2017年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1））若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax},x>0\\ b,x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a},\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore\dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选 A.

（2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1,f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则（　　）

$(A)\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$　　$(B)\int_{-1}^{1}f(x)dx<0$

$(C)\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$　　$(D)\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

【答案】B

【解析】

$f(x)$ 为偶函数时满足题设条件，此时 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$，排除 C,D.

取 $f(x)=2x^2-1$ 满足条件，则 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2-1\right)dx=-\dfrac{2}{3}<0$，选 B.

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　）

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n{}^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

【答案】D

【解析】特值法：（A）取 $x_n=\pi$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pi$，A 错；

取 $x_n=-1$，排除 B,C.所以选 D.

（4）微分方程的特解可设为

（A）$Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　（B）$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（C）$Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　（D）$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

【答案】A

【解析】特征方程为：$\lambda^2-4\lambda+8=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=2\pm 2i$

$\because f(x)=e^{2x}(1+\cos 2x)=e^{2x}+e^{2x}\cos 2x\therefore y_1^*=Ae^{2x},y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x),$

故特解为：$y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$, 选 C.

（5）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则

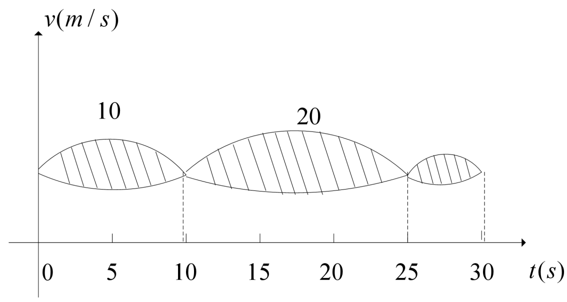
（A）$f(0,0)>f(1,1)$　（B）$f(0,0)<f(1,1)$　（C）$f(0,1)>f(1,0)$　（D）$f(0,1)<f(1,0)$

【答案】C

【解析】$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,\Rightarrow f(x,y)$ 是关于 x 的单调递增函数，是关于 y 的单调递减函数，

所以有 $f(0,1)<f(1,1)<f(1,0)$，故答案选 D.

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　　）



（A）$t_0=10$　　（B）$15<t_0<20$　　（C）$t_0=25$　　（D）$t_0>25$

【答案】B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}v_1(\mathrm{t})dt,\int_0^{t_0}v_2(\mathrm{t})dt,$ 则乙要追上甲，则

$\int_0^{t_0}v_2(\mathrm{t})-\mathrm{v}_1(\mathrm{t})dt=10$，当 $t_0=25$ 时满足，故选 C.

（7）设 A 为三阶矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，则 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$（　　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2$　　（B）$\alpha_2+2\alpha_3$　（C）$\alpha_2+\alpha_3$　　（D）$\alpha_1+2\alpha_2$

【答案】 B

【解析】

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\Rightarrow AP=P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}=\alpha_2+2\alpha_3,$$

因此 B 正确。

（8）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,则（ ）

（A） A与C相似,B与C相似　　（B） A与C相似,B与C不相似

（C） A与C不相似,B与C相似　　（D） A与C不相似,B与C不相似

【答案】B

【解析】由 $\left|\lambda E-A\right|=0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1,

因为 $3-r(2E-A)=1$，$\therefore$A 可相似对角化，即 $A\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

由 $\left|\lambda E-B\right|=0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3-r(2E-B)=2$，$\therefore$B 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，$\therefore$ $A\sim C$，但 B 不相似于 C.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_______

【答案】 $y=x+2$

【解析】

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\arcsin\dfrac{2}{x})=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\dfrac{2}{x}=2,$

$\therefore y=x+2$

(10) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______

【答案】$-\frac{1}{8}$

【解析】

$$\frac{dy}{dt}=\cos t,\frac{dx}{dt}=1+e^{t}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{1+e^{t}}$$

$$\Rightarrow\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{\left(\frac{\cos t}{1+e^{t}}\right)'}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t(1+e^{t})-\cos te^{t}}{\left(1+e^{t}\right)^{2}}\Rightarrow\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{8}$$

(11) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^{2}}dx=$______

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^{2}}dx&=-\int_{0}^{+\infty}\ln(1+x)d\frac{1}{1+x}\\&=-\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^{2}}dx\right]\\&=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^{2}}dx=1.\end{aligned}$$

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy$， $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$______

【答案】xye^{y}

【解析】$f_{x}'=ye^{y},f_{y}'=x(1+y)e^{y},f(x,y)=\int ye^{y}dx=xye^{y}+c(y)$, 故

$$f_{y}'=xe^{y}+xye^{y}+c'(y)=xe^{y}+xye^{y}\ ,$$

因此 $c'(y)=0$，即 $c(y)=C$，再由 $f(0,0)=0$，可得 $f(x,y)=xye^{y}$.

【答案】

【解析】

（13） $\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{1}\frac{\tan x}{x}dx=$______

【答案】$\ln\cos1$.

【解析】交换积分次序：

$$\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{1}\frac{\tan x}{x}dx=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x}\frac{\tan x}{x}dy=\int_{0}^{1}\tan xdx=\ln\cos1\ .$$

（14）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{bmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$______

【答案】-1

【解析】设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，由题设知 $A\alpha=\lambda\alpha$，故

$$\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$$

故 $a=-1$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t}{\sqrt{x^3}}dt$，令 $x-t=u$，则有

$$\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt=-\int_x^0\sqrt{u}e^{x+u}du=\int_0^x\sqrt{u}e^{x+u}du$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sqrt{u}e^{x+u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}e^u du}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sqrt{u}e^u du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}e^x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$$

（16）（本题满分 10 分）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1^{'}(1,1),\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}^{''}(1,1),$

【解析】

$$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(f_1^{'}e^x+f_2^{'}\left(-\sin x\right)\right)\right|_{x=0}=f_1^{'}(1,1)\cdot1+f_2^{'}(1,1)\cdot0=f_1^{'}(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}^{''}e^{2x}+f_{12}^{''}e^x(-\sin x)+f_{21}^{''}e^x(-\sin x)+f_{22}^{''}\sin^2x+f_1^{'}e^x-f_2^{'}\cos x$$

$$\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}^{''}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$$

结论：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1^{'}(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}^{''}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$$

（17）（本题满分 10 分）求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\frac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx)=\frac{1}{4}$$

（18）（本题满分 10 分）已知函数$y(x)$由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定，求$y(x)$的极值

【答案】极大值为$y(1)=1$，极小值为$y(-1)=0$

【解析】

两边求导得：

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ （1）

令$y'=0$得$x=\pm1$

对（1）式两边关于 x 求导得 $6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+3y''=0$ （2）

将$x=\pm1$代入原题给的等式中，得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}or\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，

将$x=1,y=1$代入（2）得$y''(1)=-1<0$

将$x=-1,y=0$代入（2）得$y''(-1)=2>0$

故$x=1$为极大值点，$y(1)=1$；$x=-1$为极小值点，$y(-1)=0$

（19）（本题满分 10 分）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有 2 阶导数，且$f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根；

(Π) 方程$f(x)f^{'}(x)+(f^{'}(x))^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

（I）$f(x)$ 二阶导数，$f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$ 有 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)有f\left(\delta\right)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0,f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$，$\exists\xi\in(0,1),使f(\xi)=0$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理 $\exists\eta\in(0,\xi),使f'(\eta)=0$，则 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，

对 $F(x)$ 在 $(0,\eta),(\eta,\xi)$ 分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$ 且 $\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$，使得 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在 $(0,1)$ 至少有两个不同实根。

得证。

（20）（本题满分 11 分）已知平面区域 $D=\left\{\left(x,y\right)|\,x^2+y^2\le 2y\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\left(x+1\right)^2dxdy$。

【答案】$\dfrac{5\pi}{4}$

【解析】$\iint\limits_D\left(x+1\right)^2dxdy=\iint\limits_D\left(x^2+1\right)dxdy=2\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cos^2\theta dr+\pi=\dfrac{5\pi}{4}$

（21）（本题满分 11 分）设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$，点 P 是曲线 L: $y=y(x)$ 上任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $\left(0,Y_p\right)$，法线与 x 轴相交于点 $\left(X_p,0\right)$，若 $X_p=Y_p$，求 L 上点的坐标 $\left(x,y\right)$ 满足的方程。

【答案】

【解析】设 $p\left(x,y(x)\right)$ 的切线为 $Y-y(x)=y'(x)\left(X-x\right)$，令 $X=0$ 得 $Y_p=y(x)-y'(x)x$，法线 $Y-y(x)=-\dfrac{1}{y'(x)}\left(X-x\right)$，令 $Y=0$ 得 $X_p=x+y(x)y'(x)$。由 $X_p=Y_p$ 得 $y-xy'(x)=x+yy'(x)$，即

$\left(\frac{y}{x}+1\right)y'(x)=\frac{y}{x}-1$ 。令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，按照齐次微分方程的解法不难解出

$\frac{1}{x}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln|x|+C$,

（22）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明：$r(A)=2$

(Π) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

【答案】（I）略；（II）通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

（I）证明：由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 可得 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&0\end{pmatrix},\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（II）由（1）$r(A)=2$，知 $3-r(A)=1$，即 $Ax=0$ 的基础解系只有 1 个解向量，

由 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$ 可得 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则 $Ax=0$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,

又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则 $Ax=\beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

综上，$Ax=\beta$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

【答案】$a=2;Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, f\ \underline{\underline{x=Qy}}\ -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $r(A)=2 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值-3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，，

则 $Q=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)\underline{\underline{x=Qy}}-3y_1^2+6y_2^2$

如果想要了解更多，广大研友们也可加入 2017 考研复试交流群（118146590）和大家一起交流考研心路历程。也可将自己考研的经验传授给学弟学妹们 2018 考研交流总群（337587371），希望他们在 2018 年金榜题名。