，记

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则：(　　)

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{AP}$　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{T}$.

(14) 设随机变量$X$服从正态分布$N\left(\mu_1,{\sigma_1}^2\right)$，随机变量$Y$服从正态分布$N\left(\mu_2,{\sigma_2}^2\right)$，且

$P\left\{\left|X-\mu_1\right|<1\right\}>P\left\{\left|Y-\mu_2\right|<1\right\}$，则必有：(　　)

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$　　(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

**三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15) (本题满分 7 分)

设$f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x},x>0,y>0$，求

(I) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)$；

(II) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

(16) (本题满分 7 分)

计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}\,dxdy$，其中$D$是由直线$y=x, y=1, x=0$所围成的平面区域.

(17) (本题满分 10 分)

证明：当$0<a<b<\pi$时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(18) (本题满分 8 分)

在$xOy$坐标平面上，连续曲线$L$过点$M(1,0)$，其上任意点$P(x,y)(x\neq 0)$处的切线斜率与直线$OP$的斜率之差等于$ax$(常数$a>0$).

(I) 求$L$的方程；

(II) 当$L$与直线$y=ax$所围成平面图形的面积为$\frac{8}{3}$时，确定$a$的值.

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$的收敛域及和函数$S(x)$.

(20) (本题满分 13 分)

设4维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^T$，问$a$为何值时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关?当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

(21) (本题满分 13 分)

设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为3，向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的两个解.

(I) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量；

(II) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$；

(III) 求$\boldsymbol{A}$及$(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^6$，其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵.

(22) (本题满分 13 分)

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数.

求：

(I) $Y$ 的概率密度 $f_Y(y)$；

(II) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(III) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

(23) (本题满分 13 分)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1, \\ 1-\theta, & 1\le x<2, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta$ 是未知参数( $0<\theta<1$ ), $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本.记 $N$ 为样本值 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 中小于1的个数，求：

(I) $\theta$ 的矩估计；

(II) $\theta$ 的最大似然估计.

# 2005年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题：1~6小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.**

(1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}$ =________.

(2) 微分方程$xy'+y=0$满足初始条件$y(1)=2$的特解为________.

(3) 设二元函数$z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则$dz\big|_{(1,0)}$ = ________.

(4) 设行向量组$(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$线性相关，且$a\neq 1$，则$a$ =________.

(5) 从数$1,2,3,4$中任取一个数，记为$X$，再从$1,\cdots,X$中任取一个数，记为$Y$，则$P\{Y=2\}$ =______.

(6) 设二维随机变量$(X,Y)$的概率分布为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.4 | $a$ |
| 1 | $b$ | 0.1 |

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则$a$ =________，$b$ =________.

**二、选择题：7~14小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，**

**把所选项前的字母填在题后的括号内.**

(7) 当$a$取下列哪个值时，函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$恰好有两个不同的零点：(　　)

(A) $2$.　　(B) $4$　　(C) $6$　　(D) $8$.

(8) 设$I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则：(　　)

(A) $I_3>I_2>I_1$　　(B) $I_1>I_2>I_3$.　　(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$.

(9) 设$a_n>0, n=1,2,\cdots$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，则下列结论正确的是：(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$收敛

(10)　设$f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是：(　　)

(A) $f(0)$是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$是极小值

(B) $f(0)$是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$是极大值

(C) $f(0)$是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极大值

(D) $f(0)$是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极小值.

(11)　以下四个命题中，正确的是：(　　)

(A)　若$f'(x)$在$(0,1)$内连续，则$f(x)$在内有界

(B) 若$f(x)$在$(0,1)$内连续，则$f(x)$在$(0,1)$内有界

(C) 若$f'(x)$在$(0,1)$内有界，则$f(x)$在$(0,1)$内有界

(D) 若$f(x)$在$(0,1)$内有界，则$f'(x)$在$(0,1)$内有界

(12) 设矩阵$A=(a_{ij})_{3\times 3}$满足$A^*=A^T$，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，$A^T$为$A$的转置矩阵.若$a_{11},a_{12},a_{13}$为三个相等的正数，则$a_{11}$为：(　　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $3$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

(13) 设$\lambda_1,\lambda_2$是矩阵$A$的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是：(　　)

(A) $\lambda_1=0$　　(B) $\lambda_2=0$　　(C) $\lambda_1\neq 0$　　(D) $\lambda_2\neq 0$

(14) 设一批零件的长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu,\sigma^2$均未知.现从中随机抽取$16$个零件，测得样本均值$\bar{x}=20(\mathrm{cm})$，样本标准差$s=1(\mathrm{cm})$，则$\mu$的置信度为$0.90$的置信区间是：(　　)

(A) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16)).$　　(B) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16)).$

(C) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)).$　　(D) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15)).$

（注：大纲已不要求）

**三 、解答题：本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15) (本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})$.

(16) (本题满分 8 分)

设$f(u)$具有二阶连续导数，且$g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，求$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17) (本题满分 9 分)

计算二重积分$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

(18) (本题满分 9 分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)$.

(19) (本题满分 8 分)

设$f(x),g(x)$在$[0,1]$上的导数连续，且$f(0)=0$，$f'(x)\ge 0$，$g'(x)\ge 0$.证明：对任何$a\in[0,1]$，有

$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$.

(20) (本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

(I) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases}$ 和 (II) $\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$

同解，求$a,b,c$的值.

(21) (本题满分 13 分)

设$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$为正定矩阵，其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m$阶，$n$阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$为$m\times n$矩阵.

(I) 计算$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$；

(II) 利用(I)的结果判断矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是否为正定矩阵，并证明你的结论.

(22) (本题满分 13 分)

设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求：(I) $(X,Y)$的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；

(II) $Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$；

(III) $P\{Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2}\}$.

(23) (本题满分 13 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，其样本均值为$\bar{X}$，记$Y_i=X_i-\bar{X},i=1,2,\cdots,n$.

求：

(I) $Y_i$的方差$D(Y_i),i=1,2,\cdots,n$；

(II) $Y_1$与$Y_n$的协方差$Cov(Y_1,Y_n)$；

(III) 若$c(Y_1+Y_n)^2$是$\sigma^2$的无偏估计量，求常数$c$.

# 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题：1~6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上．**

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$ ，则 $a=$________ ，$b=$________.

(2) 函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$ ，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2}, \\ -1, & x\ge\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$________.

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

(5) 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$________.

(6) 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$ ， 总体 $Y$ 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$ ， $X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 $X$ 和 $Y$ 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

**二、选择题：7~14 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．**

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界：（　　）

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$ .　　(D) $(2,3)$ .

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ ， $g(x)=\begin{cases} f(\dfrac{1}{x}), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则：（　　）

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.　　(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.　　(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

(9) 设 $f(x)=|x(1-x)|$ ， 则：（　　）

(A) $x=0$是$f(x)$的极值点，但$(0,0)$不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(B) $x=0$不是$f(x)$的极值点，但$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(C) $x=0$是$f(x)$的极值点，且$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$不是$f(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(10) 设有以下命题：(　　)

① 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

② 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$收敛.

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

④ 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛.

则以上命题中正确的是：(　　)

(A) ①②.　　　　(B) ②③.

(C) ③④.　　　　(D) ①④.

(11) 设$f'(x)$在$[a,b]$上连续，且$f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是：(　　)

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$.

(12) 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，则必有：(　　)

(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$时，$|\boldsymbol{B}|=a$　　　　(B) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　　　　(D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(13) 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq 0$, 若$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系：(　　)

(A) 不存在 (B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量 (D) 含有三个线性无关的解向量.

(14) 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 $u_\alpha$ 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 $x=$ ( )

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (D) $u_{1-\alpha}$.

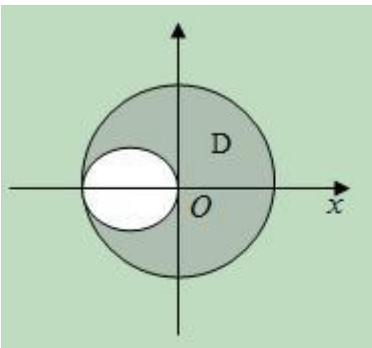
**三、解答题：15~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中 $D$ 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图).




(17) (本题满分 8 分)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)dt\ge\int_a^x g(t)dt,\ x\in[a,b)$，$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt$.

证明：$\int_a^b xf(x)dx\le\int_a^b xg(x)dx$.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，$Q$ 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性$E_d$ ( $E_d > 0$ )；

(II) 推导$\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中$R$为收益)，并用弹性$E_d$说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

(19) (本题满分 9 分)

设级数$\frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$的和函数为$S(x)$ .求:

(I) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(II) $S(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 13 分)

设$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,a+2,-3a)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,-b-2,a+2b)^T$ ，$\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)^T$ ，

试讨论当$a,b$为何值时，

(I) $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

(II) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一地线性表示，并求出表示式；

(III) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

(21) (本题满分 13 分)

设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ .

(I) 求$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量；

(II) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$ ，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵.

(22) (本题满分 13 分)

设$A,B$为两个随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求(I) 二维随机变量$(X,Y)$的概率分布；

(II) $X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}$；

(III) $Z=X^2+Y^2$的概率分布.

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量$X$的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$$

其中参数$\alpha>0,\beta>1$.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，

(I) 当$\alpha=1$时，求未知参数$\beta$的矩估计量；

(II) 当$\alpha=1$时，求未知参数$\beta$的最大似然估计量；

(III) 当$\beta=2$时，求未知参数$\alpha$的最大似然估计量.

# 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题：1~6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.**

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 $\lambda$ 的取值范围是________.

(2) 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 $x$ 轴相切，则 $b^2$ 可以通过 $a$ 表示为 $b^2=$________.

(3) 设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, & 0\leq x\leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 而 $D$ 表示全平面，则

$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(4) 设 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$________.

(5) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的相关系数为 $0.9$，若 $Z=X-0.4$，则 $Y$ 与 $Z$ 的相关系数为________.

(6) 设总体 $X$ 服从参数为 $2$ 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，

$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________.

**二、选择题：7~12 小题，每小题 4 分，共 24 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

(7) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$：(　　)

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点

(8) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 取得极小值，则下列结论正确的是：(　　)

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零　　(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零　　(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

(9) 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是：(　　)

(A) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛.

(B) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛.

(C) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$敛散性都不确定.

(D) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$敛散性都不确定.

(10) 设三阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵的秩等于$1$，则必有：(　　)

(A) $a=b$或$a+2b=0$　　(B) $a=b$或$a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$且$a+2b=0$　　(D)$a\neq b$且$a+2b\neq 0$.

(11) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维向量，下列结论不正确的是：(　　)

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq 0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

(B) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0.$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为$s$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

(12) 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件:$A_1$={掷第一次出现正面}，$A_2$={掷第二次出现正面}，$A_3$={正、反面各出现一次}，$A_4$={正面出现两次}，则事件：(　　)

(A) $A_1,A_2,A_3$相互独立　　(B) $A_2,A_3,A_4$相互独立

(C) $A_1,A_2,A_3$两两独立　　(D) $A_2,A_3,A_4$两两独立.

**三、解答题：13~22 小题，共 102 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(13) (本题满分 8 分)

设$f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x\in[\frac{1}{2},1)$，试补充定义$f(1)$使得$f(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上连续.

(14) (本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(15) (本题满分 8 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\pi\}$.

(16) (本题满分 9 分)

求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ $(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

(17) (本题满分 9 分)

设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：

$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$ 且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$.

(I) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(II) 求出 $F(x)$ 的表达式.

(18) (本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,f(3)=1$.试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

(19) (本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组
$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b$ 满足何种关系时，

(I) 方程组仅有零解；

(II) 方程组有非零解.在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

(20) (本题满分 13 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$,其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为$1$，特征值之积为$-12$.

(I) 求$a,b$的值；

(II) 利用正交变换将二次型$f$化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

(21) (本题满分 13 分)

设随机变量$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8],\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$F(X)$是$X$的分布函数.求随机变量$Y=F(X)$的分布函数.

(22) (本题满分 13 分)

设随机变量$X$与$Y$独立，其中$X$的概率分布为

| $X$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.7 |

而$Y$的概率密度为$f(y)$，求随机变量$U=X+Y$的概率密度$g(u)$.

# 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)**

(1) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n =$ ________.

(2) 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)dx =$ ________ .

(3) 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，3 维列向量 $\alpha=\left(a,1,1\right)^T$.已知 $A\alpha$ 与 $\alpha$ 线性相关，则 $a=$ ________ .

(4) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率分布为

| $X$ \ $Y$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.07 | 0.18 | 0.15 |
| 1 | 0.08 | 0.32 | 0.20 |

则 $X^2$ 和 $Y^2$ 的协方差 $Cov(X^2,Y^2)=$ ________ .

(5) 设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & 若 x\geq\theta,\\ 0, & 若 x<\theta\end{cases}$$

而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，则未知参数 $\theta$ 的矩估计量为 ________ .

**二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 $(a,b)$ 内可导，则 ( )

(A)当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(B)对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C)当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

(D)存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a^2{}_n}{b^2{}_n}x^n$ 的收敛半径为 ( )

(A) 5　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{5}$

(3) 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵， $B$ 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $ABx=0$ ( )

(A)当 $n>m$ 时仅有零解 (B)当 $n>m$ 时必有非零解

(C)当 $m>n$ 时仅有零解 (D)当 $m>n$ 时必有非零解

(4) 设 $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵， $P$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，已知 $n$ 维列向量 $\alpha$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则矩阵 $\left(P^{-1}AP\right)^T$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量是 ( )

(A) $P^{-1}\alpha$ (B) $P^T\alpha$ (C) $P\alpha$ (D) $\left(P^{-1}\right)^T\alpha$

(5) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 都服从标准正态分布，则 ( )

(A) $X+Y$ 服从正态分布 (B) $X^2+Y^2$ 服从 $\chi^2$ 分布

(C) $X^2$ 和 $Y^2$ 都服从 $\chi^2$ 分布 (D) $X^2/Y^2$ 服从 $F$ 分布

**三、(本题满分 5 分)**

求极限 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$$

**四、(本题满分 7 分)**

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 $du$ .

**五、(本题满分 6 分)**

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$, 求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

**六、(本题满分 7 分)**

设 $D_1$ 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域； $D_2$ 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$ , $x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$ .

(1)试求 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V_1$ ； $D_2$ 绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V_2$ ；

(2)问当 $a$ 为何值时， $V_1+V_2$ 取得最大值？试求此最大值.

**七、(本题满分 7 分)**

(1)验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}++\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\left(-\infty<x<+\infty\right)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$

(2)利用(1)的结果求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

**八、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$ .利用闭区间上连续函数性质，证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ .

**九、(本题满分 8 分)**

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geq 2$，试讨论 $a,b$ 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

**十、(本题满分 8 分)**

设 $A$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=O$，已知 $A$ 的秩 $r(A)=2$

(1)求 $A$ 的全部特征值

(2)当 $k$ 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 $E$ 为 3 阶单位矩阵.

**十一、(本题满分 8 分)**

假设随机变量 $U$ 在区间 $\left[-2,2\right]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases} -1, 若U\leq -1 \\ 1, \quad 若U>-1; \end{cases} \quad Y=\begin{cases} -1, 若U\leq 1 \\ 1, \quad 若U>1; \end{cases}$$

试求：(1) $X$ 和 $Y$ 的联合概率分布；(2) $D(X+Y)$.

**十二、(本题满分 8 分)**

假设一设备开机后无故障工作的时间 $X$ 服从指数分布，平均无故障工作的时间（$EX$）为 5 小时.设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机.试求该设备每次开机无故障工作的时间 $Y$ 的分布函数 $F(y)$.

# 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

## 一、填空题

(1) 设生产函数为$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中$Q$是产出量, $L$ 是劳动投入量, $K$ 是资本投入量,而$A, \alpha, \beta$均为大于零的参数,则当$Q$ =1时$K$关于$L$的弹性为 ________ .

(2) 某公司每年的工资总额比上一年增加20％的基础上再追加2 百万元.若以$W_t$ 表示第$t$ 年的工资总额(单位：百万元)，则$W_t$ 满足的差分方程是___

(3) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, 且 $r(\boldsymbol{A})$=3,则$k =$ ________ .

(4) 设随机变量$X$和$Y$ 的数学期望分别为-2和2,方差分别为1和4,而相关系数为-0.5.则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y| \geq 6\} \leq$ ____.

(5) 设总体X服从正态分布 $N$（$0,2^2$），而 $X_1, X_2, \cdots X_{15}$ 是来自总体X的简单随机样本，则随机变量

$Y = \dfrac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2\right)}$ 服从__________分布，参数为________.

## 二、选择题

(1) 设$f(x)$的导数在$x$=$a$处连续,又$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则(　　　)

(A) $x = a$ 是$f(x)$的极小值点.
(B) $x = a$ 是$f(x)$的极大值点.
(C) $(a, f(a))$是曲线$y= f(x)$的拐点.
(D) $x = a$不是$f(x)$的极值点, $(a, f(a))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(2) 设函数 $g(x) = \int_0^x f(u)du$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2+1), 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{3}(x-1), 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ,则$g(x)$在区间$(0,2)$ 内(　　　)

(A)无界 (B)递减 (C) 不连续 (D) 连续

(3) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,其中$\boldsymbol{A}$ 可逆,则$B^{-1}$等于( )

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$.

(4) 设$\boldsymbol{A}$ 是$n$ 阶矩阵，α是$n$维列向量.若 $r\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=r$ (A)，则线性方程组( )

(A)$\boldsymbol{AX}$ =α必有无穷多解 (B)$\boldsymbol{AX}$ =α 必有惟一解.

(C)$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$仅有零解 (D)$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$必有非零解.

(5) 将一枚硬币重复掷$n$ 次,以$X$和$Y$ 分别表示正面向上和反面向上的次数,则$X$和$Y$的相关系数等于( )

(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

**三 、(本题满分5 分)**

设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数,又函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由下列两式确定:

$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$,求$\frac{du}{dx}$.

**四 、(本题满分6 分)**

已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$, 求$c$的值.

**五 、(本题满分6 分)**

求二重积分$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$的值,其中$D$ 是由直线$y=x$, $y=-1$及$x=1$围成的平面区域

**六、(本题满分7 分)**

已知抛物线$y=px^2+qx$(其中$p<0,q>0$)在第一象限与直线$x+y=5$相切，且此抛物线与$x$轴所围成的平面图形的面积为S.

(1) 问$p$和$q$为何值时，S达到最大? (2)求出此最大值.

**七、(本题满分6 分)**

设$f(x)$在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx(k>1)$,

证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

**八、(本题满分7 分)**

已知 $f_n(x)$满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$ ($n$为正整数)且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$,求函数项级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_n(x)$之和.

**九、(本题满分9 分)**

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$. 已知线性方程组$\boldsymbol{AX}=\beta$有解但不唯一,试求:

(1) $a$的值;

(2) 正交矩阵Q,使 $Q^TAQ$ 为对角矩阵.

**十、(本题满分8 分)**

设$\boldsymbol{A}$为$n$阶实对称矩阵, $r$(A)=n, $A_{ij}$ 是 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式$\left(i,j=1,2,\ldots,n\right)$,二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(1) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$, 把$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成矩阵形式,并证明二次型 $f(X)$ 的矩阵为 $A^{-1}$;

(2) 二次型 $g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 的规范形是否相同?说明理由.

**十一、(本题满分8 分)**

一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的,假设每箱平均重50 千克,标准差为5千克.若用最大载重量为5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于0.977. ($\Phi(2)=0.977$, 其中$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数).

**十二、(本题满分8 分)**

设随机变量X 和Y 对联和分布是正方形$G=\left\{(x,y)|1\le x\le 3,1\le y\le 3\right\}$上的均匀分布,试求随机变量$U=|X-Y|$的概率密度 $p(u)$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

# 2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

## 一、填空题

（1）设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中$f,g$均可微，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

（2）设 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=$ ________.

（3）若 4 阶矩阵 $A$ 和 $B$ 相似；矩阵为 $A$ 的特征值 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},$ 则性列式 $|B^{-1}-E|=$ ________.

（4）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1}{3},x\in[0,1],\\ \dfrac{2}{9},x\in[3,6],\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ 若 $k$ 使得 $P\{X\ge k\}=\dfrac{2}{3}$, 则 $k$ 的取值范围是 ________.

（5）设随机变量 $X$ 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，随机变量 $Y=\begin{cases}1, & X>0\\ 0, & X=0\\ -1, & X<0\end{cases}$ 则方差 $DY=$ ________.

## 二、选择题

(1)设对任意的 $x$，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ (　　)

(A)存在且等于零　　(B)存在但不一定为零

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

(2)设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　)

(A) $f(a)=0$且$f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$且$f'(a)\ne 0$

(C) $f(a)>0$且$f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$且$f'(a)<0$

(3) 设 $a_1,a_2,a_3$ 是四元非齐次线形方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且 $r(A)=3,a_1=(1,2,3,4)^T,a_2+a_3=(0,1,2,3)^T,C$ 表示任意常数，则线形方程组 $AX=b$ 得通解 $X=$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

(4)设 $A$ 为 $n$ 阶实矩阵，$A^T$是$A$ 的转置矩阵，则对于线性方程组（Ⅰ）：$AX=0$ 和（Ⅱ）：$A^TAX=0$，必有(　　)

(A)（Ⅱ）的解都是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）解也是（Ⅱ）的

(B)（Ⅱ）的解都是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）解不是（Ⅱ）的

(C)（Ⅰ）解不是（Ⅱ）的，（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

(D)（Ⅰ）解是（Ⅱ）的，但（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

(5)在电炉上安装 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临

界温度 $t_0$，电炉就断电，以 $E$ 表示事件“电炉断电”，设 $T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 $E$ 等于事件(    )

(A) $\{T_{(1)} \ge t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)} \ge t_0\}$

(C) $\{T_{(3)} \ge t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)} \ge t_0\}$

**三、（本题满分 6 分）**

求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解。

**四、（本题满分 6 分）**

**计算二重积分** $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} d\sigma$，其中 $D$ 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域。

**五、（本题满分 6 分）**

假设某企业在两个相互分割的市场上出手同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$p_1 = 18-2Q, p_2 = 12-Q_2$,其中 $p_1, p_2$ 分别表示该产品在两个市场的价格（单位：万元/吨），$Q_1$和$Q_2$ 分别表示该产品在两个市场的销售量（即需求量，单位：吨），并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 $Q$ 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$

（1）如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

（2）如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种策略的总利润大小。

六、（本题满分 7 分）

求函数 $y=(x-1)\exp\left\{\frac{\pi}{2}+\arctan x\right\}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线。

**七、（本题满分 6 分）**

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx, n=0,1,2,\ldots,$ 求$\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ 。

**八、（本题满分 6 分）**

设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx = 0$

试证明：在 $(0，\pi)$ 内至少存在两个不同的点 $\zeta_1$，$\zeta_2$，使$f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = 0$

**九、（本题满分 6 分）**

设向量组 $a_1 = (a,2,10)^T, a_2 = (-2,1,5)^T, a_3 = (-1,1,4)^T, \beta = (1,b,c)^T$, 试问：当 $a,b,c$ 满足什么条件时，

（1） $\beta$ 可由 $a_1, a_2, a_3$ 线性表出，且表示唯一？

（2） $\beta$ 可由 $a_1, a_2, a_3$ 线性表出？

（3） $\beta$ 可由 $a_1, a_2, a_3$ 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式。

**十、（本题满分 10 分）**

设有 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$，其中 $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 为实数，试问：当 $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 为正定二次型。

**十一、（本题满分 8 分）**

假设 05.50、1.25、0.80、2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值。已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$

（1）求 X 的数学期望值 E(X)(记 E(X)为 b)；
（2）求 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间；
（3）利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间。

**十二、（本题满分 8 分）**

设 $A, B$ 是两个随机事件，随机变量 $X = \begin{cases} 1 & A\text{出现} \\ -1 & A\text{不出现} \end{cases}$，$Y = \begin{cases} 1 & B\text{出现} \\ -1 & B\text{不出现} \end{cases}$

试证明随机变量 $X$和$Y$ 不相关的充分必要条件是 $A$与$B$ 相互独立。

# 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题**

（1）设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx =$ ________.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} =$ ________.

（3）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为正整数，则 $A^n - 2A^{n-1} =$ ________.

（4）在天平上重复称量一重为 a 的物品，假设各次称重结果相互独立且同服从正态分布，$N(a, 0.2^2)$，若以 $\overline{X_n}$ 表示 $n$ 次称重结果的算术平均值，则为使 $P\{|\overline{X_n} - a| < 0.1\} \geq 0.95, n$ 的最小值应不小于自然数= ________.

（5）设随机变量 $X_{ij}(i, j = 1,2,...,n; n \geq 2)$ 独立同分布，$EX_{ij} = 2$，则行列式 $Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$ 的数学期望 $EY =$ ________.

**二、选择题**

(1) 设 $f(x)$ 是连续奇函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数　　(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期数　　(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数

(2) 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y) = xy + \iint_D f(u,v)dudv$，其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于(　　)

(A) $xy$　　(B) $2xy$　　(C) $xy + \dfrac{1}{8}$　　(D) $xy + 1$

(3) 设向量 $\beta$ 可由向量组 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 线形表示，但不能有向量组（Ⅰ）$a_1, a_2, \cdots a_{m-1}$ 线性表示，记向量组（Ⅱ）：$a_1, a_2, \cdots a_{m-1}$，$\beta$, 则(　　)

(A) $a_m$ 不能由（Ⅰ）线性表示，也不能由（Ⅱ）线性表示

(B) $a_m$ 不能由（Ⅰ）线性表示，但可由（Ⅱ）线性表示

(C) $a_m$ 可由（Ⅰ）线性表示，也可由（Ⅱ）线性表示

(D) $a_m$ 可由（Ⅰ）线性表示，但不能由（Ⅱ）线性表示

(4) 设 $A,B$为$n$阶矩阵，且 $A$与$B$ 相似，$E$为$n$ 阶单位矩阵，则(　　)

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$　　　　(B) $A$与$B$ 有相同的特征值和特征向量

(C) $A$与$B$ 都相似于一个对角矩阵　　　　(D) 对于任意常数 $t$, $tE-A$与$tE-B$相似

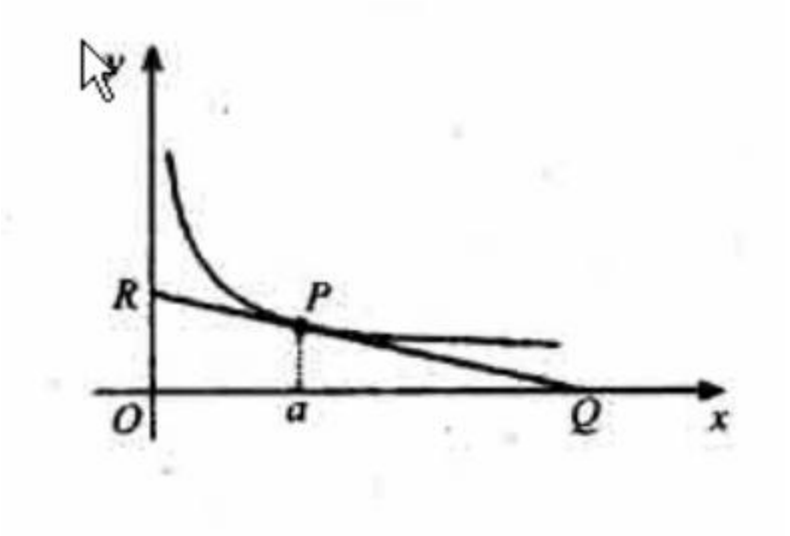
(5) 设随机变量 $X_i\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}(i=1,2)$ ，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$, 则 $P\{X_1=X_2\}$等于(　　)

(A) 0　　　　(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$　　　　(D) 1

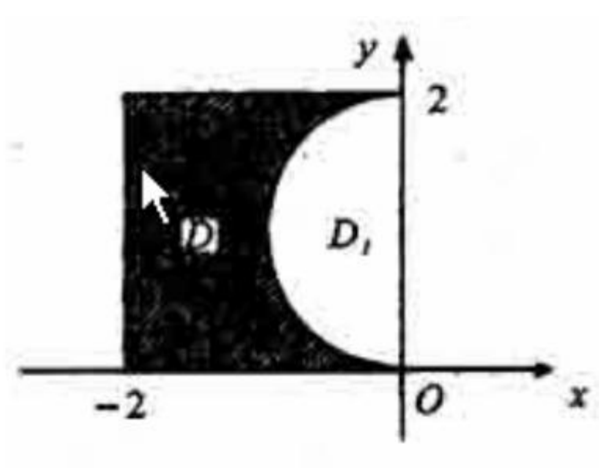
**三、（本题满分 6 分）**

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 $x$ 轴和 $y$ 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 $a$，试求切线方程和这个图形的面积，当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？




**四、（本题满分 7 分）**

计算二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$, 其中 $D$ 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。



五、（本题满分 6 分）

设生产某种产品必须投入两种两种元素，$x_1和x_2$分别为两元素要投入量，$Q$为产出量；若生产函数为$Q=2x_1^{a}x_2^{\beta}$，其中$\alpha$，$\beta$为正常数，且$\alpha+\beta=1$。假设两种元素的价格分别为$p_1和p_2$，试问，当产量为 12 时，两元素各投入多少可以使得投入总费用最小？

六、（本题满分 6 分）

设有微分方程$y'-2y=\varphi(x)$，其中$\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

试求出$(-\infty,+\infty)$内的连续函数$y=y(x)$，使之在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$内都满足所给方程，且满足条件$y(0)=0.$

七、（本题满分 6 分）

设函数$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$。已知$f(1)=1,$求$\int_1^2 f(x)dx$的值。

八、（本题满分 7 分）

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$

试证：（1）存在$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使$f(\eta)=\eta;$

（2）对于任意实数$\lambda$，必存在$\xi\in(0,\ \eta)$，使得$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$

**九、（本题满分 9 分）**

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$$,且$|A|=-1$.又设A伴随矩阵$A^*$有特征值$\lambda_0$，属于$\lambda_0$的特征向量为$a=(-1,-1,1)^T$

求$a$、$b$、$c$、及$\lambda_0$的值。

**十、（本题满分 7 分）**

设 $A$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵。已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$ 试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $B$ 为正定矩阵。

**十一、（本题满分 9 分）**

假设二维随机变量 $(X,Y)$ 在矩阵形 $G=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布。记 $U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}$

$V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$

(1) 求$U$和$V$的联合分布；

(2) 求$U$和$V$的相关系数$r$.

**十二、（本题满分 9 分）**

设 $X_1,X_2,\cdots X_9$是来自正态总体$X$的简单随机样本，$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots X_6)$, $Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$,

$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$, $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$, 证明统计量 $Z$ 服从自由度为 2 的 t 分布。

# 1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)**

(1) 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 $x$ 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=$______.

(2) $\int \frac{\ln x-1}{x^2}dx=$__________.

(3) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为__________.

(4) 设矩阵 $A,B$ 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$E$ 为单位矩阵，$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵，则

$B=$__________.

(5) 设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自正态总体 $N\left(0,2^2\right)$ 的简单随机样本，$X=a\left(X_1-2X_2\right)^2+$

$b\left(3X_3-4X_4\right)^2$ 其中 $a,b\neq 0$. 则当 $a=$__________，$b=$__________时，统计量 $X$ 服从 $\chi^2$ 分布，其自由度

为__________.

**二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设周期函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内可导，周期为 4. 又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(1\right)-f\left(1-x\right)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(5,f\left(5\right)\right)$

处的切线的斜率为 (　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $0$　　(C) $-1$　　(D) $-2$

(2) 设函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f\left(x\right)$ 的间断点，其结论为 (　　)

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $A$. 若存在三阶矩阵 $B\neq 0$ 使得 $AB=0$，则 (　　)

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$

(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$

(4) 设 $n\left(n\geq 3\right)$ 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{bmatrix},$$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

若矩阵 $A$ 的秩为 $n-1$, 则 $a$ 必为（　　）

(A) $1$　　(B) $\frac{1}{1-n}$　　(C) $-1$　　(D) $\frac{1}{n-1}$

(5) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 的分布函数. 为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一变量的分布函数, 在下列给定的各组数值中应取（　　）

(A) $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　(B) $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

(C) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

**三、(本题满分 5 分)**

设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$, 求 $dz$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**四、(本题满分 5 分)**

设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x\right\}$, 求 $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$.

**五、(本题满分 6 分)**

设某酒厂有一批新酿的好酒, 如果现在(假定 $t=0$)就售出, 总收入为 $R_0$(元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售, $t$ 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$.假定银行的年利率为 $r$, 并以连续复利计息, 试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r=0.06$ 时的 $t$ 值.

**六、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

**七、(本题满分 6 分)**

设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$, 记它们交点的横坐标的绝对值为 $a_n$.

(1) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 $S_n$；

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

**八、（本题满分 7 分）**

设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1, x=t(t>1)$ 与 $x$ 轴所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所形成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}\left[t^2 f(t)-f(1)\right].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

**九、（本题满分 9 分）**

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T, \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量, 且满足条件 $\alpha^T\beta=0$. 记 $n$ 矩阵 $A=\alpha\beta^T$. 求：

(1) $A^2$；

(2) 矩阵 $A$ 的特征值和特征向量.

**十、（本题满分 7 分）**

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 矩阵 $B=(kE+A)^2$, 其中 $k$ 为实数, $E$ 为单位矩阵. 求对角矩阵 $\Lambda$, 使 $B$ 与 $\Lambda$ 相似, 并求 $k$ 为何值时, $B$ 为正定矩阵.

**十一、（本题满分 10 分）**

一商店经销某种商品, 每周进货的数量 $X$ 与顾客对该种商品的需求量 $Y$ 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 [10, 20] 上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

**十二、（本题满分 9 分）**

设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表, 从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 $p$；

(2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率 $q$.