2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax},x>0\\ b,x\le 0\end{cases}$ 在 x=0 连续，则

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　(C) $ab=0$　(D) $ab=2$

（2）设二阶可到函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1,f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$

(B) $\int_{-2}^{1}f(x)dx<0$

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$

(D) $\int_{-1}^{1}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0,\lim\limits_{n\to\infty}=0$

(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

（4）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^k=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（5）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且在任意的 (x,y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0,$ 则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$

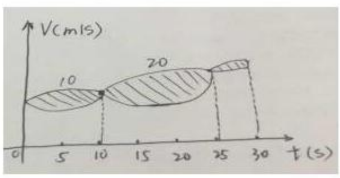
(B) $f(0,0)<f(1,1)$

(C) $f(0,1)>f(1,0)$

(D) $f(0,1)<f(1,0)$

（6）甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位:m）处,图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位:m/s）虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位:s）,则

(A) $t_0=10$　(B) $15<t_0<20$　(C) $t_0=25$　(D) $t_0>25$



（7）设 A 为三阶矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

(A) $\alpha_1+\alpha_2$　　(B) $\alpha_2+2\alpha_3$　　(C) $\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2$

（8）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

二、填空题：9~14 题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________

（10）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$ ________

（11）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$ =____________

（12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$, $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)$=________

（13）$\displaystyle\int_0^1dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx$ =______________

（14）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 a =________

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^tdt}{\sqrt{x^3}}$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$,求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

（17）（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

（18）（本题满分 10 分）

已知函数$y(x)$由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定，求$y(x)$的极值

（19）（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$\left[0,1\right]$上具有 2 阶导数，$f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明

（1）方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根；

（2）方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.

（20）（本题满分 11 分）

已知平面区域$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D\left(x+1\right)^2dxdy$

（21）（本题满分 11 分）

设$y(x)$是区间$(0,\dfrac{3}{2})$内的可导函数，且$y(1)=0$，点P是曲线$L:y=y(x)$上的任意一点，L在点P处的切线与y轴相交于点$(0,Y_P)$，法线与x轴相交于点$(X_P,0)$，若$X_p=Y_P$，求L上点的坐标(x,y)满足的方程。

（22）（本题满分 11 分）

三阶行列式$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1）证明$r(A)=2$

（2）如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$求方程组$Ax=b$ 的通解

（23）（本题满分 11 分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$x=Qy$下的标准型为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$求$a$的值及一个正交矩阵$Q$.