2019年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）当$x \to 0$时，若$x - \tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2）设函数$f(x)=\begin{cases} x|x|, & x \le 0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的（　　）

(A)可导点，极值点　　(B) 不可导点，极值点

(C)可导点，非极值点　　(D) 不可导点，非极值点

（3）设$\{u_n\}$是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{u_n}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

（4）设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$.如果对上半平面$(y>0)$内的任意有向光滑封闭曲线C都有

$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$,那么函数$P(x,y)$可取为（　　）

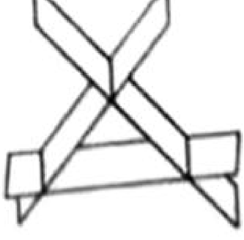
(A) $y-\frac{x^2}{y^3}$　　(B) $\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$　　(C) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$　　(D) $x-\frac{1}{y}$

（5）设A是3阶实对称矩阵，E是3阶单位矩阵，若$A^2+A=2E$,且$|A|=4$，则二次型x^TAx的规范为（　　）

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

（6）如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\left(i=1,2,3\right)$组成的



线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为$A,\overline{A}$,则（　　）

(A) $r(A)=2,r(\overline{A})=3$　　(B) $r(A)=2,r(\overline{A})=2$

(C) $r(A)=1, r(\overline{A})=2$　　(D) $r(A)=1, r(\overline{A})=1$

(7) 设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$的充分必要条件是（　　）

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　(D) $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

(8) 设随机变量X与Y相互独立，且都服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|<1\}$（　　）

(A) 与μ无关，而与σ^2有关　　(B) 与μ有关，而与σ^2无关

(C) 与μ，σ^2都有关　　(D) 与μ，σ^2都无关

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9) 设函数$f(u)$可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则$\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

(10) 微分方程$2yy'-y^2-2=0$满足条件$y(0)=1$的特解$y=$__________.

(11) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$s(x)=$ __________.

(12) 设Σ为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy=$ __________.

(13) 设$A=(a_1,a_2,a_3)$为3阶矩阵，若a_1,a_2线性无关，且$a_3=-a_1+2a_2$,则线性方程组$Ax=0$的通解为__________.

(14) 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数，$EX$为$X$的数学期望，则$P\{F(X)>EX-1\}=$__________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本题满分 10 分）

设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

（16）（本题满分 10 分）

设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $l=-3i-4j$ 的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求 a,b；

（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$ 的面积.

（17）（本题满分 10 分）

求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

（18）（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

（19）（本题满分 10 分）

设 Ω 是由锥面在 $x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

（20）（本题满分 11 分）

设向量组 $x_1=(1,2,1)^T\ x_2=(1,3,2)^T\ x_3=(1,a,3)^T$ 为 R^3 的一个基，$\beta=(1,1,1)^T$ 在基下的坐标 $(b,c,1)^T$.

(1) 求 a,b,c；

(2) 证明 a_2,a_3,β 为 R^3 的一个基.并求 a_2,a_3,β 到 a_1,a_2,a_3 的过渡矩阵.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似.

(1) 求x、y；

(2) 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布. Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$,令$Z=XY$

（1） 求Z的概率密度；

（2） p为何值时，X与Y不相关；

（3）X与Z是否相互独立.

（23）（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x\ge\mu.\\ 0, \qquad x<\mu.\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求A；

(2) 求σ^2的最大似然估计量.