

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

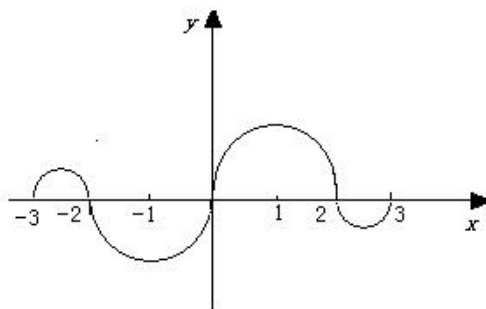
- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$ []

(2) 函数 $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x} + e \tan x}{x(e^x - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$ []

- (A) 0 (B) 1 (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(3) 如图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$

上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则下列结论正确的是：()



- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(-3) = \frac{5}{4}F(-2)$ []

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$ (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$.
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0) = 0$ (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0) = 0$.

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. []

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x) > 0$ ，令 $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$)，则下列结论正确的是：

- (A) 若 $u_1 > u_2$ ，则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1 > u_2$ ，则 $\{u_n\}$ 必发散
(C) 若 $u_1 < u_2$ ，则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1 < u_2$ ，则 $\{u_n\}$ 必发散. []

(7) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是[]

(A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.

(C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

(8) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(9) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$.

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

[]

(10) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同且相似

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同也不相似

[]

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} =$ _____.

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为_____.

(13) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____.

(14) 二阶常系数非齐次微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ _____.

(15) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(16) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

三、解答题: 17~24 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调、可导的函数, 且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$, 其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

(18) (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x} a^{-\frac{x}{2a}} (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

(19) (本题满分 10 分) 求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

(20) (本题满分 11 分) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定,

设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\frac{dz}{dx} \Big|_{x=0}, \frac{d^2z}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

(21) (本题满分 11 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(22) (本题满分 11 分) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$, 计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程组 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(24) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1—6 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(1) 曲线 $y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x}$ 的水平渐近线方程为

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ _____.

(3) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____.

(4) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$ ，则 $|B| =$ _____.

二、选择题：7—14 小题，每小题 4 分，共 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ， Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量， Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x > 0$ ，则 []

(A) $0 < dy < \Delta y$.

(B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$.

(D) $dy < \Delta y < 0$.

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x = 0$ 外处处连续， $x = 0$ 是其第一类间断点，则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

(A) 连续的奇函数.

(B) 连续的偶函数

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数

(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数. []

(9) 设函数 $g(x)$ 可微， $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1, g'(1) = 2$ ，则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3 - 1$.

(B) $-\ln 3 - 1$.

(C) $-\ln 2 - 1$.

(D) $\ln 2 - 1$. []

(10) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3x e^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$. []

(11) 设 $f(x, y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

$$(A) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy.$$

$$(B) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy.$$

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx. \quad [\quad]$$

(12) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 []

$$(A) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) = 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

$$(B) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) = 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

$$(C) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

$$(D) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 为 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 []

$$(A) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性相关.}$$

$$(B) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性无关.}$$

$$(C) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性相关.}$$

$$(D) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性无关.}$$

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则

$$(A) C = P^{-1}AP.$$

$$(B) C = PAP^{-1}.$$

$$(C) C = P^T AP.$$

$$(D) C = PAP^T. \quad [\quad]$$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

试确定 A, B, C 的值, 使得 $e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16) (本题满分 10 分) 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

(17) (本题满分 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

(18) (本题满分 12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限; (II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19) (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21) (本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}, (t \geq 0)$ (I) 讨论 L 的凹凸性; (II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) ,

并写出切线的方程; (III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22) (本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解. (I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$; (II)

求 a, b 的值及方程组的通解.

(23) (本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分。把答案填在题中横线上）

(1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$ ，则 $dy \Big|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A| = 1$ ，那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点. []

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”，则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. []

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

- (A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$. (B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3$.
(C) $-8 \ln 2 + 3$. (D) $8 \ln 2 + 3$. []

(10) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ， $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数， a, b 为常数，则

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$$

- (A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$. []

(11) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$ ，其中函数 φ 具有二阶导数， ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

[]

(12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则 ()

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. []

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 \neq 0$. (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 = 0$. []

(14) 设 A 为 $n (n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则 []

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .

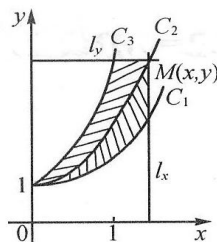
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}.$$



(16) (本题满分 11 分)

如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图象, 过点 $(0, 1)$ 的曲

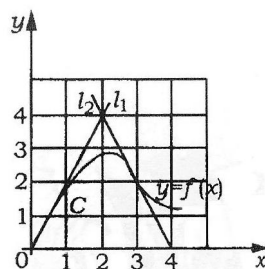
线 C_3 是一单调增

函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y . 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$;

C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线

C_3 的方程

$x = \varphi(y)$.



(17) (本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y=f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计

别是曲线 C 在算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$

(18) (本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的解.

(19) (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$; (II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

(20) (本题满分 10 分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

(21) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(22) (本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组

$\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a, b, c), a, b, c$ 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB=O$, 求线性方

程组 $Ax=0$ 的通解.

2004 年考硕数学（二）真题

一. 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上.）

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则

$|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是()

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .

(8) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2 (1+\frac{2}{n})^2 \cdots (1+\frac{n}{n})^2}$ 等于 ()

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$. (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$. (C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得()

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减小.
(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$. (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(11) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为()

- (A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x)$. (B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A \sin x + B \cos x)$.
(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A \sin x$. (D) $y^* = ax^2 + bx + c + A \cos x$

(12) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于()

- (A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$. (B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx$.
(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$. (D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$

(13) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为()

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(14) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有()

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

三. 解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式; (II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) (本题满分 11 分)

设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数; (II) 求 $f(x)$ 的值域.

(18) (本题满分 12 分)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0$, $x=t (t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体,

其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值; (II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

(19) (本题满分 12 分) 设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(20) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减小滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下来. 现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h . 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

(21) (本题满分 10 分) 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(22) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0, \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(23) (本题满分 9 分)

设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

2003 年考研数学（二）真题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta} (a > 0)$, 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(1) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在. []

(2) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^n x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 等于

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$. (B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$. (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$. []

(3) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi(\frac{x}{y})$ 的解, 则 $\varphi(\frac{x}{y})$ 的表达式为

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$. (B) $\frac{y^2}{x^2}$. (C) $-\frac{x^2}{y^2}$. (D) $\frac{x^2}{y^2}$. []

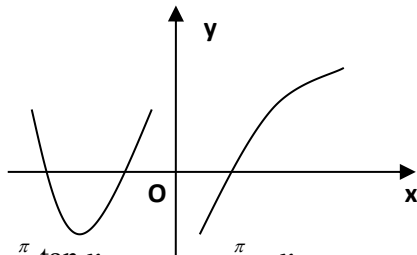
(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点. []



(5) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

- (A) $I_1 > I_2 > 1$. (B) $1 > I_1 > I_2$.
(C) $I_2 > I_1 > 1$. (D) $1 > I_2 > I_1$. []

(6) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

- (A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
(B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.
(D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

[]

三、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9}$.

五、(本题满分 9 分) 计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0, x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

八、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段

PQ 被 x 轴平分.

(A) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(B) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s .

九、(本题满分 10 分)

有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y) (y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (如图), 容器的底面圆的半径为 2 m. 根据设计要求, 当以 $3m^3 / \text{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi m^2 / \text{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前, 容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注: m 表示长度单位米, min 表示时间单位分.)

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$; (2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a, b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角阵 Λ , 试确定常数 a 的值; 并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

十二、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0, \quad l_2: bx + 2cy + 3a = 0, \quad l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学视频文档资料，【公众号：小盆考研】，回复【数学】免费获取

更多考研押题资料视频，【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学预测卷，【公众号：小盆考研】，回复【数学预测】免费获取

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} & x > 0 \\ ae^{2x} & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ () .
2. 位于曲线 $y = xe^{-x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界图形的面积为 () .
3. 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 () .
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] =$ () .
5. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是 () .

二、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

1. 函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0. 1, 则 $f'(1) =$ ()
 (A) -1 ; (B) 0.1 ; (C) 1 ; (D) 0.5 .
2. 函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是()
 (A) $\int_0^x f(t^2) dt$; (B) $\int_0^x f^2(t) dt$;
 (C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$; (D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$.
3. 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限()
 (A) 不存在; (B) 等于 1; (C) 等于 2; (D) 等于 3.
4. 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则()
 (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
 (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
 (C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$;
 (D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
5. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于

任意常数 k 必有()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

三、(本题满分 6 分) 已知曲线的极坐标方程为 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

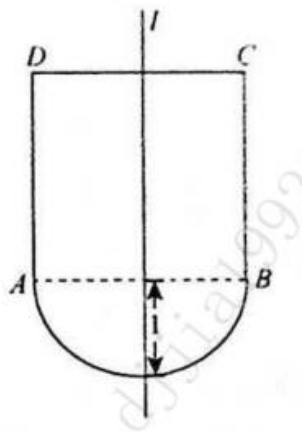
四、(本题满分 7 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$, 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}, \text{ 求 } f(x).$$

六、(本题满分 7 分) 求微分方程 $xdy + (x-2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x=1, x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积最小.

七、(本题满分 7 分) 某闸门的形状与大小如图所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上断相平时, 欲使闸门矩形部分与承受的水压与闸门下部承受的水压之比为 5:4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少米?



八、（本题满分 8 分）

设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1,2,\dots$). 证明: 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

九、（本题满分 8 分）设 $0 < a < b$, 证明不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

十、（本题满分 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, $f''(0) \neq 0$.

证明: 存在惟一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时,

$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、（本题满分 6 分）已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

十二、（本题满分 6 分）已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性

无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = (\quad)$.

2、设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 :
(\quad) .

3、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = (\quad)$.

4、过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 且满足关系式 $y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ 的曲线方程为: (\quad) .

5、方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解, 则 $a = (\quad)$.

二、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

1、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\} = (\quad)$

(A) 0; (B) 1; (C) $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$; (D) $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$.

2、设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 (\quad)

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3、曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点的个数为(\quad)

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

4、已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶可导, $f'(x)$ 严格单调减小, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则(\quad)

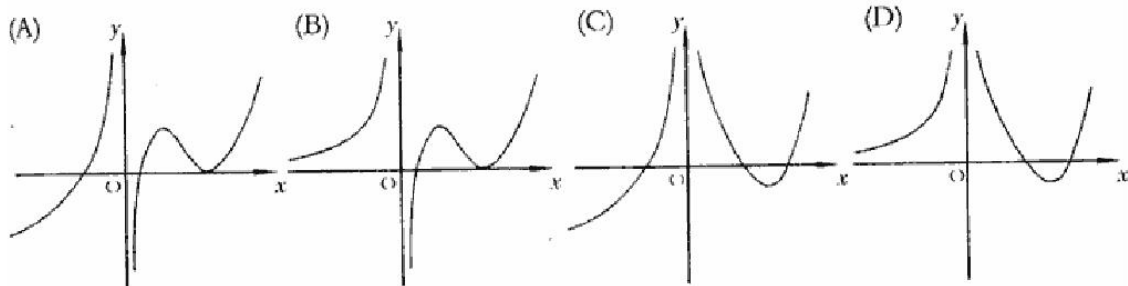
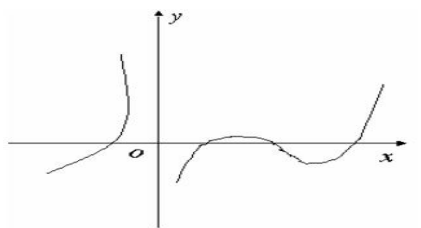
(A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$;

(B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$;

(C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内有 $f(x) < x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内, 有 $f(x) > x$;

(D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内有 $f(x) > x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内, 有 $f(x) < x$.

5、已知函数 $y = f(x)$ 在其定义域内可导, 它的图形如图所示: 则其导函数 $y = f'(x)$ 的图形为 (\quad)



三、（本题满分 6 分）求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、（本题满分 7 分）求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ 记此极限为 $f(x)$ ，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

五、（本题满分 7 分）设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任意一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径， $s = s(x)$ 是抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值（在直角坐标系下曲率公式为 $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ）.

六、（本题满分 7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导， $f(0)=0$ ，且其反函数为 $g(x)$.

若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$ ，求 $f(x)$.

七、（本题满分 7 分）设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$ ， $g'(x)=2e^x - f(x)$

且 $f(0)=0$ ， $g(0)=2$ ，求 $\int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx$.

八、（本题满分 9 分）设 L 为一平面曲线，其上任意点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 。

- 1、求 L 的方程
- 2、求 L 的位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围成的图形的面积最小。

九、（本题满分 7 分）一个半球型的雪堆，其体积的融化的速率与半球面积 S 成正比 比例系数 $K > 0$ 。假设在融化过程中雪堆始终保持半球形状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$ ，问雪堆全部融化需要多少时间？

十、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数，且 $f(0) = 0$

- 1、写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；
- 2、证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η ，使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$

十一、（本题满分 6 分）已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 且矩阵 X 满足

$AXA + BXA = AXB + BXA + E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵，求 X 。

十二、（本题满分 6 分）已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系，若

$$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1, \text{ 讨论实数 } t \text{ 满足什么关系时, } \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$$

也是 $AX = 0$ 的一个基础解系。

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则 $(E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题

6. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足 ()

(A) $a < 0, b < 0.$ (B) $a > 0, b > 0.$

(C) $a \leq 0, b > 0.$ (D) $a \geq 0, b < 0.$

7. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则 ()

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

8. 设函数 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有 ()

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x).$ (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x).$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b).$ (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a).$

9. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf'(x)}{x^3} \right) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 为 ()

(A) 0. (B) 6. (C) 36. (D) ∞

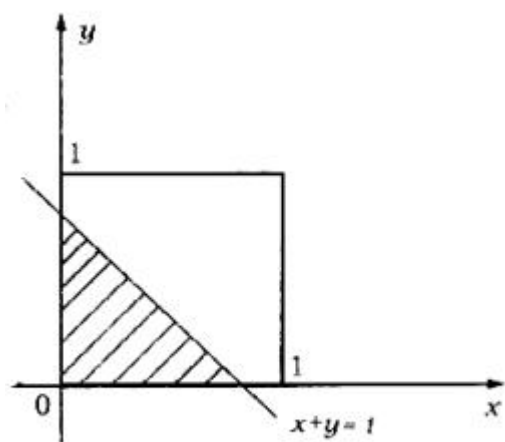
10. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是 ()

- (A) $y''' - y'' - y' + y = 0$. (B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.
(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. (D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

三、解答题

11. 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

12. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t (t \geq 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $\int_0^x S(t) dt (x \geq 0)$.



13. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

14. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明: $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

15. 某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标, 为了治理污水, 从 2000 年年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量将至 m_0 以内? (注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x)dx = 0, \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$. 试证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

17. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + a(x)$ 其中 $a(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时, 比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

18. 设曲线 $y=ax^2 (a>0, x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形。问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

19. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足等式 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t)dt = 0$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 成立不等式: $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

20. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, A = \alpha\beta^T, B = \beta^T\alpha$, 其中 β^T 是 β 的转置, 求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$

21. 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3

可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值。

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_____.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} =$ _____.

(3) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx =$ _____.

(4) 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 上的评价值为_____.

(5) 微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为_____.

二、选择题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leq 0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

- (A) 极限不存在 (B) 极限存在, 但不连续
(C) 连续, 但不可导 (D) 可导

2. 设 $a(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$ 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $a(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ()

- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等阶无穷小

3. 设 $f(x)$ 是连续函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 ()

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

4. “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()

- (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

5. 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

三、（本题满分 5 分）

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$

四、（本题满分 6 分）

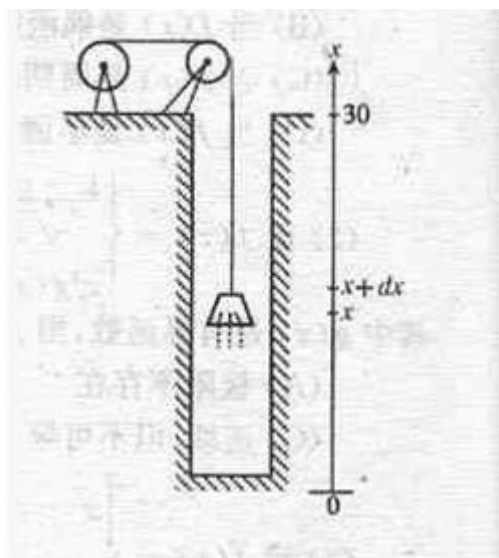
计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

五、（本题满分 7 分）

求初值问题 $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0, (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$ 的解

六、（本题满分 7 分）

为清楚井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥提出井口，已知井深 30m，抓斗自重 400N，缆绳每米重 500N，抓斗抓起的污泥重 2000N，提升速度为 3m/s，在提升过程中，污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？（说明：① $1\text{N} \times 1\text{m} = 1\text{J}$ ；m, N, s, J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；② 抓斗的高度位于井口上方的缆绳长度忽略不计）



七、（本题满分 8 分）

已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ ，求

- (1) 函数的增减区间及极值；
- (2) 函数图形的凸凹区间及拐点；

(3) 函数图形的渐近线。

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, 证明: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi)=3$

九、(本题满分 8 分)

设函数 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导, 且 $y'(x) > 0$, $y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y=y(x)$ 的方程。

十、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty]$ 上单调减少且非负连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(y) - \int_1^n f(x) dx$ ($n=1,2,\dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。

十一、(本题满分 6 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求矩阵 X .

十二、(本题满分 5 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$, $\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3 = (3,2,-1, p+2)^T$, $\alpha_4 = (-2,-6,10,p)^T$

(1) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\alpha = (4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

(2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) (x > 0)$ 的渐进线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题

1. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 ()

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

(2) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 的不可导点的个数是 ()

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(3) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1 + x^2} + \alpha$, 其中 α 是比 $\Delta x (\Delta x \rightarrow 0)$ 高阶无穷小, 且 $y(0) = \pi$, 则

$y(1) =$ ()

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

(B) 2π

(C) π

(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内连续, 且 $f(a)$ 为其极大值, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时, 必有 ()

(A) $(x - a)[f(x) - f(a)] \geq 0$

(B) $(x - a)[f(x) - f(a)] \leq 0$

(C) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \geq 0 (x \neq a)$

(D) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \leq 0 (x \neq a)$

5. 设 A 是任一 $n (n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$, 则必有 $(kA)^* =$ ()

(A) kA^*

(B) $k^{n-1}A^*$

(C) $k^n A^*$

(D) $k^{-1}A^*$

三、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型。

四、(本题满分 5 分)

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学视频文档资料，【公众号：小盆考研】，回复【数学】免费获取

更多考研押题资料视频，【公众号：小盆考研】免费提供

更多考研数学预测卷，【公众号：小盆考研】，回复【数学预测】免费获取

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$.

五、(本题满分 5 分)

利用代换 $y = \frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$ 化简, 并求出原方程的通解.

六、(本题满分 6 分)

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

七、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m , 体积为 B , 海水比重为 ρ , 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 k ($k > 0$). 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y = f(v)$.

八、(本题满分 8 分)

设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数。

(1) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的梯形面积。

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明 (1) 中的 x_0 是唯一的。

九、(本题满分 8 分)

设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积。

十、（本题满分 8 分）

设 $y = y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ ，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方

程为 $y = x + 1$ ，求该曲线的方程，并求函数 $y = y(x)$ 的极值。

十一、（本题满分 6 分）

设 $x \in (0,1)$ ，证明：

$$(1) (1+x)\ln^2(1+x) < x^2;$$

$$(2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

十二、（本题满分 5 分）

设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$ ，其中 E 是 4 阶单位矩阵， A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵，

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{求 } A.$$

十三、（本题满分 8 分）

已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$, $\beta = (3, 10, b, 4)^T$ ，问：

(1) a, b 取何值时， β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？

(2) a, b 取何值时， β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？并写出表达式。