2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的.

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

(2) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是(　　)

(A)（0，0）　　(B) （0，3）　　(C) （3，0）　　(D) （1，1）

(3) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则(　　)

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$　　(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

(4) 若续数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})\right]$ 收敛，则 k =(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

(5) 设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则(　　)

(A) $E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(B) $E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(D) $E-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(6) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

(7) 设 A，B，C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是　　(　　)

(A) A 与 B 相互独立　　(B) A 与 B 互不相容

(C) AB 与 C 相互独立　　(D) AB 与 C 互不相容

(8) 设 $X_1, X_2, \dots X_n (n\ge 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 则下列结论正确的是(　　)

(A) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 服从 x^2 分布　　(B) $2(x_n-x_1)^2$ 服从 x^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2$ 服从 x^2 分布　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 x^2 分布

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$ ________.

(10) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 通解为 $y_t=$

(11) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(q)=1+e^{-q}$，其中产量为 q，则边际成本为

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$， $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$

(13) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, α_1、α_2、α_3 为线性无关的 3 维列向量组。则向量组 $A\alpha_1$、$A\alpha_2$、$A\alpha_3$ 的秩为

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=a$，$P\{X=3\}=b$，若 $EX=0$,则 $DX=$

三、解答题：15～23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

(16) (本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D \dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

(17) (本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}ln(1+\dfrac{k}{\lambda})$

(18) (本题满分 10 分)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间（0,1）内有实根，确定常数 k 的取值范围.

(19) (本题满分 10 分)

设 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1、2、3\cdots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数

(I)证幂 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1.

(II)证 $(1-X)S'(x)-xS(x)=0\left(x\in(-1,1)\right)$，并求 $S(x)$ 表达式.

(20) (本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

(I)证明 $r(A)=2$；

(II)若 $\beta=a_1+a_2,a_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

(21)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变来那个为 X，Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$,$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(I)求 $P(Y\le EY)$；

(II)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ.

(I)求 Z_1 的概率密度；

(II)利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(III)求 σ 的最大似然估计量.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则（　）

A.函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

B.函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

C.函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

D.函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

（2）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则（　）

A. $f_x'-f_y'=0$　　B. $f_x'+f_y'=0$　　C. $f_x''-f_y''=f$　　D. $f_x''-f_y''=f$

（3）设 $J_k=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}dxdy(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{x}\right\}$ $D_3=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\right\}$ 则（　）

A. $J_1<J_2<J_3$　　B. $J_3<J_1<J_2$　　C. $J_2<J_3<J_1$　　D. $J_2<J_1<J_3$

（4）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})\sin(n+k)$（$k$ 为常数）（　）

A.绝对收敛　　B.条件收敛　　C.发散　　D.收敛性与 k 有关

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　）

A. A^T 与 B^T 相似　　B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　D. $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1,2，则（　）

A. $a>1$　　B. $a<-2$　　C. $-2<a<1$　　D. $a=1$ 或 $a=-2$

（7）设 A,B 为两个随机变量，且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则（　）

A. $P(\overline{B}|\overline{A})=1$　　B. $P(A|\overline{B})=0$　　C. P（$A\cup B$）$=1$　　D. $P(B|A)=1$

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$（　）

A.6　　B.8　　C.14　　D.15

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$__________.

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$__________.

（12）设 $D=\{(x,y)\,\|\,x|\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$__________.

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$__________.

（14）设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为__________.

三、解答题：15-23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$。

（16）（本题满分 10 分）

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价（万元）。

（Ⅰ）求需求函数的表达式；

（Ⅱ）求 $p=100$ 万元时的边际效益，并说明其经济意义。

（17）设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$,求$f'(x)$,并求$f(x)$的最小值。

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t+e^{-x}-1$，求 $f(x)$。

（19）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

（20）（本题满分 11 分）

设矩形 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

求：（1）求 a 的值

（2）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 A^{99}

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$。记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\le Y.\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

（I）写出 (X,Y) 的概率密度；

（II）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta,\\ 0, \qquad 其他,\end{cases}$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.。

（1）求 T 的概率密度；

（2）确定 a，使得 $E(aT)=\theta$.

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是：（　　）

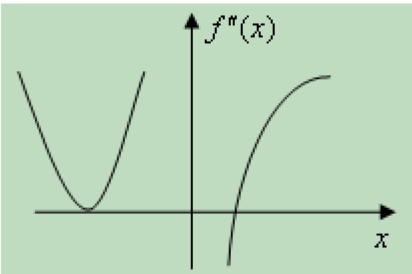
(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为：



(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(3) 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2x, x^2+y^2\le 2y\right\}$,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$　（　　）

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(D) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

(4) 下列级数中发散的是：（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$　　(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为：

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$　(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为：（　）

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则:（　）

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$　(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　(D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值,则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$　(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　(D) $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$ ________.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$ ________.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$ ________.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$，$B=A^2-A+E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|B|=$ ________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$是等价无穷小，求$a,b,k$的值.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$.

(17) (本题满分 10 分)

为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设Q为该商品的需求量，P为价格，MC为边际成本，η为需求弹性$(\eta>0)$.

(I) 证明定价模型为$P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

(II) 若该商品的成本函数为$C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为$Q=40-P$，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格.

(18) (本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零，若对任意的$x_0\in I$，曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线$x=x_0$及x轴所围成区域的面积恒为 4，且$f(0)=2$，求$f(x)$的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

(I) 设函数$u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(II) 设函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(I) 求a的值；

(II)若矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵，求$\boldsymbol{X}$.

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(I)求 a,b 的值；

(II)求可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测,直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止.记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布；

(II) 求 EY .

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta},\theta\le x\le 1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量.

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有：（　）

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$　(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$　(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$　(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

(2) 下列曲线有渐近线的是：（　）

(A) $y = x + \sin x$　(B) $y = x^2 + \sin x$　(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$　(D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

(3) 设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$,当 $x \to 0$ 时,若 $P(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小,则下列试题中错误的是 :(　)

(A)$a = 0$　(B)$b = 1$　(C)$c = 0$　(D)$d = \frac{1}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上：（　）

(A)当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$　(B)当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

(C)当 $f''(x) \geq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$　(D)当 $f''(x) \geq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ （　）

(A) $(ad-bc)^2$　(B) $-(ad-bc)^2$　(C) $a^2d^2 - b^2c^2$　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(6) 设 a_1, a_2, a_3 均为三维向量，则对任意常数 k, l ,向量组 $a_1 + ka_3$, $a_2 + la_3$ 线性无关是向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关的：（　）

(A) 必要非充分条件　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分也非必要条件

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B) = 0.5$，$P(A-B) = 0.3$，则 $P(B-A) =$ （　）

(A) 0.1　(B) 0.2　(C) 0.3　(D) 0.4

(8) 设X_1,X_2,X_3为来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则统计量$S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$服从的分布为（　）

(A)$F(1,1)$　　(B)$F(2,1)$　　(C)$t(1)$　　(D)$t(2)$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设某商品的需求函数为$Q=40-2p$（p为商品的价格），则该商品的边际收益为_______.

(10) 设D是由曲线$xy+1=0$与直线$y+x=0$及$y=2$围成的有界区域，则D的面积为_______.

(11) 设$\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$，则$a=$_________.

(12) 二次积分$\int_0^1 dy\int_y^1(\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=$_________.

(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是 1，则$a$的取值范围________.

(14) 设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta,\\0,\quad 其他,\end{cases}$其中$\theta$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单样本，若$E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2$，则$c=$________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge0,y\ge0\right\}$，计算$\iint\limits_D\dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数$f(u)$具有连续导数，$z=f(e^x\cos y)$满足$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$.

若$f(0)=0,f'(0)=0$，求$f(u)$的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)$单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,x\in[a,b]$；

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵.

(I)求方程组$Ax=0$的一个基础解系；

(II)求满足$AB=E$的所有矩阵B.

(21) (本题满分 11 分)

证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i),(i=1,2)$.

(I)求Y的分布函数$F_Y(y)$；

(II)求EY.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量X,Y的概率分布相同，X的概率分布为$P\{X=0\}=\frac{1}{3},P\{X=1\}=\frac{2}{3}$,且$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(I)求(X,Y)的概率分布；

(II)求$P\{X+Y\le 1\}$.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是：(　　)

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$　(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$　(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为：(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k = \iint\limits_{D_k} (y - x)dxdy$　$(k = 1,2,3,4)$，则：(　　)

(A) $I_1 > 0$　　(B) $I_2 > 0$　　(C) $I_3 > 0$　　(D) $I_4 > 0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是：(　　)

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在

(D) 若存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆.则：(　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为：(　　)

(A) $a=0,b=2$　　(B) $a=0,b$为任意常数

(C) $a=2,b=0$　　(D) $a=2,b$为任意常数

(7) 设X_1,X_2,X_3是随机变量，且$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$p_j=P\{-2\le X_j\le 2\}$ $(j=1,2,3)$，则：(　)

(A) $p_1>p_2>p_3$　　(B) $p_2>p_1>p_3$　　(C) $p_3>p_1>p_2$　　(D) $p_1>p_3>p_2$

(8) 设随机变量X和Y相互独立，则X和Y的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则$P\{X+Y=2\}=$：(　)

(A) $\frac{1}{12}$　　(B) $\frac{1}{8}$　　(C) $\frac{1}{6}$　　(D) $\frac{1}{2}$

二、填空题：9～14小题,每小题4分,共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设曲线$y=f(x)$与$y=x^2-x$在点$(1,0)$处有公共切线，则$\lim\limits_{n\to\infty}nf(\frac{n}{n+2})=$ ________.

(10) 设函数$z=z(x,y)$由方程$(z+y)^x=xy$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________.

(12) 微分方程

$y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为$y=$ ________.

(13) 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是3阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$为$\boldsymbol{A}$的行列式，$\boldsymbol{A}_{ij}$为a_{ij}的代数余子式，

若$a_{ij}+\boldsymbol{A}_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则$|\boldsymbol{A}|=$ ________.

(14) 设随机变量X服从标准正态分布$N(0,1)$，则$E(Xe^{2X})=$ ________.

三、解答题：15～23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分10分）

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值．

(16)（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x,$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2 dxdy$.

(18)（本题满分 10 分）

设生产某产品的固定成本为 60000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1000}$，（p 是单价，单位：元，Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

(I) 该商品的边际利润；(II) 当 $p=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

(III) 使得利润最大的定价 p .

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.证明：

(I) 存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

(II) 对(I)中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$.

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$,并求所有矩阵 C .

(21)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$；

(II) 若α,β正交且均为单位变量，证明f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设(X,Y)是二维随机变量，X 的边缘概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 在给定$X=x(0<x<1)$的条件下Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

(I) 求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$;

(II) 求Y 的边缘概率密度$f_Y(y)$;

(III) 求$P\{X>2Y\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{\frac{-\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中θ为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X 的简单随机样本.

(I) 求θ的矩估计量；

(II) 求θ的最大似然估计量 .

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为：(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$：(　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.　　(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr=$：(　　)

(A) $\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$.　　(B) $\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$.

(C) $\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$.　　(D) $\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$.

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛，则：(　　)

(A) $0<\alpha\le\frac{1}{2}$.　　(B) $\frac{1}{2}<\alpha\le1$.　　(C) $1<\alpha\le\frac{3}{2}$.　　(D) $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为：

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$：(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2\le1\}=$：(　　)

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{\pi}{8}$.　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

(8) 设X_1,X_2,X_3,X_4为来自总体$X\sim N(1,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，则统计量$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$的分布为：(　)

(A) $N(0,1)$.　　(B) $t(1)$.　　(C) $\chi^2(1)$.　　(D) $F(1,1)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________.

(10) 设函数$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$，$y=f[f(x)]$，则$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$ ________.

(11) 设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则$dz|_{(0,1)}=$ ________.

(12) 由曲线$y=\frac{4}{x}$和直线$y=x$及$y=4x$在第一象限中围成的平面图形的面积为________.

(13) 设A为3阶矩阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵.若交换A的第1行与第2行得矩阵B，则$|BA^*|=$ ________.

(14) 设A,B,C是随机事件，A与C互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, 则$P\left(AB\middle|\overline{C}\right)=$ ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是以曲线$y=\sqrt{x}, y=\frac{1}{\sqrt{x}}$及$y$轴为边界的无界区域.

(17)（本题满分 10 分）

某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为10000(万元)，设该企业生产甲、乙两种产品的产量

分别为x(件)和y(件)，且这两种产品的边际成本分别为$20+\frac{x}{2}$(万元/件)与$6+y$(万元/件).

(I) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数$C(x,y)$(万元)；

(II) 当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

(III) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

(18) (本题满分 10 分)

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},(-1<x<1)$.

(19) (本题满分 10 分)

已知函数$f(x)$满足方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$.

(I) 求$f(x)$的表达式；

(II) 求曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$的拐点.

(20) (本题满分 11 分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式$|\boldsymbol{A}|$；

(II) 当实数a为何值时，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，并求其通解．

(21) (本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2 .

(I) 求实数 a 的值；

(II) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$ ；

(II) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从参数为 1 的指数分布.记 $U=\max\{X,Y\}$ ，$V=\min\{X,Y\}$.

(I) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$ ；

(II) 求 $E(U+V)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则：（　）

(A) $k=1,c=4$.　(B) $k=1,c=-4$.　(C) $k=3,c=4$.　(D) $k=3,c=-4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　）

(A) $-2f'(0)$.　(B) $-f'(0)$.　(C) $f'(0)$.　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是：（　）

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是：（　）

(A) $I<J<K$.　(B) $I<K<J$.　(C) $J<I<K$.　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（　）

(A) P_1P_2.　(B) $P_1^{-1}P_2$.　(C) P_2P_1.　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 A 为 4×3 矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为：（　）

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是：（　）

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.　(C) $f_1(x)F_2(x)$.　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有：(　　)

(A) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$． (B) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$．

(C) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$． (D) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$．

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

(10) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$________.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$．

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f[x+y,f(x,y)]$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$．

(17)（本题满分 10 分）

求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

(18)（本题满分 10 分）

证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy = \iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$ ，$D_t = \{(x,y)|0 \le y \le t-x, 0 \le x \le t\}(0<t \le 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^T$,

$\boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^T$ 线性表示．

(I) 求 a 的值；

(II) 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)（本题满分 11 分）

设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量；(II) 求矩阵 A.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求边缘概率密度 $f_X(x)$；

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

2010年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题(1~8小题，每小题4分，共32分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则$a$等于（　　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设y_1,y_2是一阶线性非齐次微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个特解，若常数λ,μ使$\lambda y_1+\mu y_2$是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$是该方程对应的齐次方程的解，则：（　　）

(A) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$.　　(C) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$.

(3) 设函数$f(x),g(x)$具有二阶导数，且$g''(x)<0$，若$g(x_0)=a$是$g(x)$的极值，则$f[g(x)]$在x_0取极大值的一个充分条件是：（　　）

(A) $f'(a)<0$.　　(B) $f'(a)>0$.　　(C) $f''(a)<0$.　　(D) $f''(a)>0$.

(4)设$f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当$x$充分大时有：（　　）

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

(5) 设向量组$\mathrm{I}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\mathrm{II}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，下列命题正确的是：（　　）

(A) 若向量组I线性无关，则$r\le s$.　　(B) 若向量组I线性相关，则$r>s$.

(C) 若向量组II线性无关，则$r\le s$.　　(D) 若向量组II线性相关，则$r>s$.

(6) 设$\boldsymbol{A}$为4阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若$\boldsymbol{A}$的秩为$3$，则$\boldsymbol{A}$相似于：（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1,\end{cases}$$ 则$P\{X=1\}$ = (　　)

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\le 0,\\ bf_2(x), & x>0,\end{cases}\ (a>0,b>0)$$ 为概率密度，则a,b应满足：(　　)

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.　　(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、填空题(9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设可导函数$y=y(x)$由方程$\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$确定，则$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ = ________.

(10) 设位于曲线$y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}\ (e\le x<+\infty)$下方，$x$轴上方的无界区域为$G$，则$G$绕$x$轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

(11) 设某商品的收益函数为$R(p)$，收益弹性为$1+p^3$，其中p为价格，且$R(1)=1$，则$R(p)$ =________.

(12) 若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点$(-1,0)$，则$b=$ ________.

(13) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$3$阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|$ =________.

(14) 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)\ (\sigma>0)$的简单随机样本，记统计量$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则$E(T)$ = ________.

三、解答题(15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+y)^3dxdy$，其中$D$由曲线$x=\sqrt{1+y^2}$与直线$x+\sqrt{2}y=0$及$x-\sqrt{2}y=0$围成.

(17) (本题满分 10 分)

求函数$u=xy+2yz$在约束条件$x^2+y^2+z^2=10$下的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 比较$\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$与$\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由；

(II) 记$u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(19) (本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内存在二阶导数，且$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$.

(I) 证明存在$\eta\in(0,2)$，使$f(\eta)=f(0)$；

(II) 证明存在$\xi\in(0,3)$，使$f''(\xi)=0$.

(20) (本题满分 11 分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$存在$2$个不同的解.

(I) 求λ，a；

(II) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23) (本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 $1,2,3$ 个，现从箱中随机地取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Cov(X,Y)$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为：（　　）

(A) 1.　　　　(B) 2.　　　　(C) 3.　　　　(D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小：（　　）

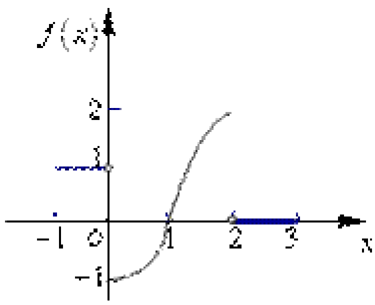
(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

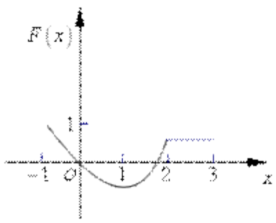
(3) 使不等式 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt>\ln x$ 成立的 x 的范围是：（　　）

(A) $(0,1)$.　　　　(B) $(1,\dfrac{\pi}{2})$.　　　　(C) $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$.　　　　(D) $(\pi,+\infty)$.

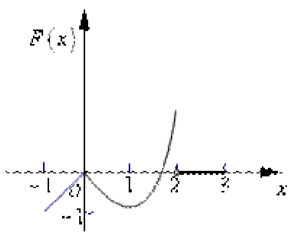
(4)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为：



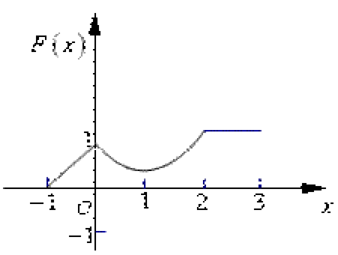
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为：（　　）



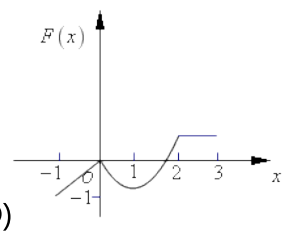
(A)



(B)



(C)



(D)

(5) 设A,B均为2阶矩阵，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为：(　　)

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(6) 设A,P均为3阶矩阵，P^T为P的转置矩阵，且$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^TAQ$为：(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) 设事件A与事件B互不相容，则：(　　)

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(\overline{A})=1-P(B)$.　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

(8) 设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$.记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为：(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

(10) 设$z=(x+e^y)^x$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.

(11) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为________.

(12) 设某产品的需求函数为$Q=Q(p)$，其对价格p的弹性$\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为10000件时，价格增加1元

会使产品收益增加________元.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^T$.若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $E(T)=$________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx\quad(x>0)$.

(17) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2,y\ge x\right\}$.

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(II) 证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19) (本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$.已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线方程.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(I) 求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(I) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(II) 求条件概率 $P\left\{X\le 1\middle|Y\le 1\right\}$.

(23) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球，2 个黑球与 3 个白球.现有放回地从袋中取两次，每次取一个球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\left\{X=1\middle|Z=0\right\}$；

(II) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

2008年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上连续，则$x=0$是函数$g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$的：（　）

(A) 跳跃间断点　(B) 可去间断点　(C) 无穷间断点　(D) 振荡间断点.

(2) 如图，曲线段方程为$y=f(x)$，函数$f(x)$在区间$[0,a]$上有连续的导数，则定积分$\int_0^a xf'(x)dx$等于：（　）

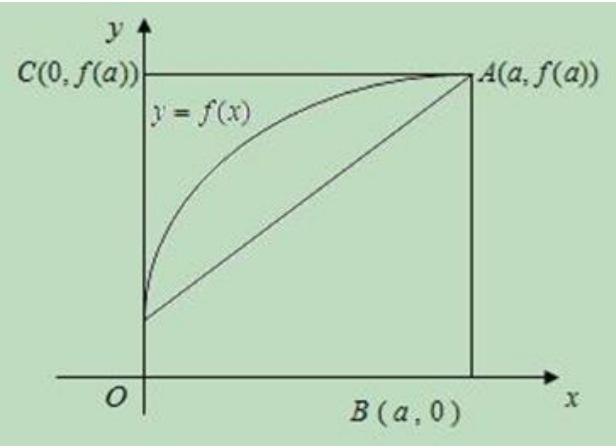
(A) 曲边梯形$ABOD$面积　(B) 梯形$ABOD$面积

(C) 曲边三角形ACD面积　(D) 三角形ACD面积.

(3) 设$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则：（　）

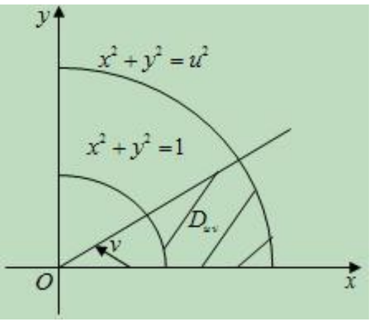
(A) $f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$存在　(B) $f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在

(C) $f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$不存在　(D) $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都不存在.



(4) 设函数f连续.若$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域$D_{uv}$为图中阴影部分，则$\dfrac{\partial F}{\partial u}=$（　）

(A) $vf(u^2)$　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　(C)$vf(u)$　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$



(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则：(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为：(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

(7) 随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为：(　　)

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-\left[1-F(x)\right]^2$　　(D) $\left[1-F(x)\right]\left[1-F(y)\right]$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则：(　　)

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) [illegible]　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\le c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ________.

(10) 设函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)dx=$ ________.

(11) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D(x^2-y)dxdy=$ ________.

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________.

(13) 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,2$，$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=$ ________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ ________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

(15) (本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

(16) (本题满分 10 分)

设$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中φ具有2阶导数且$\varphi'\neq -1$.

(I) 求dz；

(II) 记$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

(17) (本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$,其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

(18) (本题满分 10 分)

设$f(x)$是周期为2的连续函数，

(I) 证明对任意的实数t，都有$\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$；

(II) 证明$G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$是周期为$2$的周期函数.

(19) (本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为$r=0.05$，并依年复利计算.某基金会希望通过存款A万元实现第一年提取19万元，第二年提取28万元，$\cdots$，第n年取出$(10+9n)$万元，并能按此规律一直提取下去，问A至少应为多少万元？

(20) (本题满分 12 分)

设n元线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},$$

(I) 证明行列式$\left|A\right|=(n+1)a^n$；

(II) 当a为何值时，该方程组有唯一解，并求x_1；

(III) 当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

(21) (本题满分 10 分)

设A为3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$A$的分别属于特征值$-1,1$特征向量，向量$\boldsymbol{\alpha}_3$满足$A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

(II) 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量X与Y相互独立，X概率分布为$P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记$Z=X+Y$.

求：(I) $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$；

(II) 求Z的概率密度$f_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本.记

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(I) 证明T是μ^2的无偏估计量；

(II) 当$\mu=0,\sigma=1$时，求$D(T)$.