2021 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题解析

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处（　　）

(A) 连续且取极大值.　　　　(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数为 0.　　　　(D) 可导且导数不为 0.

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}-1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，故选 D.

(2) 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$， $f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$（　　）

(A) $dx+dy$.　　(B) $dx-dy$.　　(C) dy.　　(D) $-dy$.

【答案】C

【解析】 $f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1)$　①

$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$　②

分别将 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 代入①②式有

$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$，$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$

联立可得 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$，故选 C.

(3) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（　　）

(A) $a=1$，$b=0$，$c=-\dfrac{7}{6}$.　　　　(B) $a=1$，$b=0$，$c=\dfrac{7}{6}$.

(C) $a=-1$，$b=-1$，$c=-\dfrac{7}{6}$.　　　　(D) $a=-1$，$b=-1$，$c=\dfrac{7}{6}$.

【答案】A

【解析】$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}=\left[x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\cdot\left[1-x^2+o(x^3)\right]=x-\dfrac{7}{6}x^3+o(x^3)$，故 $a=1$，$b=0$，$c=-\dfrac{7}{6}$，故选 A .

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

【答案】B

【解析】由定积分定义秩，将 $(0,1)$ 分成 n 份，取中间点的函数

$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$，即选 B .

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

(A) $2,0$.　　(B) $1,1$.　　(C) $2,1$.　　(D) $1,2$.

【答案】B

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^{\,2}+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$.

令上式等于零，故特征值为 -1，3，0，故该二次型正惯性指数为 1，负惯性指数为 1，故选 B .

(6) 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，

若将 β_1，β_2，β_3 两两正交，则 l_1，l_2 依次为（　　）

(A) $\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{5}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$.　　(D) $-\dfrac{5}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$.

【答案】A

【解析】利用斯密斯正交化

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},$$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$，故 $l_1=\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}=\frac{5}{2}$， $l_2=\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\frac{1}{2}$.故选 A .

(7) 设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵，则下列不成立的是（　　）

(A) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　　(B) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　　(D) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

【答案】C

【解析】(A) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2r(\boldsymbol{A})$，故 A 正确.

(B) $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列线性表示，故 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=2r(\boldsymbol{A})$.

(C) $\boldsymbol{BA}$ 的列向量不一定可由 $\boldsymbol{A}$ 的列线性表示.

(D) $\boldsymbol{BA}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的行线性表示， $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=2r(\boldsymbol{A})$.

(8) 设 A， B 为随机变量，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$.

(C) $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

【答案】D

【解析】$P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

$$P(\overline{A}|A\cup B)=\frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

因为$P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，固有$P(A)>P(B)-P(AB)$，故选$\mathrm{D}$.

(9) 设(X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n)为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)$的简单随机样本，

令$\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则

(A) $\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

(B) $\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

(C) $\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(D) $\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】C

【解析】因为X，Y是二维正态分布，所以$\overline{X}$与$\overline{Y}$也服从二维正态分布，则$\overline{X}-\overline{Y}$也服从二维正态分布，即$E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，

$D(\hat{\theta})=D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})-\operatorname{cov}(\overline{X},\overline{Y})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，故选$\mathrm{C}$.

(10) 设$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自总体$N(\mu,4)$的简单随机样本，考虑假设检验问题：

$H_o:\mu\le 10$，$H_1:\mu>10$. $\Phi(x)$表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为

$W=\{\overline{X}\ge 11\}$，其中$\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则$\mu=11.5$，该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1-\Phi(0.5)$.　　　　(B) $1-\Phi(1)$.

(C) $1-\Phi(1.5)$.　　　　(D) $1-\Phi(2)$.

【答案】(B)

【解析】所求概率为$P\{\overline{X}<11\}$　$\overline{X}\sim(11.5,\frac{1}{4})$

$$P\{\overline{X}<11\}=P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}}<\frac{11-11.5}{\frac{1}{2}}\right\}=1-\Phi(1)$$

故选 B .

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$ ______________

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

(12) 设函数由参数方程$\begin{cases}x=2e^t+t+1, & x<0\\ y=4(t-1)e^t+t^2, & x\geq 0\end{cases}$确定，则$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=$ ______________

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析]】由$\frac{dy}{dx}=\frac{4te^t+2t}{2e^t+1}$，得$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3}$，将$t=0$

代入得$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=$ $\frac{2}{3}$

(13) 欧拉方程$x^2y''+xy'-4y=0$满足条件$y(1)=1,y'(1)=2$的解为______________

【答案】x^2

【解析】令$x=e^t$,，则$xy'=\frac{dy}{dt}$, $x^2y''=\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dt}$原方程化为$\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$.特征方程为

$\lambda^2-4=0,$特征根为$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2,$通解为$y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}=c_1x^2+c_2x^{-2},$将初始条件

$y(1)=1,y'(1)=2$代入得$c_1=1,c_2=0.$故满足初始条件的解为$y=x^2$

(14) 设 Σ 为空间区域$\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\leq 4,0\leq z\leq 2\right\}$表面的外侧，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$ ______________

【答案】 4π

【解析】 由高斯公式得原式$=\iiint\limits_{\Omega} 2x+y+1dV=\int_0^2 dz\iint\limits_D dxdy=4\pi$

（15）设$A=a_{ij}$为3阶矩阵，A_{ij}为代数余子式，若A的每行元素之和均为2，且$|A|=3$，则$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$_______.

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$A\alpha=\lambda\alpha$，$\lambda=2$，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则$A^*$的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量为$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$，又$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$，$A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}+A_{21}+A_{31}\\A_{12}+A_{22}+A_{32}\\A_{13}+A_{23}+A_{33}\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

（16）甲乙两个盒子中各装有2个红球和2个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球. 令X，Y分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则X与Y的相关系数_______.

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】联合分布律$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)&(1,1)\\\frac{3}{10}&\frac{2}{10}&\frac{2}{10}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$，$X$的边缘分布$X\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,$Y$的边缘分布$Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,易知$Cov(X,Y)=\frac{1}{20}$，$DX=\frac{1}{4},DY=\frac{1}{4}$,即$\rho_{XY}=\frac{1}{5}$.

三、解答题：17～22小题,共70分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分10分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)-\left(e^x-1\right)}{\sin x\left(e^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-e^x+1+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[x+o(x^2)\right]-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]+1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

（18）（本题满分 12 分）

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】$S(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(0,1)\\ \dfrac{e}{e-1}, & x=1\end{cases}$

【解析】易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 为几何级数，故收敛区间为 $(0,+\infty)$；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛区间为 $(0,1)$

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 发散；

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 均收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛；

综上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $\left(0,1\right]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$x\in\left(0,1\right]$

（1）$x\in(0,1)$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=-x\ln(1-x)-\left[-\ln(1-x)\right]=(1-x)\ln(1-x)+x$$

$$S(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x$$

（2）$x=1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的前 n 项和 $S_n=1-\frac{1}{n+1}$， $\lim_{n\to\infty}S_n=1$

$S(x)=\frac{e}{e-1}$

综上， $S(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(0,1)\\ \frac{e}{e-1}, & x=1\end{cases}$

（19）（本题满分 12 分）

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

【答案】66

【解析】设拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$

$\begin{cases}L'_x=2x\lambda+4\mu=0\\L'_y=4y\lambda+2\mu=0\\L'_z=2z-\lambda+\mu=0\\L'_\lambda=x^2+2y^2-z=6\\L'_\mu=4x+2y+z=30\end{cases}$ 解得驻点：$(4,1,12),(-8,-2,66)$

故 C 上的点 $(-8,-2,66)$ 到 xOy 坐标面距离最大为 66.

（20）（本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1.

（1）求 $I(D_1)$ 的值；

（2）计算 $\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

【答案】（1）8π；（2）$-\pi$

【解析】

（1）由二重积分的几何意义知：$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)d\sigma$，当且仅当 $4-x^2-y^2$ 在 D 上大于 0 时，$I(D)$ 达到最大，故 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 4\right\}$，且 $I(D_1)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr=8\pi$.

（2）补 $D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2\right\}$（$\varepsilon$ 很小），取 D_2 的方向为顺时针方向，

$P(x,y)=\dfrac{xe^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2}$， $Q(x,y)=\dfrac{4ye^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}$， 且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=\int_{\partial D_1+\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}-\int_{\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}e^{\varepsilon^2}\int_{\partial D_2}xdx+4ydy-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial D_2}ydx-xdy=\frac{-2}{\varepsilon^2}\iint_{\partial D_2}dxdy=-\pi\,.$$

（21）（本题满分 12 分）

已知 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

（1）求正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角矩阵；

（2）求正交矩阵 C，使得 $C^2=(a+3)E-A$.

【答案】（1） $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$；（2） $C=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

【解析】

（1）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)=0$，得 $\lambda_1=a+2$， $\lambda_2=\lambda_3=a-1$

当 $\lambda_1=a+2$ 时

$((a+2)E-A)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=a-1$ 时

$((a-1)E-A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

令 $P=\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1\end{pmatrix}$.

（2） $P^{\mathrm{T}}C^2P=P^{\mathrm{T}}((a+3)E-A)P=(a+3)E-\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}$

$P^{\mathrm{T}}CPP^{\mathrm{T}}CP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}\Rightarrow P^{\mathrm{T}}CP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，故 $C=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -1 & -1\\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X，较长的一段长度记为 Y，令 $Z=\frac{X}{Y}$.

(1) 求 X 的概率密度.

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【答案】(1) $X\sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$；(2) $f_Z(z)=\left(F_Z(z)\right)'=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2},z\ge 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$；

(3) $-1+2\ln 2$.

【解析】(1) 由题知：$X\sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$.

(2) 由 $Y=2-X$，即 $Z=\frac{2-X}{X}$，先求 Z 的分布函数.

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}$

当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=0$.

当 $z\geq 1$时，$F_Z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\leq z\right\}=1-P\left\{X\leq\frac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{t+1}}1dx=1-\frac{2}{z+1}$.

$$f_Z(z)=\left(F_Z(z)\right)'=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, z\geq 1\\ 0, 其他\end{cases}.$$

(3) $E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\frac{x}{2-x}\cdot 1dx=-1+2\ln 2$.