

1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。）

(1) 过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是 _____。

【答案】 $x - 3y - z + 4 = 0$.

【解析】 由直线的参数方程，可得直线的方向向量 $l = (-1, 3, 1)$ ，

所求平面的法向量 n 平行于所给直线的方向向量 $l = (-1, 3, 1)$ ，取 $n = l$ ，又平面过已知点 $M(1, 2, -1)$ 。已知平面的法向量和过已知点可唯一确定这个平面，所求平面的方程为 $-(x-1) + 3(y-2) + (z+1) = 0$ ，化简即是 $x - 3y - z + 4 = 0$ 。

(2) 设 a 为非零常数，则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x =$ _____。

【答案】 e^{2a} 。

【解析】 此题考查重要极限： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{a}{x} \right)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{x}{a} \cdot a}}{\left(1 - \frac{a}{x} \right)^{\frac{x}{-a} \cdot (-a)}} \\ &= \frac{e^a}{e^{-a}} = e^{2a}. \end{aligned}$$

$$\text{或由 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot \frac{x}{x-a} \cdot 2a} = e^{2a}.$$

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____。

【答案】 1。

【解析】 对于分段函数的复合函数求解必须取遍内层函数的值域，不能遗漏，求出复合后函数的所有可能的解析式。

根据 $f(x)$ 的定义知, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有 $f(x) = 1$. 代入 $f[f(x)]$, 又 $f(1) = 1$. 于是当 $|x| \leq 1$ 时, 复合函数 $f[f(x)] \equiv 1$;

当 $|x| > 1$ 时, 有 $f(x) = 0$. 代入 $f[f(x)]$, 又 $f(0) = 1$, 即当 $|x| > 1$ 时, 也有 $f[f(x)] \equiv 1$.

因此, 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f[f(x)] \equiv 1$.

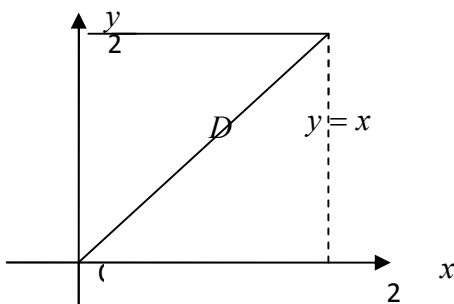
(4) 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于 _____。

【答案】 $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$.

【解析】这是一个二重积分的累次积分, 因 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数, 先对 y 积分积不出来, 所以应该改换积分次序, 先表成:

原式 $= \iint_D e^{-y^2} dx dy$. 由累次积分的内外层积分限确定积分区域 D :

$0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2$, 如图所示, 然后交换积分次序.



$$\text{原式} = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}).$$

(5) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量的秩是_____。

【答案】 2.

【解析】经过初等变换后向量组的秩不变.

$$\text{所以有 } A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

第一行 r_1 分别乘以 (-2) 、 (-3) 、 (-4) 加到第二行、第三行、第四行上, 得到

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

继续作初等变换第二行 r_2 分别乘以 (-2) 、 (-3) 加到第三行、第四行上，再自乘 (-1) 有

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为最后得出的矩阵有二阶子式 $\neq 0$ ，而三阶子式 $= 0$ ，由矩阵秩的定义，有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 2.$$

所以此题应填 2.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。）

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f'(x) = [f(x)]^2$ ，则等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$ (B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$ (D) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$

【答案】A.

【解析】对积分上限的函数的求导公式：

$$\text{若 } F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx, \quad \alpha(t), \beta(t) \text{ 均一阶可导,}$$

$$\text{则 } F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

复合函数求导法则，

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导，而 $y = f(x)$ 在点 $u = g(x)$ 可导，则复合函数

$y = f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

所以两边求导数，

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(e^{-x})(e^{-x})' - f(x)(x)' \\ &= -e^{-x}f(e^{-x}) - f(x). \end{aligned}$$

故本题选 A.

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x) = [f(x)]^2$ ，则当 n 为大于 2 的正整数时， $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^n(x)$ 是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $n[f(x)]^{n+1}$ (C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

【答案】A.

【解析】本题考查高阶导数的求法.

为方便记 $y = f(x)$. 由 $y' = y^2$, 逐次求导得

$$y'' = 2yy' = 2y^3, y''' = 3!y^2y' = 3!y^4, \dots,$$

由第一归纳法, 可归纳证明 $y^{(n)} = n!y^{n+1}$

假设 $n = k$ 成立, 即 $y^{(k)} = k!y^{k+1}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } y^{(k+1)} &= [y^{(k)}]' = [k!y^{k+1}]' = (k+1)!y^k \cdot y' \\ &= (k+1)!y^{(k+1)+1} \end{aligned}$$

所以 $n = k+1$ 亦成立, 原假设成立.

(3) 设 α 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}})$

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 发散 (D) 收敛性与 α 的取值有关

【答案】C.

【解析】本题可利用分解法判别级数的敛散性(收敛级数与发散级数之和为发散级数).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 因为此为 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛. 因为由三角函数的有界性 $|\frac{\sin n\alpha}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$, 而 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

根据正项级数的比较判别法:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$, 则

- (1) 当 $0 < A < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;
- (2) 当 $A = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;
- (3) 当 $A = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin n\alpha}{n^2}|$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

由收敛级数与发散级数之和为发散级数, 可得

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}})$ 发散.

故选 (C).

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个领域内连续, 且 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x=0$ 处

(A) 不可导 (B) 可导, 且 $f'(0)=0$

(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

【答案】D.

【解析】利用极限的保号性可以判断的正负号:

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$.

若 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geq 0$, 则 $A \geq 0$.

所以, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{1-\cos x} > 0$ (在 $x=0$ 的某空心领域)

由 $1-\cos x > 0$, 有 $f(x) > 0 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 取极小值, 应选 (D)

本题还可特殊选取满足题中条件的 $f(x) = 2(1-\cos x)$. 显然, 它在 $x=0$ 取得极小值, 其余的都不正确, 这样本题仍选 (D)

(5) 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系,

k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax=b$ 的通解 (一般解) 必是

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

【答案】B

【解析】本题考查解的性质和解的结构. 从 α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 知 $Ax=b$ 的通解形

式为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \xi$, 其中 η_1, η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系, ξ 是

$Ax=b$ 的一个特解.

由解的性质: 如果 η_1, η_2 是 $Ax=0$ 的两个解, 则其线性组合 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ 仍是 $Ax=0$ 的解; 如果 ξ 是 $Ax=b$ 的一个解,

η 是 $Ax=0$ 的一个解, 则 $\xi + \eta$ 仍是 $Ax=b$ 的解.

所以有: $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2$ 都是 $Ax=0$ 的解,

$\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ 是 $Ax=b$ 的一个特解.

那么看各个选项, (A) 中没有特解 ξ , (C) 中既没有特解 ξ , 且 $\beta_1 + \beta_2$ 也不是 $Ax=0$ 的解.

(D)中虽有特解, 但 $\alpha_1, \beta_1 - \beta_2$ 的线性相关性不能判定, 故(A)、(C)、(D)均是不正确的.

再看(B), $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ 是 $Ax = b$ 的一个特解, $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的线性无关的解, 是基础解系, 故本题选(B).

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$

(2) 设 $z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(3) 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解 (一般解)

(1) 【答案】 $\frac{1}{3} \ln 2$.

【解析】分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题, 如果选择不当可能引起更繁杂的计算, 最后甚至算不出结果来. 在做题的时候应该好好总结, 积累经验.

假定 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 均具有连续的导函数, 则

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx,$$

或者 $\int u dv = uv - \int v du.$

由 $\frac{1}{(2-x)^2} dx = -(2-x)^{-2} d(2-x) = d(\frac{1}{2-x})$ 有

$$\text{原式} = \int_0^1 \ln(1+x) d(\frac{1}{2-x}) \xrightarrow{\text{分部法}} \frac{\ln(1+x)}{2-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x} \cdot \frac{dx}{1+x}$$

因为, 由分项法 $\frac{1}{2-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3} (\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x})$

$$\begin{aligned} \text{所以, 原式} &= \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 (\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x}) dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} [-\ln(2-x) \Big|_0^1 + \ln(1+x) \Big|_0^1] = \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

(2) 【答案】 $-2f_{11}'' + (2 \sin x - y \cos x)f_{12}'' + y \sin x \cos x f_{22}'' + \cos x f_2'$.

【解析】这是带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数, 重要的是要分清函数是如何复合的.

由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关, 可以先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$, 如方法 1;

也可以先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, 再求 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$, 如方法 2.

由复合函数求偏导的链式法则：如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数

$z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数，则复合函数

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

方法 1：先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) + f'_2 \frac{\partial}{\partial x}(y \sin x) = 2f'_1 + y \cos x f'_2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2f'_1 + y \cos x f'_2)$$

$$= 2(f''_{11} \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) + f''_{12} \frac{\partial}{\partial y}(y \sin x)) + \cos x f'_2 + (f''_{21} \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) + f''_{22} \frac{\partial}{\partial y}(y \sin x)) y \cos x$$

$$= 2(-f''_{11} + \sin x f''_{12}) + \cos x f'_2 + (-f''_{21} + \sin x f''_{22}) y \cos x$$

$$= -2f''_{11} + (2 \sin x - y \cos x) f''_{12} + y \sin x \cos x f''_{22} + \cos x f'_2.$$

方法 2：先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ ，

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) + f'_2 \frac{\partial}{\partial y}(y \sin x) = -f'_1 + \sin x f'_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-f'_1 + \sin x f'_2)$$

$$= -(f''_{11} \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) + f''_{12} \frac{\partial}{\partial x}(y \sin x)) + \cos x f'_2 + (f''_{21} \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) + f''_{22} \frac{\partial}{\partial x}(y \sin x)) \cdot \sin x$$

$$= -(2f''_{11} + y \cos x f''_{12}) + \cos x f'_2 + (2f''_{21} + y \cos x f''_{22}) \cdot \sin x$$

$$= -2f''_{11} + (2 \sin x - y \cos x) f''_{12} + y \sin x \cos x f''_{22} + \cos x f'_2.$$

(3) 【答案】所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$ 其中 C_1, C_2 为常数.

【解析】所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程.

设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解;

对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解:

即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y'' + py' + qy = 0$.

其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 ;

分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

其中 C_1, C_2 为常数.

对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如

$$y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

本题中对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$ 有二重根 $r_1 = r_2 = -2$, 而非齐次项 $e^{\alpha x}$, $\alpha = -2$ 为重特征根, 因而非齐次方程有如下形式的特解

$$Y = x^2 \cdot a e^{-2x},$$

代入方程可得 $a = \frac{1}{2}$, 故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$ 其中 C_1, C_2 为常数.

四、(本题满分 6 分。)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域, 并求其和函数。

【答案】收敛域 $(-1, 1)$, 和函数为 $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ ($|x| < 1$)。

【解析】先用公式求出收敛半径及收敛区间，再考察端点处的敛散性可得到收敛域；将幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 转化为

基本情形 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ，可求得和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1),$$

方法 1：按通常求收敛半径的办法，

若果 $\rho = \left| \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right|$ ，其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数，则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

本题用幂级数收敛半径的计算公式得 $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)+1}{2n+1} = 1$ ，

\Rightarrow 收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1 \Rightarrow$ 收敛区间为 $(-1, 1)$ ，

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)$ 发散；当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n$ 也发散，

所以当 $x = \pm 1$ 时原幂级数均发散 \Rightarrow 原幂级数的收敛域 $(-1, 1)$ 。

下面求和函数，先分解为 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$ ，又

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2nx^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = 2x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1),$$

$$\text{因此 } S(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$$

方法 2：直接考察 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$ （几何级数求和），逐项求导得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad (|x| < 1)$$

将 x^2 换成 x 得
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \frac{1+x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$$

由方法 1 的讨论, 有收敛域 $(-1, 1)$

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I = \iint_S yzdzdx + 2dxdy$,

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分

【解析】记 $I = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + 0 = z$, 可以考虑用高斯公式计算, 但不是封闭的, 所以要添加辅助面,

如方法 1;

本题还可直接套用公式计算也不复杂, 为 $D_{xy} : \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 可用矢量点积法将积分都投影在平面 xOy 上较方便, 再化为 D_{xy} 上的二重积分, 如方法 2.

方法 1: 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

或
$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

对于球面坐标与直角坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

其中 φ 为向量与 z 轴正向的夹角, $0 \leq \varphi \leq \pi$; θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到向量在 xOy 平面上投影线段的角, $0 \leq \theta \leq 2\pi$; r 为向量的模长, $0 \leq r < +\infty$.

球面坐标系中的体积元素为 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$,

则三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式是：

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

添加辅助面 $S_1: z = 0 (x^2 + y^2 \leq 4)$ ，法向量与 z 轴负向相同， S 与 S_1 围成的闭区域

Ω ， S 与 S_1 的法向量指向 Ω 的外部。在 Ω 上用高斯公式得

$$I + \iint_{S_1} yz dz dx + 2 dx dy = \iiint_{\Omega} z dV.$$

用先二后一的求积顺序求三重积分： $\iiint_{\Omega} z dV = \int_0^2 dz \iint_{D(z)} z dx dy = \int_0^2 z \pi (4 - z^2) dz = 4\pi$

或用球坐标变换来计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dV &= \int_0^2 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\sin \varphi \cdot \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi \times \frac{1}{2} \times 4 = 4\pi \end{aligned}$$

$$\iint_{S_1} yz dz dx + 2 dx dy = - \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = -2 \cdot 4\pi = -8\pi$$

其中 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4$.

因此 $I = 4\pi - (-8\pi) = 12\pi$.

方法 2: S 在 xOy 平面上的投影区域是 $D_{xy}: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 因 S 取上侧，套用矢量点积法公式得

$$I = \iint_{D_{xy}} [0 \cdot (-\frac{\partial z}{\partial x}) + yz \cdot (-\frac{\partial z}{\partial y}) + 2 \cdot 1] dx dy$$

由 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,

方程两边同时对 x 求导，得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$;

方程两边同时对 y 求导，得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$. 代入上式得

$$I = \iint_{D_{xy}} (y^2 + 2) dx dy$$

考虑到积分区域 D_{xy} 关于变量 x, y 具有轮换对称性，从而有

$$\iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

$$I = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy + 8\pi$$

$$\text{用极坐标变换得 } I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr + 8\pi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 + 8\pi = 4\pi + 8\pi = 12\pi.$$

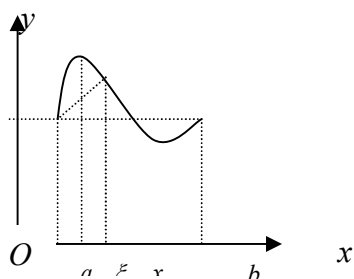
六、（本题满分 7 分）

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$ 。证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f'(\xi) > 0$ 。

【解析】与未知函数在一点的导数值有关，自然想到用微分中值定理，但 $f(a) = f(b)$ 只能推导出一点的导数为零，考虑到题设 $f(x)$ 不恒为常数，因此存在一点 c ，使

$f(c) \neq f(a) = f(b)$ ，再在 $[a, c]$ 或 $[c, b]$ 上应用拉格朗日中值定理。

拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续；在开区间 (a, b) 内可导，那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$ ，使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立。



从几何直观上看（上图）利用拉格朗日中值定理可得到结果：由 $f(x)$ 不恒等于 c ，有 $f(x)$ 不恒等于 $f(a)$ ，因而 $\exists x_0 \in (a, b)$ ， $f(x_0) \neq f(a)$

若 $f(x_0) > f(a) = f(b)$ ，在 $[a, x_0]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists \xi \in (a, x_0) \subset (a, b)$ ，有

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0;$$

若 $f(x_0) < f(a) = f(b)$ ，在 $[x_0, b]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists \xi \in (x_0, b) \subset (a, b)$ ，

$$\text{有 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$$

七、（本题满分 6 分）

$$\text{设四阶矩阵 } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

且矩阵 A 满足关系式 $A(E - C^{-1}B)^T C^T = E$,

其中 E 为四阶单位矩阵, C^{-1} 表示 C 的转逆阵, C^T 表示 C 的转置矩阵。将上述关系式简化并求矩阵 A 。

$$\text{【答案】 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

【解析】由转置矩阵和逆矩阵的性质, $(AB)^T = B^T A^T$; $AA^{-1} = E$; $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

$$\text{由 } (AB)^T = B^T A^T \text{ 知 } (E - C^{-1}B)^T C^T = [C(E - C^{-1}B)]^T = (C - B)^T$$

$$\text{那么由 } A(C - B)^T = E \text{ 知 } A = [(C - B)^T]^{-1} = [(C - B)^{-1}]^T$$

$$\text{由 } C - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

如果对 $((C - B) : E)$ 作初等行变换

$$\text{则由 } ((C - B) : E) \rightarrow (E : (C - B)^{-1}) \text{ 可以直接得出 } (A - 2E)^{-1}$$

$$\text{通过矩阵的初等变换 } ((C - B) : E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 : 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 : 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 : 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 : 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第四行乘以 (-2) 、 (-3) 、 (-4) 分别加到第三、二、一行上, 得到

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 : 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 : 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 : 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 : 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

再第二行乘以 (-2) 、 (-3) 分别

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最后第二行乘以 (-2) 加到第一行上, 得到

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } (C-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换, 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型。

【答案】正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ 得标准型 } f = 9y_3^2.$$

【解析】本题是一个基本题型, 主要考查矩阵的特征值、特征向量以及正交化方法.

由二次型的定义: 含有 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式 (即每项都是二次的多项式)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \text{其中 } a_{ij} = a_{ji},$$

称为 n 元二次型, 令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $A = (a_{ij})$, 则二次型可用矩阵乘法表示为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x,$$

其中 A 是对称矩阵 ($A^T = A$), 称 A 为二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵.

所以写出二次型的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, 其特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 9).$$

令 $|\lambda E - A| = 0$, 所以 A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, 对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$$\text{即 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到基础解系 $\alpha_1 = (2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-2, 0, 1)^T$, 即为属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量.

对于 $\lambda_3 = 9$, 由 $(9E - A)x = 0$, 对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$$\text{即 } \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到基础解系 $\alpha_3 = (1, -2, 2)^T$.

由于不同特征值的特征向量已经正交, 只需对属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的特征向量正交化,

由施密特正交法, 得到

$$\beta_1 = \alpha_1 = (2, 1, 0)^T;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{5}(-2, 4, 5)^T.$$

$$\text{再把 } \beta_1, \beta_2, \alpha_3 \text{ 单位化, 有 } r_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, r_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}, r_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

那么经正交变换

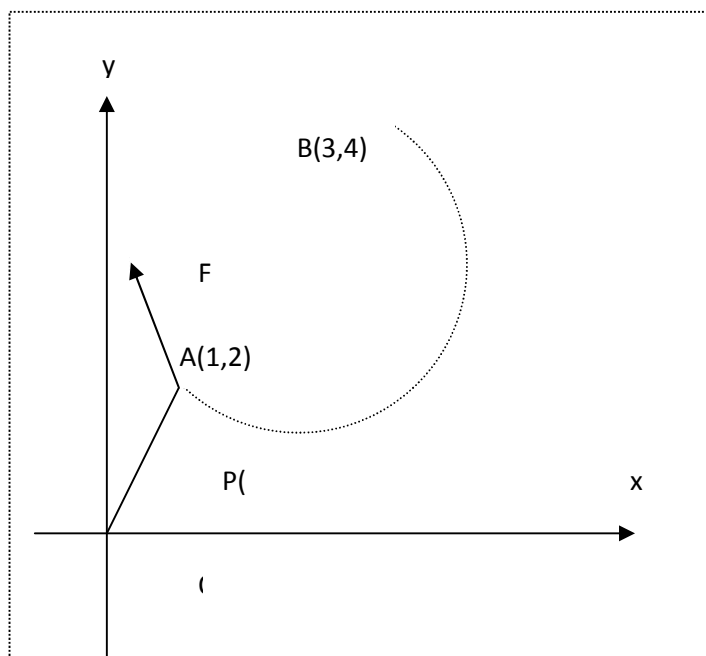
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

注：属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的特征向量不唯一，因此本题的答案也不唯一。

二次型可化为标准型 $f = 9y_3^2$ 。

九、（本题满分 8 分）

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 F 作用（见图）。 F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$ ，求变力 F 对质点 P 所作的功



【答案】 $2(\pi-1)$ 。

【解析】 变力 $F = Pi + Qj$ 对沿曲线 L 运动的质点所作的功为 $W = \int_L Pdx + Qdy$. 本题的关键是写出 F 的表达式.

(1) 先求作用于点 $P(x,y)$ 的力 F : 按题意 $|F| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

与 $\overrightarrow{OP} = \{x, y\}$ 垂直的向量是 $\pm\{-y, x\}$, 其中与 y 轴正向成锐角的是 $\{-y, x\}$, 于是

$$\frac{F}{|F|} = \frac{\{-y, x\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow F = \{-y, x\}.$$

即变力 F 的大小为 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 方向为 $\{-y, x\}$.

(2) 求 F 对质点所作的功的表达式

$$W = \int_{\widehat{AB}} F \cdot ds = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$$

(3) 计算曲线积分

方法1: 格林公式: 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 所围成, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

因为格林公式要求是闭区域, 所以添加辅助线 $\overline{BA}: y = x + 1, x \in [3, 1]$

$$\int_{\overline{BA}} -ydx + xdy = \int_3^1 [-(x+1) + x] dx = \int_1^3 -1 dx = 2.$$

在 \overline{BA} 与 \widehat{AB} 所围的区域 D 上用格林公式得 $\int_{\overline{BA} \cup \widehat{AB}} -ydx + xdy = \iint_D 2 dx dy = 2S_D$

因此 $W = 2S_D - 2$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \pi - 2 = 2(\pi - 1).$$

这里 D 是半圆, 半径是 $\sqrt{2}$, 所以 $S_D = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \pi$.

方法2: 写出的圆弧 \widehat{AB} 的参数方程.

用对坐标的曲线积分公式: 设有向曲线弧 L 的起点为 A , 终点为 B . 曲线弧 L 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad \text{其中起点 } A, \text{ 终点 } B \text{ 对应的参数分别为 } \alpha, \beta, \text{ 则}$$

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) \} dt$$

由 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos t, \\ y = 3 + \sqrt{2} \sin t, \end{cases} t \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\Rightarrow W = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [-(3 + \sqrt{2} \sin t) \sqrt{2} (-\sin t) + (2 + \sqrt{2} \cos t) \sqrt{2} \cos t] dt$$

$$= 2 \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3\sqrt{2} \sin t + 2\sqrt{2} \cos t dt$$

$$= 2\pi + (-3\sqrt{2} \cos t + 2\sqrt{2} \sin t) \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2(\pi - 1).$$

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分。）

(1) 已知随机变量的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$

则 X 的概率分布函数 $F(X) =$ _____。

(2) 设随机事件 A 、 B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6, 若 \bar{B} 表示 B 的对立事件, 那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____。

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松 (Poisson) 分布, 即 $P\{X = k\} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则随机变量 $Z = 3X - 2$ 的数学期望 $E(Z) =$ _____。

(1) 【答案】分布函数为 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$.

【解析】本题题意明确, 直接按连续型随机变量的分布函数定义进行计算. 因为密度函数中包含自变量的绝对值, 积分时必须对 x 进行讨论.

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|t|}dt$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^x;$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x \frac{1}{2}e^t dt = \int_0^x \frac{1}{2}e^t dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{2}e^t \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2}e^{-t} \Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

因此, X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$

(2) 【答案】0.3.

【解析】本题主要考查概率的加法公式、减法公式等基本性质, 并注意其各种变形:

$$(1) \quad \overline{AB} = A - B = A - AB.$$

$$(2) \quad P(\overline{AB}) = P(A - B) = P(A) - P(AB), \text{一般地 } P(A - B) \neq P(A) - P(B).$$

$$(3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B\bar{A})$$

$$= P(B) + P(A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(B\bar{A}).$$

$$(4) \text{ 若 } A \text{ 与 } B \text{ 独立, 则 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)].$$

方法 1: $A\bar{B}$ 互不相容, 且 $A \cup B = A\bar{B} \cup B$, 于是

$$P(A\bar{B}) = P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$$

此种方法来看 $P(A) = 0.4$ 是多余的.

方法 2: 根据概率的广义加法公式, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$$

从而 $P(A\bar{B} \cup B) = P(A)$, 得出 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.3 = 0.1$

(3) 【答案】4.

【解析】若 $X \sim P(\lambda)$ 泊松分布, 则数学期望和方差, $EX = DX = \lambda$.

由数学期望的性质: $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ 其中 a, b, c 为常数.

题中由于 X 服从参数为 2 的泊松 (Poisson) 分布, 因此 $E(X) = 2$.

故 $EZ = E(3X - 2) = 3EX - 2 = 4$.

十一、(本题满分 6 分.)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量

$Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$ 。

$$\text{【答案】 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$D(Z) = \frac{2}{9}.$$

【解析】

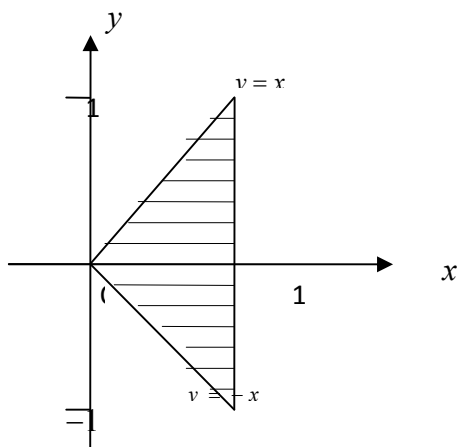
无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学视频文档资料，【公众号：小盆考研】，回复【数学】免费获取

更多考研押题资料视频，【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学预测卷，【公众号：小盆考研】，回复【数学预测】免费获取

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供



二维均匀分布 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$

S_D 是区域 D 的面积, $S_D = 2 \times \frac{1}{2} \times 1^2 = 1$,

所以 (X, Y) 的联合密度 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$

由连续型随机变量边缘分布的定义, 有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由一维连续型随机变量的数学期望的定义:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx. \text{ 有}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx$$

$$= \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

本题也可直接利用二维随机变量函数的数学期望公式, 用二重积分计算:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \iint_D x dx dy = \int_0^1 x dx \int_{-x}^x dy = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_{-x}^x dy = 2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}.$$

由数学期望和方差的性质：

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c ;$$

$$X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立时, } D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) .$$

其中 a, b, c 为常数.

$$\text{所以有 } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

$$DZ = D(2X + 1) = 4DX = \frac{2}{9}.$$
