2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题及答案解析

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的.

(1) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（ ）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】（D）

【解析】根据导数的定义：

（A）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\bullet|x|}{x}=0$, 可导;

（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\bullet\sqrt{|x|}}{x}=0$, 可导;

（C）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=0$, 可导;

（D）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{|x|}^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$, 极限不存在,

故选 D。

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$, 则（ ）

(A) 当 $f'(x)<0$ 时, $f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时, $f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时, $f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时, $f(\frac{1}{2})<0$

【答案】（D）

【解析】$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2$, ξ 介于 $\frac{1}{2}$，x 之间，故

$$0=\int_0^1 f(x)dx=f(\frac{1}{2})+\int_0^1 f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})dx+\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2dx=f(\frac{1}{2})+\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2dx$$

由于 $f''(x)>0\Rightarrow\int_0^1\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2dx>0$, 所以，$f(\frac{1}{2})<0$. 应选 D.

(3) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$, 则（ ）

(A) $M > N > K$　　　　(B) $M > K > N$

(C) $K > M > N$　　　　(D) $K > N > M$

【答案】（C）

【解析】 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\pi.$

$1+x<e^x(x\neq 0)\Rightarrow\frac{1+x}{e^2}<1\Rightarrow N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi<M$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi=M$

故$K > M > N$,应选 C。

(4) 设某产品的成本函数$C(Q)$可导，其中Q为产量.若产量为Q_0时平均成本最小，则(　　)

(A) $C'(Q_0)=0$　　　　(B) $C'(Q_0)=C(Q_0)$

(C) $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$　　　　(D) $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

【答案】（D）

【解析】 平均成本$\overline{C}=\frac{C(Q)}{Q}$,由已知得:$\overline{C}'(Q_0)=\frac{C'(Q_0)Q_0-C(Q_0)}{Q_0^2}=0$，故$C'(Q_0)Q_0=C(Q_0)$.应选$D$.

(5) 下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（　）

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】（A）

【解析】 令$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则特征值$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$，

则特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

当λ=1时，$E-J=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知$r(E-J)=2$.

A选项，令$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$ 解得$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

此时当λ=1时，$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知$e(E-A)=2$.

B选项，令$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵$B$所有的特征值为1,1,1.当$\lambda$=1时，$r(E-B)=1$.

C选项，令$C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵$C$所有的特征值为1,1,1.当$\lambda$=1时，$r(E-C)=1$.

D选项，令$D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵$D$所有的特征值为1,1,1.当$\lambda$=1时，$r(E-D)=1$.

由于矩阵相似，则相关矩阵$E-A$与$E-J$也相似，则r(E-A)=r(E-J).

可知答案选 A。

(6) 设A、B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩,(X,Y)表示分块矩阵,则(　)

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A,B)=r(A^TB^T)$

【答案】(A)

【解析】 设$C=AB$，则可知C的列向量可以由A的列向量线性表示，则$r(A,C)=r(A,AB)=r(A)$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$,且$\int_0^2 f(x)dx=0.6$,则$P\{X<0\}=$(　)

(A) 0.2　　(B) 0.3　　(C) 0.4　　(D) 0.5

【答案】(A)

【解析】 由$f(1+x)=f(1-x)$知，$f(x)$关于$x=1$对称，故$P\{X<0\}=P\{X>2\}$

$\because P\{X<0\}+P\{0\le X\le 2\}+P\{X>2\}=1$，$P\{0\le X\le 2\}=\int_0^2 f(x)dx=0.6$

$\therefore 2P\{X<0\}=0.4 \Rightarrow P\{X<0\}=0.2$

(8) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$, 则（　　）

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n)$　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n)$　　(D) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n-1)$

【答案】（B）

【解析】$X \sim N(\mu, \sigma^2), \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立.

$$\therefore \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1),$$

所以选 B.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ________.

【答案】$y=4x-3$

【解析】$y'=2x-\frac{2}{x}$

$y''=2-\frac{2}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=1, x=1, (x=-1\text{舍})$

拐点 $(1,1)$

$y'(1)=2+2=4$

切线方程：$y-1=4(x-1)$, 即 $y=4x-3$

(10) $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=$ ________.

【答案】$e^x \arccos e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

【解析】　原积分 $=\int \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,de^x$.

令 $e^x=\cos t, de^x=-\sin t dt$,

则原积分$=\int \arcsin\sin t d\cos t=\int td\cos t=t\cos t-\sin t+C,$

代入还原得原积分$=e^{x}\arccos e^{x}-\sqrt{1-e^{2x}}+C.$

(11) 差分方程$\Delta^{2}y_{x}-y_{x}=5$的通解是 ________.

【答案】$y_{x}=C_{1}+C_{2}\left(-1\right)^{x}+\frac{5}{2}x$

【解析】（1）对应的齐次方程为：$\Delta^{2}y_{x}-y_{x}=0,$

于是$\lambda^{2}-1=0$，故$\lambda_{1}=1$，$\lambda_{2}=-1$，

故齐次通解为$\overline{y}_{x}=C_{1}+C_{2}\left(-1\right)^{x}$;

（2）非齐次方程的特解形式为：$y_{x}^{*}=kx,$

代入非齐次方程解得：$k=\frac{5}{2}.$

所以非齐次方程通解为：$y_{x}=C_{1}+C_{2}\left(-1\right)^{x}+\frac{5}{2}x.$

(12) 设函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=2xf\left(x\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right)\left(\Delta x\rightarrow 0\right)$，且$f\left(0\right)=2$，则$f\left(1\right)=$ ______.

【答案】$2e$

【解析】$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$

$\Delta x\rightarrow 0$时，可得$f'(x)=2xf(x)\Rightarrow f'(x)-2xf(x)=0.$

由公式得：$f(x)=Ce^{-\int(-2x)dx}=Ce^{x^{2}},f(0)=2\Rightarrow C=2.$

故$f(x)=2e^{x^{2}}\Rightarrow f(1)=2e.$

(13) 设A为3阶矩阵，$\alpha_{1},\alpha_{2},\alpha_{3}$是线性无关的向量组，若$A\alpha_{1}=\alpha_{1}+\alpha_{2},A\alpha_{2}=\alpha_{2}+\alpha_{3},A\alpha_{3}=\alpha_{1}+\alpha_{3},$

则$\left|A\right|=$ ________.

【答案】2.

【解析】由$A(\alpha_{1},\alpha_{2},\alpha_{3})=(\alpha_{1},\alpha_{2},\alpha_{3})\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，令$P=(\alpha_{1},\alpha_{2},\alpha_{3})$可知矩阵$P$可逆，令系数矩阵

$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，可知矩阵$A$和$B$相似，则它们有相同的行列式，则$\left|A\right|=\left|B\right|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2.$

(14) 随机事件A,B,C相互独立，且$P\left(A\right)=P\left(B\right)=P\left(C\right)=\frac{1}{2}$，则$P\left(AC\mid A\cup B\right)=$ ________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$P\left(AC\middle|A\cup B\right)=\dfrac{P\left[(A\cup B)\cap(AC)\right]}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(AC\cup ABC)}{P(A)+P(A)-P(AB)}=\dfrac{P(AC)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)-P(ABC)}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}+P(C)-0}=\frac{1}{4}\Rightarrow P(C)=\frac{1}{4}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知实数a,b满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(ax+b\right)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求$a,b$.

【解】令$\dfrac{1}{x}=t$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\left(a+bt\right)e^t-1}{t}=2.$

由$\lim\limits_{t\to0^+}t=0$知，$\lim\limits_{t\to0^+}(a+bt)e^t-1=a-1=0$，则$a=1$；代入得

$$2=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^t-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{t\to0^+}\frac{bte^t}{t}=1+b,$$

从而$b=1$.

综上，$a=1,b=1$.

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域D由曲线$y=\sqrt{3\left(1-x^2\right)}$与直线$y=\sqrt{3}x$及$y$轴围成，计算二重积分$\iint\limits_D x^2dxdy$.

【解】原式$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2dy$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2y\Big|_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\left[\sqrt{3\left(1-x^2\right)}-\sqrt{3}x\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3\left(1-x^2\right)}dx-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{3}x^3dx$$

$$=I_1-I_2,$$

其中$I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3\left(1-x^2\right)}dx\overset{x=\sin t}{=}\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2tdt=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos4t}{2}dt=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{32}$，

$I_2=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{3}x^3dx=\dfrac{\sqrt{3}}{16}.$

故原式$I=\dfrac{\sqrt{3}}{32}\left(\pi-2\right)$.

(17) (本题满分 10 分)

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

【解析】设圆的半径为x，正方形的边长为y，正三角形的边长为z，则$2\pi x+4y+3z=2$,其面积和

$S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^3$,即是求$S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^3$在约束条件$2\pi+4y+3z=2$下的最小值是否存在.

设$L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$,

$$\begin{cases} L'_x=2\pi x+2\pi\lambda=0 \\ L'_y=2y+4\lambda=0 \\ L'_z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0 \\ L'_x=2\pi x+4y+3z-2=0 \end{cases},\text{解得}\begin{cases} x=\dfrac{1}{x+4+3\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$$(唯一驻点).由实际问题可知，最小值一定存在，

在点（$\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}},\dfrac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}},\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$）处取得最小值，且最小值为$\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

(18) (本题满分 10 分)

已知$\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n(-1<x<1)$, 求$a_n$.

【解】当$-1<x<1$时,$\cos 2x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$, $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, 所以

$-\dfrac{1}{(1+x)^2}=(\dfrac{1}{1+x})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$.

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$.

故当n为偶数时，$a_n=(-1)^{\frac{n}{2}}(\dfrac{2^n}{n!}-n-1)$;当$n$为奇数时，$a_n=(-1)^{n+1}(n+1)$.

(19) (本题满分 10 分)

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$, 证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】$x_1>0$,假设$x_k 0$,

由$x>0,e^x-1>x>0$可知$x_{k+1}=1n\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}>1n1=0$.

故数列$\{x_n\}$有下界.

$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$

令$f(x)=xe^x-(e^x-1)$,则$f'(x)=xe^x>0$,故$f(x)$单调增加

当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$,故$0<\frac{e^x-1}{xe^x}<1$,所以$x_{n+1}-x_n<0$

数列$\{x_n\}$单调减少

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x_n}-1)$

$Ae^A=e^A-1$,解得A=0，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$=0.

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数

(I) 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

(II) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

由$f(x_1,x_2,x_3)$=$(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2=0$,则应有

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_1+ax_3=0\end{cases}.令A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

即$Ax=0$.

【解析】(I) 由A=$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$.

可知当$a=2$时，方程组有非零解$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,其中$k$为任意常数

当$a\neq2$时，方程组只有零解.

当$a\neq2$时，此时显然可知二次型正定，则此时对应的规范形为：

$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当$a=2$时，

(II) 方法一：（正交变换法）令二次型对应的实对称矩阵为B=$\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&0\\3&0&6\end{pmatrix}$，则由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-3\\1&\lambda-2&0\\-3&0&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-10\lambda+18)=0,$$

解得λ_1=$5+\sqrt{7}$，λ_2=$5-\sqrt{7}$，λ_3=0.

则可知规范形为：$f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

方法二：（配方法）由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2-x_1x_2+3x_1x_3)^2+2x_2^2+6x_3^2=2(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2.$$

令$\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3) \\ z_2=\sqrt{\frac{3}{2}}(x_2+x_3) \\ z_3=x_3 \end{cases}$，得规范形为$f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2.$

(21)（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求a;

(II) 求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

【解析】(I) 由于$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=0$, 则可知$|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=1-a+2-1=0, a=2.$

由$(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&0&1&1\\0&3&-6&0&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$

(II) 解得$p_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, p_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}, p_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}.$

故解得可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, 其中$k_2\neq k_3$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$, Y服从参数为λ的泊松分布.

令$Z=XY$.

(I) 求$Cov(X,Z)$;

(II) 求Z的概率分布.

$$Cov(X,Z)=E(XZ)-EXEZ$$

【解析】(I) $EX=0$，$EX^2=1$，$EY=\lambda \Rightarrow E(XZ)=E(X^2Y)=\lambda$

$$Cov(X,Z)=E(XZ)-EXEZ=\lambda.$$

Z的取值为$0,\pm 1,\pm 2,\cdots$,

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1，Y=0\}+P\{X=1，Y=0\}=\frac{1}{2}P\{Y=0\}+\frac{1}{2}P\{Y=0\}=e^{-\lambda}$$

(II)
$$P\{Z=k\}=P\{X=1，Y=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P\{Z=-k\}=P\{X=-1，Y=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\text{其中}k=1,2,\cdots.$$

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$ (I)

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本记 σ的最大似然估计量为$\hat{c}$

求$\hat{\sigma}$;

(II) 求$E\hat{\sigma}$和$D(\hat{\sigma})$.

$$\text{设}L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}},-\infty<x_i<+\infty,\text{则}$$

【解析】(I) $\ln L=\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{1}{2}-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma})$

$$\therefore\text{令}\frac{d\ln L}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}(-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2})=0\Rightarrow\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

$$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\sigma$$

(II) $D\hat{\sigma}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i|=\frac{1}{n}D|X|=\frac{1}{n}(EX^2-E^2|X|)=\frac{1}{n}(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx-\sigma^2)$

$$=\frac{1}{n}(\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx-\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}.$$