2020年全国硕士研究生招生考试数学二试题

一、选择题：1~8题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

（1）当$x \to 0^+$时，下列无穷小量中最高阶的是 （ ）

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$ B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$ C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}dt$

（2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 （ ）

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

（3）$\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$ （ ）

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$ B. $\dfrac{\pi^2}{8}$ C. $\dfrac{\pi}{4}$ D. $\dfrac{\pi}{8}$

（4）已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$,当$n\geq 3$时，$f^{(n)}(0)=$ （ ）

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$ B. $\dfrac{n!}{n-2}$ C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$ D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

（5）关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, xy\neq 0 \\ x, y=0 \\ y, x=0 \end{cases}$,给出下列结论： （ ）

$$①\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1;②\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1;③\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0;④\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

其中正确的个数为 （ ）

A.4 B.3 C.2 D.1

（6）设函数$f(x)$在区间$[-2,2]$上可导，且$f'(x)>f(x)>0$.则 （ ）

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$ B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$ C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$ D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

（7）设4阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则方程组 $A^*x=0$ 的通解为 （ ）

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

（8）设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3 为 A 的属于特征值-1 的特征向量，则满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为 （ ）

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$ B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$ C. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$ D. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在横线上.

（9）设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

（10）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$________.

（11）设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $dz|_{(0,\pi)}=$________.

（12）斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为 g，水的密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为________.

（13）设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0,y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=$________.

（14）行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线方程.

（16）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$.求$f(x)$, 并求曲线

$y=f(x), y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成转体的体积.

（19）（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=1, x=2, y=x$与x 轴围成，计算 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt.$

（Ⅰ）证明：存在$\xi\in(1,2)$,使得$f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$;

（Ⅱ）证明：存在$\eta\in(1,2)$,使得$f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

（21）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，曲线 $y=f(x)(x\geq 0)$ 经过坐标原点 O,其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T,又MP 垂直 x 轴与点 P.已知由曲线 $y=f(x)$, 直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 ΔMTP 的面积之比恒为$3:2$，求满足上述条件的曲线的方程.

（22）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经过可逆线性变换

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 P.

（23）（本题满分 11 分）

设A为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$,其中α是非零向量且不是A的特征向量.

（Ⅰ）证明 P 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$,并判断$A$是否相似于对角矩阵.