1999 年全国硕士研究生入学统一考试

经济数学三试题详解及评析

一、　填空题

（1）　设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx =$ ________.

【答】　$\dfrac{4}{\pi}-1$

【详解】　由题设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

从而

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xdf(x)=xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

$$=\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{\pi}-1.$$

（2）　$\sum_{i=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$ ________.

【答】　4

【详解】　考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{i=1}^{\infty} nx^{n-1}, -1<x<1,$$

因为 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{i=1}^{\infty} x^n dx=\dfrac{x}{1-x}$,

所以 $S(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}, -1<x<1,$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=4.$

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ ，而 $n\geq 2$ 为整数,则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$ _____ .

【答】 O

【详解】 因为

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}.$$

故有 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=O.$

（4） 在天平上重复称量一重维 a 的物品，假设各次称量结果相互独立且服从正态分布，$N\left(0,0.2^2\right)$，若以 $\overline{X_n}$ 表示 n 称量结果的算术平均值，则为使 $P\left\{\left|\overline{X}_n-a\right|<0.1\right\}\geq 0.95, n$ 的最小值应不小于自然数=_________.

【答】 16

【详解】 由于 $\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(a,\dfrac{0.2^2}{n}\right),$

于是

$$u=\frac{\overline{X_n}-a}{\dfrac{0.2}{\sqrt{n}}}\sim N\left(0,\frac{0.2^2}{n}\right).$$

又因为 $P\left\{|u|<1.96\right\}\geq 0.95,$

故要求 $P\left\{\left|\overline{X}_n-a\right|<0.1\right\}=P\left\{\dfrac{\overline{X_n}-a}{\dfrac{0.2}{\sqrt{n}}}<\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geq 0.95,$

即 $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.975.$

于是令 $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.96,$ 解得 $n=16.$

（5） 设随机变量 $X_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n;n\geq 2\right)$ 独立同分布，$E\left(X_{ij}\right)=2,$ 则行列式

$Y=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1n}\\X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\X_{n1}&X_{n1}&\cdots&X_{nn}\end{bmatrix}$ 的数学期望 $E\left(Y\right)=$________.

【答】 0

【详解】根据行列式的定义，有

$$Y=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{r(j_1j_2\cdots j_n)}X_{1j_1}X_{2j_2}\cdots X_{nj_n},$$

由于随机变量 $X_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n;n\ge 2\right)$ 独立同分布，因此有

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{r(j_1j_2\cdots j_n)}E\left(X_{1j_1}X_{2j_2}\cdots X_{nj_n}\right)\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{r(j_1j_2\cdots j_n)}E\left(X_{1j_1}\right)\cdot E\left(X_{2j_2}\right)\cdots\cdot E\left(X_{nj_n}\right)\\&=\begin{vmatrix}E(X_{11}) & E(X_{12}) & \cdots & E(X_{1n})\\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \cdots & E(X_{2n})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \cdots & E(X_{nn})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

二、选择题

（1） 设 $f(x)$ 是连续奇函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数

【 】

【答】 应选(A)

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$, 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C\underline{\underline{u=-t}}\int_0^x f(-u)d(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数,即 $f(-u)=-f(u)$, 从而有

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C=\int_0^x f(t)dt+C=F(x).$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

故(A)为正确选项,

至于(B),(C),(D)可分别举反例如下:

$f(x)=x^2$ 是偶函数,但其原函数 $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数,可排除(B);

$f(x)=\cos x^2$是周期函数,但其原函数$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$不是周期函数,可排除(C);

$f(x)=x$在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数,但其原函数$F(x)=\frac{1}{2}x^2$在区间$(-\infty,+\infty)$内非单调增加函数,可排除(D).

(2)设$f(x,y)$连续,且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$, 其中D是由$y=0,y=x^2,x=1$所围区域,则$f(x,y)$等于

(A) xy　　　(B) $2xy$

(C) $xy+\frac{1}{8}$　　　(D) $xy+1$

【 】

【答】 (C)

【详解1】 令$\iint\limits_D f(u,v)dudv=A$　　　$(*)$

则

$f(x,y)=xy+A$,将$f(x,y)=xy+A$代入(*)式得

$$\iint\limits_D[uv+A]dudv=A$$

即

$$\iint\limits_D[xy+A]dxdy=A$$

$$\int_0^1dx\int_0^{x^2}xydy+A\int_0^1x^2dx=A$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A=A,\text{解得 }A=\frac{1}{8}$$

故　$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$

【详解2】 等式$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$两边取在区域$D$上的二重积分得:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D xydxdy\bullet\iint\limits_D f(u,v)dudvA$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}xydxdy+\int_0^1x^2dx\bullet\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

由上式解得

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{8}$$

则

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$$

(3) 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线形表示，但不能有向量组(Ⅰ) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组（Ⅱ）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{m-1},\beta$，则：

(A) α_m 不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由（Ⅱ）线性表示

(B) α_m 不能由(Ⅰ)线性表示，但可由（Ⅱ）线性表示

(C) α_m 可由(Ⅰ)线性表示，也可由（Ⅱ）线性表示

(D) α_m可由(Ⅰ)线性表示，但不能由（Ⅱ）线性表示

【 】

【答】 (B)

【详解】 由题设,存在$k_1,k_2,\cdots k_m$,使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m,$$

且 $k_m\neq 0$.否则与β不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{m-1}$线性表示矛盾,从而有

$$\alpha_m=-\frac{k_1}{k_m}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}+\frac{1}{k_m}\beta,$$

即 α_m可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{m-1},\beta$线性表示.

又根据β不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{m-1}$线性表示知，$\alpha_m$一定不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示,否则将$\alpha_m$用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{m-1}$线性表示后代入(*)式,即可推出矛盾.

因此正确选项为(B)

(4) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则

$(A)\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}.$ (B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$**有相同的特征值和特征向量.**

(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都相似于一个对角矩阵 (D)对于任意常数t,$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$相似

【 】

【答】 (D)

【详解】(A)首先贝排除，因它意味着 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值，但不一定有相同的特征向量，故(B)不成立；

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不一定可以对角化，更谈不上都相似于一个对角矩阵，排除（C）

剩下（D）为正确答案.

因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，所以存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,进而有

$\boldsymbol{P}^{-1}\left(t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 可见$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$相似.

（5）设随机变量$X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\left(i=1,2\right)$, 且满足$P\left\{X_1X_2=0\right\}=1$,，则$P\left\{X_1=X_2\right\}$等于

$(A)0.$　　$(B)\frac{1}{4}.$　　$(C)\frac{1}{2}.$　　$(D)1.$

【 】

【答】 (A)

【详解】首先，列出二维随机变量$\left(X_1,X_2\right)$的联合分布律及其边缘分布中的部分数值.

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p\cdot i$
-1	a	b	c	$\frac{1}{4}$
0	d	h	f	$\frac{1}{2}$
1	g	e	k	$\frac{1}{4}$
$p\cdot j$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

由于$P\left\{X_1X_2=0\right\}=1$, 故$P\left\{X_1X_2\neq 0\right\}=0.$

因此$a=c=g=k=0.$

根据边缘分布的性质

$b=\frac{1}{4},h=\frac{1}{4},d=\frac{1}{4},f=\frac{1}{4},e=\frac{1}{2}-\left(b+h\right)=0.$

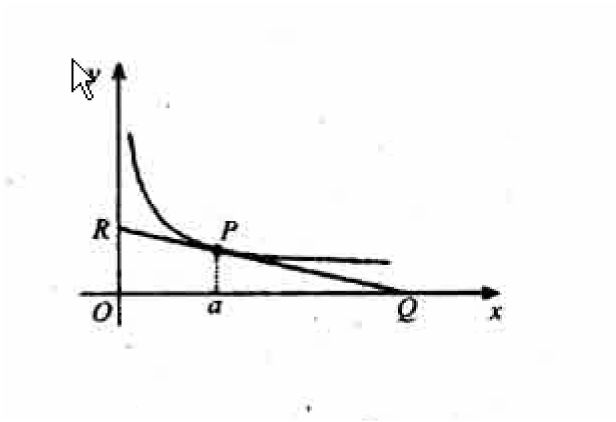
可见有

$P\left\{X_1=X_2\right\}=P\left\{X_1=-1,X_2=-1\right\}+P\left\{X_1=0,X_2=0\right\}+P\left\{X_1=1,X_2=1\right\}=0.$

因此正确选项为（A)。

三 、(本题满分 6 分)

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 a，试求切线方程和这个图形的面积，当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？



【详解】 由 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 得 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, 则切点 $P(a,\frac{1}{\sqrt{a}})$ 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a).$$

切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $A(3a,0)$ 和 $B(0,\frac{3}{2\sqrt{a}})$.

于是,三角形 AOB 的面积为

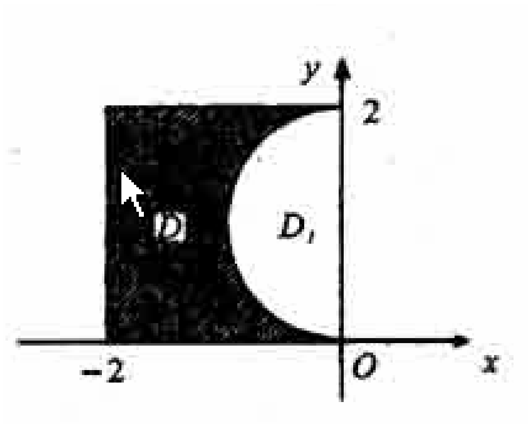
$$S=\frac{1}{2}\bullet 3a\bullet\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4}\sqrt{a}.$$

当切点沿 x 轴方向趋于无穷远时,有 $\lim\limits_{a\to+\infty}S=+\infty.$

当切点沿 y 轴方向趋于无穷远时,有 $\lim\limits_{a\to 0+}S=0.$

四 、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$, 其中 D 是由 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.



【详解 1】 如图所示, $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 2,-2\le x\le -\sqrt{2y-y^2}\}$,

则

$$\iint_D ydxdy=\int_0^2 ydy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}dx=2\int_0^2 ydy-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}dy$$

令 $y-1=\sin t$,则

$$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 tdt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin tdt=\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\iint_D ydxdy=4-\frac{\pi}{2}.$$

【详解 2】 区域 D 和 D_1 如图所示,有

$$\iint_D ydxdy=\iint_{D+D_1}ydxdy,-\iint_{D_1}ydxdy,$$

易知

$$\iint_{D+D_1}ydxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_0^2 ydy=4.$$

而在极坐标系下,有 $D_1=\{(r,\theta)\mid \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,0\le r\le 2\sin\theta\}$,

于是

$$\iint_{D_1}ydxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\bullet rdr=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1-\cos^2\theta}{2}\right)^2 d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

故

$$\iint_D ydxdy=4-\frac{\pi}{2}.$$

【详解 3】由心形公式 $\bar{y}=\dfrac{\iint_D ydxdy}{S_D}$

知 $\iint_D ydxdy=\bar{y}\bullet S_D$, 其中 $\bar{y}$ 为 D 的心形 y 坐标,

由 D 的图形不难看出 $\bar{y}=1$, S_D 为积分域 D 的面积,该面积应为正方形减去半圆, $S_D=4-\dfrac{\pi}{2}$

则

$$\iint_D ydxdy=4-\frac{\pi}{2}.$$

五 、(本题满分 6 分)

设生产某种产品必须投入两种元素, x_1 和 x_2 分别为两元素要投入量, Q 为产出量;若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$,其中 $\alpha\beta$ 为正常数,且 $\alpha+\beta=1$。假设两种元素的价格分别为 p_1 和 p_2,试问:当产量为 12 时,两元素各投入多少可以使得投入总费用最小.

【详解】 根据题设,在产出量满足 $12=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ 的条件下,求总费用 $C=p_1x_1+p_2x_2$ 的最小值,为此构造拉格朗日函数

$$F(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(12-2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}).$$

$$令\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=p_1-2\lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=p_2-2\lambda\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=12-2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}=0, & (3)\end{cases}$$

由第 1,2 个方程,得

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\beta x_1}{\alpha x_2},x_1=\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}x_2,$$

将 x_1 代入第 3 个方程,得

$$x_2 = 6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\alpha}, x_1 = 6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^{\beta}.$$

因驻点唯一,且实际问题存在最小值,故当 $x_2 = 6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\alpha}, x_1 = 6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^{\beta}$.时,投入费用最小.

六、(本题满分 6 分)

设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$, 其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

试求出 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数 $y = y(x)$，使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0) = 0$.

【详解】 当 $x < 1$， $y' - 2y = 2$, 其通解为

$$y = e^{\int 2dx}\left[\int 2e^{-\int 2dx}dx + C_1\right] = e^{2x}\left[\int 2e^{-2x}dx + C_1\right] = C_1e^{2x} - 1,$$

由 $y(0) = 0$.得 $C_1 = 1$, 所以

$$y = e^{2x} - 1(x < 1).$$

当 $x > 1$ 时， $y' - 2y = 0$, 其通解为

$$y = C_2e^{\int 2dx} = C_2e^{2x},$$

由

$$\lim_{x\to 1^+} C_2e^{2x} = \lim_{x\to 1^-}\left(e^{2x} - 1\right) = e^2 - 1,$$

得

$C_2e^2 = e^2 - 1$，即 $C_2 = 1 - e^{-2}$,

所以 $y = \left(1 - e^{-2}\right)e^{2x}, (x > 1)$.

于是若补充定义 $y(1) = e^2 - 1$, 则得在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数

$$y(x)=\begin{cases} e^{2x}-1, & x\le 1, \\ (1-e^2)e^{2x}, & x>1. \end{cases}$$

满足题中要求的全部条件.

七、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\,dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$, 求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值

【详解】 作变量代换 $u=2x-t$, 则 $t=2x-u, dt=-du$, 于是

$$\int_0^x tf(2x-t)\,dt=-\int_{2x}^x (2x-u)f(u)\,du=2x\int_x^{2x} f(u)du-\int_x^{2x} uf(u)du,$$

因此原函数变换为

$$2x\int_x^{2x} f(u)du-\int_x^{2x} uf(u)du=\frac{1}{2}\arctan x^2,$$

上式两边对 x 求导，得

$$2\int_x^{2x} f(u)du+2x\left[2f(2x)-f(x)\right]-\left[2xf(2x)\cdot 2-xf(x)\right]=\frac{2}{1+x^4},$$

即

$$2\int_x^{2x} f(u)du=\frac{x}{1+x^4}+xf(x).$$

令 $x=1$ 得 $2\int_1^2 f(u)du=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$,

于是 $\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}$.

八、 (本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

试证：

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对于任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1$.

【详解】 (1) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$, 则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续，且

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,\ \varphi(1)=-1<0$, 故由闭区间上连续函数的介值定理知，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得

$\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$,

即

$f(\eta)=\eta.$

（2）设 $F(x)=\left[f(x)-x\right]e^{-\lambda x}$, 则 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且

$F(0)=0, F(\eta)=e^{-\lambda\eta}\left[f(\eta)-\eta\right]=0,$

即 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0,$

$e^{-\lambda x}\left\{f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]-1\right\}=0,$

于是有

$f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1.$

九、（本题满分 9 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=-1.$ 又设 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0, 属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$, 求 a、b、c、及 λ_0 的值.

【详解】 根据题设 $\boldsymbol{A}^*\alpha=\lambda_0\alpha$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\alpha=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\alpha=\boldsymbol{A}=\lambda_0\boldsymbol{A}\alpha,$

也即

$$\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

由此可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1, \\ \lambda_0(-5-b+c)=1, \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1, \end{cases}$$

解此方程组，得 $\lambda_0=1, b=-3, a=c.$ 又由 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 和 $a=c$ 有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1,$$

故 $a=c=2$, 因此 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$.

十、（本题满分 7 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

【详解】 因为

$$\boldsymbol{B}^T=\left(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^T=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

可见 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵.

又对于任意的实 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\left(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right),$$

当 $\boldsymbol{x}\neq 0$, 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}>0, \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)\geq 0$.

因此，当 $\lambda>0$ 时，对任意的 $\boldsymbol{x}\neq 0$, 有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)>0$$

即 $\boldsymbol{B}$ 维正定矩阵.

十一、（本题满分 9 分）

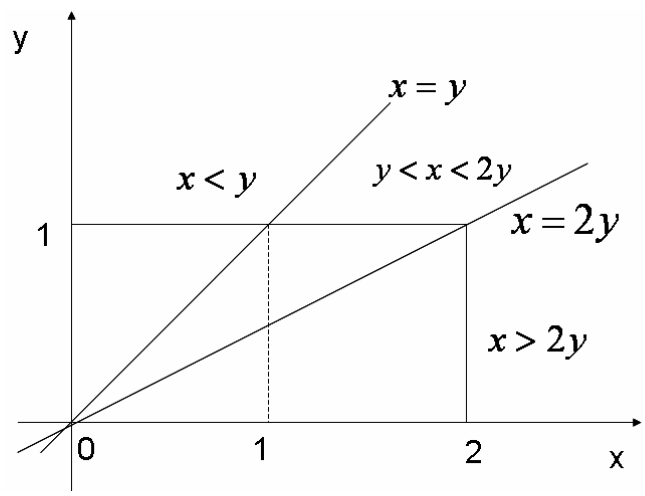
假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\left\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\right\}$ 上服从均匀分布.记

$$U=\begin{cases}0, & X\leq Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\leq 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$$

（1） 求 U 和 V 的联合分布;

（2） 求 U 和 V 的的相关系数 r.

【详解】 如图所示，因 (X,Y) 在矩形区域 G 上服从均匀分布，所以



无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

$P\left\{X \le Y\right\} = \frac{1}{4}, P\left\{X > 2Y\right\} = \frac{1}{2}, P\left\{Y < X \le 2Y\right\} = \frac{1}{4}$

(1) $\left(U,V\right)$有四个可能取值；$\left(0,0\right),\left(0,1\right),\left(1,0\right),\left(1,1\right)$. 每一点处取值的概率为:

$$P\left\{U=0,V=0\right\} = P\left\{X \le Y, X \le 2Y\right\} = P\left\{X \le Y\right\} = \frac{1}{4};$$

$$P\left\{U=1,V=1\right\} = P\left\{X \le Y, X > 2Y\right\} = 0;$$

$$P\left\{U=1,V=0\right\} = P\left\{X > Y, X \le 2Y\right\} = P\left\{Y < X \le 2Y\right\} = \frac{1}{4};$$

$$P\left\{U=1,V=1\right\} = 1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

(3) 由以上可见，UV 和 U、V 的分布为

$$UV \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; U \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}; V \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

于是

$$E\left(U\right) = \frac{3}{4}, D\left(U\right) = \frac{3}{16}; E\left(V\right) = \frac{1}{2}, D\left(V\right) = \frac{1}{4}, E\left(UV\right) = \frac{1}{2}.$$

故有

$$Cov\left(U,V\right) = E\left(UV\right) - E\left(U\right)\cdot E\left(V\right) = \frac{1}{8}.$$

因此 $r = \frac{Cov\left(U,V\right)}{\sqrt{D\left(U\right)\cdot D\left(V\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}.}$

十二、（本题满分 7 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$Y_1 = \frac{1}{6}\left(X_1 + \cdots + X_6\right)$,

$Y_2 = \frac{1}{3}\left(X_7 + X_8 + X_9\right)$, $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}\left(X_i - Y_2\right)^2, Z = \frac{\sqrt{2}\left(Y_1 - Y_2\right)}{S}$,证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

【详解】 设 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

则有 $E\left(Y_1\right) = E\left(Y_2\right) = \mu, D\left(Y_1\right) = \frac{\sigma^2}{6}, D\left(Y_2\right) = \frac{\sigma^2}{3}$.

由于 Y_1 和 Y_2 相互独立，因此有

$$E\left(Y_1 - Y_2\right) = 0, D\left(Y_1 - Y_2\right) = \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3} = \frac{\sigma^2}{2},$$

所以$Y_1-Y_2\sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$

从而$U=\dfrac{Y_1-Y_2}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$,

又由正态总体样本的方差的性质，知$V=\dfrac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$.

又因为Y_1-Y_2与S^2独立，因此$\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(Y_1-Y_2\right)}{S}=Z\sim t(2)$.