# 1988年全国硕士研究生入学统一考试

# 数学试题参考解答及评分标准

## 数 学（试卷一）

**一．(本题满分 15 分，每小题 5 分)**

**(1)** 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域.

**解：**因$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x-3|=\frac{1}{3}|x-3|$, 故$\frac{1}{3}|x-3|<1$即$0<x<6$时，幂级数收敛. ……3 分

当$x=0$时，原级数成为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，是收敛的. ……4 分

当$x=6$时，原级数成为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的. ……5 分

所以，所求的收敛域为$[0,6)$.

**(2)** 已知 f(x)= $e^{x^2}$,f$[\varphi(x)]$=1-x,且 $\varphi$(x)$\geq$0.求 $\varphi$(x)并写出它的定义域.

**解：**由$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. ……3 分

由$\ln(1-x)\geq 0$，得$1-x\geq 1$即$x\leq 0$. ……5 分

所以$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为$(-\infty,0)$.

**(3)**设 S 为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，计算曲面积分$I=\oiint_S x^3dydz+y^3dxdx+z^3dxdy$.

**解：**根据高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，有

$I=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$（其中$\Omega$是由$S$所围成的区域） ……2 分

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$ ……4 分

$=\frac{12\pi}{5}$. ……5 分

## 二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

**(1)** 若 $f(t)=\lim_{x\to\infty} t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=\underline{(2t+1)e^{2t}}$

**(2)** 设 f(x)是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定 f(x)= $\begin{cases} 2, -1<x\le 0 \\ x^3, 0<x\le 1 \end{cases}$，则 f(x)的付立叶级数在 x=1 处收敛于 $\underline{\frac{2}{3}}$ .

**(3)** 设 f(x)是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 则 f(7)= $\underline{\frac{1}{12}}$ .

**(4)** 设 4*4 矩阵 A=$(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，B=$(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4, |B|=1,$ 则行列式 $|A+B|$ =. $\underline{40}$ .

## 三、选择题（ 本题满分 15 分，每小题 3 分)

**(1)** 若函数 y=f(x)有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函 x= $x_0$ 处的微分 dy 是 (B)

(A) 与 $\Delta x$ 等价的无穷小
(B) 与 $\Delta x$ 同阶的无穷小
(C) 比 $\Delta x$ 低阶的无穷小
(D) 比 $\Delta x$ 高阶的无穷小

**(2)** 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ (A)

(A) 取得极大值
(B) 取得极小值
(C) 某个邻域内单调增加
(D) 某个邻域内单调减少

**(3)** 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0;$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0,$ 则 (C)

(A) $\iiint_{\Omega_1} xdv = 4\iiint_{\Omega_2} xdv$
(B) $\iiint_{\Omega_1} ydv = 4\iiint_{\Omega_2} ydv$
(C) $\iiint_{\Omega_1} zdv = 4\iiint_{\Omega_2} zdv$
(D) $\iiint_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint_{\Omega_2} xyzdv$

**(4)** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 x=-1 处收敛，则此级数在 x=2 处 (B)

(A) 条件收敛
(B) 绝对收敛
(C) 发散
(D) 收敛性不能确定

**(5)** n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s (3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是 (D)

(A) 有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\ne 0$.
(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.
(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出.
(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

## 四．(本题满分 6 分)

设$u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，其中 f,g 具有二阶连续导数，求$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

**解：** $\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right).$ ……2 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right).$ ……3 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$ ……5 分

所以$x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$. ……6 分

**五、(本题满分 8 分)**

设函数 y=y(x)满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$, 且图形在点(0，1)处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点的切线重合，求函数$y=y(x)$.

**解：**对应齐次方程的通解为$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. ……2 分

设原方程的特解为$y^*=Axe^x$, ……3 分

得$A=-2$. ……4 分

故原方程通解为$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^{2x}$. ……5 分

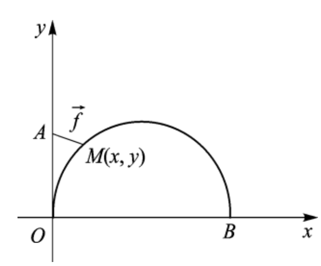
又已知有公共切线得$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=-1$， ……7 分

即$\begin{cases}c_1+c_2=1,\\ c_1+2c_2=1\end{cases}$解得$c_1=1, c_2=0$. ……8 分

所以$y=(1-2x)e^{2x}$.

**六、(本题满分 9 分)**

设位于点(0，1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为$\frac{k}{r^2}$(k>0 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离—)，质点 M 沿曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$自 B(2,0)运动到 O(0，0).求在此运动过程中质点 A 对质 M 点的引力所做的功.




**解：** $\overrightarrow{MA}=\{0-x,1-y\}$ ……2 分

$r=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$.

因引力$\vec{f}$的方向与$\overrightarrow{MA}$一致，

故$\vec{f}=\frac{k}{r^3}\{-x,1-y\}$. ……4 分

从而$W=\int_{\overset{\frown}{BO}}\frac{k}{r^3}[-xdx+(1-y)dy]$ ……6 分

$=k\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$. ……9 分

**七、(本题满分 6 分)**

已知$AP=PB$,其中$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$求 A 及$A^5$.

**解：**先求出$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$. ……2 分

因$AP=PB$，故$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$ ……4 分

从而$A^5=\overbrace{AAAAA}^{5个}=\overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{5个}=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$. ……6 分

**八、(本题满分 8 分)**

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，

**(1)** 求 x 与 y； **(2)** 求一个满足$P^{-1}AP=B$的可逆矩阵$P$.

**解：(1)** 因$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似，故$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|$，即 ……1 分

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-y&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix},$$

亦即$(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)(\lambda^2+(1-y)\lambda-y)$.

比较两边的系数得 $x=0, y=1$.此时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.　　　　……3 分

**(2)** 从 $B$ 可以看出 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda=2,1,-1$.　　　　……4 分

对 $\lambda=2$，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对 $\lambda=1$，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征向量为 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

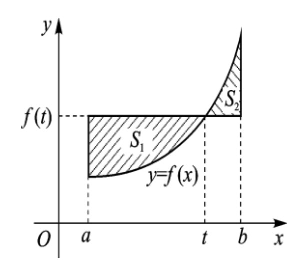
对 $\lambda=-1$，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.　　　　……7 分

因上述 $p_1,p_2,p_3$ 是属于不同特征值的特征向量，故它们线性无关.

令 $\mathbf{P}=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{P}$ 可逆，且有 $P^{-1}AP=B$.　　　　……8 分

**九、(本题满分 9 分)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 $(a,b)$ 内有 $f'(x)>0$.证明：在 $(a,b)$ 内存在唯一的 $\xi$，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 $s_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 $s_2$ 的 3 倍.




**证：存在性** 在 $[a,b]$ 上任取一点 $t$，令

$$F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$$

$$=\left[f(t)(t-a)-\int_a^t f(t)dx\right]-3\left[\int_t^b f(x)dx-f(t)(b-t)\right]\cdots 3\text{ 分}$$

则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又因 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调增加的.

于是在 $(a,b)$ 内取定点 $c$，有

$$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]dx=-3\int_a^c[f(x)-f(a)]dx-3\int_c^b[f(x)-f(a)]dx$$

$$\le -3\int_c^b[f(x)-f(a)]dx=-3\left[f(\xi_1)-f(a)\right](b-c)<0,\quad c\le\xi_1\le b\,..$$

$$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]dx=\int_a^c[f(b)-f(x)]dx+\int_c^b[f(b)-f(x)]dx$$

$$\geq\int_a^c[f(b)-f(x)]dx=\left[f(b)-f(\xi_2)\right](c-a)>0,\quad a\leq\xi_2\leq c.$$ ……5 分

所以由介值定理知，在 $(a,b)$ 内存在ξ ,使 $F(\xi)=0$，即 $S_1=3S_2$. ……6 分

**唯一性** 因 $F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$， ……8 分

故 $F(t)$ 在 $(a,b)$ 内是单调增加的.因此，在 $(a,b)$ 内只有一个ξ，使 $S_1=3S_2$. ……9 分

**十、填空题(共 6 分，每个 2 分)**

**(1)** 设三次独立实验中，事件 $A$ 出现的概率相等.若已知 $A$ 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 $A$ 在一次试验中出现的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$ .

**(2)** 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为 $\underline{\frac{17}{25}}$ .

**(3)** 设随机变量 $X$ 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布.已知 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$，$\Phi(2.5)=0.9938$，则 $X$ 落在区间(9.95，10.05)内的概率为 $\underline{0.9876}$ .

**十一、(本题满分 6 分)**

设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f_x(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

**解：**因 $Y$ 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y<y)$$ ……1 分

$$=P\{1-\sqrt[3]{X}<y\}=P\{\sqrt[3]{X}>1-y\}=P\{X>(1-y)^3\}$$ ……2 分

$$=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right].$$ ……4 分

故 $Y$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^3}{1+(1-y)^6}$. ……6 分

# 数 学（试卷二）

**一．(本题满分 15 分，每小题 5 分)**

**(1)** 【 同数学一 第一、(1) 题 】

**(2)** 【 同数学一 第一、(2) 题 】

**(3)** 【 同数学一 第一、(3) 题 】

**二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)**

**(1)** 【 同数学一 第二、(1) 题 】

**(2)** 【 同数学一 第二、(2) 题 】

**(3)** 【 同数学一 第二、(3) 题 】

**(4)** 【 同数学一 第二、(4) 题 】

**三、选择题(本题满分 15 分，每小题 3 分)**

**(1)** 【 同数学一 第三、(1) 题 】

**(2)** 【 同数学一 第三、(2) 题 】

**(3)** 【 同数学一 第三、(3) 题 】

**(4)** 【 同数学一 第三、(4) 题 】

**(5)** 【 同数学一 第三、(5) 题 】

**四．(本题满分 18 分，每小题 6 分)**

**(1)** 【 同数学一 第四题 】

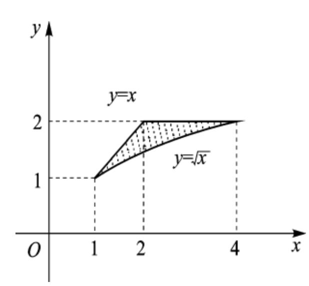
**(2)** 计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

**解：** $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$ ……3 分

$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)dy$. ……4 分

$=-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t dt\quad(令 t=\frac{\pi y}{2})=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$. ……6 分



**(3)** 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 $\pi$ 的方程，使平面 $\pi$ 过已知直线 $l:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

**解：**令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则 $F_x=2x,F_y=4y,F_z=6z.$

椭球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 $\pi$ 的方程为

$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$，即 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$ ……2 分

因为平面 $\pi$ 过直线 L，故 L 上的任两点，比如点 $A(6,3,\frac{1}{2})$、$B(0,0,\frac{7}{2})$ 应满足 $\pi$ 的方程，

代入有 $6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21$ (1)

$z_0=2$ (2)

又因 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21,$ (3)

于是有 $x_0=3,y_0=0,z_0=2$ 及 $x_0=1,y_0=2,z_0=2$. ……4 分

故所求切平面 $\pi$ 的方程为 $x+2z=7$ 和 $x+4y+6z=21$. ……6 分

**五、（本题满分 8 分）【** 同数学一 第五题 **】**

**六、（本题满分 9 分）【** 同数学一 第六题 **】**

**七、（本题满分 6 分）【** 同数学一 第七题 **】**

**八、（本题满分 8 分）【** 同数学一 第八题 **】**

**九、（本题满分 9 分）【** 同数学一 第九题 **】**

# 数 学（试卷三）

**一、填空题 (本题满分 20 分，每小题 4 分)**

**(1)** 若 $f(x)=\begin{cases} e^2(\sin x+\cos x), x>0 \\ 2x+\alpha, x\le 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数，则 $\alpha=$ <u>1</u> .

**(2)** 【 同数学一 第二、(1) 题 】

**(3)** 【 同数学一 第二、(3) 题 】

**(4)** $\lim\limits_{x\to+0}(\frac{1}{\sqrt{x}})^{tgx}=$ <u>1</u> .

**(5)** $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=$ <u>$2(e^2+1)$</u>

**二、选择题 (本题满分 20 分，每小题 4 分)**

**(1)** $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点（0，1）处切线与 $x$ 轴交点的坐标是 (A)

(A) $(-\frac{1}{6},0)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(-\frac{1}{6},0)$ (D) $(1,0)$

**(2)** 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)$〈 $g(x)$，则必有 (C)

(A) $f(-x)>g(-x)$ (B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ (D) $\int_0^X f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

**(3)** 【 同数学一 第二（1）题 】

**(4)** 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转 (B)

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $\frac{2}{3}\pi^2$ (D) $\frac{2}{3}\pi$ 【B 】

**(5)** 【 同数学一 第三（5）题 】

**三、(本题满分 15 分，每小题 5 分)**

**(1)** 【 同数学一第一、(2) 题 】

**(2)** 已知 $y=1+xe^{xy}$，求 $y'|x=0$ 及 $y''|x=0$.

**解：** 显然 $x=0$ 时， $y=1$. ……1 分

$$y'=xe^{xy}(xy'+y)+e^{xy}=e^{xy}(x^2y'+xy+1).$$ ……2 分

因此 $y'|_{x=0}=e^0=1$； ……3 分

而 $y''=e^{xy}(x^2y''+2xy'+xy'+y)+e^{xy}(x^2y'+xy+1)(xy'+1)$， ……4 分

即得 $y''|_{x=0}=e^0+e^0=2$. ……5 分

**(3)** 求微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解（一般解）.

**解：** $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\dfrac{1}{x(x^2+1)}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$ ……3 分

$=\dfrac{1}{x}\left[\int\dfrac{1}{x^2+1}dx+C\right]$ ……4 分

$=\dfrac{1}{x}\left[\arctan x+C\right]$，其中 C 是任意常数. ……5 分

**四、(本题满分 12 分)**

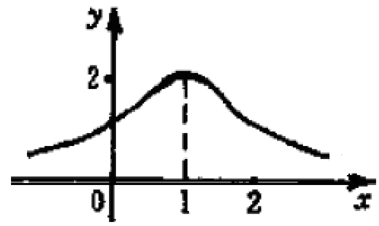
作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形，并填写下表

| | |
|---|---|
| 单调增加区间 | |
| 单调减少区间 | |
| 极值点 | |
| 极　值 | |
| 凹 $(\cup)$ 区间 | |
| 凸 $(\cap)$ 区间 | |
| 拐　点 | |
| 渐近线 | |

**解：**

| | | |
|---|---|---|
| 单调增加区间 | $(-\infty,1)$ | （1 分） |
| 单调减少区间 | $(1,+\infty)$ | （2 分） |
| 极值点 | 1 | （3 分） |
| 极值 | 2 | （4 分） |
| 凹区间 | $(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$ | （6 分） |
| 凸区间 | $(0,2)$ | （7 分） |
| 拐点 | $(0,\dfrac{3}{2})$及$(2,\dfrac{3}{2})$ | （9 分） |
| 渐近线 | $y=0$ | （10 分） |

其图形为：




**五、(本题满分 8 分)**

将长为 $a$ 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形.问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

**解：** 设圆形的周长为 $x$，则正方形的周长为 $a-x$，而两面积之和为

$$A=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},$$ ……3 分

$$A'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8}\overset{（令）}{=\!=\!=\!=}0，得 x=\frac{\pi a}{4+\pi}.$$ ……5 分

$$A''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0.$$ ……7 分

故当圆的周长为 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$ 时，正方形的周长为 $a-x=\dfrac{4a}{4+\pi}$ 时，A 之值最小. ……8 分

**六、(本题满分 10 分)【** 同数学一 第五题（分值不同）**】**

**七、(本题满分 7 分)**

设 $x\geq -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

**解：** 当 $-1\leq x<0$ 时，$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{x}(1+t)dt$ ……1 分

$$=\frac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{-1}^{x}$$ ……2 分

$$=\frac{1}{2}(1+x)^2.$$ ……3 分

当 $x\geq 0$ 时，$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt$ ……5 分

$$=1-\frac{1}{2}(1-x)^2.$$ ……7 分

**八、(本题满分 8 分)**

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有连续导数，且 $m\le f(x)\le M$ .

**(1)** 求 $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}\left[f(t+a)-f(t-a)\right]dt$； **(2)** 证 $\left|\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\le M-m\ (a>0)$ .

**解：(1)** 由积分中值定理和微分中值定理有

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]\ (a\le\xi\le a)$$ ……2 分

$$=\lim_{a\to 0^+}f'(\xi^*)=\lim_{\xi^*\to 0}f'(\xi^*)\quad(-2a\le\xi-a<\xi^*<\xi+a\le 2a)=f'(0)\,.$$ ……4 分

**(2) 证：**由 $f(x)$ 的有界性及积分估值定理有 ……5 分

$$m\le\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt\le M\,,$$ ……6 分

又 $-M\le -f(x)\le -m$， ……7 分

故有 $-(M-m)\le\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\le M-m$，

即 $\left|\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\le M-m\,.$ ……8 分

# 数 学（试卷四）

**一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）**

**(一)** 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt, -\infty<x<\infty$.

**(1)** $f'(x)=\underline{e^{-\frac{1}{2}t^2}}$.

**(2)** $f(x)$ 的单调性： <u>单调增加</u>.

**(3)** $f(x)$ 的奇偶性： <u>奇函数</u>.

**(4)** $f(x)$ 图形的拐点：<u>（0，0）</u>

**(5)** $f(x)$ 图形的凹凸性： $\underline{x<0\text{时上凹（下凸）}}, \underline{x>0\text{时下凹（上凸）}}$.

**(6)** $f(x)$ 图形的水平渐近线近线： $\underline{y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

**(二)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{-3}$.

**(三)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

(四) 假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，那么

**(1)** 若 A 与 B 互不相容，则 P（B）= <u>0.3</u>.

**(2)** 若 A 与 B 相互独立，则 P（B）= <u>0.5</u>.

**二、（本题满分 10 分）（每小题，回答正确得 2 分，回答错误得-1 分，不回答得 0 分；全题最低得 0 分）**

**(1)** 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在. （×）

**(2)** 若 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$. （×）

**(3)** 等式 $\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(a-x)dx$, 对任何实数 $a$ 都成立. （×）

**(4)** 若 A 和 B 都是 $n$ 阶非零方阵，且 AB=0，则 A 的秩必小于 $n$. （√）

（5）若事件 A，B，C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$，则 A=B.　（×）

**三、（本题满分 16 分，每小题 4 分.）**

**(1)** 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - 1}{x \ln x}$

**解一：** 此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由罗必塔法则，则

原式$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x(\ln x + 1)}{\ln x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} x^x = 1.$　……4 分

**解二：** 令 $t = x \ln x$，则 $x^x = e^t$.由于当 $x \to 1$ 时，$t \to 0$，可见

原式$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = \lim\limits_{t \to 0} e^t = 1$.　……4 分

**(2)** 已知U＋$e^u = xy$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

**解：** 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + e^u}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{1 + e^u}$，　……2 分

可见 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{1 + e^u - y e^u \dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1 + e^u)^2}$　……3 分

$$= \frac{1}{1 + e^u} - \frac{xye^u}{(1 + e^u)^3}.$$　……4 分

**(3)** 求定积分 $\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1 + x)}$.

**解一：** 由于 $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$，可见

原式 $= \int_0^3 \dfrac{2d\sqrt{x}}{1 + x}$　……2 分

$= \dfrac{2\pi}{3}$.　……4 分

**解二：** 令 $\sqrt{x} = t$，$x = t^2, dx = 2tdt$；当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = 3$ 时，$t = \sqrt{3}$；
……1 分

于是，原式$= \int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{2dt}{1 + t^2}$　……2 分

$= 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^3$　……3 分

$$=\frac{2\pi}{3}.$$ ……4 分

**(4)** 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}dx$.

**解：** 在原式中交换积分次序，得 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx\int_0^x\frac{\cos x}{x}dy$ ……2 分

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$$ ……4 分

.

**四、（本题满分 6 分，每小题 3 分）**

**(1)** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性

**解：** 由 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(n+2)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^{n+1}}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{e}<1,$$ ……2 分

故由级数收敛的比值判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛. ……3 分

**(2)** 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty}b_i^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

**证：** 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty}b_i^2$ 都收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_i^2+b_i^2)$ 收敛. ……2 分

而 $a_nb_n\le\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$，

故由比较判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛. ……3 分

**五、（本题满分 8 分）**

已知某商品的需求量 D 和供给量都是价 P 的函数：$D=D(p)=\frac{a}{p^2}$，$S=S(p)=bp$，其中 a>0 和 b>0 是常数: 价格 p 是时间 t 的函数且满足方程 $\frac{dp}{dt}=k[d(p)-s(p)]$, ( k 是常数），假设当 t=0 时价格为 1.试求：

（**1**）需求量等于供给量时的均衡价格 $P_e$； （**2**）价格函数 $p(t)$； （**3**）极限 $\lim_{t\to\infty}p(t)$.

**解：(1)** 当需求量等于供给量时，有 $\frac{a}{p^2}=bp$，即 $p^3=\frac{a}{b}$. 故 $p_e=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$. ……1 分

**(2)** 由条件知 $\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]=k[\frac{a}{p^2}-bp]=k\frac{b}{p^2}[\frac{a}{b}-p^3]$.

因此有 $\frac{dp}{dt}=k\frac{b}{p^2}[p_e{}^3-p^3]$，即 $\frac{p^2dp}{p^3-p_e{}^3}=-kbdt$. ……3 分

在该式两边同时积分得 $p^3=p_e^3+ce^{-3kbt}$. ……5 分

故由条件 $P(0)=1$，可得 $c=1-p_e^3$.于是价格函数为 $p(t)=[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$. ……6 分

**(3)** $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\lim\limits_{t\to\infty}[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}=p_e$ ……8 分

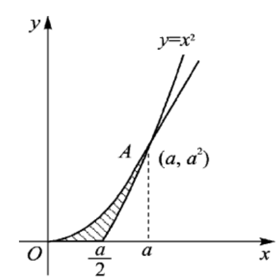
**六、（本题满分 8 分）**

在曲线 $y=x^2(x\geq 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 $x$ 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

**(1)** 切点 A 的坐标；

**(2)** 过切点 A 的切线方程；

**(3)** 由上述所围平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所成旋转体的体积.




**解：** 设切点 A 的坐标为 $(a,a^2)$，

则过点 A 的切线方程的斜率为

$y'|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$. ……2 分

可见，切线与 $x$ 轴的交点为 $(\frac{a^2}{2},0)$. 故曲线、$x$ 轴以上及切线这三者所围图形的面积为

$$S=\int_0^a x^2dx-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}.$$ ……4 分

而由题设知 $S=\frac{1}{12}$，因此 $a=1$. ……5 分

于是，切点 A 的坐标为 $(1,1)$，过切点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y=2x-1$. ……6 分

旋转体的体积为 $V=\int_0^1\pi(x^2)^2dx-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}$. ……8 分

**七、（本题满分 8 分）**

已给线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \end{cases}$，问$k_1$和$k_2$各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷解？在方程组有无穷解的情景下，试求出一般解.

**解：** 以$\mathbf{A}$表示方程组的系数矩阵，以$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})$表示增广矩阵，

因$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k_1+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{array}\right)$ ……2 分

故当$k_1\neq 2$时，$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})=4$，方程组有唯一解； ……3 分

当$k_1=2$时，有$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{array}\right)$ ……4 分

这时，若$k_2\neq 1$，则$R(\mathbf{A})=3<R(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})=4$，故方程组无解；

若$k_2=1$，则$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})=3<4$，故方程组有无穷多组解，此时有 ……6 分

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ……7 分

相应的方程组为$\begin{cases} x_1=-8; \\ x_2=3-2x_3 \\ x_4=2. \end{cases}$，取$x_3=c$（$c$为任意常数），得方程组的一般解：

$x_1=-8, x_2=3-2c, x_3=c, x_4=2$. ……8 分

综上所述：当$k_1\neq 2$时，方程组有唯一解；当$k_1=2$而$k_2\neq 1$时，方程组无解；

当$k_1=2$且$k_2=1$时，方程组有无穷多组解，其一般解为

$x_1=-8, x_2=3-2c, x_3=c, x_4=2$，其中$c$为任意常数.

**八、（本题满分 7 分）**

已知向量组$a_1,a_2,\cdots,a_s$（S≥2）线性无关，设$\beta_1=a_1+a_2,\beta_2=a_2+a_3,\cdots,\beta_{s-1}+a_s,\beta_s=a_s+a_1$，

讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

**解：** 假设 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是一数组，满足条件 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$ ……1 分

那么，有 $(k_s+k_1)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0$.

由于 $a_{1,}a_2\ldots,a_s$, 线性无关，故有 $\begin{cases} k_s+k_1=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{cases}$ （*） ……3 分

此方程组的系数行列式为 $s$ 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases} 2, & \text{若s为奇数} \\ 0, & \text{若s为偶数} \end{cases}$$ ……5 分

若s为奇数，则 $D=2\neq 0$，故方程组（*）只有零解，即 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 必全为 0.

这时，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

若s为偶数，则 $D=0$，故方程组（*）有非零解，即存在不全为 0 的数组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$.这时，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关, ……7 分

**九、（本题满分 6 分）**

设 A 是三阶方阵，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$.求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$ 的值.

**解：** 因 $(3\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}$， ……2 分

故 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\cdot\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$， ……3 分

所以 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|\mathbf{A}^{-1}|$ ……5 分

$=-\frac{16}{27}$. ……6 分

**十、（本题满分 7 分）**

玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率是 0.8，0.1 和 0.1，一顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机观察 4 只，若无

残次品，则购买下该玻璃杯，否则退回.试求：

**(1)** 顾客买下该箱的概率 $\alpha$； **(2)** 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 $\beta$.

**解：** 设 $B_i$ =｛箱中恰有 i 件残品次品｝（$i=0,1,2$），A=｛顾客买下所察看的一箱｝.

……1 分

由题意知 $P(B_0)=0.8, P(B_1)=0.1, P(B_2)=0.1$；$P(A|B_0)=1, P(A|B_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{4}{5}$；

$P(A|B_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{12}{19}$. ……3 分

**(1)** 由全概率公式 $\alpha=P(A)=\sum\limits_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8+\dfrac{0.4}{5}+\dfrac{1.2}{19}\approx 0.94$； ……5 分

**(2)** 由贝叶斯公式 $\beta=P(B_0|A)=\dfrac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}\approx\dfrac{0.8}{0.94}\approx 0.85$. ……7 分

**十一、（本题满分 6 分）**

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

**(1)** 写出 X 的概率分布；

**(2)** 利用棣莫佛拉普拉斯定理，求出索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

**解：(1)** $X$ 服从二项分布，参数 $n=100, p=0.2$，其概率分布为

$P\{X=k\}=C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k} \quad (k=0,1,\cdots 100)$. ……2 分

**(2)** 由 $X\sim B(n,p)$ 知，$EX=np=20, DX=np(1-p)=16$， ……4 分

故根据棣莫佛－拉普拉斯定理，有

$$P\{14\le X\le 30\}=P\left\{\frac{14-20}{\sqrt{16}}\le\frac{X-20}{\sqrt{16}}\le\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right\}=P\left\{-1.5\le\frac{X-20}{4}\le 2.5\right\}$$ ……5 分

$$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)-[1-\Phi(1.5)]=0.994-[1-0.933]=0.927.$$ ……6 分

**十二、（本题满分 6 分）**

假设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布.试求随机变量 $Y=e^{2x}$ 的概率密度 f(y).

**解：** 由条件知，$X$ 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}1, & 若1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ ……1 分

记 $F(y)=P\{Y\le y\}$ 为 $Y$ 的分布函数，则有

$$F(y)=\begin{cases} 0, & 若 y \le e^2 \\ \int_1^{\frac{1}{2}\ln y} dx, & 若 e^2 < y < e^4 \\ 1, & 若 y \ge e^4 \end{cases}$$

……2分

……3分

……4分

因此 $f(y)=F'(y)=\begin{cases} 0, & 若 y < e^2 \\ \dfrac{1}{2y}, & 若 e^2 < y < e^4 \\ 0, & 若 y > e^4 \end{cases}$ 于是（当 $y=e^2, e^4$ 时，补充定义 $f(y)=0$），得

$$f(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2y}, & 若 e^2 < y < e^4 \\ 0 & 若 y > e^4 \end{cases}.$$

……6 分

## 数 学（试卷五）

**一、** 【 同数学四 第一题 】

**二、** 【 同数学四 第二题 】

**三、（本题满分 16 分，每小题 4 分.）**

**(1)** 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)tg\dfrac{\pi}{2}x$.

**解：** 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\cot\frac{\pi}{2}x}$ ……1 分

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{-\frac{\pi}{2}}\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{2}x$ ……3 分

$=\dfrac{4}{\pi}$. ……4 分

**(2)** 已知 $u=e^{\frac{x}{y}}$，求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

**解：** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$， ……1 分

$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$ ……3 分

$=-\dfrac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}}$. ……4 分

**(3)** 【 同数学四 第三、(3) 题 】

**(4)** 【 同数学四 第三、(4) 题 】

**四、（本题满分 6 分）**

确定常数 $a$ 和 $b$，使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b,x>1\\ x^2,x\le1\end{cases}$，处处可导.

**解：** 当 $x\ne1$ 时，显然 $f(x)$ 可导； ……1 分

为使 $x=1$ 时，导数 $f'(x)$ 存在， $f(x)$ 在 $x=1$ 处必须连续，

故有 $f(1+0)=f(1-0)=f(1)$， ……2 分

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

由此可得 $a+b=1$. ……3 分

又由 $f'(1+0)=a, f'(1-0)=2,$ ……4 分

以及 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性，有 $f'(1+0)=f'(1-0)$ .由此得 $a=2$，……5 分

从而 $b=-1$. ……6 分

**五、（本题满分 8 分.）【** 同数学三 第五题 **】**

**六、（本题满分 8 分.）【** 同数学四 第六题 **】**

**七、（本题满分 8 分.）【** 同数学四 第七题 **】**

**八、（本题满分 6 分.）**

已知 $n$ 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=0$，其中 A 给定，而 E 是单位矩阵. 证明 A 可逆，并求出其逆矩阵 $A^{-1}$.

**解一：** 由 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{E}=0$，可见 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}=2\mathbf{E}$，$\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=2\mathbf{E}$.

在上式两端同取行列式，得 $|\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})|=|2\mathbf{E}|$；$|\mathbf{A}|\cdot|(\mathbf{A}-3\mathbf{E})|=|2\mathbf{E}|=2^n\neq 0$ ……3 分

由此可见 $|\mathbf{A}|\neq 0$，从而 A 可逆. ……4 分

在 $\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=2\mathbf{E}$ 两端同时左乘 $\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$. ……6 分

**解二：** 由 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{E}=0$，可见 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}=2\mathbf{E}$. 从而有

$\mathbf{A}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\right]=\mathbf{E}$ 及 $\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\right]\mathbf{A}=\mathbf{E}$. ……3 分

记 $B=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$，则 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$. 由逆矩阵的定义知 $\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵：

$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$. ……6 分

**九、（本题满分 7 分.）【** 同数学四 第八题 **】**

**十、（本题满分 7 分.）【** 同数学四 第十题 **】**

**十一、（本题满分 7 分）**

假设有十只同种电器元件，其中有两只废品装配仪器时从这批元件中任取一只，如是废品，则倒掉重新任取一只；若仍是废品，则扔掉再取一只.试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布，数学期望和方差.

**解：** 以 $X$ 表示在取到正品前已取出的废品数.

知 $X$ 是一随机变量，其有 3 个可能的取值：$0,1,2$. ……1 分

（1）分布：$P\{X=0\}=\dfrac{8}{10}=0.8$；$P\{X=1\}=\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$；

$$P\{X=2\}=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{8}=\frac{1}{45}.$$ ……4 分

（2）数学期望：$EX=0\times0.8+1\times\dfrac{8}{45}+2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{2}{9}$. ……5 分

（3）方差：$EX^2=0^2\times0.8+1^2\times\dfrac{8}{45}+2^2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{4}{15}$， ……6 分

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{88}{405}.$$ ……7 分

**十二、（本题满分 5 分.）【** 同数学四 第十二题 分值不同 **】**