2020年全国硕士研究生招生考试数学一试题

一、选择题：1~8题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

（1）当$x\to 0^+$时，下列无穷小量中最高阶的是　（　）

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$　C. $\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$　D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt$

（2）设函数$f(x)$在区间$(-1,1)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,则　（　）

A.当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$时，$f(x)$在$x=0$处可导　B.当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$时，$f(x)$在$x=0$处可导

C.当$f(x)$在$x=0$处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$　D.当$f(x)$在$x=0$处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

（3）设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，$f(0,0)=0,\vec{n}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$,非零向量$\vec{\alpha}$与$\vec{n}$垂直，则（　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$存在　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$存在　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$存在

（4）设R为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，$r$是实数，则　（　）

A.当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$发散时,$|r|\ge R$　B.当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$发散时,$|r|\le R$

C.当$|r|\ge R$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$发散　D.当$|r|\le R$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$收敛

（5）若矩阵A经初等列变换化成B，则　（　）

A.存在矩阵P，使得$PA=B$　B.存在矩阵P，使得$BP=A$

C.存在矩阵P，使得$PB=A$　D.方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解

（6）已知直线$l_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$与直线$l_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$相交于一点，记向量

$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix},i=1,2,3,$则　（　）

A. α_1可由α_2,α_3线性表示　B. α_2可由α_1,α_3线性表示

C. α_3可由α_1,α_2线性表示　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为　　（　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

（8）设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}$ 的近似值为　　（　）

A. $1-\Phi(1)$　　B. $\Phi(1)$　　C. $1-\Phi(0.2)$　　D. $\Phi(0.2)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在横线上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$________.

（10）设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

（11）若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，且 $f(0)=m,f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=$______.

（12）设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

（13）行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

（14）设 X 服从区间 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

（16）（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$, 其中 I 是 $x^2+y^2=2$, 方向为逆时针方向.

（17）（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$, 证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

（18）（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\left(1\le x^2+y^2\le 4\right)$ 的下侧， $f(x)$ 是连续函数，计算

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]dydz+\left[yf(xy)+2y+x\right]dzdx+\left[zf(xy)+z\right]dxdy.$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{[0,2]}|f(x)|$, 证明

（Ⅰ）$\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\ge M$;

（Ⅱ）若对任意的 $x\in(0,2), |f'(x)|\le M$, 则 $M=0$.

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\ge b$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求正交矩阵 Q.

（21）（本题满分 11 分）

设 A 为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（Ⅰ）证明 P 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，其中 X_1与X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2.$$

（Ⅰ）求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

（Ⅱ）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率$P\{T > t\}$与$P\{T > s + t | T > s\}$,其中$s > 0, t > 0$;

（Ⅱ）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1, t_2, \cdots, t_n$,若m已知，求θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.