2020 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、　选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）当 $x \to 0^+$，下列无穷小量中最高阶的是

（A）$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　　（B）$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$

（C）$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$．　　（D）$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}dt$

【答案】（D）．

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（）

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$

【答案】（C）．

（3）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，$f(0,0)=0$，$n=\left(f_x^{'},f_y^{'},-1\right)\Big|_{(0,0)}$，非 0 向量 $\alpha \perp n$，则（）

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|n\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　　（B）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|n\times x(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\alpha\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\alpha\times x(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

【答案】（A）．

（4）R 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，r 为实数，则（）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 发散，则$|r|\geq R$

（B）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 收敛，则$|r|\leq R$

（C）$|r|\geq R$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 发散

（D）$|r|\leq R$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 收敛

【答案】（A）.

（5）若矩阵A由初等列变换为矩阵B，则（）

（A）存在矩阵P，使$PA=B$；

（B）存在矩阵P，使$BP=A$；

（C）存在矩阵P，使$PB=A$；

（D）方程组$AX=0$与$BX=0$同解；

【答案】（B）.

（6）已知 $l_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$，$l_2:\dfrac{x-a_3}{a_3}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点，令 $\alpha_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，则（）

（A）α_1可由α_2，α_3线性表示

（B）α_2可由α_1，α_3线性表示

（C）α_3可由α_1，α_2线性表示

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

【答案】（C）.

（7）$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则$A,B,C$恰好发生一个的概率为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{5}{12}$

【答案】（D）.

（8）设为$x_1,x_2,...,x_{100}$来自总体X的简单随机样本，其中$P\{x=0\}=P\{x=1\}=\dfrac{1}{2}$，$\Phi(x)$表示标准正态分布函

数，则由中心极限定理可知，$P\{\sum_{i=1}^{100} x \le 55\}$ 的近似值为（　）

（A）$1-\Phi(1)$　（B）$\Phi(1)$　（C）$1-\Phi(0.2)$　（D）$\Phi(0.2)$

【答案】（B）.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ ____________.

【答案】-1

（10）设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$,则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ____________.

【答案】$-\sqrt{2}$

（11）设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0 \quad (a>0)$，且 $f(0)=m$，$f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx=$ ____________.

【答案】$am+n$

（12）设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{xt^2}dt$,则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$ ____________.

【答案】4e

（13）行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$ ____________.

【答案】a^4-4a^2.

（14）已知随机变量 X 服从区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布,$Y=\sin X$,则 $Cov(X,Y)=$ ____________.

【答案】$\dfrac{2}{\pi}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

（15）（本题满分 10 分）

求函数$f\left(x,y\right)=x^3+8y^3-xy$的极值.

【详解】 $\begin{array}{l} f_x'=3x^2-y=0 \\ f_y'=24y^2-x=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$

又 $\begin{cases} f_{xx}''=6x \\ f_{xy}''=-1 \\ f_{yy}''=48y \end{cases}$ 当 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 时 $\begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$,.

$AC-B^2=-1<0$，不为极值点

当 $\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$ 时 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=4 \end{cases}$， $\begin{cases} AC-B^2=3>0 \\ A=1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$，为极小值点

极小值为 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$

（16）（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$,其中L为$x^2+y^2=2$,方向为逆时针方向.

【详解】补曲线$L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针方向

$$I-\int_{L_1} Pdx+Qdy=\iint_{\Sigma-\Sigma_1} \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4x^2+y^2-(x+y)8x}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)-2y(4x-y)}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$I=\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)dx+(x+y)dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_1}[1-(-1)]dxdy$$
$$=\pi$$

（17）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$.证明:当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛并求其和函数.

【详解】（I）$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1$

则$R=\frac{1}{\rho}=1$，所以当$|x|<1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛.

（II）令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+a_1$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n+1=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+1$$
$$=xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)+1$$

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}[2+S(x)]$$
$$\int\frac{dS(x)}{2+S(x)}=\int\frac{dx}{2(1-x)}$$
$$\ln|2+S(x)|=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\ln C_1$$
$$2+S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}$$

因为$S(0)=0$，所以和函数：$S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,\quad(-1<x<1)$.

（18）（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 下侧，$f(x)$ 为连续函数．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]dydz+\left[yf(xy)+2y+x\right]dzdx+\left[zf(xy)+z\right]dxdy$．

【详解】将曲面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ **向** xoy **面投影得** D_{xy}

D_{xy} 为 $1\le x^2+y^2\le 4$，又 $Z_x^{'}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},Z_y^{'}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[xf(xy)+2x-y](-Z_x^{'})+[yf(xy)+2y+x](-Z_y^{'})+[\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}]\}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{\frac{1}{x^2+y^2}[-xf(xy)-2x^2+xy-y^2f(xy)-2y^2-xy]+\sqrt{x^2+y^2}[f(xy)+1]\}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}-\sqrt{x^2+y^2}f(xy)-2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r\cdot rdr$$

$$=\frac{14}{3}\pi$$

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数. $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

证:(1)存在 $\xi\in(0,2)$ 使 $|f'(\xi)|\ge M$

(2)若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\le M$,则 $M=0$.

【详解】（Ⅰ）证明: (1) $M=0$ 时, 则 $f(x)=0$, 显然成立.

$M>0$ 时, 不妨设在点 $c(\in(0,2))$ 处取得最大值 $|f(c)|=M$.

由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi_1\in(0,c)$, 使得 $|f'(\xi_1)|=\left|\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}\right|=\dfrac{M}{c}$;

存在 $\xi_2\in(c,2)$, 使得 $|f'(\xi_2)|=\left|\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}\right|=\dfrac{M}{2-c}$;

所以 $(\frac{M}{c}-M)(\frac{M}{2-c}-M)=-M^2\frac{(c-1)^2}{c(2-c)} \quad 0$,即 M 介于 $\frac{M}{c}$ 与 $\frac{M}{2-c}$ 之间, 从而有

$$|f'(\xi_1)| \quad M \text{ 或 } f'(\xi_2)| \quad M,$$

结论得证.

（Ⅱ）当 $c\neq 1$ 时, 采用反证法, 假设 $M>0$.

则 $|f'(\xi_1)|>M$ 或 $|f'(\xi_2)|>M$, 与已知矛盾, 假设不成立.

当 $c=1$ 时, 此时 $|f(1)|=M$, 易知 $f'(1)=0$.

设 $G(x)=f(x)-Mx$, $0 \quad x \quad 1$; 则有 $G'(x)=f'(x)-M \quad 0$, 从而 $G(x)$ 单调递减.

又 $G(0)=G(1)=0$, 从而 $G(x)=0$, 即 $f(x)=Mx$, $0 \quad x \quad 1$.

因此 $f'_-(1)=M$, 从而 $M=0$.

综上所述, 最终 $M=0$

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2\right)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变化 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g\left(y_1,y_2\right)=ay_1^2+4x_1x_2+6y_2^2$,其中 $a\geq b$.

(1) 求 a,b 的值

(2) 求正交变换矩阵 Q

【详解】（I）设 $f=x^TAx$ ，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 4\end{pmatrix}$ ，经正交变换 $x=Qy$ ，

$f=y^TQ^TAQy=y^TBy$ ，其中 $B=\begin{pmatrix}a & 2\\2 & b\end{pmatrix}$;

可知 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=B$, 即 A 相似于 B , 则

$\begin{cases}tr\left(A\right)=tr\left(B\right)\\ \quad |A|=|B|\end{cases}$ 解得 $a=4,b=1$ ；

（II）设 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda,P_2^{-1}BP_2=\Lambda$, 则 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A\left(P_1P_2^{-1}\right)=B$, 因此 $Q=P_1P_2^{-1}$ ；

由 $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=0$，解出 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$；

$\left(0E-A\right)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $\xi_1=\left(2,1\right)^T$；

$\left(5E-A\right)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $\xi_2=\left(1,-2\right)^T$； $P_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$；

$\left(0E-B\right)=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $\eta_1=\left(1,-2\right)^T$；

$\left(5E-B\right)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $\eta_2=\left(2,1\right)^T$； $P_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$；

综上所述，$Q=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

（21）（本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P=\left(\alpha,A\alpha\right)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵.

(2)若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【详解】（I） **α 不是特征向量且 $\alpha\neq0$，则 $A\alpha\neq k\alpha$，即 $A\alpha,\alpha$ 线性无关，**

所以 $r(P)=2$，矩阵 P 可逆.

（II）设 $P^{-1}AP=B$，则 $AP=PB$，即

$$A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,6\alpha-A\alpha)$$

$$=(\alpha,A\alpha)\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

所以 $P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $A\quad B$，

$$\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=-3,\lambda_2=2$，因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 B 可以相似对角化，则 A 可以相似对角化.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$。

（1） 求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示；

（2） 证明随机变量 Y 服从标准正态分布。

【详解】（I）

$$
\begin{aligned}
&F(x,y)=P\{X_1\le x,Y\le y\}\\
&=\frac{1}{2}P\{X_1\le x,X_2\le y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\le x,X_1\le y\}\\
&=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})\\
&=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(x)\left[1+\Phi(y)\right],x\le y\\ \frac{1}{2}\Phi(y)\left[1+\Phi(x)\right],x>y\end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) $F_Y(y)=F_{X_1,Y}(+\infty,y)=\frac{1}{2}\Phi(y)\left[1+\Phi(+\infty)\right]=\Phi(y)$，

故 Y 服从标准正态分布.

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-(\frac{t}{\theta})^m},t\ge 0\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$，其中 θ，m 为参数且大于零。

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\dots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 θ。

【详解】（I） $P\{T>t\}=1-P\{T\le t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$，

$$P\left\{T>t+s \mid T>s\right\}=\frac{P\left\{T>t+s, T>s\right\}}{P\left\{T>s\right\}}=\frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^{m}}}=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^{m}-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^{m}}$$

；

（II）求得密度函数 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^{m}}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{m}}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$，

故可构造似然函数为 $L(\theta)=m^{n}\left(t_{1}t_{2}\quad t_{n}\right)^{m-1}\theta^{-mn}e^{-\frac{1}{\theta^{m}}\sum_{i=1}^{n}t_{i}^{m}}$，

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)\ln\left(t_{1}t_{2}\quad t_{n}\right)-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^{m}}\sum_{i=1}^{n}t_{i}^{m}$

求导可得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\frac{1}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_{i}^{m}=0$，

解出 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_{i}^{m}}$.