2019 年
数学(三)参考答案

一、选择题

(1) C

解 $\tan x$ 的麦克劳林展开式为 $x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$,

故 $x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$,则 $k=3$. 故应选 C.

(2) D

解 设 $f(x)=x^5-5x+k$,则 $f'(x)=5x^4-5$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm1$.

当 $x<-1$ 时,$f'(x)>0$;当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,结合单调性知,$f(-1)>0$,$f(1)<0$ 时才有三个根,

且三个实根分别在区间 $(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$ 上,

即 $f(-1)=-1+5+k>0$,$f(1)=1-5+k<0$,则 $-4<k<4$. 故应选 D.

(3) D

解 由微分方程通解形式可知,$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$ 为齐次方程的通解,

$y=\mathrm{e}^x$ 为非齐次方程的特解,-1 为特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的二重根,

得 $\begin{cases}1-a+b=0,\\a^2-4b=0,\end{cases}$ 且 $1+a+b=c$,

由此解得 $a=2,b=1,c=4$. 故应选 D.

(4) B

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n|}{|nu_n|}=0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛,由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也绝对收敛.

而当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\nu_n}{n}$ 条件收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu_n$ 的敛散性不定.

如果令 $\nu_n=(-1)^n$ 及 $\nu_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\nu_n}{n}$ 都是条件收敛,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu_n=(-1)^n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+\nu_n)$ 的敛散性是不确定的.

则 C、D 都不正确.

再判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\nu_n$ 的敛散性:由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n\nu_n|}{|nu_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\nu_n}{n}\right|=0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛,由比较判别法

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\nu_n$ 是绝对收敛的. 故应选 B.

(5) A

解 由线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $2=4-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

由于当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$ 时(n 为 $\boldsymbol{A}$ 的阶数),$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$. 故应选 A.

(6) C

解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,根据 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 得:$\lambda^2+\lambda=2$,解得 $\lambda=1$ 或 -2.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值且 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值的积为 $|\boldsymbol{A}|$ 的值，

故 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值的积为 $1,-2,-2$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 2，

故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故应选 C.

(7) C

解 由 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 得

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$.

故应选 C.

(8) A

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且相互独立，

则 $E(X-Y)=0$，$D(X-Y)=DX+DY=2\sigma^2$，得 $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

故 $P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\dfrac{|X-Y|}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$ 与 σ^2 有关，与 μ 无关.

故应选 A.

二、填空题

(9) e^{-1}

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]^n$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(-\frac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}^{-1}.$$

故应填 e^{-1}.

(10) $(\pi,-2)$

解 $y'=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$，

$y''=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

令 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\pi$，再判断 x_1,x_2 两点的左右两侧二阶导数是否异号；

在 x_1 左侧 $y''<0$，右侧 $y''<0$，故 $(0,2)$ 不是拐点；

x_2 左侧 $y''<0$，x_2 右侧区间 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内 $y''>0$，所以拐点为 $(\pi,-2)$.

故应填 $(\pi,-2)$.

(11) $\dfrac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$

解 由分部积分法：$\displaystyle\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x$， ①

又 $f(1)=\displaystyle\int_1^1\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t=0$，$f'(x)=\sqrt{1+x^4}$，代入 ① 式：

$$\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x^4$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2}).$$

故应填 $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

(12) 0.4

解 当 $P_B=20$ 时, $Q_A=500-P_A^2-20P_A+2\cdot 20^2=1300-20P_A-P_A^2$,

则 $\eta_{AA}=-\frac{P_A}{Q_A}\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}P_A}=-\frac{P_A}{1300-20P_A-P_A^2}\cdot(-20-2P_A)=\frac{2P_A(P_A+10)}{1300-20P_A-P_A^2}$,

所以 $\eta_{AA}\Big|_{P_A=10}=0.4$. 故应填 0.4.

(13) 1

解 由题意得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{array}\right).$$

要使 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则应使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<3$,

当 $a^2-1=a-1=0$, 即 $a=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$.

故应填 1.

(14) $\frac{2}{3}$

解 由随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 可知 X 的分布函数

$F(X)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ $EX=\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$,

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}$$

$$=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

故应填 $\frac{2}{3}$.

三、解答题

(15) **解** 当 $x>0$ 时, $f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$, 所以 $f'(0)$ 不存在.

综上 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ \mathrm{e}^x(x+1), & x<0.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=-1$, $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x<-1$ 或 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)<0$;

当 $-1<x<0$ 或 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 内单调减少，

在区间 $(-1,0)$ 和 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 内单调增加，从而 $f(x)$ 的极小值为

$f(-1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$，$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$，极大值为 $f(0)=1$.

(16) **解**　因为

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_u(x+y,x-y)-f_v(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_u(x+y,x-y)+f_v(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{uu}(x+y,x-y)-2f_{uv}(x+y,x-y)-f_{vv}(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{uu}(x+y,x-y)+f_{vv}(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{uu}(x+y,x-y)+2f_{uv}(x+y,x-y)-f_{vv}(x+y,x-y),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{uu}(x+y,x-y)-f_{vv}(x+y,x-y).$$

(17) **解**　（Ⅰ）由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y(x)=\mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\int x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C).$$

因为 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$，所以 $C=0$.

从而 $y(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

（Ⅱ）D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\int_1^2\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\pi x\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}).$$

(18) **解**　由题意，所求面积为

$$S=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

因为 $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=(-1)^n[\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi}]-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

得　$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{2}[\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi}]$

所以　$\displaystyle S=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{-n\pi}+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}]=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}$.

(19) **解** （Ⅰ）$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

因为在积分区间$[0,1]$上，$x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\leqslant 0$且不恒等于0，

所以$a_{n+1}-a_n<0$，即$\{a_n\}$单调减少.

当$n\geqslant 2$时，因为$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n,$$

所以 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$.

（Ⅱ）$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

因为$\{a_n\}$单调减少且$a_n>0$，所以$\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(20) **解** 由等价的定义可知：

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$都能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则有$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，

对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$作初等行变换可得：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right)$$

当$a=-1$时，有$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$；

当$a=1$时，有$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$；

可知$a\neq 1$且$a\neq -1$时，此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，

则有$a=1$或者$a\neq 1$且$a\neq -1$时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，

此时，要保证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

对$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$作初等行变换可得：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&1\\1&2&3&1&0&2\\a+3&1-a&a^2+3&4&4&a^2+3\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&1\\0&2&2&0&-1&1\\0&0&a^2-1&1-a&\frac{3}{2}(1-a)&\frac{2a^2-a-1}{2}\end{array}\right)$$

当$a=1$时，有$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，

可知当$a\neq 1$且$a\neq -1$时，此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，

此时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

综上所述：当 $a\neq-1$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可相互线性表示.

当 $a\neq1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&a^2-1&a^2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$

则 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$

基础解系为 $k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}(k\in\mathbf{R})$，则 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21) **解** （Ⅰ）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，

即 $\begin{cases}x-4=y+1,\\4x-8=-2y,\end{cases}$ 解得 $x=3,y=-2$.

（Ⅱ）矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)$，

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,-1,-2$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $2,-1,-2$.

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $\xi_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\xi_3=(1,-2,-4)^{\mathrm{T}}$.

记 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $\eta_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\eta_2=(1,-3,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\eta_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

记 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，于是 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，得 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(22) **解** （Ⅰ）Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\mid Y=-1\}P\{Y=-1\}+P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}P\{Y=1\}\\&=pP\{-X\leqslant z\}+(1-p)P\{X\leqslant z\}.\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=pP\{X\geqslant -z\}+(1-p)\cdot 0=pe^z$；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=p\cdot 1+(1-p)P\{X\leqslant z\}=1-(1-p)e^{-z}$.

所以 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}pe^z, & z<0,\\(1-p)e^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$

（Ⅱ）$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ$

$$\begin{aligned}&=E(X^2Y)-EX\cdot E(XY)\\&=E(X^2)\cdot E(Y)-(EX)^2\cdot E(Y)\\&=DX\cdot EY=1-2p,\end{aligned}$$

令 $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，得 $p=\dfrac{1}{2}$. 所以 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（Ⅲ）因为

$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}=P\{X\leqslant 1,XY\leqslant -1\}=0$，

$P\{X\leqslant 1\}>0,P\{Z\leqslant -1\}>0$，

所以

$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}\neq P\{X\leqslant 1\}P\{Z\leqslant -1\}$.

故 X 与 Z 不相互独立.

(23) **解**　（Ⅰ）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;\sigma^2)\mathrm{d}x=1$，得

$$1=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=A\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=A\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A,$$

所以 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

（Ⅱ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=0$，得 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

所以 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.