2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x \to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【答案】C

【解析】$x \to 0$ 时，有 $x-\tan x \sim -\dfrac{x^3}{3}$，故 $k=3$

（2）曲线 $y = x\sin x + 2\cos x$ $(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2})$ 的拐点坐标为（　　）

(A) $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$　　(B) $(0,2)$　　(C) $(\pi,-2)$　　(D) $(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2})$

【答案】C

【解析】$y' = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$，

$y'' = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$，

令 $y''=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\pi$，

当 $x \in U^{\circ}(0,\delta)$，$y''<0$，故 $(0,2)$ 不是拐点；

当 $x>\pi$ 时，$y''>0$；当 $x<\pi$ 时，$y''<0$，故 $(\pi,-2)$ 为拐点.

（3）下列反常积分发散的是（　　）

(A) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　(B) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$　　(C) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　(D) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}dx$

【答案】D

【解析】$\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$，故选项 D 正确；

选项 A：$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \Gamma(2) = 1$；选项 B：$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx^2 = \dfrac{1}{2}$；

选项 C：$\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \arctan x d\arctan x = \dfrac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

（4）已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则 a,b,c 依次为（　　）

(A) $1,0,1$　　(B) $1,0,2$　　(C) $2,1,3$　　(D) $2,1,4$

【答案】D

【解析】由通解形式可得，$(C_1+C_2x)e^{-x}$ 是对应齐次方程的解，故是 $\lambda=-1$ 其二重特征值，所以其特

征方程为$(\lambda+1)^2=0$，即$\lambda^2+2\lambda+1=0$，所以$a=2,b=1$；再将特解e^x带入原方程可得$c=4$

（5）已知积分区域$D=\{(x,y)\big||x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\}$，$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，试比较$I_1,I_2,I_3$的大小（　　）

(A) $I_3<I_2<I_1$　　(B) $I_1<I_2<I_3$

(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_2<I_3<I_1$

【答案】A

【解析】在区域D上，$x^2+y^2\le\dfrac{\pi^2}{4}$，令$\sqrt{x^2+y^2}$，则$0\le u\le\dfrac{\pi}{2}$，所以有$\sin\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+y^2}$；

令$f(u)=1-\cos u-\sin u$，则$f'(u)=\sin u-\cos u$，

故当$0\le u\le\dfrac{\pi}{4}$，$f'(u)<0$；当$\dfrac{\pi}{4}\le u\le\dfrac{\pi}{2}$，$f'(u)>0$；

而$f(0)=f(\dfrac{\pi}{2})=0$，所以$f(u)<0$，即$1-\cos u\le\sin u$，得到$1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\sin\sqrt{x^2+y^2}$

综合对比可得，$I_3<I_2<I_1$.

(6) 函数$f(x),g(x)$的二阶导函数在$x=a$处连续，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$是两条曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$在$x=a$对应的点处相切及曲率相等的（　　）

(A)充分非必要条件　　(B)充分必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分又非必要条件

【答案】A

【解析】（充分性）由泰勒公式可得：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o(x-a)^2$；

$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+\dfrac{g''(a)}{2}(x-a)^2+o(x-a)^2$

则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$，可得$f(a)=g(a)$，$f'(a)=g'(a)$，$f''(a)=g''(a)$，由此可得在$x=a$处相切。

由曲率公式$k=\dfrac{|y''|}{\left[1+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$可得两曲线在$x=a$处曲率相同.

（必要性）若函数$y=f(x)$，$y=g(x)$在$x=a$处相切可得$f(a)=g(a)$，$f'(a)=g'(a)$；

由曲率相等 $k=\dfrac{|f''(a)|}{\left(1+[f'(a)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|g''(a)|}{\left(1+[g'(a)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，可得：$f''(a)=\pm g''(a)$

但若 $f''(a)=-g''(a)$，有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=f''(a)$ 不一定为 0，故必要性不一定成立.

（7）设 A 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】A

【解析】因为 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，故有 $n-r(A)=2$，即 $r(A)=4-2=2$，又因为

$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}$，所以 $r(A^*)=0$

（8）设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$ 且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形为（　　）

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解析】设矩阵 A 的特征值为 λ，由 $A^2+A=2E$ 可得，$\lambda^2+\lambda=2$，解得 $\lambda=1,-2$，

又因为 $|A|=4=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，故 A 的 3 个特征值为 $1,-2,-2$，所以二次型 x^TAx 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$__________.

【答案】$4e^2$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x-1)\cdot\frac{2}{x}}=e^{2+2\ln 2}=4e^2$

10.曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处切线在 y 轴的截距为__________.

【答案】$\dfrac{3}{2}\pi+2$

【解析】当 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 时，$x=\dfrac{3}{2}\pi+1,\ y=1$，$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\left.\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=-1$

故切线方程为 $y-1=-1(x-\dfrac{3}{2}\pi-1)$，即 $y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$，令 $x=0$，$y=\dfrac{3}{2}\pi+2$

11.设函数 $f(u)$ 可导， $z=yf(\frac{y^2}{x})$，则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

【答案】 $yf(\frac{y^2}{x})$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'(\frac{y^2}{x})(-\frac{y^2}{x^2})=-\frac{y^3}{x^2}f'(\frac{y^2}{x})$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{y^2}{x})+yf'(\frac{y^2}{x})\cdot\frac{2y}{x}=f(\frac{y^2}{x})+\frac{2y^2}{x}f'(\frac{y^2}{x})$

则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\cdot\left[-\frac{y^3}{x^2}f'(\frac{y^2}{x})\right]+y\left[f(\frac{y^2}{x})+\frac{2y^2}{x}f'(\frac{y^2}{x})\right]=yf(\frac{y^2}{x})$

12.设函数 $y=\ln\cos x\ (0\le x\le\frac{\pi}{6})$ 的弧长为________.

【答案】 $\frac{\ln 3}{2}$

【解析】 $s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\ln 3}{2}$

13.已知函数 $f(x)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

【答案】 $\frac{\cos 1-1}{4}$

【解析】设 $F(x)=\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$， 故有 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 F(x)dx^2=\frac{1}{2}x^2F(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2F'(x)dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\sin x^2}{x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2dx=\frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{\cos 1-1}{4}$

14.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$， A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 (i,j) 的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$________.

【答案】 -4

【解析】 $A_{11}-A_{12}=|A|=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-2&-1&-1&1\\3&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{vmatrix}=-4$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解。

（1）求 $y=f(x)$；

（2）求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点。

【答案】(1) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$；(2) 凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})\bigcup(0,\sqrt{3})$，凹区间为$(-\sqrt{3},0)\bigcup(\sqrt{3},+\infty)$，拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$

【解析】(1) $y(x)=e^{-\int xdx}(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int xdx}dx+C)=e^{-\frac{x^2}{2}}(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx+C)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x+C)$，

因为$y(0)=0$，得$C=0$，所以$y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$；

(2) 由 (1) 有$y'=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$，

$y''=-2xe^{-\frac{x^2}{2}}+(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}$，令$y''=0$得$x=0,\pm\sqrt{3}$，

当$x<-\sqrt{3}$或$0<x<\sqrt{3}$时，$y''<0$

当$-\sqrt{3}<x<0$或$x>\sqrt{3}$时，$y''>0$

所以凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})\bigcup(0,\sqrt{3})$，凹区间为$(-\sqrt{3},0)\bigcup(\sqrt{3},+\infty)$，

又$y(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$，$y(\sqrt{3})=\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$，$y(0)=0$，

所以拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

16.求不定积分$\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

【解析】由于$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

故原积分可化为：$\int\left[-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right]dx=-2\int\frac{1}{x-1}dx+3\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{1}{x^2+x+1}d(x^2+x+1)$

$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$

17.已知$y(x)$满足微分方程$y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且有$y(1)=\sqrt{e}$.

(1) 求$y(x)$

(2) $D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求平面区域$D$绕$x$轴旋转成的旋转体体积.

【解析】(1) $y(x)=e^{-\int -xdx}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{\int -xdx}dx+C\right)$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+C\right)=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$$

又因为 $y(1)=\sqrt{e}$，故 $C=0$ 所以 $y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$

（2）$V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2dx=\pi\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_1^2 e^{x^2}dx^2=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$

18.已知平面区域 $D=\{(x,y)\big||x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

【解析】$(x^2+y^2)^3=y^4$ 的极坐标方程 $r=\sin^2\theta$，由对称性可得：$\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=0$

所以 $\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\iint\limits_{D_1}\frac{r\sin\theta}{r}rdrd\theta=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}r\sin\theta dr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2d\cos\theta=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)d\cos\theta$$

$$=-(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{43}{120}\sqrt{2}$$

19.$n\in N^*$，S_n 是 $f(x)=e^{-x}\sin x(0\le x\le n\pi)$ 的图像与 x 轴所围图形的面积求 S_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

【解析】面积 $S=\int_0^{n\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x}\sin xdx+\cdots$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin xdx=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)]\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}[e^{-(k+1)\pi}\cdot(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}\cdot(-1)^k]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}]=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi}=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\frac{1-e^{-(n-1)\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-(n-1)\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\frac{1}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$

20.已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}++3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求 a,b 的值，使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 下，上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式.

【解析】$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)ae^{ax+by}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+v(x,y)be^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)a^2e^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+v(x,y)b^2e^{ax+by}$$

带入已知条件 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

得：$2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)a^2e^{ax+by}\right]-2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+v(x,y)b^2e^{ax+by}\right]$

$+3\left[\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)ae^{ax+by}\right]+3\left[\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+v(x,y)be^{ax+by}\right]=0$

整理得：$2(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})+(4a+3)\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3a+3b)v(x,y)=0$

由题意可得上式不含 $v(x,y)$ 的一阶偏导数，所以 $4a+3=0,3-4b=0$，即：$a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$

21.已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$

（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$

【解析】（1）令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理可得：存在 $c\in(0,1)$ 使得 $F(1)-F(0)=F'(c)$，即 $f(c)=1$

对 $f(x)$ 在 $[c,1]$ 上使用罗尔定理可得，存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$

（2）令 $G(x)=f(x)+x^2$，分别在 $[0,c],[c,1]$ 上应用拉格朗日中值定理可得：存在 $\eta_1\in(0,c)$，$\eta_2\in(c,1)$ 使得 $G(c)-G(0)=G'(\eta_1)c$；$G(1)-G(c)=G'(\eta_2)(1-c)$

即：$G'(\eta_1)=\frac{c^2+1}{c}$；$G'(\eta_2)=1+c$

在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上对 $G'(x)$ 再次使用拉格朗日中值定理可得：

$$G'(\eta_2)-G'(\eta_1)=G''(\eta)(\eta_2-\eta_1)$$

整理可得 $G''(\eta)=f''(\eta)+2=\frac{G'(\eta_2)-G'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=\frac{1+c-\frac{c^2+1}{c}}{\eta_2-\eta_1}=\frac{c-1}{c(\eta_2-\eta_1)}<0$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

故有 $f''(\eta)<-2$.

22.已知向量组（I）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$，（II）$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$，

若向量组（I）和向量组（II）等价，求 a 的值，并将 β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

【解析】（1）因为向量组（I）和向量组（II）等价，

所以有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

对其初等行变换有：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

① 若 $a\neq1$，有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，

所以向量组（I）和向量组（II）等价

② 若 $a=1$，有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$

所以向量组（I）和向量组（II）等价

（2）① 当 $a=1$，因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $\beta_3=k(-2,1,1)^T+(3,-2,0)^T$，$k\in R$，即 $\beta_3=(3-2k)\alpha_1+(k-2)\alpha_2+k\alpha_3,k\in R$.

② 当 $a\neq1$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&a^2+3&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

所以 $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

23.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x,y

（2）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

【解析】（1）由于 A 与 B 相似，根据相似性质，有：$|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$；

即：$-2(-2x+4)=-2y$，$-2+x-2=2-1+y$

解得 $x=3,y=-2$；

（2）B 是上三角矩阵，则 B 的特征值为 $-1,-2,2$，又因为 A 和 B 相似，则 A 的特征值也为 $-1,-2,2$

对矩阵 A：

当 $\lambda_1=2$ 时，解 $(2E-A)x=0$ 得 $\alpha_1=(-1,2,0)^T$；

当 $\lambda_1=-1$ 时，解 $(-E-A)x=0$ 得 $\alpha_2=(2,-1,0)^T$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(-2E-A)x=0$ 得 $\alpha_3=(-1,2,4)^T$；

对矩阵 B：

当 $\lambda_1=2$ 时，解 $(2E-B)x=0$ 得 $\beta_1=(1,0,0)^T$；

当 $\lambda_1=-1$ 时，解 $(-E-B)x=0$ 得 $\beta_2=(-1,3,0)^T$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(-2E-B)x=0$ 得 $\beta_3=(0,0,1)^T$；

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$；

令 $P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $P_2^{-1}AP_2=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$；

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}AP_2$，则 $P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$；故 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\2&-1&2\\0&0&4\end{bmatrix}$.