2020年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三)试题及解析

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分．下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$ ，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ (　)

(A). $b\sin a$

(B). $b\cos a$

(C). $b\sin f(a)$

(D). $b\cos f(a)$

【答案】B

【解析】

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{f(x)-a}\cdot\frac{f(x)-a}{x-a}=\cos f(x)\big|_{x=a}\cdot b=b\cos f(a)$$

设 $f(x)=u$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{f(x)-a}=\lim\limits_{u\to f(a)}\dfrac{\sin u-\sin a}{u-a}=\cos u\big|_{u=f(a)}=\cos f(a)$

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{f(x)-a}\cdot\dfrac{f(x)-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{f(x)-a}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}$

$=b\cos a$

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$，则第二类间断点个数为（ ）

(A). 1

(B). 2

(C). 3

(D). 4

【答案】C

【解析】本题考查的是第一类间断点与第二类间断点的定义，判断间断点及类型的一般步骤为：

1. 找出无定义的点（无意义的点）；2. 求该点的左右极限；3. 按照间断点的定义判定。

第二类间断点的定义为 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 至少有一个不存在，很显然 $f(x)$ 不存在的点为 $x=-1, x=0, x=1, x=2$ 。

在 $x=-1$ 处， $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$；

在 $x=0$ 处， $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\dfrac{1}{2e}$；

在 $x=1$ 处， $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$ ， $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$， $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$， $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$；

在 $x=2$ 处， $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$， $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$；

所以，第二类间断点为 3 个。

(3) 对奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数，则(　)

(A). $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)]dt$ 是奇函数

(B). $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)]dt$ 是偶函数

(C). $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)]dt$ 是奇函数

(D). $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)]dt$ 是偶函数

【答案】：A

【解析】 $f(x)$ 为奇函数，则其导数 $f'(x)$ 为偶函数，又 $\cos x$ 为偶函数，则 $\cos f(x) = \cos f(-x)$ ，则 $\cos f(x)$ 为偶函数，故 $\cos f(x) + f'(x)$ 为偶函数，以 0 为下限、被

积函数为偶函数的变限积分函数为奇函数。所以，本题选 A；对于 C 和 D 选项，$f'(x)$ 为偶函数，则 $\cos f'(x)=\cos f'(-x)$ 为偶函数，$f(x)$ 为奇函数，则 $\cos f'(x)+f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

(4). 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

(A). (-2, 6)

(B). (-3, 1)

(C). (-5, 3)

(D). (-17, 15)

【答案】B

【解析】由比值法可知，幂级数收敛时，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x+1)^{2n+2}}{a_n(x+1)^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|(x+1)^2<1$

则要求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^{2n}$ 的收敛区间，只需要求出 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 的值即可，

而条件告诉我们幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$，即收敛半径为 4

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}$$

则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|(x+1)^{2n}=\frac{1}{4}(x+1)^2<1$，即 $-3<x<1$

所以本题选 B。

(5) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　　）

（A）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　（B）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

（C）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　（D）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

【答案】（C）

【解析】$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可逆知，$|\boldsymbol{A}|=0$及$r(\boldsymbol{A})<4$；由$A_{12}\neq 0$知$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关（无关组的延长组仍无关），故$r(\boldsymbol{A})=3$及$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，故$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有 3 个向量。由$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$知，$\boldsymbol{A}$的列向量均为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，故通解为$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$。

(6)设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的特征值1对应的两个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{A}$的特征值$-1$的特征向量。若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{P}$可为（　　）

（A）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$　　（B）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

（C）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　（D）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

【答案】（D）

【解析】因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的特征值1对应的两个线性无关的特征向量，故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2$仍为特征值1的两个线性无关的特征向量；因为$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{A}$的特征值$-1$的特征向量，故$-\boldsymbol{\alpha}_3$仍为特征值$-1$的特征向量，因为特征向量与特征值的排序一一对应，故只需$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$，就有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(7)　$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则$A,B,C$恰好发生一个的概率为（　　）

(A). $\frac{3}{4}$

(B). $\frac{2}{3}$

(C)．$\frac{1}{2}$

(D). $\frac{5}{12}$

【答案】（D）

【解析】

$$
\begin{aligned}
&P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)\\
&=P(A\cap\overline{B\cup C})+P(B\cap\overline{A\cup C})+P(C\cap\overline{A\cup B})\\
&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)+P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)\\
&+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)
\end{aligned}
$$

又 $ABC\subset AB$， $P(ABC)\le P(AB)=0$

原式 $=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

（8）. 若二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是（　　　）

(A). $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$

(B). $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$

(C). $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$

(D). $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

【答案】（C）

【解析】

由二维正态分布可知 $X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(0,4)$， $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

$D(X+Y)=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3$，

所以 $X+Y\sim N(0,3)$， $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1)$

又 $\operatorname{cov}(X,X+Y)=\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y)=DX+\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=0$

所以 X 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ 独立

二、填空题：9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) $z=\arctan\left(xy+\sin(x+y)\right)$，则 $dz\big|_{(0,\pi)}=$________.

【答案】$dz\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y+\cos(x+y)}{1+\left(xy+\sin(x+y)\right)^2},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x+\cos(x+y)}{1+\left(xy+\sin(x+y)\right)^2}$，将 $x=0,y=\pi$ 带入可知，$dz\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

(10) 已知曲线满足 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$，求曲线在点 $(0,-1)$ 处的切线方程

【答案】$y=x-1$

【解析】在 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 两侧同时对 x 求导有 $1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{2xy}(2y+2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0$，将 $x=0,y=-1$ 带入可知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$，所以切线方程为 $y=x-1$

(11) 设产量为 Q，单价为 P，厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$，需求函数为 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$，求厂商取得最大利润时的产量

【答案】$Q=8$

【解析】由 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$ 可知 $P=\dfrac{800}{Q+2}-3$，则利润函数为

$L(Q)=\left(\dfrac{800}{Q+2}-3\right)Q-(100+13Q)$，$\dfrac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=\dfrac{1600}{(Q+2)^2}-16$，令 $\dfrac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=0$ 可得，$Q=8$，此时 $\dfrac{\mathrm{d}^2L(Q)}{\mathrm{d}Q^2}=-\dfrac{3200}{(Q+2)^3}<0$，故取得最大利润

(12) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$，则求 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积

【答案】$\pi(\ln 2-\dfrac{1}{3})$

【解析】由题意列式得 $V=\int_0^1 2\pi x\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\pi(\ln 2-\dfrac{1}{3})$

(13) 行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$

【答案】$a^2(a^2-4)$.

【解析】

原式$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2(a^2-4).$

(14) 随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots, Y$ 为 X 被 3 除的余数，则 $EY=$_______

解析

$$P\{Y=0\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=3n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{1}{7}$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=3n+1\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{8^n}=\frac{4}{7}$$

$$P\{Y=2\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=3n+2\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{1}{8^n}=\frac{2}{7}$$

$$\therefore EY=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）设 a,b 为常数，且当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 为等价无穷小，求 a,b 的值.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{\frac{b}{n^a}}=\dfrac{1}{b}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-e}{\frac{1}{n^a}}=\dfrac{e}{b}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1}{\frac{1}{n^a}}$

$$=\frac{e}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n^a}}=\frac{e}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^a}} \qquad ①,$$

由于$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sim-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ $(n\to\infty)$，则$a=1$，且①式$=\frac{-\frac{1}{2}e}{b}=1$，得$b=-\frac{1}{2}e$.

(16) (本题满分 10 分) 求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

【解析】$\begin{cases}f_x'(x,y)=3x^2-y=0\\f_y'(x,y)=24y^2-x=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\y=\frac{1}{12}\end{cases}$.

且$A=f''_{xx}(x,y)=6x$，$B=f''_{xy}(x,y)=-1$，$C=f''_{yy}(x,y)=48y$.

讨论：①对于$(0,0)$，求得$A=0$, $B=-1$, $C=0$，因$AC-B^2<0$，则$(0,0)$不为极值点；

②对于$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$，求得$A=1$, $B=-$, $C=4$，因$AC-B^2>0$且$A>0$，则$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$为极小值点，且极小值为$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数$y=f(x)$满足$y''+2y'+5y=0$，且有$f(0)=1$, $f'(0)=-1$.

（Ⅰ）求$f(x)$；（Ⅱ）设$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)dx$，求$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

【解析】（Ⅰ）由$y''+2y'+5y=0$得$\lambda^2+2\lambda+5=0$，解得$\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$，

则$f(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，又由$f(0)=1$, $f'(0)=-1$得$C_1=1, C_2=0$，

则$f(x)=e^{-x}\cos 2x$.

（Ⅱ）

$$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}e^{-x}\cos 2x dx=\left.\frac{\begin{vmatrix}-e^{-x} & -2\sin 2x\\ e^{-x} & \cos 2x\end{vmatrix}}{1+4}\right|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{1}{5}\left(-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x\right)\Big|_{n\pi}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{5}e^{-x}(-\cos 2x+2\sin 2x)\Big|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{1}{5}e^{-n\pi},$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi}=\frac{1}{5}\frac{1}{e^{\pi}-1}$.

(18)(本题满分 10 分) 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$，$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，

计算$\iint\limits_D xf(x,y)dxdy$.

【解析】设$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=A$，则$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$，

两边同取积分得$A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}dxdy+\iint\limits_D Axdxdy$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1-x^2}dxdy=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy$$

$$=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+\dfrac{3\pi}{16}x$， $\iint\limits_D xf(x,y)dxdy=\iint\limits_D x\left(y\sqrt{1-x^2}+\dfrac{3\pi}{16}x\right)dxdy$

$$=\frac{3\pi}{16}\iint\limits_D x^2dxdy=\frac{3\pi}{16}2\iint\limits_{D_1} x^2dxdy=\frac{3\pi}{16}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{3\pi}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2rdr=\frac{3\pi}{16}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}.$$

(19)（本题满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数. $f(0)=f(2)=0$ ，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

证:(1)存在 $\xi\in(0,2)$ 使 $|f'(\xi)|\geq M$

(2)若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leq M$, 则 $M=0$.

证明:(1) $M=0$ 时, 则 $f(x)=0$, 显然成立.

$M>0$ 时, 不妨设在点 $c(\in(0,2))$ 处取得最大值 $|f(c)|=M$.

由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi_1\in(0,c)$, 使得 $|f'(\xi_1)|=\left|\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}\right|=\dfrac{M}{c}$;

存在 $\xi_2\in(c,2)$, 使得 $|f'(\xi_2)|=\left|\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}\right|=\dfrac{M}{2-c}$;

所以 $(\dfrac{M}{c}-M)(\dfrac{M}{2-c}-M)=-M^2\dfrac{(c-1)^2}{c(2-c)}\leq 0$, 即 M 介于 $\dfrac{M}{c}$ 与 $\dfrac{M}{2-c}$ 之间, 从而有

$$|f'(\xi_1)|\geq M \text{ 或 } f'(\xi_2)|\geq M,$$

结论得证.

（Ⅱ）当 $c\neq 1$时, 采用反证法, 假设 $M>0$.

则 $|f'(\xi_1)|>M$ 或 $|f'(\xi_2)|>M$, 与已知矛盾, 假设不成立.

当 $c=1$时, 此时 $|f(1)|=M$, 易知 $f'(1)=0$.

设 $G(x)=f(x)-Mx$，$0\leq x\leq 1$；则有 $G'(x)=f'(x)-M\leq 0$，从而 $G(x)$ 单调递减.

又 $G(0)=G(1)=0$，从而 $G(x)=0$，即 $f(x)=Mx$，$0\leq x\leq 1$.

因此 $f'_-(1)=M$，从而 $M=0$.

综上所述, 最终 $M=0$

(20)（本题满分 11 分）二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，$a\geq b$。求：

（I）a,b 的值；

（II）正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$

【答案】（I）$a=4,b=1$；（II）$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

【解析】（I）记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$，故 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},g=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$。

因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，故 $f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵。

所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，故特征值相同，故 $\begin{cases}tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B})\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$ 知，$\begin{cases}a+b=5\\ ab-4=0\end{cases}$，故 $a=4,b=1$。

（II）由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2=0,tr(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2=5$，知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=5,\lambda_2=0$。

解齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 及 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求特征向量并直接单位化，

对 $\lambda_1=5$，由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$；

对 $\lambda_2=0$，由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$；

同理，$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_1=5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_2=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

记 $\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{Q}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$，就有

$$\boldsymbol{Q}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2{}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q_2}\boldsymbol{Q}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2{}^T$， 只需令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2{}^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$， 二次型 $f(x_1,x_2)$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $g(y_1,y_2)$。

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵， $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$， $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

（I）证明矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆;

（II）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵。

【解析】（I）设 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$

① 若 $k_2=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $k_1=0$；

② 若 $k_2\neq0$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-\frac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $-\frac{k_1}{k_2}$ 的特征向量，与已知条件产生矛盾。

所以， $k_1=k_2=0$，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，故矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆。

（II）因为 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，所以，

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，因此，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，由 $\boldsymbol{P}$ 可逆知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$。

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-6\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$ 知，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$，

因为特征值互不相同，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}$。

(22)(本题满分 11 分)

二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)0<y<\sqrt{1-x^2}\right\}$ 上服从均匀分布，且

$Z_1=\begin{cases}1,X-Y>0\\0,X-Y\le 0\end{cases},Z_2=\begin{cases}1,X+Y>0\\0,X+Y\le 0\end{cases}$

求（1）二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布；（2）求 Z_1,Z_2 的相关系数.

【解析】

（1）由题意 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},(x,y)\in D\\0,(x,y)\notin D\end{cases}$，所以可计算

$P(Z_1=0,Z_2=0)=P(X-Y\le 0,X+Y\le 0)=\dfrac{1}{4}$

$P(Z_1=0,Z_2=1)=P(X-Y\le 0,X+Y>0)=\dfrac{1}{2}$

$P(Z_1=1,Z_2=0)=P(X-Y>0,X+Y\le 0)=0$

$P(Z_1=1,Z_2=1)=P(X-Y>0,X+Y>0)=\dfrac{1}{4}$

可得

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

Z_1 \ Z_2	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

（2）由（1）可计算$E(Z_1)=\frac{1}{4}$，$E(Z_2)=\frac{3}{4}$，$D(Z_1)=\frac{3}{16}$，$D(Z_2)=\frac{3}{16}$，$E(Z_1Z_2)=\frac{1}{4}$

所以可得$\rho=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{E(Z_1Z_2)-EZ_1\cdot EZ_2}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{1}{3}$

(23)(本题满分 11 分)

设某元件的使用寿命T的分布函数为

$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},t\geq 0\\ 0,t<0\end{cases}$，其中$\theta,m$为参数且均大于零.

（1）计算概率$P\{T>t\}$与$P(T>s+t|T>s)$；

（2）任取n个元件试验，其寿命分别为$t_1,t_2,...,t_n$，若m已知，求θ得最大似然估计$\hat{\theta}$.

【解析】

（1）$P(T>t)=1-P(T\leq t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$$P(T>s+t|T>s)=\frac{P(T>s+t)}{P(T>s)}=\frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}}$$

（2）由题意可得概率密度函数为$f(t)=F'(t)=\begin{cases}\frac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},t>0\\ 0,t\leq 0\end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\dfrac{m^n\prod_{i=1}^{n}t_i^{m-1}}{\theta^{mn}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m},t_i>0,i=1,2,\ldots,n$

取对数有 $\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-mn\ln\theta-\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{t_i}{\theta}\right)^m$

求导并令导数等于零， $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+\dfrac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$

解得 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$.