1989 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 以知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\underline{-1}$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=\underline{x-1}$.

(3) 设平面曲线 L 为下半圆 Y=－$\sqrt{1-x^2}$ ，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)=\underline{\pi}$

(4) 向量场 $\vec{u}(x,y,z)=xy^2\vec{i}+ye^z\vec{j}+x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 p(1,1,0)处的散度 $div\vec{u}=\underline{2}$

(5) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\4&0&3\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$则逆矩阵$(A-2I)^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线；　　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线；　　(D) 既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

(2) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是

(A) (1,-1,2)　　(B)(-1,1,2)　　(C)(1,1,2)　　(D)(-1,-1,2)　　(C)

(3) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，c_1,c_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$　　(B) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1+c_2)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$　　(D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$　　(D)

(4) 设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1,s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}bn\sin n\pi x,,-\infty<x<+\infty$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx,(n=1,2,\cdots)$，.则 $s(-\dfrac{1}{2})$)等于

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$　　(B)

(5) 设 A 是 4 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中

(A) 必有一列元素全为 0；

(B) 必有两列元素对应成比例；

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合；

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.　　(C)

三、（本题满分 15 分，每小题 5 分）

(1) 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_u+yg_v$,　　……2 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{uv}+xyg_{vv}+g_v$.　　…5 分

(2) 设曲线积分 $\int_0 xy^2dx+y\alpha(x)dy$ 与路径无关，其中 $\alpha(x)$ 具有连续的导数，且 $\alpha(0)$ =0.计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\alpha(x)dy$ 的值.

解： 由 $P(x,y)=xy^2, Q(x,y)=y\varphi(x), \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,　　……1 分

得 $2xy=y\varphi'(x),\quad \varphi(x)=x^2+C$. 再由 $\varphi(0)=0$得C=0，故 $\varphi(x)=x^2$.　　……3 分

所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+x^2ydy$.

沿直线 $y=x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 积分，得 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 2x^3dx=\dfrac{1}{2}$　……5 分

(3) 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x+z)dy$，其中是 Ω 由曲面 z=$\sqrt{x^2+y^2}$ 与 z=$\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

解： 利用球面坐标计算 $\iiint_\Omega xdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\sin\varphi\cos\theta\cdot r^2\sin\varphi dr$　　……1 分

$$=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}]d\varphi\cdot\frac{1}{4}=0.\qquad ……2\text{ 分}$$

$\iiint_\Omega zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\sin^2\varphi d\varphi\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{8}$.　　……4 分

所以 $\iiint_{\Omega}(x+z)dv=\dfrac{\pi}{8}$. ……5 分

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=arctg\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

解: 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $(-1<x<1)$ ……2 分

得 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$.

而 $f(0)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$, ……5 分

所以 $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $(-1\le x<1)$. ……6 分

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

解: $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$, $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$, $f''(x)=-\sin x-f(x)$.

即 $f''(x)+f(x)=-\sin x$, ……2 分

这是二阶常系数非齐次线性微分方程,初始条件为 $y|_{x=0}=f(0)=0, y'|_{x=0}=f'(0)=1$. ……3 分

其对应齐次方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. ……4 分

设非齐次方程的特解 $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$,可得 $a=0, b=\dfrac{1}{2}$;于是 $y^*=\dfrac{x}{2}\cos x$. ……5 分

因此非齐次方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{x}{2}\cos x$. ……6 分

又由初始条件定出 $C_1=\dfrac{1}{2}, C_2=0$,从而 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$. ……7 分

六、(本题满分 7 分)

证明方程 lnx=$\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}$ dx 在区间(0,+∞)内有且仅有两个不同实根.

解: $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2\sqrt{2}$. ……2 分

记 $F(x)=\dfrac{x}{e}-\ln x-2\sqrt{2}$,则 $F'(x)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}$, $F'(e)=0$.

因当 $0<x<e$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 递减;当 $e<x<+\infty$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 递增;

故 $F(x)$ 在区间 $(0,e)$和$(e,+\infty)$ 内分别至多一个零点. ……5 分

又 $F(e)=-2\sqrt{2}<0$，$F(e^{-3})>0, F(e^{4})>0$.由零点定理，$F(x)$ 在区间 (e^{-3},e)和$(e,\ e^{4})$ 内分别有一个零点.故方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个实根.……7 分

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时，线性方程组 $f(x)=\begin{cases} x_1+\qquad\quad x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式.

解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & -4\lambda+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{pmatrix}$$ ……3 分

当 $-\lambda+1=0$，即 $\lambda=1$ 时，方程组有解. ……4 分

这时方程组为 $\begin{cases} x_1+x_3=1 \\ 4x_1+x_2+2x_3=3 \\ 6x_1+x_2+4x_3=5 \end{cases}$，而 $\begin{cases} x_1+x_3=1 \\ x_2-2x_3=-1 \end{cases}$ 为其同解方程组. ……5 分

解之得 $\begin{cases} x_1=1-x_3 \\ x_2=-1+2x_3 \end{cases}$.其中 x_3 取任意常数. ……6 分

八、(本题满分 7 分)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，证明：

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A-1 的特征值；

(2) —$\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A*的特征值.

证：(**1**) 由条件知有非零向量 ξ 满足 $\mathbf{A}\xi=\lambda\xi$ ……2 分

两端左乘以 $\mathbf{A}^{-1}$，得 $\xi=\lambda\mathbf{A}^{-1}\xi$. ……3 分

因 ξ 为非零向量，故 $\lambda\neq 0$，于是有 $\mathbf{A}^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$，所以 $\frac{1}{\lambda}$ 为 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值. ……4 分

(**2**) 由于 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}$， ……5 分

故前一式又可写为 $\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$， ……7 分

从而有 $\mathbf{A}^*\xi=\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}\xi$，所以 $\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ 为 $\mathbf{A}^*$ 的特征值. ……8 分

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的圆面 $\sum$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,(a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 $\sum$ 在定球面内部的那部分的面积最大?

解：设球面 Σ 的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$.

两球面的交线在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R)^2 \\ z=0 \end{cases}$. ……2 分

记投影曲线所围平面区域为 D_{xy}.球面 Σ 在定球面内的部分的方程为 $z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，

这部分球面的面积 $S(R)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$ ……4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.$$ ……6 分

令 $S'(R)=4\pi R-\dfrac{3\pi R^2}{a}=0$，得驻点 $R_1=0(\text{舍去}),R_2=\dfrac{4a}{3}$， ……8 分

由于 $S''(\dfrac{4a}{3})=-4\pi<0$.故当 $R=\dfrac{4a}{3}$ 时，球面 Σ 在定球面内的部分的面积最大. ……9 分

十、填空题(本题满分 6 分，每小题 2 分)

(1) 已知随机事件 A 的概率 P(A)=0.5,随机事件 B 的概率 P(B)=0.6 及条件概率 P(B|A)=0.8，则和事件 A∪B 的概率 P(A∪B)=<u>0.7</u>

(2) 甲，乙两人独立的对同一目标射击一次.其命中率分别为 0.6 和 0.5.先已知目标被命中，则它是甲射中的概率是 <u>0.75</u>

(3) 若随机变量 ξ 在(1，6)上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是 <u>0.8.</u>

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1，标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布，试求随机变量 Z=2X-Y+3 的概率密度函数

解：因相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，故只需确定 Z 的均值 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$. ……1 分

由于 $E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5$， ……3 分

$D(Z)=2^2D(X)+D(Y)=9$. ……5 分

所以 Z 的概率密度函数为 $f_z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$. ……6 分

数 学（试卷二）

一、填空题 【 同数学一 第一题 】

二、选择题 【 同数学一 第二题 】

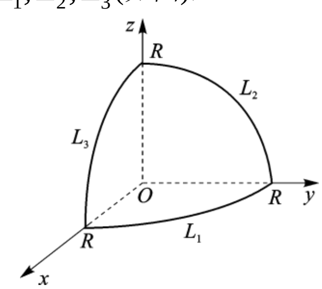
三、【 同数学一 第三题 】

四、(本题满分 18 分，每小题 6 分)

(1) 【 同数学一第四（1）题 】

(2) 求八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界曲线的重心，设曲线的线密度 $\rho=1$.

解： 设曲线在 XOY，YOZ，ZOX 坐标平面内的弧段分别为 $\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3$(如图)，



则曲线质量为 $m=\int_{\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3} ds = 3\times\dfrac{2\pi R}{4}=\dfrac{3}{2}\pi R.$ ……2 分

记曲线重心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_{\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3} xds \qquad \text{……3 分}$$

$$=\frac{1}{m}\left(\int_{\mathrm{L}_1} xds+\int_{\mathrm{L}_2} xds+\int_{\mathrm{L}_3} xds\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\int_{\mathrm{L}_1} xds+0+\int_{\mathrm{L}_3} xds\right)=\frac{2}{m}\int_{\mathrm{L}_1} xds=\frac{2}{m}\int_0^R \frac{Rx}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{2R^2}{m}=\frac{4R}{3\pi}. \qquad \text{……5 分}$$

由对称性知 $\bar{y}=\bar{z}=\bar{x}=\dfrac{4R}{3\pi}$，即所求重心为 $\left(\dfrac{4R}{3\pi},\dfrac{4R}{3\pi},\dfrac{4R}{3\pi}\right)$. ……6 分

(3) 设空间区域 Ω 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成，其中 a 为正的常数，记 Ω 表面的外侧为 S，Ω 的体积为 V，求证：$\oiint_S x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+z(1+xyz)dxdy=V$.

证： 由高斯公式知原式 $=\iiint_\Omega (1+2xyz)\,dxdydz$ ……2 分

$$=V+2\iiint_\Omega xyzdxdydz. \qquad \text{……4 分}$$

因 Ω 关于 XOZ 坐标平面对称，xyz 是 Ω 上关于 y 的奇函数，故有 $\iiint_\Omega xyzdxdydz=0$.……6 分

所以欲证等式成立.

五、(本题满分 7 分)【 同数学一 第五题 】

六、(本题满分 7 分)【 同数学一 第六题 】

七、(本题满分 6 分)【 同数学一 第七题 】

八、(本题满分 8 分)【 同数学一 第八题 】

九、(本题满分 9 分)【 同数学一 第九题 】

数 学（试卷三）

一、填空题（本题满分 21 分，每小题 3 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,2x = \underline{\ 1/2\ }$.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \underline{\ \pi\ }$.

(3) 曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$ 点 $(0,0)$ 处的切线方程是 $\underline{y=2x}$.

(4) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=\underline{\ n!\ }$

(5) 【 同数学一 第一、(2)题 】

(6) 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{a=b}$.

(7) 设 $\tan y = x+y$，则 $dy=\underline{\cot^2 y dx}$.

二、（本题满分 20 分，每小题 4 分）

(1) 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$，求 y'

解： $y'=\dfrac{(e^{-\sqrt{x}})'}{\sqrt{(1-e^{-2\sqrt{x}})}}=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'}{\sqrt{(1-e^{-2\sqrt{x}})}}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x(1-e^{-2\sqrt{x}})}}$. ……4 分

(2) 求 $\int\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

解： $\int\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=\int\dfrac{d\ln x}{\ln^2 x}$. ……2 分

$=-\dfrac{1}{\ln x}+C$. ……4 分

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解： $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)$ ……2 分

利用罗比塔法则有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}=2$. ……3 分

故 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^2$. ……4 分

(4) 已知$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=arctgt \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$, ……2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$ ……4 分

(5) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=1$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

解： 设$t=2x$，则

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{t^2}{4}f''(t)dt$$ ……1 分

$$=\frac{1}{8}\left[t^2f'(t)\Big|_0^2-2\int_0^2 tf'(t)dt\right]$$ ……2 分

$$=\frac{1}{8}\left[-2\int_0^2 tdf(t)\right]$$ ……3 分

$$=-\frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)dt\right]=-\frac{1}{4}[1-1]=0.$$ ……4 分

三、选择题（本题满分 18 分，每小题 3 分）

(1) 【 同数学一 第二、(1) 题 】

(2) 若$3a^2-5b<0$，则方程$x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ (B)

(A) 无实根 (B) 有唯一实根 (C) 有三个不同实根 (D) 有五个不同实根

(3) 曲线$y=\cos x(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$与$x$轴围成的图形绕$x$轴旋转一周所成的旋转体的体积为

(A) $\pi/2$ (B) π (C) $\pi^2/2$ (D) π^2

(4) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在$x=a$处取得极大值，则函数$F(x)=f(x)g(x)$在$x=a$ (D)

(A) 必取极大值 . (B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值. (D) 是否取极值不能确定.

(5) 微分方程$y''-y=e^x+1$的一个特解应具有形式（式中a,b为常数） (B)

(A) ae^x+b (B) axe^x+b (C) ae^x+bx (D) axe^x+bx

(6) $f(x)$在点$x=a$可导的一个充分条件是 (D)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$存在 (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

四、(本题满分 6 分)

微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}\ (0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的解.

解：由通解公式有 $y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx+C)$ ……2 分

即 $y=\dfrac{Ce^{x}+e^{2x}}{x}$. ……4 分

再由 $y(1)=0$，得 $C=-e$. ……5 分

故所求通解为 $y=\dfrac{e^{x}(e^{x}-e)}{x}$. ……6 分

五、(本题满分 7 分)【 同数学一 第五题 】

六、(本题满分 7 分)【 同数学一 第六题 】

七、(本题满分 11 分)

对函数 y=$\dfrac{x+1}{x^{2}}$，填写下表.

单调减区间	
单调增区间	
极　值　点	
极　　　值	
凹　区　间	
凸　区　间	
拐　　　点	
渐　近　线	

解：

单调减少区间	$(-\infty,-2),\quad(0,+\infty)$	(2 分)
单调增加区间	$(-2,0)$	(3 分)
极值点	-2	(4 分)
极值	$-1/4$	(5 分)
凹区间	$(-3,0),(0,+\infty)$	(7 分)
凸区间	$(-\infty,-3)$	(8 分)
拐点	$(-3,-2/9)$	(9 分)
渐进线	$x=0$和$y=0$	(1 1 分)

八、（本题满分 10 分）

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$，时 $y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成的面积为 $\frac{1}{3}$.试确定 a,b,c 的值，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解：因曲线过原点，故 $c=0$. ……1 分

由题设有 $\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$. ……3 分

又 $V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right)$. ……5 分

将 b 的表达式代入上式得 $V=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right]$. ……6 分

令 $V_a'=\pi\left[\frac{2a}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0$，解得 $a=-\frac{5}{4}$. ……8 分

代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$. ……9 分

因 $V_a''\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，知当 $a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=0$ 时，体积最小. ……10 分

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是 $\underline{y=x+1}$.

(2) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是 $\underline{[-1,1)}$.

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是 $\underline{\lambda\neq 1}$.

(4) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<0\\ A\sin x & 若\ 0\le x\le \pi/2\\ 1 & 若\ x>\pi/2\end{cases}$, 则 A ＝ $\underline{\quad 1\quad}$;

$P\{|x|<\frac{\pi}{6}\}=\underline{\quad 1/2\quad}$.

(5) 设随机变量 X 的数学期望 EX=μ ,方差 DX= σ^2 ，则由切比雪夫(chebyshev)不等式，有 $P\{|X-\mu|\ge 3\sigma\}\le$ $\underline{\quad 1/9\quad}$.

二、选择题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 x→0 时， (B)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

(2) 在下列等式中，正确的结果是 (C)

(A) $\int f'(x)dx=f(x)$ (B) $\int df(x)=f(x)$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ (D) $d\int f(x)dx=f(x)$

(3) 【 同数学一 第二、(5) 题 】

(4) 设 A 和 B 均为 n×n 矩阵，则必有 (C)

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $AB=BA$

(C) $|AB|=|BA|$ (D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

(5) 以 A 表示事件 “甲种产品畅销，乙种产品滞销”， 则其对立事件 $\overline{A}$ 为 (D)

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销” (B)“甲，乙产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”　　　　　　　　(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

解： 设 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$.

原式 $=\lim\limits_{u\to 0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}$. ……1 分

而 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\cos u-\sin u}{\sin u+\cos u}=1$ ……4 分

于是原式＝e. ……5 分

(2) 已知 $z=f(u,v)\ u=x+y,v=xy$，且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$ ……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+y\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}$$ ……4 分

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}.$$ ……5 分

(3) 求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解.

解： 由特征方程为 $r^2+5r+6=(r+2)(r+3)=0$，知特征根为 $-2,-3$. ……1 分

于是对应齐次微分方程的通解为 $\overline{y}(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$. ……2 分

其中 C_1,C_2 为任意常数.设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x)=Ae^{-x}$. ……3 分

将 $y^*(x)$ 代入原方程，可得 $A=1$，故所给非齐次微分方程的特解为 $y^*(x)=e^{-x}$. ……4 分

从而，所给微分方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x}$. ……5 分

四、（本题满分 9 分）

设某厂家打算生产一批商品投放市场，已知该商品的需求函数为

$p=p(x)=10e^{-\frac{x}{2}}$ 且最大需求量为 6，其中 x 表示需求量，p 表示价格.

（**1**）求该商品的边际收益函数；（2 分）

（**2**）求使收益最大时的产量，最大收益和相应价格.（4 分）

（**3**）画出收益函数的图形.（3 分）

解：(1) 收益函数为 $R(x)=px=10xe^{-\frac{x}{2}}$, $0\le x\le 6$; ……1 分

边际收益函数为 $MR=\dfrac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$. ……2 分

(2) 由 $R'=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}=0$，得驻点 $x_0=2$.

由于 $R''|_{x=0}=\dfrac{5}{2}(x-4)e^{\frac{-x}{2}}\Big|_{x=0}=-5e^{-1}<0$. ……4 分

可见 $R(x)$ 在点 $x=2$ 处达到极大值，亦即最大值 $R(2)=10xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_{x=2}=20e^{-1}$.

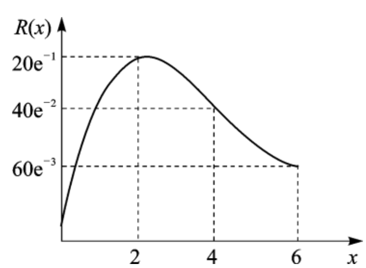
于是当产量为 2 时，收益取最大值 $20e^{-1}$，而相应的价格为 $10e^{-1}$. ……6 分

(3) 由上面的计算结果，易得下表

x	$[0,2]$	2	$[2,4]$	4	$[4,6]$
R'	+	0	−		−
R''	−	−	−	0	+
R	单增，凸	极大值 $\dfrac{20}{e}$	单减，凸	$(4,\dfrac{40}{e^2})$	单减，凹

……9 分

收益函数的图形为



五、（本题满分 9 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & 若0\le x\le 1 \\ 2-x & 若1<x\le 2 \end{cases}$，试计算下列各题：

(1) $S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}dx$，（4 分）； **(2)** $S_1=\int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx$，（2 分）；

(3) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x}dx$ （n=2,3,⋯）（1 分）； **(4)** $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n$.（2 分）

解：(1) $S_0=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}dx$. ……1 分

其中$\int_0^1 xe^{-x}dx = xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = 1-2e^{-1}$， ……2 分

$\int_1^2 (2-x)e^{-x}dx = -(2-x)e^{-x}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{-x}dx = e^{-2}$. ……3 分

从而 $S_0 = 1-2e^{-1}+e^{-2} = (1-e^{-1})^2$. ……4 分

(2) 令 $t = x-2$，则 $S_1 = \int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx = \int_0^2 f(t)e^{-t-2}dt = S_0 e^{-2}$. ……6 分

(3) 令 $t = x-2n$，则 $S_n = \int_0^2 f(t)e^{-t-2n}dt = S_0 e^{-2n}$. ……7 分

(4) $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} S_0 e^{-2n} = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2})^n$ ……8 分

$= \frac{S_0}{1-e^{-2}} = \frac{e-1}{e+1}$. ……9 分

六、（本题满分 6 分）

假设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f'(x) \le 0$，记

$F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，证明在$(a,b)$内 $F'(x) \le 0$.

证： 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，因此

$F'(x) = \frac{1}{x-a}f(x) - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{x-a}\left[f(x) - \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right]$. ……2 分

由积分中值定理知，存在ξ， $a<\xi<x$，使 $f(\xi) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$.

因此 $F'(x) = \frac{1}{x-a}[f(x) - f(\xi)]$. ……4 分

又由于 $f'(x) \le 0$，知 $f(x)$ 在(a,b)上非增函数，所以当 $x>\xi$ 时， $f(x) \le f(\xi)$.

因 $\frac{1}{x-a} > 0$，故由此可知 $F'(x) \le 0$. ……6 分

七、（本题满分 5 分）

已知 X=AX+B,其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,求矩阵 X..

解： 以 $\mathbf{E}$ 表示 3 阶单位矩阵，由 $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$，有 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{B}$. ……1 分

其中 $\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ……2 分

其逆矩阵为 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2/3 & 1/3\\ -1 & 2/3 & 1/3\\ 0 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}$； ……4 分

于是 $\mathbf{X}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 2/3 & 1/3\\ -1 & 2/3 & 1/3\\ 0 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. ……5 分

八、（本题满分 6 分）

设 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,3,t)$，

(1) 问当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？（3 分）

(2) 问当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关？（1 分）

(3) 当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表示为 α_1 和 α_2 的线性组合.（2 分）

解： 设有实数 k_1,k_2,k_3，使 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$，则得方程组：

$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ k_1+2k_2+3k_3=0\\ k_1+3k_2+tk_3=0\end{cases}$ （*）， 其系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & t\end{vmatrix}=t-5$. ……2 分

(1) 当 $t\neq 5$ 时，$D\neq 0$，方程组（*）只有零解：$k_1=k_2=k_3=0$.这时，向量组 $a_1,a_{2,}a_3$ 线性无关. ……3 分

(2) 当 $t=5$ 时，$D\neq 0$，方程组（*）有非零解，即不存在不全为 0 的常数 k_1,k_2,k_3，使 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$，这时，向量 $a_1,a_{2,}a_3$ 线性相关. ……4 分

(3) 设 $t=5$.由 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 知方程组（*）可化为 $\begin{cases}k_1-k_3=0\\ k_2+2k_3=0\end{cases}$.

令 $k_3=1$，得 $k_1=1,k_2=-2$.因此，有 $a_1-2a_2+a_3=0$.从而 a_3 可以通过 a_1 和 $a_{2,}$ 表示为 $a_3=-a_1+2a_2$. ……6 分

九、（本题满分 5 分）

设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$，

(1) 试求 A 矩阵的特征值.（2 分）

(2) 利用**(1)**小题的结果，求矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值.其中 E 是三阶单位矩阵（3 分）

解：（**1**）矩阵 A 的特征方程为 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0$，

由此得矩阵 A 的特征值 $1,1,-5$.　　……2 分

（**2**）由于矩阵 A 的特征值 $1,1,-5$，可知 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值为 $1,1,-\frac{1}{5}$.　　……3 分

因此，有 $|\mathbf{E}-\mathbf{A}^{-1}|=0$，$\left|(-\frac{1}{5})\mathbf{E}-\mathbf{A}^{-1}\right|=0$. 由此可见 $|(1+1)\mathbf{E}-(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1})|=0$，

$|(-\frac{1}{5}+1)\mathbf{E}-(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1})|=0$，即 $|2\mathbf{E}-(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1})|=0$，$|\frac{4}{5}\mathbf{E}-(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1})|=0$.

于是，矩阵 $\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值 $2,2,\frac{4}{5}$.　　……5 分

十、（本题满分 7 分）

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & 若 0<x<\infty, 0<y<+\infty\\ 0 & 其他\end{cases}$，

试求：**(1)** $P\{X<Y\}$ (5 分)；（**2**）$E(XY)$ (2 分)

解：(1) $P\{X<Y\}=\iint\limits_{X<Y} f(x,y)dxdy$　　……2 分

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{y}e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{y}e^{-x}dy=\int_0^{+\infty}e^{-y}(1-e^{-y})dy=\frac{1}{2}.$$　　……5 分

(2) $E(XY)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xye^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=1$.　　……7 分

十一、（本题满分 8 分）

设随机变量在 [2,5] 上服从均匀分布. 现在对 X 进行三次独立观测. 试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解：以 A 表示事件“对 X 的观测值大于 3”，即 $A=\{X>3\}$，由条件知，X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 若 2\le x\le 5\\ 0 & 其他\end{cases}$，$P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$.　　……4 分

以 u_3 表示三次观测值大于 3 的次数（即在三次独立观测中事件 A 出现的次数）.

显然，u_3 服从参数为 $n=3$，$p=\frac{2}{3}$ 的二项分布，

因此，所求概率为 $P\{u_3\ge 2\}=C_3^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}+C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{20}{27}$.　　……8 分

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 【 同数学四 第一、**(1)** 题 】

(2) 某商品的需求量Q与价格P的函数关系为$Q=ap^b$，其中a和b为常数，且$a\neq 0$，则需求量对价格P的弹性是 $\underline{\quad b \quad}$.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\underline{\quad x^4 \quad}$.

(4) 设随机变量X_1,X_2,X_3相互独立，其中X_1在$[0,6]$上服从均匀分布，X_2服从正态分布$N(0,2^2),X_3$服从参数为$\lambda=3$的泊松分布.记$Y=X_1-2X_2+3X_3$，则$DY=\underline{\quad 46 \quad}$.

(5) 【 同数学四 第一、(4) 题 】

二、选择题：（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 【 同数学四 第二、(1) 题 】

(2) 【 同数学四 第二、(2) 题 】

(3) 【 同数学一 第二、(2) 题 】

(4) 设 n 元齐次线性方程组 AX＝0 的系数矩阵 A 的秩为 r，则 AX＝0 有非零解的充分必要条件是 (B)

(A) $r=n$　　(B) $r\geq n$　　(C) $r<n$　　(D) $r>n$

(5) 【 同数学四 第二、(5) 题】

三、（本题满分 20 分，每小题 5 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

解：原式$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$. ……1 分

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ……3 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$. ……4 分

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e$. ……5 分

(2) 已知 $z=a^{\sqrt{x^2-y^2}}$，其中 $a>0,a\neq1$,求 dz.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=a^{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\ln a\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{xz\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}$， ……2 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=a^{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\ln a\cdot\dfrac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{-yz\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}$. ……4 分

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\dfrac{xz\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}dx+\dfrac{-yz\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}dy=\dfrac{z\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}(xdx-ydy)$. ……5 分

(3) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$.

解： 原式 $=\displaystyle\int\frac{1}{x}dx-\int\ln(1-x)d\,\frac{1}{x}$ ……1 分

$=\ln|x|-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)-\displaystyle\int\frac{1}{x(1-x)}dx$ ……2 分

$=\ln|x|-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)-\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$ ……3 分

$=\ln|x|-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)-\ln|x|+\ln(1-x)+C$ ……4 分

$=(1-\dfrac{1}{x})\ln(1-x)+C$. ……5 分

(4) 求二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2=1$，$x=0,y=0$ 所围成的区域在第 I 象限部分.

解： 作极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\x=r\sin\theta\end{cases}$， ……1 分

原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1-r^2}{1+r^2}rdr$ ……2 分

$=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1(\frac{2}{1+r^2}-1)rdr$ ……3 分

$=\dfrac{\pi}{2}\left[\ln(1+r^2)-\dfrac{1}{2}r^2\right]\Bigg|_0^1$ ……4 分

$=\dfrac{\pi}{2}[\ln2-\dfrac{1}{2}]$. ……5 分

四、(本题满分 6 分)

已知某企业的总收入函数为 $R=26x-2x^2-4x^3$,总成本函数为 $C=8x+x^2$，其中 x 表示产品的产量.求利润函数，边际收入函数，以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

解：(1) 利润函数为 $L=R-C=26x-2x^2-4x^3-8x-x^2=18x-3x^2-4x^3$. ……1 分

(2) 边际收入函数为 $MR=\dfrac{dR}{dx}=26x-4x-12x^2$. ……2 分

(3) 边际成本函数为 $MC=\dfrac{dC}{dx}=8+2x$. ……3 分

(4) 解方程 $\dfrac{dL}{dx}=18-6x-12x^2=0$，得 $x=1,\quad x=-1.5$(舍去). ……4 分

而由 $\left.\dfrac{d^2l}{dx^2}\right|_{x=1}=(-6x-24x)|_{x=1}=-30<0$ ……5 分

知，当 $x=1$ 时 L 达到极大值 $L|_{x=1}=(18x-3x^2-4x^3)|_{x=1}=11$.

因为 $x>0$ 时，$L(x)$ 只有一个极大值，没有极小值，故此极大值就是最大值.

于是，当产量为 1 时利润最大，最大利润为 11. ……6 分

五、(本题满分 12 分)

已知函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$，试求其单调区间，极值点，及图形的凹凸性，拐点和渐近线，并画出函数图形.

解： $y'=\dfrac{4x}{(1-x)^3}$，令 $y'=0$，得 $x=0$. ……1 分

$y''=\dfrac{8x+4}{(1-x)^4}$，令 $y''=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$ ……2 分

于是，可列出如下表格：

x	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	−		−	0	+	/	−
y''	−	0	+	+	+	/	+
y	↘ ∩	拐点 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{9})$	↘ ∪	极小值 0	↗ ∪	无定义	↘ ∪

(1) 由表中计算结果可见：

$x=0$ 是函数的极小值点，极小值为 0； ……3 分

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

点 $(-\frac{1}{2},\frac{2}{9})$ 是该曲线的拐点； ……4 分

区间 $(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$ 是函数的单调减区间； ……5 分

区间 $(0,1)$ 是函数的单调增区间； ……6 分

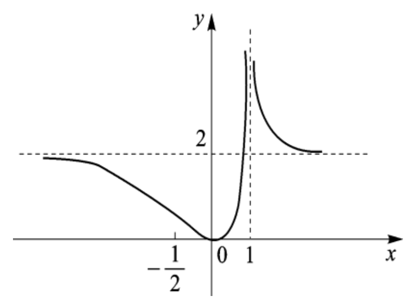
在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 上函数图形凸， ……7 分

在 $(-\frac{1}{2},1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上函数图形凹. ……8 分

(2) 由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=2$，知 $y=2$ 为函数图形的水平渐近线； ……9 分

由 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$，知 $x=1$ 为函数的图形的铅垂渐近线. ……10 分

(3) 函数图形如下：



……12 分

六、（本题满分 5 分）【 同数学四 第七题 】

七、（本题满分 6 分）【 同数学四 第八题 】

八、（本题满分 5 分）【 同数学四 第九题 】

九、（本题满分 8 分）

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为：

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P\{X=x,Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

求：**(1)** X 的概率分布； **(2)** X＋Y 的概率分布； **(3)** $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

解：(1) X 的概率分为

X	0	1	2
$P\{X=x\}$	0.25	0.45	0.30

……3 分

(2) X+Y 的概率分为

$X+Y$	0	1	2	3
$P\left\{X+Y=s\right\}$	0.10	0.40	0.35	0.15

……6 分

(3) $E[\sin\frac{\pi\left(X+Y\right)}{2}]=\sin 0\times 0.10+\sin\frac{\pi}{2}\times 0.40+\sin\pi\times 0.35+\sin\frac{3\pi}{2}\times 0.15$

$=0.40-0.15=0.25$. ……8 分

十、(本题满分 8 分)

某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：小时）都服从同一指数分布，分布密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, 若x>0\\ 0, \qquad 若\le 0\end{cases}$，试求：在仪器使用的最初 200 小时那，至少有一只电子元件损坏的概率 α.

解：设三只元件编号分别为 1，2，3；以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“在仪器使用的最初 200 小时内，第 i 只元件损坏”；以 $X_i(i=1,2,3)$ 表示“第 i 只元件的使用寿命”.

由题意知 $X_i(i=1,2,3)$ 服从密度为 $f(x)$ 的指数分布.易见

$P(A_i)=P(X_i>200)=\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=e^{-\frac{1}{3}}$. ……5 分

所求事件的概率 $\alpha=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=1-(e^{-\frac{1}{3}})^3=1-e^{-1}$. ……8 分