2017年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）

(A) $ab=\frac{1}{2}$　　(B) $ab=-\frac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

（2）设函数 $f\left(x\right)$ 可导，且 $f\left(x\right)f'\left(x\right)>0$ 则（ ）

(A) $f\left(1\right)>f\left(-1\right)$　　(B) $f\left(1\right)<f\left(-1\right)$

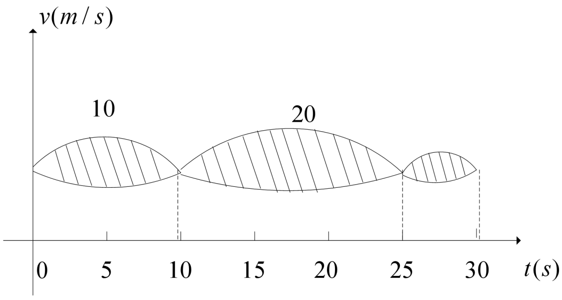
(C) $\left|f\left(1\right)\right|>\left|f\left(-1\right)\right|$　　(D) $\left|f\left(1\right)\right|<\left|f\left(-1\right)\right|$

（3）函数 $f\left(x,y,z\right)=x^2y+z^2$ 在点 $\left(1,2,0\right)$ 处沿向量 $n\left(1,2,2\right)$ 的方向导数为（ ）

(A)12　　(B)6　　(C)4　　(D)2

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位:m）处,如下图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1\left(t\right)$（单位:m/s）虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2\left(t\right)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10，20，3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位:s）,则（ ）

(A) $t_0=10$　　(B) $15<t_0<20$　　(C) $t_0=25$　　(D) $t_0>25$



（5）设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（ ）

(A) $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　(B) $E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　(D) $E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

（6）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则（ ）

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似　　　(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

(7) 设 A,B 为随机事件，若 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$,则 $P\left(A|B\right)>P\left(A|\overline{B}\right)$ 的充分必要条件是（　）

A. $P\left(B|A\right)>P\left(B|\overline{A}\right)$　　　B $P\left(B|A\right)<P\left(B|\overline{A}\right)$

C. $\mathrm{P}\left(\overline{B}|A\right)>\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)$　　　D. $\mathrm{P}\left(\overline{B}|A\right)<\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)$

(8) 设 $X_1,X_2......X_n(n\geq 2)$ 来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 则下列结论中不正确的是：（　）

(A) $\sum(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则 $f^{(3)}(0)=$ _________

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ _________

(11) 若曲线积分 $\int_L\frac{xdx-dydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $\mathrm{D}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$ 内与路径无关，则 $a=$ __________

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间（-1,1）内的和函数 $S(x)=$ _________

(13) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 EX=

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) （本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f\left(e^x,cosx\right)$,求 $\left.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$

（16）（本题满分 10 分）

求$\lim\limits_{n\to k}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数$y(x)$由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定，求$y(x)$得极值

（18）（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有 2 阶导数，$f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

证（1） 方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$至少存在一个根;

（2） 方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体S是圆锥面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $Z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点弧度为$u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。记圆锥与柱面的交线为$C$

（1）求C在 xOy 平面上的投影曲线的方程

（2）求 S 的质量M

（20）（本题满分 11 分）

设三阶行列式$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1） 证明$r(A)=2$

（2）如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$求方程组$Ax=\beta$的通解

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$，在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X，Y 互独立，且 X 的概率分布为 $\mathrm{P}\left\{X=0\right\}=\mathrm{P}\left\{X=2\right\}=\dfrac{1}{2}$，Y 概率密度为 $f\left(y\right)=\begin{cases}2y,0<y<1\\0,其他\end{cases}$

(1)求 $\mathrm{P}\left\{Y\le EY\right\}$　　(2)求 $\mathrm{Z}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ 的概率密度

（23）（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $z_i=\left|x_i-\mu\right|,\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，利用 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 估计 σ

(I)求 z_1 的概率密度

(II)利用一阶矩求 σ 的矩估计量

(III)求 σ 的最大似然估计量

2016年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a\left(1+x\right)^b}dx$收敛，则（　　）

$(A)a<1$且$b>1$　$(B)a>1$且$b>1$　$(C)a<1$且$a+b>1$　$(D)a>1$且$a+b>1$

（2）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}2\left(x-1\right),x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，则$f\left(x\right)$的一个原函数是（　　）

$(A)F\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x-1\right),x\geq 1\end{cases}$　$(B)F\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x+1\right)-1,x\geq 1\end{cases}$

$(C)F\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x+1\right)+1,x\geq 1\end{cases}$　$(D)F\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x-1\right)+1,x\geq 1\end{cases}$

（3）若$y=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2},y=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$是微分方程$y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right)$的两个解，则$q\left(x\right)=$（　　）

$(A)3x\left(1+x^2\right)$　$(B)-3x\left(1+x^2\right)$　$(C)\frac{x}{1+x^2}$　$(D)-\frac{x}{1+x^2}$

（4）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x,x\leq 0\\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n},n=1,2,\ldots\end{cases}$，则（　　）

（A）$x=0$是$f\left(x\right)$的第一类间断点　　（B）$x=0$是$f\left(x\right)$的第二类间断点

（C）$f\left(x\right)$在$x=0$处连续但不可导　　（D）$f\left(x\right)$在$x=0$处可导

（5）设A，B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是（　　）

（A）A^T与B^T相似　　（B）A^{-1}与B^{-1}相似

（C）$A+A^T$与$B+B^T$相似　　（D）$A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

（6）设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2$在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面（B）双叶双曲　（C）椭球面　（D）柱面

（7）设随机变量$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)\left(\sigma>0\right)$，记$p=P\left\{X\leq\mu+\sigma^2\right\}$，则（　　）

（A）p随着μ的增加而增加　　（B）p随着σ的增加而增加

（C）p随着μ的增加而减少　　（D）p随着σ的增加而减少

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　（B）$-\frac{1}{3}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{3}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$__________

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$__________

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$__________

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$__________

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$__________.

（14）设 $x_1,x_2,...,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$.

（16）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y''+ky=0$ 其中 $0<k<1$.

(I) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛；

(II) 若 $y(0)=1,y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值

（18）设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+1\right)dydz-2ydzdx+3zdxdy$

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2...)$，证明：

（I）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（II）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

（20）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（I）求 A^{99}

（II）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, X\le Y\\ 0, X>Y\end{cases}$$

（I）写出 (X,Y) 的概率密度；

（II）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

（23）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

（1）求 T 的概率密度

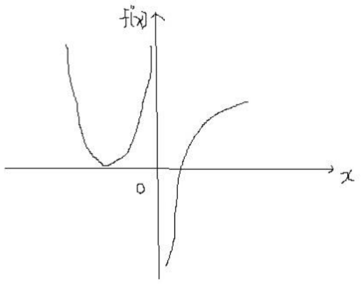
（2）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题

（1）设函数 $f(x)$ 在（$-\infty, +\infty$）连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3



（2）设$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+ay'+by=ce^{x}$的一个特解，（　　）
则：

(A)$a=-3, b=-1, c=-1.$

(B)$a=3, b=2, c=-1.$

(C)$a=-3, b=2, c=1.$

(D)$a=3, b=2, c=1.$

(3)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-1\right)^n$的：

(A)收敛点，收敛点.

(B)收敛点，发散点.　　（　　）

(C)发散点，收敛点.

(D)发散点，发散点.

（4）设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（　　）

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$　（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解的充分必要条件为（　　）

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　　（B）$a\notin\Omega,d\in\Omega$

（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega$　　　（D）$a\in\Omega,d\in\Omega$

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为（　　）

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）若 A,B 为任意两个随机事件，则（　　）

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$　　　（B）$P(AB)\ge P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\le \frac{P(A)+P(B)}{2}$　　　（D）$P(AB)\ge \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(8)设随机变量X, Y不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$（　　）

(A) -3　　(B) 3　　(C) -5　　(D) 5

二、填空题

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=$ __________.

（10）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$ ________.

（11）若函数由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ _______ .

（12）设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz$ = _______

（13）n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$ _______

（14）设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，则$P\{XY-Y<0\}=$________.

三、解答题

（15）设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$是等价无穷小，求$a$，$b$，$k$值。

（16）设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零，若对任意的$x_0\in I$，曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线$x=x_0$及x轴所围成的区域的面积为4，且$f(0)=2,$求$f(x)$的表达式。

（17）已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线$C:x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数.

（18）（本题满分10分）

（Ⅰ）设函数$u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（Ⅱ）设函数$u_1(x),u_2(x)...u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)...u_n(x),$写出$f(x)$的求导公式.

（19）（本题满分10分）

已知曲线L的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A(0,\sqrt{2},0)$，终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$

（20）（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个基， $\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$ ， $\beta_2=2\alpha_2$ ， $\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$ 。

（Ⅰ）证明向量组 β_1,β_2,β_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基；

（Ⅱ）当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求出所有的 ξ 。

（21）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值.

（Ⅱ）求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2 & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数.

（Ⅰ）求 Y 的概率分布；

（Ⅱ）求 EY .

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta} & \theta\le x\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，X_1，$X_2.....X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计.

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题 1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．下列曲线有渐近线的是（　）

（A）$y = x + \sin x$　　（B）$y = x^2 + \sin x$

（C）$y = x + \sin\frac{1}{x}$　　（D）$y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x) \ge 0$ 时，$f(x) \ge g(x)$　　（B）当 $f'(x) \ge 0$ 时，$f(x) \le g(x)$

（C）当 $f''(x) \le 0$ 时，$f(x) \ge g(x)$　　（D）当 $f''(x) \le 0$ 时，$f(x) \le g(x)$

3．设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dy =$（　）

（A）$\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（B）$\int_0^1 dx \int_0^{1-x1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

4．若函数 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2 dx = \min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)^2 dx\right\}$，则 $a_1\cos x + b_1\sin x =$（　）

（A）$2\sin x$　　（B）$2\cos x$　　（C）$2\pi\sin x$　　（D）$2\pi\cos x$

5．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于（　）

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$（C）$a^2d^2 - b^2c^2$（D）$-a^2d^2 + b^2c^2$

6．设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量，则对任意的常数 k, l，向量 $\alpha_1 + k\alpha_3$，$\alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

（A）必要而非充分条件　　（B）充分而非必要条件
（C）充分必要条件　　（D）非充分非必要条件

7．设事件 A 与 B 想到独立，$P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$ 则 $P(B-A) =$（　）

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

8．设连续型随机变量 X_1, X_2 相互独立，且方差均存在，X_1, X_2 的概率密度分别为 $f_1(x), f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}(f_1(y) + f_2(y))$，随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$，则（　）

（A）$EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$　　（B）$EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$
（C）$EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$　　（D）$EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9．曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

10．设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________________.

11．微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足 $y(1)=e^3$ 的解为_____________.

12．设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正方向往负方向看是逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L zdx+ydz=$______________.

13．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围是______________.

14．设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta\\ 0,\quad \text{其它}\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单样本，若 $C\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则常数 C =____________.

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

16．（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

17．（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

18．（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$

19．（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

（2）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20．（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（1）求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

（2）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

21．（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

22．（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的分布为 $P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),i=1,2$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

（1）求 Y 的分布函数；

（2）求期望 $E(Y)$.

23．（本题满分 11 分）

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x\geq 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$，其中 θ 为未知的大于零的参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，

（1）求 $E(X),E(X^2)$；

（2）求 θ 的极大似然估计量 $\widehat{\theta}$.

（3）是否存在常数 a，使得对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$?

2013年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题（1~8题，每题4分）

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中k，c为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$

. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　）

A. $x-y+z=-2$　　　B. $x+y+z=0$

C. $x-2y+z=-3$　　　D. $x-y-z=0$

3. 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\cdots)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S(-\dfrac{9}{4})=$（　）

A . $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $-\dfrac{3}{4}$

4. 设 $L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记

$I_i=\oint_{i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)dy(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D I_4

5. 设A,B,C均为n阶矩阵，若AB=C，且B可逆，则（　　）
A.矩阵C的行向量组与矩阵A的行向量组等价
B矩阵C的列向量组与矩阵A的列向量组等价
C矩阵C的行向量组与矩阵B的行向量组等价
D矩阵C的列向量组与矩阵B的列向量组等价

6. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）

A. $a=0,b=2$　　　B. $a=0,b$ 为任意常数

C. $a=2,b=0$　　　D. $a=2,b$ 为任意常数

7. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$P_i=P\{-2\le X_i\le 2\}(i=1,2,3)$，则（　　）

A. $P_1>P_2>P_3$　　　B. $P_2>P_1>P_3$

C. $P_3>P_2>P_2$　　　D $P_1>P_3>P_2$

8. 设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1,n)$ ，给定 $a(0<a<0.5)$ ，常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$ ，则 $P\{Y>c^2\}=$（　）

A. a　　B. $1-a$　　C. $2a$　　D $1-2a$

二、填空题（9-14 小题，每小题 4 分）

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to 0}n[f(\frac{1}{n})-1]=$____。

10. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解 $y=$____。

11. 设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ (t为参数)，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$____。

12. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$______。

13. 设 A=(a_{ij}) 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ (i，j=1, 2, 3)，则 | A | ＝______。

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 P{Y≤a+1|Y＞a}=

三．解答题：

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt.$

(16)(本题 10 分)

设数列 {a_n} 满足条件：$a_0=3, a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2).$

S（x）是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（1）证明：$S''(x)-S(x)=0;$

（2）求 $S(x)$ 的表达式.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $\left[-1,1\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

（II）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 A（1,0,0），B（0,1,1）两点将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 Ω。

（1）求曲面 Σ 的方程；

（2）求 Ω 的形心坐标。

20.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 AC-CA=B,并求所有矩阵 C。

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$， $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$。

（1）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（2）若 α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$。

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & x\le 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

（1）求 Y 的分布函数；

（2）求概率 $P\{X\le Y\}$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量。

2012年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$　　（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

（3）如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}$ $\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_2<I_2<I_3$.　(C) $I_1<I_3<I_1$,　(D) $I_1<I_2<I_3$.

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（6）设 A 为3阶矩阵，P 为3阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（7）设随机变量 x 与 y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $p\{x<y\}=$（　）

$(A)\frac{1}{5}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{2}{5}$　　$(D)\frac{4}{5}$

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（　）

(A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) -1

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$________。

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx$ ________。

（11）$\text{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ ________。

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq0,y\geq0,z\geq0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$________。

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为________。

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P\left(AB|\overline{C}\right)=$ ________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\ \dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t,\end{cases}\ (0\le t<\dfrac{\pi}{2}),$

，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0$，$(0<t<\dfrac{\pi}{2})$。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点 $\left(0,0\right)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $\left(2,0\right)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $\left(0,2\right)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

（20）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$. （Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ） 当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a　　　2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示，

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求：(1) $P\left(X=2Y\right)$；　(2) $\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)$ 与 ρ_{XY} .

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 与 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$, 设 $Z=X-Y$,

（1）求 z 的概率密度 $f\left(z,\sigma^2\right)$；

（2）设 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$ ；

（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

2011年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为(　　)

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.　　(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f(0)>1$，$f''(0)>0$.　　(B) $f(0)>1$，$f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$，$f''(0)>0$.　　(D) $f(0)<1$，$f''(0)<0$.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为3阶矩阵，将 A 的第2列加到第1列得矩阵 B，再交换 B 的第2行与第3行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(7) 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)=$(　　)

(A) $E(U)\cdot E(V)$.　　　　　　　　(B) $E(X)\cdot E(Y)$.

(C) $E(U)\cdot E(Y)$.　　　　　　　　(D) $E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$_________.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$_________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$_________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分

$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)$=______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16) (本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17) (本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

(18) (本题满分 10 分)

(Ⅰ) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy f''_{xy}(x,y)dxdy$.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r\left(A\right)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知．$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$（　　）

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

(A) x　　(B) z　　(C) $-x$　　(D) $-z$

(3) 设 m,n 为正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性（　　）

(A) 仅与 m 取值有　　(B) 仅与 n 取值有关
(C) 与 m,n 取值都有关　　(D) 与 m,n 取值都无关

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(5) 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵,$\mathbf{B}$ 为 $n\times m$ 型矩阵,E 为 m 阶单位矩阵,若 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$,则（　　）

(A) 秩 $(\mathbf{A})=m$,秩 $(\mathbf{B})=m$　　(B) 秩 $(\mathbf{A})=m$,秩 $(\mathbf{B})=n$

(C) 秩 $(\mathbf{A})=n$,秩 $(\mathbf{B})=m$　　(D) 秩 $(\mathbf{A})=n$,秩 $(\mathbf{B})=n$

(6) 设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶对称矩阵,且 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$,若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3,则 $\mathbf{A}$ 相似于（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(7)设随机变量X的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则$P\{X=1\}$=（　　）

(A)0　　(B)1　　(C)$\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　(D)$1-\mathrm{e}^{-1}$

(8)设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，

若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), x\le 0,\\ bf_2(x), x>0,\end{cases}(a>0,b>0)$ 为概率密度，则a,b应满足（　　）

(A)$2a+3b=4$　　(B)$3a+2b=4$

(C)$a+b=1$　　(D)$a+b=2$

二、填空题(9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设 $\begin{cases}x=e^{-t},\\ y=\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)du,\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ = ________.

(10)$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dy$=__________.

(11)已知曲线L的方程为$y=1-|x|\{x\in[-1,1]\}$，起点是$(-1,0)$，终点是$(1,0)$，则曲线积分$\int_L xydx+x^2dy$=____________.

(12)设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$，则$\Omega$的形心的竖坐标$\bar{z}$=____________.

(13)设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,\alpha)^T$，若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$形成的向量空间的维数是 2，则$\alpha$=____________.

(14)设随机变量X概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，则$E\left(X^2\right)$=____________.

三、解答题(15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程$y''-3y'+2y=2x\,\mathrm{e}^x$的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数$f(x)=\int_1^x (x^2-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(1)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由

(2)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt (n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点, 若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直, 求 P 点的轨迹 C, 并计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1)求 λ, a.

(2)求方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $x=\mathbf{Q}y$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 且 $\mathbf{Q}$ 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(1)求 $\mathbf{A}$.

(2)证明 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X+Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$, 求常数及 A 条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta\in(0,1)$ 未知, 以 N_i 来表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$, 试求常数 a_1,a_2,a_3, 使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

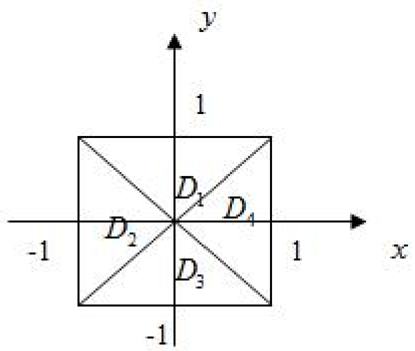
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 等价无穷小,则(　　)

(A) $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$　　(B) $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$　　(C) $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$　　(D) $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$

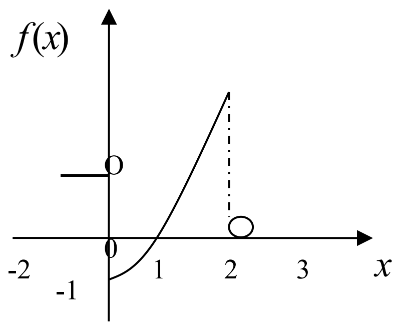
(2)如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\ (k = 1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_{D_k} y \cos x \, dxdy$,则



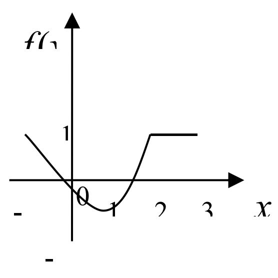
$\max\limits_{1 \le k \le 4} \{I_k\} =$(　　)

(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4

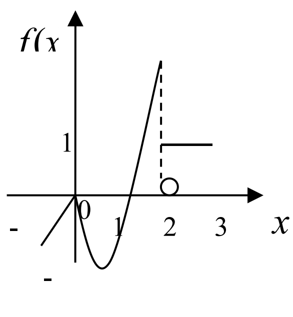
(3)设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



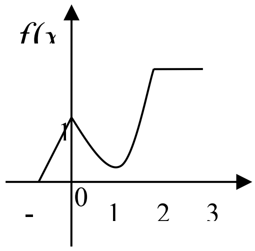
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为(　　)



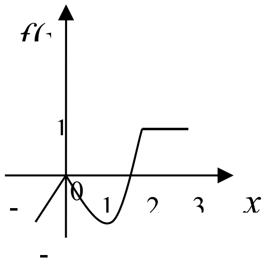
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则（　　）

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.　　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.　　(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为（　　）

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\mathbf{A}|=2,|\mathbf{B}|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX=$（　　）

(A) 0　　(B) 0.3　　(C) 0.7　　(D) 1

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

(10)若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________.

(11)已知曲线 $L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$, 则 $\int_L xds=$____________.

(12)设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$, 则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=$____________.

(13)若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的非零特征值为____________.

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$____________.

三、解答题(15－23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\ (n=1,2,.....)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1)求 S_1 及 S_2 的方程.　　(2)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)（本题满分 11 分）

⑴ 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)$.

⑵ 证明：若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $\left(0,\delta\right)\left(\delta>0\right)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'\left(x\right)=A$，则 $f'_+\left(0\right)$ 存在，且 $f'_+\left(0\right)=A$

(19)（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\sum$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)（本题满分 11 分）

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

⑴求满足 $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的 $\boldsymbol{\xi}_2$. $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$. ⑵对⑴中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 无关.

(21)（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

⑴求二次型 f 的矩阵的所有特征值； ⑵若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

(22)（本题满分 11 分）

袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有回放地从袋中取两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

⑴ 求 $p\left\{X=1\middle|Z=0\right\}$. ⑵求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 概率分布

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x},x>0\\0,其他\end{cases}$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，X_1，X_2，$\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

⑴求参数 λ 的矩估计量.

⑵求参数 λ 的最大似然估计量.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$ 则 $f'(x)$ 的零点个数(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(2)函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　)

(A) $\boldsymbol{i}$　　(B) $-\boldsymbol{i}$　　(C) $\boldsymbol{j}$　　(D) $-\boldsymbol{j}$

(3)在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

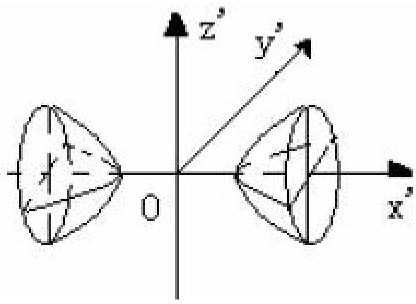
(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

(5)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\mathbf{A}^3=0$,则(　　)

(A) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆,$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆　　(B) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆,$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆

(C) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆,$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆　　(D) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆,$\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆

(6)设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,如果二次曲面方程 $(x,y,z)\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图,则 A 的正特



征值个数为(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为(　　)

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$　　(C) $1-[1-F(x)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

(8)设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　　）

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ _________.

(10)曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_________.

(11)已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为_________.

(12)设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ _________.

(13)设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\mathbf{A}$ 的非零特征值为_________.

(14)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=EX^2\}=$ _________.

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin(\sin x)\right]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

(17)(本题满分 10 分)

已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1)利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$.

(2)当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$,用余弦级数展开,并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^T$, $\boldsymbol{\beta}^T$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.证明:

(I) 秩 $r(\boldsymbol{A})\le 2$;

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

(21)(本题满分 11 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},$$

(I) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(II) 当a为何值时，该方程组有唯一解，并求x_1；

(III) 当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，记 $Z=X+Y$，

(1) 求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$.

(2) 求 Z 的概率密度 $fz(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.