1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学 I

一、(每小题 5，本题满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$.求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(3) 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

(1) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$________

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2,-1<x\leq 0\\ x^3,0<x\leq 1\end{cases}$，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，则 $f(7)$________.

(4) 设 4 阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，则行列式 $|A+B|=$________.

三、选择题(每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是( )

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某个邻域内单调增加　　(D) 某个邻域内单调减少

(3) 设有空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leq R^2,z\geq 0$ 及 $\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leq R^2$，$x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$，则( )

(A) $\iiint_{\Omega_1}xdv=4\iiint_{\Omega_2}xdv$　　(B) $\iiint_{\Omega_1}ydv=4\iiint_{\Omega_2}ydv$

(C) $\iiint_{\Omega_1}zdv=4\iiint_{\Omega_2}zdv$　　(D) $\iiint_{\Omega_1}xyzdv=4\iiint_{\Omega_2}xyzdv$

（4）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处（ ）

（A）条件收敛　　（B） 绝对收敛

（C）发散　　（D）收敛性不能确定

（5）n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是（ ）

（A）有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\ne 0$

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

四、（本题满分 6 分）

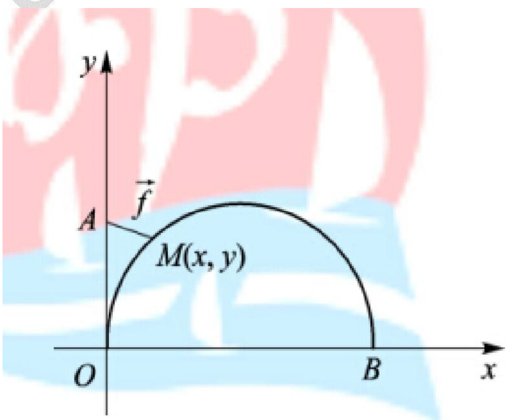
设 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

五、（本题满分 8 分）

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

六、（本题满分 9 分）

设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$（$k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离），质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$.求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.



七、（本题满分 6 分）

已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^5.

八、（本题满分 8 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 x 与 y，（2）求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

九、（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$.证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

十、填空题（每小题 2 分，满分 6 分）

（1）设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为__________

（2）在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”概率为__________

（3）设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布.已知 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$，$\Phi(2.5)=0.9938$，则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为__________

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

数学 II

一、（本题满分 15 分，每小题 5 分）

（1）【同数学 I 第一（1）题】

（2）【同数学 I 第一（2）题】

（3）【同数学 I 第一（3）题】

二、填空题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

（1）【同数学 I 第二（1）题】

（2）【同数学 I 第二（2）题】

（3）【同数学 I 第二（3）题】

（4）【同数学 I 第二（4）题】

三、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

（1）【同数学 I 第三（1）题】

（2）【同数学 I 第三（2）题】

（3）【同数学 I 第三（3）题】

（4）【同数学 I 第三（4）题】

（5）【同数学 I 第三（5）题】

四、（本题满分 18 分，每小题 6 分）

（1）【同数学 I 第四题】

（2）计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

（3）求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使平面 π 过已知直线 $l:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

五、（本题满分 8 分）【同数学 I 第五题】

六、（本题满分 9 分）【同数学 I 第六题】

七、（本题满分 6 分）【同数学 I 第七题】

八、（本题满分 8 分）【同数学 I 第八题】

九、（本题满分 9 分）【同数学 I 第九题】

数学 III

一、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

（1）若 $f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x), x>0 \\ 2x+a, \quad x\le 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$________

（2）【同数学 I 第二（1）题】

（3）【同数学 I 第二（3）题】

（4）$\lim\limits_{x\to 0+}(\frac{1}{\sqrt{x}})^{tanx}=$____________

（5）$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=$_______________

二、选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

（1）$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点 $(0,1)$ 处切线与 x 轴交点的坐标是（ ）

（A）$\left(-\frac{1}{6},0\right)$ （B）$(-1,0)$ （C）$\left(\frac{1}{6},0\right)$ （D）$(1,0)$

（2）若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有（ ）

（A）$f(-x)>g(-x)$ （B）$f'(x)<g'(x)$

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ （D）$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

（3）【同数学 I 第二（1）题】

（4）曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x,(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体体积是（ ）

（A）$\frac{4}{3}$ （B）$\frac{4}{3}\pi$ （C）$\frac{2}{3}\pi^2$ （D）$\frac{2}{3}\pi$

（5）【同数学 I 第三（5）题】

三、（本题满分 15 分，每小题 5 分）

（1）【同数学 I 第一（2）题】

（2）已知 $y=1+xe^{xy}$，求 $y'|x=0$ 及 $y''|x=0$

（3）求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解（一般解）.

四、（本题满分 12 分）

作函数 $y=\frac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形，并填写下表.

单调增区间	
单调减区间	
极值点	
极值	
凹$(\cup)$区间	
凸$(\cap)$区间	
拐 点	
渐近线	

五、（本题满分 8 分）

将长为a的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形.问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

六、（本题满分 10 分）【同数学Ⅰ第五题（分值不同）】

七、（本题满分 7 分）

设$x \ge -1$，求$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

八、（本题满分 8 分）

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，且$m \le f(x) \le M$.

（1）求$\lim\limits_{a\to+0}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}\left[f(t+a)-f(t-a)\right]dt$；

（2）证明$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right| \le M-m,(a>0)$.

数学Ⅳ

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

（一）已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$，$-\infty<x<+\infty$

（1）$f'(x)=$________

（2）$f(x)$的单调性：________

（3）$f(x)$的奇偶性：________

（4）$f(x)$图形的拐点：________

（5）$f(x)$图形的凹凸性：________

（6）$f(x)$图形的水平渐近线：________

（二）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________

（三）$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$________

（四）假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，那么

（1）若 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=$________

（2）若 A 与 B 相互独立，则 $P(B)=$________

二、判断题（本题满分 10 分，每小题答对得 2 分，答错得-1 分，不答得 0 分，全题最低 0 分）

（1）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在.（ ）

（2）若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x)=0$.　　（ ）

（3）等式 $\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(a-x)dx$，对任何实数 a 都成立.（ ）

（4）若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵，且 $AB=0$，则 A 的秩必小于 n .（ ）

（5）若事件 A，B，C 满足等式 $A\cup B=B\cup C$，则 $A=B$.（ ）

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 16 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$

（2）已知$u+e^u=xy$，求$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

（3）求定积分$\int_0^3\dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

（4）求二重积分$\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx$

四、（本题满分 6 分，每小题 3 分）

（1）讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$的敛散性

（2）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与$\sum\limits_{i=n}^{\infty}b_i^2$ 都收敛，试证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

五、（本题满分 6 分）

已知某商品的需求量D和供给量S都是价格P的函数：$D=D(p)=\dfrac{a}{p^2}$，$S=S(p)=bp$，其中$a>0$和$b>0$是常数；价格P是时间t的函数且满足方程$\dfrac{dp}{dt}=k\left[d(p)-s(p)\right]$，（$k$是常数），假设当$t=0$ 时价格为 1，试求：

（1）需求量等于供给量时的均衡价格P_e；

（2）价格函数$P(t)$；

（3）极限$\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$

六、（本题满分 8 分）

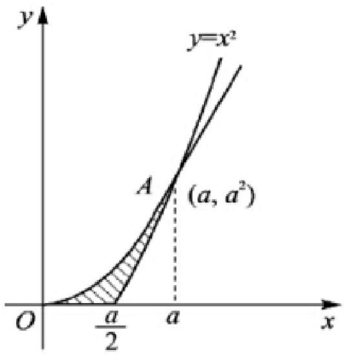
在曲线$y=x^2,(x>0)$上某点A处作一切线，使之与曲线以及x轴所围成的面积为$\dfrac{1}{12}$，试求：

（1）切点A的坐标；

（2）过切点A的切线方程：

（3）由上述所围平面图形绕x轴旋转一周所成旋转体的体积.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供



七、（本题满分 8 分）

已给线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2 \end{cases}$，问$k_1$和$k_2$各取何值时，方程组无解？有唯一解？无穷解？在方程组有无穷解的情景下，试求出一般解.

八、（本题满分 7 分）

已知向量组$a_1,a_2,\cdots,a_s\left(s\ge 2\right)$线性无关，设$\beta_1=a_1+a_2$，$\beta_2=a_2+a_3$，$\cdots$，$\beta_{s-1}=a_{s-1}+a_s$，$\beta_s=a_s+a_1$，讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的线性相关性.

九、（本题满分 6 分）

设A是三阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，A的行列式$|A|=\dfrac{1}{2}$，求行列式$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$的值.

十、（本题满分 6 分）

玻璃杯成箱出售，每箱20只，假设各箱含$0,1,2$只残次品的概率是$0.8,0.1,0.1$，一顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机观察4只，若无残次品，则购买下该玻璃杯，否则退回.试求：

（1）顾客买下该箱的概率α；

（2）在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率β.

十一、（本题满分 6 分）

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占20%，以X表示在随意抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

（1）写出X的概率分布；

（2）利用棣莫佛拉普拉斯定理.求出索赔户不少于14户且不多于30户的概率的近似值.

（附：$\Phi(2.5)=0.994,\Phi(1.5)=0.993$）

十二、（本题满分 6 分）

假设随机变量X在区间$\left(1,2\right)$上服从均匀分布.试求随机变量$Y=e^{2x}$的概率密度$f\left(y\right)$.

数学Ⅴ

一、【同数学Ⅳ第一题】

二、【同数学Ⅳ第二题】

三、（每小题 4 分，满分 16 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(1-x^2\right)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

（2）已知 $u=e^{\frac{x}{y}}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

（3）【同数学Ⅳ第三（3）题】

（4）【同数学Ⅳ第三（4）题】

四、（本题满分 6 分）

确定常数 a 和 b，使函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax+b,x>1\\ x^2,x\le1\end{cases}$ 处处可导.

五、（本题满分 8 分）【同数学Ⅲ第五题】

六、（本题满分 8 分）【同数学Ⅳ第六题】

七、（本题满分 8 分）【同数学Ⅳ第七题】

八、（本题满分 6 分）

已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=0$，E 是单位矩阵.证明 A 可逆并求出其逆矩阵 A^{-1}.

九、（本题满分 7 分）【同数学Ⅳ第八题】

十、（本题满分 7 分）【同数学Ⅳ第十题】

十一、（本题满分 7 分）

假设有十只同种电器元件，其中有两只废品，装配仪器时从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只：若仍是废品，则扔掉再取一只.试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布，数学期望与方差.

十二、（本题满分 5 分）【同数学Ⅳ第十二题】