1997年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$____________.

(2)设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为____________.

(3)对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为____________.

(4)设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$,$\mathbf{B}$ 为三阶非零矩阵,且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 则 $t=$____________.

(5)袋中有50个乒乓球,其中20个是黄球,30个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,在点 $(0,0)$ 处(　　)

(A)连续,偏导数存在　　(B)连续,偏导数不存在

(C)不连续,偏导数存在　　(D)连续,偏导数不存在

(2)设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$. 令

$$S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a),S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),\text{ 则（　　）}$$

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

(3)设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t dt$, 则 $F(x)$（　　）

(A)为正常数　　(B)为负常数　　(C)恒为零　　(D)不为常数

(4)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$, 则三条直线 $\begin{matrix}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{matrix}$ (其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3$)交于一点的充要条件是:(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

(C)秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

(5)设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2,则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是（　　）

(A)8　　(B)16　　(C)28　　(D)44

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$,其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

(2)计算曲线积分 $\oint_c (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$, 其中 c 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看 c 的方向是顺时针的.

(3)在某一人群中推广新技术是通过其中掌握新技术的人进行的,设该人群的总人数为 N, 在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0, 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$(将 $x(t)$ 视为连续可微变量),其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数 $k>0$, 求 $x(t)$.

四、(本题共 2 小题,第(1)小题 6 分,第(2)小题 7 分,满分 13 分)

(1)设直线 l:$\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上,而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

(2)设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$, 求 $f(u)$.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 连续 ,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

六、(本题满分 8 分)

设 $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})(n=1,2,\cdots)$, 证明

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ 存在.　　(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

七、(本题共 2 小题,第(1)小题 5 分,第(2)小题 6 分,满分 11 分)

(1)设 $\mathbf{B}$ 是秩为2的 5×4 矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,3]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,4,-1]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[5,-1,-8,9]^T$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的解向量,求 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

(2)已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

1)试确定 a,b 参数及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值.

2)问 $\mathbf{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由.

八、(本题满分 5 分)

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶可逆方阵,将 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\mathbf{B}$.

(1)证明 $\mathbf{B}$ 可逆.

(2)求 $\mathbf{AB}^{-1}$.

九、(本题满分 7 分)

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设再各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是 $\frac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

十、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.

1996年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^x=8$,则 $a=$____________.

(2)设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$,且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程为____________.

(3)微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的通解为____________.

(4)函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为____________.

(5)设 $\mathbf{A}$ 是 4×3 矩阵,且 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=2$,而 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$,则 $r(\mathbf{AB})=$____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分,a 则等于(　　)

(A)-1　　(B)0　　(C)1　　(D)2

(2)设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(3)设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,常数 $\lambda\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛　　(C)发散　　(D)散敛性与 λ 有关

(4)设有 $f(x)$ 连续的导数,$f(0)=0,f'(0)\neq0,F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt$,且当 $x\to0$ 时,$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 k 等于(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(5)四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&a_3&b_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$ 的值等于(　　)

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1)求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数.

(2)设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1)计算曲面积分 $\iint\limits_S (2x+z)dydz + zdxdy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2+y^2 (0 \le x \le 1)$, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

(2)设变换 $\begin{cases} u = x-2y \\ v = x+ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设对任意 $x>0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, 求 $f(x)$ 的一般表达式.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)| \le a, |f''(x)| \le b$, 其中 a,b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任意一点.

(1)写出 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式;

（2）证明$\left|f'(c)\right| \le 2a+\dfrac{b}{2}$.

八、（本题满分 6 分）

设$A=\mathbf{I}-\xi\xi^{T}$,其中$\mathbf{I}$是n阶单位矩阵,ξ是n维非零列向量,ξ^{T}是ξ的转置.证明

(1) $\mathbf{A}^{2}=\mathbf{A}$的充分条件是$\xi^{T}\xi=1$.

(2)当$\xi^{T}\xi=1$时,$\mathbf{A}$是不可逆矩阵.

九、（本题满分 8 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2,

(1)求参数c及此二次型对应矩阵的特征值.

(2)指出方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设工厂A和工厂B的产品的次品率分别为 1%和 2%,现从由A和B的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属A生产的概率是____________.

(2)设ξ,η是两个相互独立且均服从正态分布$N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$的随机变量,则随机变量$\left|\xi-\eta\right|$的数学期望

$E(\left|\xi-\eta\right|)$=____________.

十一、（本题满分 6 分）

设ξ,η是两个相互独立且服从同一分布的两个随机变量,已知ξ的分布率为$P(\xi=i)=\dfrac{1}{3},i=1,2,3.$

又设$X=\max(\xi,\eta),Y=\min(\xi,\eta)$.

(1)写出二维随机变量的分布率:

Y \ X	1	2	3
1			
2			
3			

(2)求随机变量X的数学期望$E(X)$.

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$____________.

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt=$____________.

(3)设 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}=2$, 则 $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\bullet(\mathbf{c}+\mathbf{a})=$____________.

(4)幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$____________.

(5)设三阶方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 满足关系式 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}=6\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{A}$, 且 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{B}=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$,及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$, 则直线 L（　　）

(A)平行于 π　　(B)在 π 上　　(C)垂直于 π　　(D)与 π 斜交

(2)设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(3)设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）

(A)充分必要条件　　(B)充分条件但非必要条件

(C)必要条件但非充分条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

(4)设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, 则级数（　　）

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　(D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散

(5)设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 则必有（　　）

(A) $\mathbf{AP_1P_2 = B}$　　(B) $\mathbf{AP_2P_1 = B}$　　(C) $\mathbf{P_1P_2A = B}$　　(D) $\mathbf{P_2P_1A = B}$

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1)设 $u = f(x,y,z), \varphi(x^2, \mathrm{e}^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$. 求 $\dfrac{du}{dx}$.

(2)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,并设 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy$.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1)计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdS$ 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2 \le 2x$ 内的部分.

(2)将函数 $f(x) = x-1 (0 \le x \le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦函数.

五、(本题满分 7 分)

设曲线 L 位于平面 xOy 的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A. 已知 $\left|\overline{MA}\right| = \left|\overline{OA}\right|$, 且 L 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 L 的方程.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $Q(x,y)$ 在平面 xOy 上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xydx + Q(x,y)dy$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy$, 求 $Q(x,y)$.

七、(本题满分 8 分)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0,$ 试证:

(1)在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0.$

(2)在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$

八、(本题满分 7 分)

设三阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,$ 对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A}$.

九、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵,满足 $\mathbf{AA}'=\mathbf{I}$($\mathbf{I}$ 是 n 阶单位矩阵, $\mathbf{A}'$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵), $|\mathbf{A}|<0,$ 求 $|\mathbf{A}+\mathbf{I}|$.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$____________.

(2)设 X 和 Y 为两个随机变量,且

$$P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7},P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7},$$

则 $P\{\max(X,Y)\geq 0\}=$____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases},$$

求随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot\pi(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$____________.

(2)曲面 $z-\mathrm{e}^{x}+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为____________.

(3)设 $u=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为____________.

(4)设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$, 则 $\iint\limits_{D}(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})dxdy=$____________.

(5)已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3],\boldsymbol{\beta}=[1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}]$, 设 $A=\alpha^T\beta$ 其中 α^T 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则 $\mathbf{A}^n=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$, 则有

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(2)二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）

(A)充分条件而非必要条件　　(B)必要条件而非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

(3)设常数 $\lambda>0$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$（　　）

(A)发散　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　(D)收敛性与 λ 有关

(4)设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\ne 0$, 则必有（　　）

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$　　(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(5)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组（　　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)设$\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$的值.

(2)将函数$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$展开成$x$的幂级数.

(3)求$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分$\iint\limits_S\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$,其中$S$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及$z=R,z=-R(R>0)$两平面所围成立体表面的外侧.

五、(本题满分 9 分)

设$f(x)$具有二阶连续函数,$f(0)=0,f'(0)=1,$且$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$为一全微分方程,求$f(x)$及此全微分方程的通解.

六、(本题满分 8 分)

设$f(x)$在点$x=0$的某一邻域内具有二阶连续导数,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

七、(本题满分 6 分)

已知点A与点B的直角坐标分别为$(1,0,0)$与$(0,1,1)$.线段AB绕x轴旋转一周所成的旋转曲面为S.求由S及两平面$z=0,z=1$所围成的立体体积.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

八、(本题满分 8 分)

设四元线性齐次方程组(Ⅰ)为$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$,

又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为$k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1)$.

(1)求线性方程组(Ⅰ)的基础解析.

(2)问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解.若没有,则说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设$\mathbf{A}$为n阶非零方阵,$\mathbf{A}^*$是$\mathbf{A}$的伴随矩阵A^T是$\mathbf{A}$的转置矩阵,当$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}'$时,证明$|\mathbf{A}| \neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知A、B两个事件满足条件$P(AB) = P(\overline{AB})$,且$P(A) = p$,则$P(B)$=___________.

(2)设相互独立的两个随机变量X,Y具有同一分布率,且X的分布率为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量$Z = \max\{X,Y\}$的分布率为___________.

十一、(本题满分 6 分)

已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布，并且X和Y分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$, X与Y的相关系数$\rho_{xy} = -\frac{1}{2}$,设$Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$,

(1)求Z的数学期望EZ和DZ方差.

(2)求X与Z的相关系数ρ_{xz}.

(3)问X与Y是否相互独立?为什么?

1993年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为____________.

(2)由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为____________.

(3)设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则其中系数 b_3 的值为____________.

(4)设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=$____________.

(5)设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为零,且 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$,则线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt,g(x)=x^3+x^4$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A)等价无穷小　　(B)同价但非等价的无穷小

(C)高阶无穷小　　(D)低价无穷小

(2)双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为(　　)

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta$　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos2\theta}d\theta$　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos2\theta)^2d\theta$

(3)设有直线 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为(　　)

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

(4)设曲线积分 $\int_L[f(t)-\mathrm{e}^x]\sin ydx-f(x)\cos ydy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 等于(　　)

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$　　(B) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$　　(C) $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$　　(D) $1-\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(5)已知 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$,$\mathbf{P}$ 为三阶非零矩阵,且满足 $\mathbf{PQ}=0$,则(　　)

(A) $t=6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为1　　(B) $t=6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为2

(C) $t\neq6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为1　　(D) $t\neq6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为2

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}$.

(2)求 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}}dx$.

(3)求微分方程 $x^{2}y'+xy=y^{2}$, 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.

四、(本题满分 6 分)

计算 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}2xzdydz+yzdzdx-z^{2}dxdy$, 其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 与 $z=\sqrt{2-x^{2}-y^{2}}$ 所围立体的表面外侧.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n^{2}-n+1)}{2^{n}}$ 的和.

六、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1)设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $f'(x)\ge k>0$, $f(0)<0$, 证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2)设 $b>a>e$, 证明 $a^{b}>b^{a}$.

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_{1},x_{2},x_{3})=2x_{1}^{2}+3x_{2}^{2}+3x_{3}^{2}+2ax_{2}x_{3}\,(a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_{1}^{2}+2y_{2}^{2}+5y_{3}^{2}$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

八、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$, $\mathbf{I}$ 是 n 阶单位矩阵,若 $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$, 证明 $\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发,以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动.物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发,其速度大小为 $2v$, 方向始终指向 A, 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程,并写出初始条件.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)一批产品共有 10 个正品和 2 个次品,任意抽取两次,每次抽一个,抽出后不再放回,则第二次抽出的是次品的概率为____________.

(2) 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=$____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$

(1)求 X 的数学期望 EX 和方差 DX.

(2)求 X 与 $\left|X\right|$ 的协方差,并问 X 与 $\left|X\right|$ 是否不相关?

(3)问 X 与 $\left|X\right|$ 是否相互独立?为什么?

1992年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

(2)函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\,u\big|_M=$____________.

(3)设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$,则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于____________.

(4)微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$____________.

(5)设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$, 其中 $a_i\ne 0,b_i\ne 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=$____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　)

(A)等于2　　(B)等于0　　(C)为∞　　(D)不存在但不为∞

(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})$(常数 $a>0$)(　　)

(A)发散　　(B)条件收敛　　(C)绝对收敛　　(D)收敛性与 a 有关

(3)在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　)

(A)只有1条　　(B)只有2条　　(C)至少有3条　　(D)不存在

(4)设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(5)要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解,只要系数矩阵 $\mathbf{A}$ 为(　　)

(A)$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(2)设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y, x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3)设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ \mathrm{e}^{-x} & x>0\end{cases}$,求 $\int_1^3 f(x-2)dx.$

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{-3x}$ 的通解.

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$, 其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、(本题满分 7 分)

设 $f''(x)<0, f(0)=0$, 证明对任何 $x_1>0, x_2>0$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分)

在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$, 问当 ξ、η、ζ 取何值时,力 $\vec{F}$ 所做的功 W 最大?并求出 W 的最大值.

八、(本题满分 7 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

九、(本题满分 7 分)

设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3,$ 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\text{又向量}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(1)将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出.

(2)求 $\mathbf{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为自然数).

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6},$ 则事件 A、B、C 全不发生的概率为____________.

(2)设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则数学期望 $E\{X+\mathrm{e}^{-2X}\}=$____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示,其中 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

1991年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)设$\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________.

(2)由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的函数$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的全微分$dz=$____________.

(3)已知两条直线的方程是$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1};l_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.则过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程是____________.

(4)已知当$x\to 0$时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小,则常数$a=$____________.

(5)设4阶方阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则$\mathbf{A}$的逆阵$\mathbf{A}^{-1}=$____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)曲线$y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$（　　）

(A)没有渐近线　　(B)仅有水平渐近线
(C)仅有铅直渐近线　　(D)既有水平渐近线又有铅直渐近线

(2)若连续函数$f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^{2\pi} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$,则$f(x)$等于（　　）

(A)$\mathrm{e}^x\ln 2$　　(B)$\mathrm{e}^{2x}\ln 2$　　(C)$\mathrm{e}^x+\ln 2$　　(D)$\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$

(3)已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5,$则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$等于（　　）

(A)3　　(B)7　　(C)8　　(D)9

(4)设D是平面xOy上以$(1,1)$、$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,D_1是D在第一象限的部分,则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$等于（　　）

(A)$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　(B)$2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

(C)$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　(D)0

(5)设n阶方阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$满足关系式$\mathbf{ABC}=\mathbf{E}$,其中$\mathbf{E}$是n阶单位阵,则必有（　　）

(A)$\mathbf{ACB}=\mathbf{E}$　　(B)$\mathbf{CBA}=\mathbf{E}$　　(C)$\mathbf{BAC}=\mathbf{E}$　　(D)$\mathbf{BCA}=\mathbf{E}$

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{2}}$.

(2)设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围城的立体.

四、(本题满分 6 分)

过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中,求一条曲线 L, 使沿该曲线 O 从到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分)

将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$, 证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c, 使 $f'(c)=0$.

七、(本题满分 8 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1), \boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1) a 、 b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2) a 、 b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一的线性表示式?写出该表示式.

八、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶正定阵, $\mathbf{E}$ 是 n 阶单位阵,证明 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 的行列式大于 1.

九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点),且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)若随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布,且 $P\{2<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}=$___________.

(2)随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为___________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)} & x>0, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

1990年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)过点 $M(1,2-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是____________.

(2)设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=$____________.

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$,则 $f[f(x)]=$____________.

(4)积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,dy$ 的值等于____________.

(5)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,

则该向量组的秩是____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)dt$,则 $F'(x)$ 等于(　　)

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$　　(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(2)已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于2的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是(　　)

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　　(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

(3)设 a 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$(　　)

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛　　(C)发散　　(D)收敛性与 a 的取值有关

(4)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$(　　)

(A)不可导　　(B)可导,且 $f'(0)\ne 0$　　(C)取得极大值　　(D)取得极小值

(5)已知 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应其次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解析,k_1、k_2 为任意常数,则方程组 $\mathbf{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)必是(　　)

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)求 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx.$

(2)设 $z=f(2x-y,y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3)求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I=\iint\limits_S yzdzdx+2dxdy$ 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\ge 0$ 的部分.

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

且矩阵 $\mathbf{A}$ 满足关系式

$$\mathbf{A}(\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})'\mathbf{C}'=\mathbf{E}$$

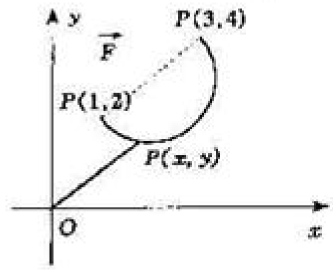
其中 $\mathbf{E}$ 为四阶单位矩阵,$\mathbf{C}^{-1}$ 表示 $\mathbf{C}$ 的逆矩阵,$\mathbf{C}'$ 表示 $\mathbf{C}$ 的转置矩阵.将上述关系式化简并求矩阵 $\mathbf{A}$.

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 成标准型.

九、(本题满分 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用(见图). $\vec{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功.



十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty$ 则 X 的概率分布函数 $F(x)=$___________.

(2)设随机事件 A、B 及其和事件 $A\bigcup B$ 的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$___________.

(3)已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松 $(Poisson)$ 分布,即 $P\{X=k\}=\dfrac{2^k\mathrm{e}^{-2}}{k!},k=0,1,2,\cdots$, 则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$___________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

1989年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$____________.

(2)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$, 则 $f(x)=$____________.

(3)设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$____________.

(4)向量场 $u(x,y,z)=xy^2 i=ye^z j+x\ln(1+z^2)k$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=$____________.

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则矩阵 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}=$____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ (　　)

(A)有且仅有水平渐近线　　(B)有且仅有铅直渐近线

(C)既有水平渐近线,又有铅直渐近线　　(D)既无水平渐近线,又无铅直渐近线

(2)已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$, 则点 P 的坐标是(　　)

(A) $(1,-1,2)$　　(B) $(-1,1,2)$　　(C) $(1,1,2)$　　(D) $(-1,-1,2)$

(3)设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, c_1,c_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是(　　)

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$　　(B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$　　(D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

(4)设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1$, 而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty$, 其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx,n=1,2,3,\cdots$, 则 $S(-\dfrac{1}{2})$ 等于(　　)

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

(5)设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$, 则 $\mathbf{A}$ 中(　　)

(A)必有一列元素全为0　　(B)必有两列元素对应成比例

(C)必有一列向量是其余列向量的线性组合　　(D)任一列向量是其余列向量的线性组合

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u,v)$ 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2)设曲线积分 $\int_c xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值.

(3)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$$

有解,并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值,证明

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值.

(2) $\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 $\sum$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上,问当 R 为何值时,球面 $\sum$ 在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$, 则和事件 $A\bigcup B$ 的概率 $P(A\bigcup B)$ =____________.

(2)甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,现已知目标被命中,则它是甲射中的概率为____________.

(3)若随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布,则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,且 X 服从均值为 1、标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布,而 Y 服从标准正态分布.试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

1988年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域.

(2)已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\ge 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(3)设 $\sum$ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分 $I=\oint\!\!\oint_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

二、填空题(本题共4小题,每小题3分,满分12分.把答案填在题中横线上)

(1)若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$, 则 $f'(t)=$____________.

(2)设 $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$, 则 $f(7)=$____________.

(3)设周期为2的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2 & -1<x\le 0\\ x^2 & 0<x\le 1\end{cases}$,则的傅里叶 $(Fourier)$ 级数在 $x=1$ 处收敛于____________.

(4) 设 4×4 矩阵 $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4],\mathbf{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为4维列向量,且已知行列式 $|\mathbf{A}|=4,|\mathbf{B}|=1$, 则行列式 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=$____________.

三、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则 $\Delta x\to 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是(　　)

(A)与 Δx 等价的无穷小　　(B)与 Δx 同阶的无穷小

(C)比 Δx 低阶的无穷小　　(D)比 Δx 高阶的无穷小

(2)设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解且 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　)

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某邻域内单调增加　　(D)某邻域内单调减少

(3)设空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0, \Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, 则:(　　)

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} dv$ (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$ (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

(4)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处（　　）

(A)条件收敛 (B)绝对收敛

(C)发散 (D)收敛性不能确定

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s (3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是（　　）

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\ne 0$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量均线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量都不能用其余向量线性表示

四、(本题满分 6 分)

设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$, 其中函数 f 、 g 具有二阶连续导数,求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$, 其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x-1$ 在该点处的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

六、（本题满分 9 分）

设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k>0$ 为常数, r 为 A 质点与 M 之间的距离),质点 M 沿直线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$, 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

七、(本题满分 6 分)

已知 $\mathbf{AP}=\mathbf{BP}$, 其中 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A},\mathbf{A}^5$.

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似.

(1)求 x 与 y.

(2)求一个满足 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 的可逆阵 $\mathbf{P}$.

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$, 证明:在 (a,b) 内存在唯一的 ξ, 使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi),x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi),x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等,若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则事件 A 在一次试验中出现的概率是____________.

(2)若在区间 $(0,1)$ 内任取两个数,则事件”两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为____________.

(3)设随机变量 X 服从均值为 10,均方差为 0.02 的正态分布,已知

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du,\phi(2.5)=0.9938,$$

则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1-x^2)}$, 求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

1987年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)当 x=____________时,函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值.

(2)由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = \mathrm{e} + 1 - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积是____________.

(3)与两直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为____________ .

(4)设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$, 则曲线积分 $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy$ 的值是 ____________.

(5)已知三维向量空间的基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1)$, 则向量 $\alpha =(2,0,0)$ 在此基底下的坐标是

____________.

二、(本题满分8分)

求正的常数 a 与 b, 使等式 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a + t^2}} dt = 1$ 成立.

三、(本题满分7分)

(1)设 f 、 g 为连续可微函数, $u = f(x, xy), v = g(x + xy)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

(2)设矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足关系式 $\mathbf{AB} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{B}$.

四、(本题满分8分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解,其中常数 $a > 0$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处（　　）

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$　　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数 ,$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$, 其中 $t>0, s>0$, 则 I 的值（　　）

(A)依赖于 s 和 t　　　(B)依赖于 s 、t 和 x

(C)依赖于 t 、x ,不依赖于 s　　　(D)依赖于 s ,不依赖于 t

(3)设常数 $k>0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（　　）

(A)发散　　　(B)绝对收敛

(C)条件收敛　　　(D)散敛性与 k 的取值有关

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=a\neq 0$, 而 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\mathbf{A}^*|$ 等于

(A) a　　　(B) $\dfrac{1}{a}$　　　(C) a^{n-1}　　　(D) a^n

六、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\bullet 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

七、（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy,$$

其中 Σ 是曲线 $f(x)=\begin{cases} z=\sqrt{y-1} & 1\le y\le 3 \\ x=0 & \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面,其法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 x, 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x)\neq 1$,证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使得 $f(x)=x$.

九、(本题满分 8 分)

问 a,b 为何值时,现线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设在一次实验中,事件 A 发生的概率为 p,现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为__________;而事件 A 至多发生一次的概率为__________.

(2)三个箱子,第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球, 第二个箱子有 3 个黑球 3 个白球.第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球。现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球。这个球为白球的概率等于__________.已知取出的球是白球,此球属于第二个箱子的概率为__________.

(3)已知连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}$, 则 X 的数学期望为__________, X 的方差为__________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases},$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.