2020 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

一、选择题：1~8 题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

（1）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ （　）

A. $b\sin a$　　B. $b\cos a$　　C. $b\sin f(a)$　　D. $b\cos f(a)$

（2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 （　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

（3）设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则 （　）

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是奇函数　　B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是偶函数

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是奇函数　　D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是偶函数

（4）设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 （　）

A. $(-2,6)$　　B. $(-3,1)$　　C. $(-5,3)$　　D. $(-17,15)$

（5）设 4 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则方程组 $A^*x=0$ 的通解为 （　）

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 其中 k_1,k_2,k_3 为任意数

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$, 其中 k_1,k_2,k_3 为任意数

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$, 其中 k_1,k_2,k_3 为任意数

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$, 其中 k_1,k_2,k_3 为任意数

（6）设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3 为 A 的属于特征值-1 的特征向量，则满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为 （　）

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$　　C. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　D. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$, 则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 （　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

（8）设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-\dfrac{1}{2})$,则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是　　（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在横线上.

（9）设$z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$,则$dz\big|_{(0,\pi)}=$________.

（10）曲线 $x+y+e^{2xy}=0$在$(0,-1)$ 处的切线方程为________.

（11）设某厂家某产品的产量为Q，成本$C(Q)=100+13Q$, 设产品的单价为P，需求量$q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为________.

（12）设平面区域$D=\left\{(x,y)\Big|\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{1}{1+x^2},0\le x\le 1\right\}$,则$D$绕$y$轴旋转所成的旋转体的体积为______.

（13）行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

（14）设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,3,\cdots,Y$ 表示 X 被 3 除的余数，则 $EY=$_____.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知a,b为常数，若$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$与$\dfrac{b}{n^a}$在$n\to\infty$时是等价无穷小，求$a,b$.

（16）（本题满分 10 分）

求函数$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$的极值.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$ 且 $f(0)=1, f'(0)=-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式.

（Ⅱ）设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

（18）（本题满分 10 分）

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$, 连续函数 $f(x,y)$ 满足

$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, 求 $\iint\limits_D xf(x,y)dxdy$.

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数， $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{[0,2]}|f(x)|$, 证明

（Ⅰ）$\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $|f'(\xi)|\ge M$;

（Ⅱ）若对任意的 $x\in(0,2), |f'(x)|\le M$, 则 $M=0$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

（20）（本题满分 10 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$,其中 $a\geq b$.

（Ⅰ）求a,b的值；

（Ⅱ）求正交矩阵Q.

（21）（本题满分 10 分）

设A为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$,其中α是非零向量且不是A的特征向量.

（Ⅰ）证明P为可逆矩阵；

（Ⅱ）若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$,并判断$A$是否相似于对角矩阵.

（22）（本题满分 10 分）

设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<y<\sqrt{1-x^2}\right\}$上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, X-Y>0\\0, X-Y\le 0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1, X+Y>0\\0, X+Y\le 0\end{cases}$$

（Ⅰ）求二维随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布；

（Ⅱ）求Z_1与Z_2的相关系数.

（23）（本题满分 10 分）

设某种元件的使用寿命T的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, t\ge 0\\0, \qquad\qquad \text{其他.}\end{cases}$$

其中θ,m为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率$P\{T>t\}$与$P\{T>s+t|T>s\}$,其中$s>0,t>0$;

（Ⅱ）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1,t_2,\cdots,t_n$,若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.