# 1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 分,每小题 3 分,满分 15 分.把答案在题中横线上.)**

(1) 设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 $f$ 可微,则 $dy =$__________.

(2) 若函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$,则 $\int_0^1 f(x)dx =$__________.

(3) 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t2^t$ 的通解为__________.

(4) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的,则 $t$ 的取值范围是__________.

(5) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$,而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 $X$ 和 $Y$ 的简单随机样本,则统计量 $U = \dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从__________分布(2 分),参数为__________.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)**

(1) 设函数 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt, g(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^6}{6}$,则当 $x \to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 (  )

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

(2) 若 $f(-x) = f(x)(-\infty < x < +\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x) > 0$,且 $f''(x) < 0$,则在 $(0,+\infty)$ 内有 (  )

(A) $f'(x) > 0$,$f''(x) < 0$　　(B) $f'(x) > 0$,$f''(x) > 0$

(C) $f'(x) < 0$,$f''(x) < 0$　　(D) $f'(x) < 0$,$f''(x) > 0$

(3) 设向量组 $\alpha_1$,$\alpha_2$,$\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组中,线性无关的是 (  )

(A) $\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_3-\alpha_1$

(B) $\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+2\alpha_2$,$2\alpha_2+3\alpha_3$,$3\alpha_3+\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,$2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$,$3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

(4) 设 $A,B$ 为同阶可逆矩阵,则 (  )

(A) $AB = BA$　　(B) 存在可逆矩阵 $P$,使 $P^{-1}AP = B$

(C) 存在可逆矩阵 $C$,使 $C^TAC = B$　　(D) 存在可逆矩阵 $P$ 和 $Q$,使 $PAQ = B$

(5) 设两个随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}, P\{X=1\}$

$=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$, 则下列各式中成立的是　　　　( 　)

(A) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　　　(B) $P\{X=Y\}=1$

(C) $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$　　　　(D) $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

**三、(本题满分 6 分)**

在经济学中, 称函数

$$Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$$

为固定替代弹性生产函数, 而称函数

$$\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$$

为 Cobb-Douglas 生产函数(简称 C—D 生产函数).

试证明：但 $x\to 0$ 时, 固定替代弹性生产函数变为 C—D 生产函数, 即有

$$\lim_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}.$$

**四、(本题满分 5 分)**

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数, $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^{x}-xz=0$ 所确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

**五、(本题满分 6 分)**

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$ (万元/吨), $x$ 为销售量(单位：吨), 商品的成本函数 $C=3x+1$ (万元).

(1) 若每销售一吨商品, 政府要征税 $t$ (万元), 求该商家获最大利润时的销售量;

(2) $t$ 为何值时, 政府税收总额最大.

**六、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(0)\geq 0$, 试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)dt, & 若x>0,\\ 0, & 若x=0,\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减(其中 $n>0$).

**七、(本题满分 6 分)**

从点 $P_1(1,0)$ 作 $x$ 轴的垂线, 交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$；再从 $Q_1$ 作这条抛物线的切线与 $x$ 轴交于 $P_2$, 然后又从 $P_2$ 作 $x$ 轴的垂线, 交抛物线于点 $Q_2$, 依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\cdots;P_n,Q_n;\cdots$.

(1) 求 $\overline{OP_n}$；

(2) 求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$ 的和.

其中 $n(n\ge 1)$ 为自然数, 而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 $M_1$ 与 $M_2$ 之间的距离.

**八、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy \text{, 求 } f(t).$$

**九、(本题满分 6 分)**

设 $A$ 为 $n$ 阶非奇异矩阵, $\alpha$ 为 $n$ 维列向量, $b$ 为常数. 记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix},$$

其中 $A^*$ 是矩阵 $A$ 的伴随矩阵, $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 $PQ$；

(2) 证明：矩阵 $Q$ 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1}\alpha \ne b$.

**十、(本题满分 10 分)**

设三阶实对称矩阵 $A$ 的特征值是 1, 2, 3；矩阵 $A$ 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求 $A$ 的属于特征值 3 的特征向量；

(2) 求矩阵 $A$.

**十一、(本题满分 7 分)**

假设随机变量 $X$ 的绝对值不大于 1； $P\{X=-1\}=\frac{1}{8},P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下, $X$ 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求 $X$ 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$.

**十二、(本题满分 6 分)**

游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光；电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行. 假设一游客在早晨八点的第 $X$ 分钟到达底层候梯处, 且 $X$ 在 $[0,60]$ 上均匀分布, 求该游客等候时间的数学期望.

**十三、(本题满分 6 分)**

两台同样自动记录仪, 每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动其中一台, 当其发生故障时停用而另一台自行开动.

试求两台记录仪无故障工作的总时间 $T$ 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差.

# 1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)**

(1) 设方程 $x=y^y$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数,则 $dy=$__________.

(2) 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$,则 $\int\frac{1}{f(x)}dx=$__________. .

(3) 设 $\left(x_0,y_0\right)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点,若在该点的切线过原点,则系数应满足的关系是__________.

(4) 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$. 则线性方程组 $A^TX=B$ 的解是__________.

(5) 设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本,得样本均值 $\overline{X}=5$,则未知参数 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为__________.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可以写成 ( )

(A) $\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$ (D) $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

(2) 下述各选项正确的是 ( )

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_nv_n\right|$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则 $u_n\geq\frac{1}{n}$

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $u_n\geq v_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛

(3) 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 非奇异($n\geq2$),$A^*$ 是矩阵 $A$ 的伴随矩阵,则 ( )

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$ (B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ (D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

(4) 设有任意两个 $n$ 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使 $(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$，则

( )

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性相关

(B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性无关

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关

(5) 已知 $0<P(B)<1$ 且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是( )

(A) $P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

(B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

**三、(本题满分 6 分)**

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

**四、(本题满分 6 分)**

设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 $u$ 是 $x,y$ 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微； $p(t)$，$\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

六、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$. 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

七、(本题满分 6 分)

设某种商品的单价为 $p$ 时, 售出的商品数量 $Q$ 可以表示成 $Q=\frac{a}{p+b}-c$, 其中 $a$、$b$、$c$ 均为正数, 且 $a>bc$.

(1) 求 $p$ 在何范围变化时, 使相应销售额增加或减少.

(2) 要使销售额最大, 商品单价 $p$ 应取何值?最大销售额是多少?

八、(本题满分 6 分)

求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

**九、(本题满分 8 分)**

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$.

(1) 已知 $A$ 的一个特征值为 3, 试求 $y$;

(2) 求矩阵 $P$, 使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

**十、(本题满分 8 分)**

设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 向量 $\beta$ 不是方程组 $AX=0$ 的解, 即 $A\beta\neq 0$. 试证明:向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

**十一、(本题满分 7 分)**

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障时全天停止工作, 若一周 5 个工作日里无故障, 可获利润 10 万元; 发生一次故障仍可获得利润 5 万元; 发生两次故障所获利润 0 元; 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元. 求一周内期望利润是多少?

**十二、(本题满分 6 分)**

考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$, 其中 $B$、$C$ 分别是将一枚色子(骰子)接连掷两次先后出现的点数. 求该方程有实根的概率 $p$ 和有重根的概率 $q$.

**十三、(本题满分 6 分)**

假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本; 已知 $E(X^k)=a_k(k=1,2,2,4)$..

证明: 当 $n$ 充分大时, 随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

# 1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)**

(1) 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(x)=$__________.

(2) 设 $z=xyf(\frac{y}{x})$, $f(u)$ 可导, 则 $xz'_x+yz'_y=$____________.

(3) 设 $f'(\ln x)=1+x$, 则 $f(x)=$______________.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$, $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1}=$____________.

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中参数 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 未知, 记

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ,$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, 则假设 $H_0:\mu=0$ 的 $t$ 检验使用统计量 $t=$_____.

**二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点

$(1,f(1))$ 处的切线斜率为 ( )

(A) $2$　　(B) $-1$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-2$

(2) 下列广义积分发散的是 ( )

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$　　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(C) $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$　　(D) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

(3) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n$, $E_m$ 为 $m$ 阶单位矩阵, 下述结论中正确的是 ( )

(A) $A$ 的任意 $m$ 个行向量必线性无关

(B) $A$ 的任意一个 $m$ 阶子式不等于零

(C) 若矩阵 $B$ 满足 $BA=0$, 则 $B=0$

(D) $A$ 通过初等行变换, 必可以化为 $(E_m,0)$ 的形式

(4) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立同分布, 记 $U=X-Y,V=X+Y$, 则随机变量 $U$ 与 $V$ 必然

( )

(A) 不独立　　(B) 独立　　(C) 相关系数不为零　　(D) 相关系数为零

(5) 设随即变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则随 $\sigma$ 的增大, 概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ ( )

(A) 单调增大　　(B) 单调减少　　(C) 保持不变　　(D) 增减不定

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0\end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

四、(本题满分 6 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$, 求 $f(x)$.

五、(本题满分 6 分)

将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$ 展成 $x$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

六、(本题满分 5 分)

计算二次积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

七、(本题满分 6 分)

设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$, 收益函数为 $R=pQ$, 其中 $p$ 为产品价格, $Q$ 为需求量(产品的产量), $Q(p)$ 为单调减函数. 如果当价格为 $p_0$, 对应产量为 $Q_0$ 时, 边际收益 $\left.\dfrac{dR}{dQ}\right|_{Q=Q_0}=a>0$, 收益对价格的边际效应 $\left.\dfrac{dR}{dp}\right|_{p=p_0}=c<0$, 需求对价格的弹性 $E_p=b>1$. 求 $p_0$ 和 $Q_0$.

八、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$、 $g(x)$ 在区间 $[-a,a]$($a>0$)上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件

$f(x)+f(-x)=A$($A$ 为常数).

(1) 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$;

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x\right| \arctan e^{x} dx$.

九、(本题满分 9 分)

已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$;(Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$, 如果各向量组的秩

分别为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$, $r(\mathrm{III})=4$.

证明:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

十、(本题满分 10 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1) 写出二次型 $f$ 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 $f$ 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵.

十一、(本题满分 8 分)

假设一厂家生产的每台仪器, 以概率 0.70 可以直接出厂; 以概率 0.30 需进一步调试, 经调试后以概率 0.80 可以出厂; 以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了

$n(n\geq 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立). 求:

(1) 全部能出厂的概率 $\alpha$;

(2) 其中恰好有两台不能出厂的概率 $\beta$;

(3) 其中至少有两台不能出厂的概率 $\theta$.

十二、(本题满分 8 分)

已知随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} 4xy, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1 \\ 0, \quad\quad \text{其他}. \end{cases}$$

求 $X$ 和 $Y$ 联合分布函数 $F(x,y)$.

# 1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)**

(1) $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=$____________.

(2) 已知 $f'(x_0)=-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$____________.

(3) 设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 $y$ 为 $x$ 的函数, 则 $\frac{dy}{dx}=$____________.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$, 则 $A^{-1}=$____________.

(5) 设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

以 $Y$ 表示对 $X$ 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数, 则 $P\{Y=2\}=$

____________.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 (　　)

(A) 1 条　(B) 2 条　(C) 3 条　(D) 4 条

(2) 设常数 $\lambda>0$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ (　　)

(A) 发散　(B) 条件收敛　(C) 绝对收敛　(D) 收敛性与 $\lambda$ 有关

(3) 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵, $C$ 是 $n$ 阶可逆矩阵, 矩阵 $A$ 的秩为 $r$, 矩阵 $B=AC$ 的秩为 $r_1$, 则 (　　)

(A) $r>r_1$　(B) $r<r_1$

(C) $r=r_1$　(D) $r$ 与 $r_1$ 的关系由 $C$ 而定

(4) 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$, 则 (　　)

(A) 事件 $A$ 和 $B$ 互不相容　(B) 事件 $A$ 和 $B$ 相互对立

(C) 事件 $A$ 和 $B$ 互不独立　(D) 事件 $A$ 和 $B$ 相互独立

(5) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值, 记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$
$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 $t$ 分布的随机变量是 ( )

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_1}{\sqrt{n-1}}}$ (B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}}$

(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_3}{\sqrt{n}}}$ (D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_4}{\sqrt{n}}}$

**三、(本题满分 6 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, 其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le x+y+1\right\}$.

**四、(本题满分 5 分)**

设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2, y'(0)=-4, \end{cases}$ 求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.

**五、(本题满分 5 分)**

已知 $f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

**六、(本题满分 5 分)**

设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$

**七、(本题满分 8 分)**

已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有公共切线, 求:

(1) 常数 $a$ 及切点 $(x_0,y_0)$;

(2) 两曲线与 $x$ 轴围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转所得旋转体的体积 $V_x$.

**八、(本题满分 6 分)**

假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零, 记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (x>a),$$

证明 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

**九、(本题满分 11 分)**

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 证明:若 $a_1, a_2, a_3, a_4$ 两两不相等, 则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k(k \neq 0)$, 且已知 $\beta_1, \beta_2$ 是该方程组的两个解, 其中

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

写出此方程组的通解.

**十、(本题满分 8 分)**

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 $x$ 和 $y$ 应满足的条件.

**十一、(本题满分 8 分)**

假设随机变量 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 相互独立, 且同分布

$$P\{X_i = 0\} = 0.6, P\{X_i = 1\} = 0.4 (i = 1, 2, 3, 4),$$

求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

**十二、(本题满分 8 分)**

假设由自动线加工的某种零件的内径 $X$ (毫米)服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 内径小于 10 或大于 12 的为不合格品, 其余为合格品, 销售每件合格品获利, 销售每件不合格品亏损. 已知销售利润 $T$ (单位:元)与销售零件的内径 $X$ 有如下关系:

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10, \\ 20, & 10 \le X \le 12, \\ -5, & X > 12. \end{cases}$$

问平均内径 $\mu$ 取何值时, 销售一个零件的平均利润最大?

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

# 1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分, 把答案填在题中横线上.)**

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$__________.

(2) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x)=\arctan x^2$, 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$__________.

(3) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为__________.

(4) 设 $4$ 阶方阵 $A$ 的秩为 $2$, 则其伴随矩阵 $A^*$ 的秩为__________.

(5) 设总体 $X$ 的方差为 1, 根据来自 $X$ 的容量为 100 的简单随机样本, 测得样本均值为 5, 则 $X$ 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为__________.

**二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 ( )

(A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导 (D) 可导

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)dt$, 则 $F'(x)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (B) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (D) $f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $n$ 阶方阵 $A$ 具有 $n$ 个不同的特征值是 $A$ 与对角阵相似的 ( )

(A) 充分必要条件 (B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件 (D) 既非充分也非必要条件

(4) 假设事件 $A$ 和 $B$ 满足 $P(B|A)=1$, 则 ( )

(A) $A$ 是必然事件 (B) $P(B|\overline{A})=0$.

(C) $A\supset B$ (D) $A\subset B$

(5) 设随机变量 $X$ 的密度函数为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$. $F(x)$ 是 $X$ 的分布函数, 则对任意实数 $a$, 有( )

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)dx$. (B) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$

(C) $F(-a)=F(a)$　　　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

**三、(本题满分 5 分)**

设 $z=f\left(x,y\right)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数, 求 $dz$.

**四、(本题满分 7 分)**

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$, 求常数 $a$ 的值.

**五、(本题满分 9 分)**

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$, 需求函数为 $q=\dfrac{1}{e}(d-p)$, 其中 $C$ 为成本, $q$ 为需求量(即产量), $p$ 为单价, $a,b,c,d,e$ 都是正的常数, 且 $d>b$, 求:

(1) 利润最大时的产量及最大利润;

(2) 需求对价格的弹性;

(3) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

**六、(本题满分 8 分)**

假设:(1) 函数 $y=f(x)(0\le x<+\infty)$ 满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\le f(x)\le e^x-1$;

(2) 平行于 $y$ 轴的动直线 $MN$ 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别相交于点 $P_1$ 和 $P_2$;

(3) 曲线 $y=f(x)$, 直线 $MN$ 与 $x$ 轴所围封闭图形的面积 $S$ 恒等于线段 $P_1P_2$ 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

**七、(本题满分 6 分)**

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$.

证明:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$, 使 $f''(\xi)=0$.

八、(本题满分 10 分)

$k$ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有惟一解, 无解, 有无穷多组解?在有解情况下, 求出其全部解.

九、(本题满分 9 分)

设二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$$

经正交变换 $X = PY$ 化成 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ 和 $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 是三维列向量, $P$ 是 3 阶正交矩阵. 试求常数 $\alpha, \beta$.

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 $X$ 和 $Y$ 同分布, $X$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1) 已知事件 $A = \{X > a\}$ 和 $B = \{Y > a\}$ 独立, 且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. 求常数 $a$.

(2) 求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望.

十一、(本题满分 8 分)

假设一大型设备在任何长为 $t$ 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 $T$ 的概率分布;

(2) 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下, 再无故障运行 8 小时的概率 $Q$.

# 1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上.)**

(1) 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$,其中 $Q,P$ 分别表示为需求量和价格,如果商品需求弹性的绝对值大于 1,则商品价格的取值范围是________.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为________.

(3) 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$________.

(4) 设 $A$ 为 $m$ 阶方阵, $B$ 为 $n$ 阶方阵,且 $|A|=a,|B|=b,C=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$,则 $|C|=$_______.

(5) 将 $C,C,E,E,I,N,S$ 等七个字母随机地排成一行,那么,恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为_________.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设 $F(x)=\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于 ( )

(A) $a^2$  (B) $a^2 f(a)$

(C) 0  (D) 不存在

(2) 当 $x\to 0$ 时,下面四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量? ( )

(A) $x^2$  (B) $1-\cos x$

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$  (D) $x-\tan x$

(3) 设 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵,齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分条件是 ( )

(A) $A$ 的列向量线性无关  (B) $A$ 的列向量线性相关

(C) $A$ 的行向量线性无关  (D) $A$ 的行向量线性相关

(4) 设当事件 $A$ 与 $B$ 同时发生时,事件 $C$ 必发生,则 ( )

(A) $P(C)\le P(A)+P(B)-1$  (B) $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$  (D) $P(C)=P(A\cup B)$

(5) 设 $n$ 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布, $D(X_1)=\sigma^2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则 ( )

(A) $S$ 是 $\sigma$ 的无偏估计量  (B) $S$ 是 $\sigma$ 的最大似然估计量

(C) $S$ 是 $\sigma$ 的相合估计量(即一致估计量)  (D) $S$ 与 $\overline{X}$ 相互独立

三、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续, 修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

四、(本题满分 5 分)

计算 $I=\int\dfrac{\operatorname{arc}\cot e^x}{e^x}dx.$

五、(本题满分 5 分)

设 $z=\sin(xy)+\varphi(x,\dfrac{x}{y})$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $\varphi(u,v)$ 有二阶偏导数.

六、(本题满分 5 分)

求连续函数 $f(x)$, 使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$ .

七、(本题满分 6 分)

求证: 当 $x\geq 1$时, $\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$ .

八、(本题满分 9 分)

设曲线方程 $y=e^{-x}(x\geq 0)$ .

(1) 把曲线 $y=e^{-x}$, $x$ 轴, $y$ 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围成平面图形绕 $x$ 轴旋转一周, 得一旋转体, 求此旋转体体积 $V(\xi)$ ; 求满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 $a$ .

(2) 在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积.

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 $A$ 与 $B$ 相似, 其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $x$ 和 $y$ 的值.

(2) 求可逆矩阵 $P$ , 使得 $P^{-1}AP=B$.

**十、(本题满分 6 分)**

已知三阶矩阵 $B\neq 0$，且 $B$ 的每一个列向量都是以下方程组的解:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

(1) 求 $\lambda$ 的值;　　(2) 证明 $|B|=0$.

**十一、(本题满分 6 分)**

设 $A$、$B$ 分别为 $m$、$n$ 阶正定矩阵, 试判定分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

**十二、(本题满分 7 分)**

假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求 100 次独立重复测量中, 至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 $\alpha$，并利用泊松分布求出 $\alpha$ 的近似值(要求小数点后取两位有效数字).

[附表]

| $\lambda$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-\lambda}$ | 0.368 | 0.135 | 0.050 | 0.018 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | $\cdots$ |

**十三、(本题满分 5 分)**

一台设备由三大部分构成, 在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10, 0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立, 以 $X$ 表示同时需要调整的部件数, 试求 $X$ 的数学期望 $EX$ 和方差 $DX$ .

**十四、(本题满分 4 分)**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 求随机变量 $X$ 的密度 $f_X(x)$；　(2) 求概率 $P\{X+Y\leq 1\}$.

# 1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分.把答案填在题中横线上.)**

(1) 设 $z=e^{\sin xy}$,则 $dz=$____________.

(2) 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$,且在点 $(-1,0)$ 有公共切线,则 $a=$________,$b=$____________,$c=$____________.

(3) 设 $f(x)=xe^x$,则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$____________处取极小值____________.

(4) 设 $A$ 和 $B$ 为可逆矩阵,$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$为分块矩阵,则 $X^{-1}=$____________.

(5) 设随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ 0.4, & -1\le x<1, \\ 0.8, & 1\le x<3, \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

则 $X$ 的概率分布为____________.

**二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 下列各式中正确的是 ( )

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$ (B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=-e$ (D) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$

(2) 设 $0\le a_n\le \frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 则下列级数中肯定收敛的是 ( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

(3) 设 $A$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,$\lambda$ 是 $A$ 的一个特征根,则 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 的特征根之一是( )

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$ (B) $\lambda^{-1}|A|$ (C) $\lambda|A|$ (D) $\lambda|A|^n$

(4) 设 $A$ 和 $B$ 是任意两个概率不为零的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是 ( )

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容 (B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(A-B)=P(A)$

(5) 对于任意两个随机变量 $X$ 和 $Y$,若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$,则 ( )

(A) $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$ (B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $X$ 和 $Y$ 独立　　　　　　　　　　(D) $X$ 和 $Y$ 不独立

**三、(本题满分 5 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $n$ 是给定的自然数.

**四、(本题满分 5 分)**

计算二重积分 $I=\iint\limits_D ydxdy$, 其中 $D$ 是由 $x$ 轴, $y$ 轴与曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$所围成的区域, $a>0,b>0$.

**五、(本题满分 5 分)**

求微分方程 $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$满足条件 $y\big|_{x=e}=2e$ 的特解.

**六、(本题满分 6 分)**

假设曲线 $L_1$：$y=1-x^2\left(0\le x\le 1\right)$、$x$ 轴和 $y$ 轴所围区域被曲线 $L_2$：$y=ax^2$ 分为面积相等的两部分, 其中 $a$ 是大于零的常数, 试确定 $a$ 的值.

**七、(本题满分 8 分)**

某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 $p_1$ 和 $p_2$；销售量分别为 $q_1$ 和 $q_2$；需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$, 总成本函数为 $C=35+40\left(q_1+q_2\right)$.

试问：厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大？最大利润为多少？

**八、(本题满分 6 分)**

试证明函数 $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

**九、(本题满分 7 分)**

设有三维列向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix},$$

问 $\lambda$ 取何值时,

(1) $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 且表达式唯一?

(2) $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 且表达式不唯一?

(3) $\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?

十、(本题满分 6 分)

考虑二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$. 问 $\lambda$ 取何值时，$f$ 为正定二次型.

十一、(本题满分 6 分)

试证明 $n$ 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中 $\alpha_i^T$ 表示列向量 $\alpha_i$ 的转置, $i = 1, 2, \cdots, n$.

十二、(本题满分 5 分)

一汽车沿一街道行驶, 需要通过三个均设有红绿信号灯的路口, 每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立, 且红绿两种信号显示的时间相等, 以 $X$ 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数. 求 $X$ 的概率分布.

十三、(本题满分 6 分)

假设随机变量 $X$ 和 $Y$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上服从联合均匀分布.

(1) 求 $X$ 和 $Y$ 的相关系数 $\rho$；(2) 问 $X$ 和 $Y$ 是否独立?

十四、(本题满分 5 分)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda a x^{a-1} e^{-\lambda x^a}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $a > 0$ 是已知常数. 试根据来自总体 $X$ 的简单随机样本

$X_1, X_2, \cdots, X_n$, 求 $\lambda$ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

# 1990年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题满分15分,每小题3分.把答案填在题中横线上.)**

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0)=0, f'(0)=b$ ,若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续,则常数 $A=$__________.

(3) 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形的面积为________.

(4) 若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\ x_2+x_3=a_2,\\ x_3+x_4=-a_3,\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解,则常数 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 应满足条件________.

(5) 一射手对同一目标独立地进行四次射击,若至少命中一次的概率为 $\dfrac{80}{81}$ ,则该射手的命中率为________.

**二、选择题(本题满分15分,每小题3分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$ ,则 $f(x)$ 是 ( )

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 $x$ 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$ ,且有 $f'(0)=b,$ 其中 $a,b$ 为非零常数,则 ( )

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导 (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$ (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$

(3) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分条件是 ( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不为零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一部分向量线性无关

(4) 设 $A,B$ 为两随机事件,且 $B\subset A$ ,则下列式子正确的是 ( )

(A) $P(A+B)=P(A)$ (B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(B|A)=P(B)$　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

(5) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立, 其概率分布为

| $m$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P\{X=m\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $m$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P\{Y=m\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

则下列式子正确的是　(　　)

(A) $X=Y$　(B) $P\{X=Y\}=0$　(C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　(D) $P\{X=Y\}=1$

三、计算题(本题满分 20 分, 每小题 5 分.)

(1) 求函数 $I(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $[e,e^2]$ 上的最大值.

(2) 计算二重积分 $\iint\limits_D xe^{-y^2}dxdy$, 其中 $D$ 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

(4) 求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

某公司可通过电台及报纸两种形式做销售某种商品的广告, 根据统计资料, 销售收入 $R$ (万元)与电台广告费用 $x_1$ (万元)及报纸广告费用 $x_2$ (万元)之间的关系有如下经验公式:

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下, 求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少; $f(0)=0$, 试应用拉格朗日中值定理证明不等式: $f(a+b)\le f(a)+f(b)$, 其中常数 $a$、$b$ 满足条件 $0\le a\le b\le a+b\le c$.

六、(本题满分 8 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2, \end{cases}$$

(1) $a$、$b$ 为何值时, 方程组有解?

(2) 方程组有解时, 求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时, 求出方程组的全部解.

七、(本题满分 5 分)

已知对于 $n$ 阶方阵 $A$, 存在自然数 $k$, 使得 $A^k=0$, 试证明矩阵 $E-A$ 可逆, 并写出其逆矩阵的表达式($E$ 为 $n$ 阶单位阵).

**八、(本题满分 6 分)**

设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵, $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是 $A$ 的两个不同的特征值, $X_1, X_2$ 是分别属于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的特征向量. 试证明 $X_1+X_2$ 不是 $A$ 的特征向量.

**九、(本题满分 4 分)**

从 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选出三个不同数字, 试求下列事件的概率:

$A_1=${三个数字中不含 0 和 5}; $A_2=${三个数字中不含 0 或 5}.

**十、(本题满分 5 分)**

一电子仪器由两个部件构成, 以 $X$ 和 $Y$ 分别表示两个部件的寿命(单位: 千小时), 已知 $X$ 和 $Y$ 的联合分布函数为:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & 若 x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 问 $X$ 和 $Y$ 是否独立?

(2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 $\alpha$.

**十一、(本题满分 7 分)**

某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩(百分制)近似服从正态分布, 平均成绩为 72 分, 96 分以上的占考生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表]

| $x$ | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0.500 | 0.692 | 0.841 | 0.933 | 0.977 | 0.994 | 0.999 |

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

# 1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

**一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分.把答案填在题中横线上.)**

(1) 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是__________.

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是__________.

(3) 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$ 只有零解,则 $\lambda$ 应满足的条件是__________.

(4) 设随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$$ 则 $A=$__________, $P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=$__________.

(5) 设随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X)=\mu$,方差 $D(X)=\sigma^2$,则由切比雪夫(Chebyshev)不等式,有

$P\{|X-\mu|\ge 3\sigma\}\le$__________.

**二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时 ( )

(A) $f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小量　　(B) $f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 $x$ 较高阶的无穷小量　　(D) $f(x)$ 是比 $x$ 较低阶的无穷小量

(2) 在下列等式中,正确的结果是 ( )

(A) $\int f'(x)dx=f(x)$　　(B) $\int df(x)=f(x)$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　　(D) $d\int f(x)dx=f(x)$

(3) 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵且 $|A|=0$,则 ( )

(A) $A$ 中必有两行(列)的元素对应成比例

(B) $A$ 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(C) $A$ 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(D) $A$ 中至少有一行(列)的元素全为 0

(4) 设 $A$ 和 $B$ 均为 $n\times n$ 矩阵,则必有 ( )

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $AB=BA$

(C) $|AB| = |BA|$ (D) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

(5) 以 $A$ 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 $\bar{A}$ 为 ( )

(A) “甲种产品滞销,乙种产品畅销” (B) “甲、乙两种产品均畅销”

(C) “甲种产品滞销” (D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

## 三、计算题(本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

(2) 已知 $z = f(u,v), u = x+y, v = xy,$ 且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(3) 求微分方程 $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ 的通解.

## 四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场. 已知该商品的需求函数为

$$P = P(x) = 10e^{-\frac{x}{2}},$$

且最大需求量为 6,其中 $x$ 表示需求量, $P$ 表示价格.

(1) 求该商品的收益函数和边际收益函数. (2 分)

(2) 求使收益最大时的产量、最大收益和相应的价格. (4 分)

(3) 画出收益函数的图形. (3 分)

## 五、(本题满分 9 分)

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

试计算下列各题:

(1) $S_0 = \int_0^2 f(x)e^{-x}dx;$ (4 分) (2) $S_1 = \int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx;$ (2 分)

(3) $S_n = \int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x}dx (n = 2,3,\cdots);$ (1 分) (4) $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n$. (2 分)

## 六、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 且 $f'(x) \le 0$, 记

$$F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt,$$

证明在 $(a,b)$ 内, $F'(x) \le 0$.

## 七、(本题满分 5 分)

已知 $X=AX+B$,其中 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$,求矩阵 $X$ .

**八、(本题满分 6 分)**

设 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,2,3),\alpha_3=(1,3,t)$.

(1) 问当 $t$ 为何值时, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关?(3 分)

(2) 问当 $t$ 为何值时, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关?(1 分)

(3) 当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时, 将 $\alpha_3$ 表示为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的线性组合. (2 分)

**九、(本题满分 5 分)**

设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$.

(1) 试求矩阵 $A$ 的特征值;(2 分)

(2) 利用(1) 小题的结果, 求矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值, 其中 $E$ 是三阶单位矩阵. (3 分)

**十 、(本题满分 7 分)**

已知随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求:(1) $P\{X<Y\}$;(5 分)　　(2) $E(XY)$. (2 分)

**十一、(本题满分 8 分)**

设随机变量 $X$ 在[2, 5]上服从均匀分布, 现在对 $X$ 进行三次独立观测, 试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

# 1988年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题（本题满分 20 分，每小题 4 分）**

（1）若 $f(x)=\begin{cases} e^2(\sin x+\cos x), x>0 \\ 2x+a, x\le 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty，\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$ ________.

（2）若 $\mathrm{f}(\mathrm{t})=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{t}\ (1+\frac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$ ________.

（3）设 f（x）是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x$，则 $\mathrm{f}(7)=$ ________.

（4）$\lim\limits_{x\to+0}(\frac{1}{\sqrt{x}})^{tgx}=$ ________.

（5）$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=$ ________.

**二、选择题:（本题满分 20 分，每小题 4 分）.**

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点(0,1)处切线与 x 轴交点的坐标是（　　）

(A) $\left(-\frac{1}{6},0\right)$　　(B) $(-1,0)$　　(C) $\left(\frac{1}{6},0\right)$　　(D) $(1,0)$

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty，\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有(　　)

(A) $f(-x)>g(-x)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$　　(D) $\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

(3)若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $dy$ 是(　　)

(A)与 $\Delta x$ 等阶的无穷小　(B)与 $\Delta x$ 同阶的无穷小　(C)与 $\Delta x$ 低阶的无穷小　(D) 与 $\Delta x$ 高阶的无穷小

(4)曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转(　　)

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{4}{3}\pi$　　(C) $\frac{2}{3}\pi^2$　　(D) $\frac{2}{3}\pi$

(5) $n$ 维向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是(　　)

(A)由一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\ne 0$

(B) $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 中任意两个向量都线性无关

(C) $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出

(D) $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

**三、（本题满分 15 分，每小题 5 分）**

（1）已知 $f(x)=e^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\ge 0$. 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域。

（2）已知 $y=1+xe^{xy}$, 求 $y'|x=0$ 及 $y''|x=0$

（3）求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解（一般解）。

**四、（本题满分 12 分）**

作函数 $y=\frac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形，并填写下表。

| | |
|---|---|
| 单调增区间 | |
| 单调减区间 | |
| 极值点 | |
| 极值 | |
| 凹 $(\cup)$ 区间 | |
| 凸 $(\cap)$ 区间 | |
| 拐点 | |
| 渐近线 | |

**五、（本题满分 8 分）**

将长为 $a$ 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形。问着两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

**六、（本题满分 10 分）**

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$, 且图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$。

**七、（本题满分 6 分）**

设 $x\ge -1$, 求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt.$

**八、（本题满分 6 分）**

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数，且 $m\le f(x)\le M$.

（1）求 $\lim\limits_{a\to +0}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt;$

（2）证明 $\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\le M-m, (a>0).$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

# 1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

**一、填空题（每小题 2 分，满分 10 分。把答案填在题中横线上）**

（1）设 $y=\ln(1+ax)$, 其中 $a$ 为非零常数，则 $y'=$ ________.， $y''=$ ________.

（2）曲线 $y=arctgx$ 在横坐标为 1 点处的切线方程是 ________.；法线方程是 ________.

（3）积分中值的条件是________________________________，结论是________________________________。

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-2}{n+1})^n=$ ________.

（5） $\int f(x)dx=$ ________.； $\int_a^b f'(2x)dx=$ ________.

**二、（本题满分 6 分）**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

三、**（本题满分 7 分）**

设 $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

**四、（本题满分 8 分）**

计算定积分 $\int_0^1 x\arcsin xdx.$

**五、（本题满分 8 分）**

设 D 是曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0,x=\pi,y=0$ 围成的曲边梯形。求 D 绕 $x$ 轴旋转一周所生成的旋转体的体积。

六、证明题（本题满分 10 分）

（1）（5 分）若 $f(x)$在$(a,b)$内可导，且导数 $f'(x)$恒大于零，则 $f(x)$在$(a,b)$内单调增加。

（2）（5 分）若 $g(x)$在$x=c$处二阶导数存在，且 $g'(c)=0, g''(c)<0.$则 $g(c)$为$g(x)$的一个极大值。

七、（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$（其中 a, b 为不全为零的非负数）

八、（本题满分 15 分）

（1）（7 分）求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=x-y,$ 满足条件 $y\big|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的解。

（2）（8 分）求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解。

九、选择题（每小题 4 分，满分 16 分）

(1) $f(x)=\left|x\sin\right|e^{\cos x},-\infty<x<+\infty$是(　　)

(A)有界函数　　(B)单调函数　　(C)周期函数　　(D)偶函数

(2) 函数 $f(x)-x\sin x$ (　　)

(A)当 $x\to\infty$时为无穷大　　(B)当 $x\to\infty$时有极限

(C)在（$-\infty,+\infty$）内有界　　(D) 在（$-\infty,+\infty$）内无界

(3)设 $f(x)$在$x=a$处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于(　　)

(A) $f'(a)$　　(B) $2f'(a)$　　(C) 0　　(D) $f'(2a)$

(4)设 $f(x)$为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx, s>0, t>0,$则$I$ 的值(　　)

(A)依赖与 s 和 t　　(B) 依赖与 s、t、x

(C) 依赖与 t 和 x，不依赖与 s　　(D) 依赖与 s，不依赖与 t

十、（本题满分 10 分）

在第一象限内，求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点，使该点处切线与所给曲线及两坐标围成的面积为最小，并求此最小面积。