2007年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

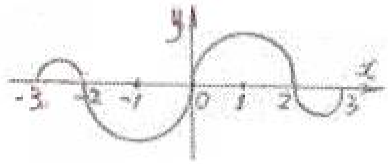
(1)当$x \to 0^+$时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是（　　）

(A)$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

(2)曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$,渐近线的条数为（　　）

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(3)如图,连续函数$y=f(x)$在区间$[-3,-2],[2,3]$上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间$[-2,0],[0,2]$的图形分别是直径为2的上、下半圆周,设$F(x)=\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是（　　）



(A)$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　(B)$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

(C)$F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　(D)$F(3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4)设函数$f(x)$在$x=0$处连续,下列命题错误的是（　　）

(A)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f(0)=0$　　(B)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则$f(0)=0$

(C)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f'(0)=0$　　(D)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则$f'(0)=0$

(5)设函数$f(x)$在(0, $+\infty$)上具有二阶导数,且$f''(x)>0$, 令$u_n=f(n)=1,2,\cdots,n,$则下列结论正确的是（　　）

(A)若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　(B)若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(C)若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　(D)若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(6)设曲线$L:f(x,y)=1$($f(x,y)$具有一阶连续偏导数),过第2象限内的点M和第Ⅳ象限内的点N,Γ为L上从点M到N的一段弧,则下列小于零的是（　　）

(A)$\int_\Gamma (x,y)dx$　　(B)$\int_\Gamma f(x,y)dy$　　(C)$\int_\Gamma f(x,y)ds$　　(D)$\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

(7)设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,则下列向量组线形相关的是（　　）

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

(8) 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$（　　）

(A) 合同, 且相似　　(B) 合同, 但不相似

(C) 不合同, 但相似　　(D) 既不合同, 也不相似

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p\left(0<p<1\right)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为（　　）

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

(10) 设随即变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为（　　）

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$　　(C) $f_X(x)\ f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题(11－16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上)

(11) $\int_1^2 \dfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx$ =______.

(12) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f(x^y,y^x)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ =______.

(13) 二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 y =__________.

(14) 设曲面 $\sum:|x|+|y|+|z|=1$, 则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)ds$ =__________.

(15) 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^3$ 的秩为_______.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为_______.

三、解答题(17－24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17) (本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

(18)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$,

证明:存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$.

(1)证明: $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$.

(2)求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$, 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$, 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2.\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量,

记$\mathbf{B}=\mathbf{A}^5-4\mathbf{A}^3+\mathbf{E}$, 其中$\mathbf{E}$为3阶单位矩阵.

(1)验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\mathbf{B}$的特征向量, 并求$\mathbf{B}$的全部特征值与特征向量.

(2)求矩阵$\mathbf{B}$.

(23)(本题满分11分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$

(1)求$P\{X>2Y\}$.　(2)求$Z=X+Y$的概率密度$fz(z)$.

(24)(本题满分11分)

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, \theta\le x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$

其中参数$\theta(0<\theta<1)$未知，$X_1,X_2\cdots,X_n$是来自总体x的简单随机样本, $\overline{X}$是样本均值

(1)求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$.

(2)判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量, 并说明理由.

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

(2)微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

(3)设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ($0\le z\le 1$)的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$________.

(4)点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}$ 为2阶单位矩阵,矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{BA}=\mathbf{B}+2\mathbf{E}$,则 $|\mathbf{B}|=$________.

(6)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求)

(7)设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　)

(A) $0<dx<\Delta y$

(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$

(D) $dy<\Delta y<0$

(8)设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(9)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

(10)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y^1(x,y)\ne 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　)

(A)若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (B)若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

(C)若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (D)若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

(11)设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 均为 n 维列向量, $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是（ ）

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 线性相关, 则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$, 线性相关

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 线性相关, 则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$, 线性无关

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 线性无关, 则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$, 线性相关

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 线性无关, 则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$, 线性无关.

(12)设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\mathbf{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\mathbf{B}$, 再将 $\mathbf{B}$ 的第 1 列的−1 倍加到第 2 列得 $\mathbf{C}$, 记 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则（ ）

(A) $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ (B) $\mathbf{C} = \mathbf{PAP}^{-1}$ (C) $\mathbf{C} = \mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ (D) $\mathbf{C} = \mathbf{PAP}^T$

(13)设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有（ ）

(A) $P(A \cup B) > P(A)$ (B) $P(A \cup B) > P(B)$

(C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup B) = P(B)$

(14)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则必有（ ）

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$ (B) $\sigma_1 > \sigma_2$ (C) $\mu_1 < \mu_2$ (D) $\mu_1 > \mu_2$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设区域 D=$\left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}$, 计算二重积分 $I = \iint\limits_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy$.

(16)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{\pi+1} = \sin x_n \left(n = 1, 2, ...\right)$.

求:(1)证明$\lim\limits_{x\to\infty} x_n$存在,并求该极限. (2)计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17)(本题满分 12 分)

将函数$f\left(x\right)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$展开成$x$的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数$f\left(u\right)$在$\left(0,+\infty\right)$内具有二阶导数,且$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1)验证$f''\left(u\right)+\dfrac{f'\left(u\right)}{u}=0$.

(2)若$f\left(1\right)=0,f'\left(1\right)=1$,求函数$f(u)$的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|y>0\right\}$内,函数$f\left(x,y\right)$是有连续偏导数,且对任意的$t>0$都有$f\left(tx,ty\right)=t^{-2}f\left(x,y\right)$.

证明:对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解,

(1)证明方程组系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r\left(\mathbf{A}\right)=2$;

(2)求 a,b 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设3阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-1,2,-1\right)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,-1,1\right)^T$ 是线性方程组 $\mathbf{A}x=0$ 的两个解.

(1)求 $\mathbf{A}$ 的特征值与特征向量.

(2)求正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 和对角矩阵 $\mathbf{A}$, 使得 $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\mathbf{A}$.

(22)(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 令$Y=X^2, F\left(x,y\right)$为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

(1)求 Y 的概率密度 $f_Y\left(y\right)$.

(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \theta, & 0<x<1, \\ 1-\theta, & 1\le x<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2...,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计

2005年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ____________.

(2)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为___________.

(3)设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}$=. ________.

(4)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$___________.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,记矩阵 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$,如果 $|\mathbf{A}|=1$,那么 $|\mathbf{B}|=$____.

(6)从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X, 再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y, 则 $P\{Y=2\}$=___________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内( )

(A)处处可导　　(B)恰有一个不可导点

(C)恰有两个不可导点　　(D)至少有三个不可导点

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有( )

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

(9)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数,则必有( )

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(10)设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$,根据隐函数存在定理,存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域,在此邻域内该方程( )

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

(11)设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是（　　）

(A) $\lambda_1 \neq 0$　　(B) $\lambda_2 \neq 0$　　(C) $\lambda_1 = 0$　　(D) $\lambda_2 = 0$

(12)设 $\mathbf{A}$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\mathbf{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\mathbf{B}.\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的伴随矩阵,则（　　）

(A)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\mathbf{B}^*$

(B)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\mathbf{B}^*$

(C)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\mathbf{B}^*$

(D)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\mathbf{B}^*$

(13)设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则（　　）

(A) $a=0.2,b=0.3$

(B) $a=0.4,b=0.1$

(C) $a=0.3,b=0.2$

(D) $a=0.1,b=0.4$

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差,则（　　）

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

三 、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

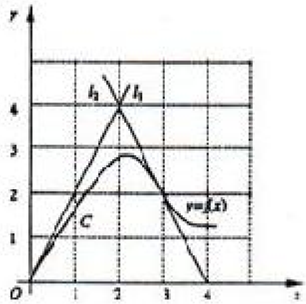
设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy.$

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\dfrac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图, 曲线C的方程为$y=f(x)$, 点$(3,2)$是它的一个拐点, 直线l_1与l_2分别是曲线C在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线, 其交点为$(2,4)$. 设函数$f(x)$具有三阶连续导数, 计算定积分$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx.$



(18) (本题满分 12 分)

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且$f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(1) 存在$\xi \in (0,1)$, 使得$f(\xi)=1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点$\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19) (本题满分 12 分)

设函数$\varphi(y)$具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上, 曲线积分$\oint_L \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.

(1) 证明: 对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线C, 有$\oint_C \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$.

(2) 求函数$\varphi(y)$的表达式.

(20) (本题满分 9 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为 2.

(1) 求a的值;

(2) 求正交变换$x=\mathbf{Q}y$, 把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形.

(3) 求方程$f(x_1,x_2,x_3)$=0 的解.

(21)（本题满分 9 分）

已知3阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的第一行是 $(a,b,c), a,b,c$ 不全为零, 矩阵 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$（$k$ 为常数）, 且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 求线性方程组 $\mathbf{A}x=0$ 的通解.

(22)（本题满分 9 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0<x<1, 0<y<2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求:(1) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)（本题满分 9 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i=1,2,\cdots,n$.

求:(1) Y_i 的方差 $DY_i, i=1,2,\cdots,n$.

(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$.

2004年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为__________ .

(2)已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)$=__________ .

(3)设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为__________.

(4)欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为__________ .

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{ABA}^*=2\mathbf{BA}^*+\mathbf{E}$,其中 $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵,$\mathbf{E}$ 是单位矩阵,则 $|\mathbf{B}|$=__________ .

(6)设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}$= __________ .

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(7)把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

(8)设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得(　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

(C)对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

(D)对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

(9)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,下列结论中正确的是(　　)

(A)若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$=0,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(B)若存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

(C)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$

(D)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$, 则 $F'(2)$ 等于（　　）

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0

(11) 设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶方阵, 将 $\mathbf{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\mathbf{B}$, 再把 $\mathbf{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\mathbf{C}$, 则满足 $\mathbf{AQ}=\mathbf{C}$ 的可逆矩阵 $\mathbf{Q}$ 为（　　）

(A) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(12) 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有（　　）

(A) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关, $\mathbf{B}$ 的行向量组线性相关

(B) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关, $\mathbf{B}$ 的列向量组线性相关

(C) $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关, $\mathbf{B}$ 的行向量组线性相关

(D) $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关, $\mathbf{B}$ 的列向量组线性相关

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$, 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$, 则 x 等于（　　）

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 则（　　）

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$　　(D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 12 分)

设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$, 证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700km/h 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times 10^{6}$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

(注:kg 表示千克,km/h 表示千米/小时)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^{3}dydz+2y^{3}dzdx+3(z^{2}-1)dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z=1-x^{2}-y^{2}\,(z\ge 0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^{n}+nx-1=0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_{n}, 并证明当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_{n}^{\alpha}$ 收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^{2}-6xy+10y^{2}-2yz-z^{2}+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组 $\begin{cases}(1+a)x_{1}+x_{2}+\cdots+x_{n}=0,\\ 2x_{1}+(2+a)x_{2}+\cdots+2x_{n}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_{1}+nx_{2}+\cdots+(n+a)x_{n}=0,\end{cases}\quad (n\ge 2)$,

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\mathbf{A}$ 是否可相似对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 A,B 为随机事件, 且 $P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}, P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$, 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求:(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

(2) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1, X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

求:(1) β 的矩估计量.

(2) β 的最大似然估计量

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ =__________ .

(2)曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是__________ .

(3)设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$,则 a_2 =__________ .

(4)从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为__________ .

(5)设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6x & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,则 $P\{X+Y\le 1\}=$_______ .

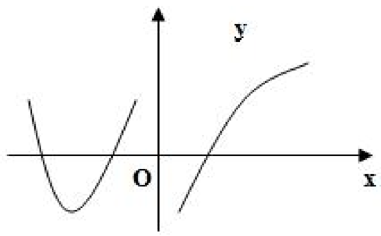
(6)已知一批零件的长度 X (单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40 (cm),则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是__________ .

(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95.$)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有(　　)

(A)一个极小值点和两个极大值点
(B)两个极小值点和一个极大值点
(C)两个极小值点和两个极大值点
(D)三个极小值点和一个极大值点



(2)设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

(3)已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,则

(A)点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　(B)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　(D)根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

(4)设向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则(　　)

(A)当 $r<s$ 时,向量组 II 必线性相关　　(B)当 $r>s$ 时,向量组 II 必线性相关
(C)当 $r<s$ 时,向量组 I 必线性相关　　(D)当 $r>s$ 时,向量组 I 必线性相关

(5) 设有齐次线性方程组 $\mathbf{A}x=0$ 和 $\mathbf{B}x=0$，其中 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题:

① 若 $\mathbf{A}x=0$ 的解均是 $\mathbf{B}x=0$ 的解，则秩$(\mathbf{A})\geq$秩$(\mathbf{B})$

② 若秩$(\mathbf{A})\geq$秩$(\mathbf{B})$，则 $\mathbf{A}x=0$ 的解均是 $\mathbf{B}x=0$ 的解

③ 若 $\mathbf{A}x=0$ 与 $\mathbf{B}x=0$ 同解，则秩$(\mathbf{A})=$秩$(\mathbf{B})$

④ 若秩$(\mathbf{A})=$秩$(\mathbf{B})$， 则 $\mathbf{A}x=0$ 与 $\mathbf{B}x=0$ 同解

以上命题中正确的是（　　）

(A)①②　　(B)①③　　(C)②④　　(D)③④

(6) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（　　）

(A) $Y\sim\chi^2(n)$　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$

(C) $Y\sim F(n,1)$　　(D) $Y\sim F(1,n)$

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A.

(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

五 、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq\pi, 0\leq y\leq\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 试证:

(1) $\oint_L x\,\mathrm{e}^{\sin y}dy-y\,\mathrm{e}^{-\sin x}dx=\oint_L x\,\mathrm{e}^{-\sin y}dy-y\,\mathrm{e}^{\sin x}dx$.

(2) $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq 2\pi^2$.

六 、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层.汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而作功.设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为$k.k>0$).汽锤第一次击打将桩打进地下am.根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数$r(0<r<1)$.问

(1)汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2)若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?(注:m 表示长度单位米.)

七 、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1)试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程.

(2)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

八 、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma},\ G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t} f(x^2)dx},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\leq t^2\}$, $D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq t^2\}$.

(1)讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

九 、(本题满分 10 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{P}$, 求 $\mathbf{B}+2\mathbf{E}$ 的特征值与特征向量, 其中 $\mathbf{A}^{*}$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

十 、(本题满分 8 分)

已 知 平 面 上 三 条 不 同 直 线 的 方 程 分 别 为 l_1: $ax+2by+3c=0$, l_2: $bx+2cy+3a=0$, l_3: $cx+2ay+3b=0$. 试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

十一 、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后, 求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

十二 、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$. (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$. (3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.

2002年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$ ______________.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$,则 $y''(0)=$______________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是______________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化为标准型 $f=6y_1^2$,则 $a=$______________.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 N(μ,σ^2)($\sigma>0$),且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续,

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则有:(　　)

(A)②⇒③⇒①　(B)③⇒②⇒①　(C)③⇒④⇒①　(D)③⇒①⇒④

(2) 设 $u_n\neq 0$($n=1,2,3,\cdots$),且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$(　　)

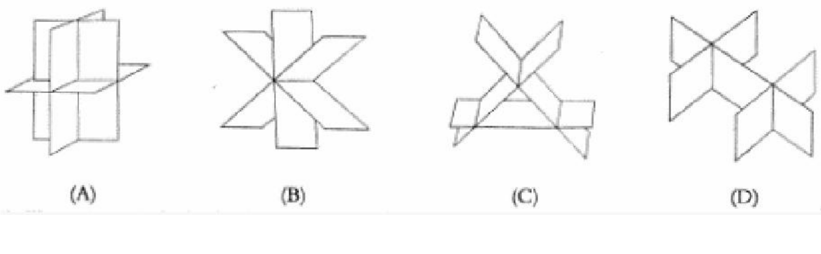
(A)发散　(B)绝对收敛　(C)条件收敛　(D)收敛性根据所给条件不能判定.

(3) 设函数 $y=f(x)$在($0,+\infty$)内有界且可导,则(　　)

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$　(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$时,必有 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=0$　(D) 当 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)$存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=0$.

(4) 设有三张不同平面,其方程为 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3,$ 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2,则这三张平面可能的位置关系为(　　)



(5) 设 $X_1和X_2$ 是相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)和f_2(x)$,分布函数分别为

$F_1(x)$ 和$F_2(x)$, 则（ ）

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度 (B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数 (D) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域具有一阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，, 试求 a,b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同. 写出此切线的方程, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数, L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线, 起点为(a,b), 终点为(c,d).

记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$,,

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关.

(2) 当 $ab=cd$ 时, 求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1\frac{x^3}{3!}+\frac{6^3}{6!}+\frac{9^3}{9!}+L+\frac{x^{n^3}}{(3n)!}+L$ ($-\infty<x<+\infty$) 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$.

(2) 利用（2）的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向的方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$, 写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚下寻找一山坡最大的点作为攀登的起点. 也就是说要在 D 的边界线上找出使(1) 中 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四维列向量, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 求线性方程组 $\mathbf{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为同阶方阵,

(1) 若 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相似, 证明 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的特征多项式相等.

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3) 当 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为实对称矩阵时, 证明(1)的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设维随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

十一、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ $(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数,利用总体 X 的如下样本值 3,1,3,0,3,1,2,3,

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为____________.

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}r)\big|_{(1,-2,2)}=$____________.

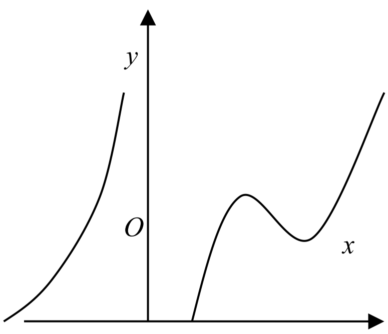
(3) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$____________.

(4) 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵,则 $(A-E)^{-1}=$____________.

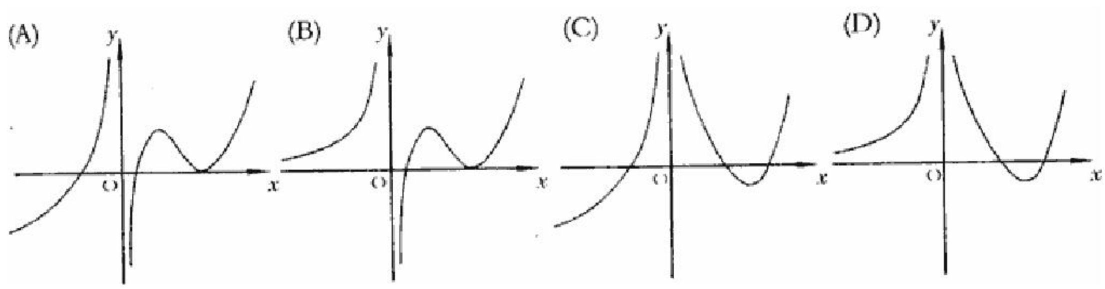
(5) 设随机变量 X 的方差是 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如右图所示,



则 $y=f'(x)$ 的图形为



(2) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$,则

(A) $d_z|_{(0,0)}=3dx+dy$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为{3, 1, 1}.

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为{1, 0, 3}.

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为{3, 0, 1}.

(3)设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 x=0 处可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

(4)设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同且相似. (B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似. (D) 不合同且不相似.

(5)将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于

(A)-1. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 1.

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\dfrac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1)=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f(x,$

$f(x,x))$. 求 $\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $y=f(x)$ $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$, 试证:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$, 存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$, 使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程, 其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米, 时间单位为小时), 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为 0.9), 问高度为 130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

九、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$, $\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots$, $\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 其中 t_1,t_2 为实常数. 试问 t_1,t_2 满足什么条件时, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关，且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$.

(1) 记 P =（ x, Ax, A^2x ），求 3 阶矩阵 B，使 $A = PBP^{-1}$；

(2) 计算行列式 $|A+E|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 λ（$\lambda > 0$）的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p（$0 < p < 1$），且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数，求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma > 0$），从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$（$n \geq 2$），其样本均值为 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，求统计量 $Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

2000年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx =$____________.

(2)曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为____________.

(3)微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为____________.

(4)已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解,则 $a=$____________.

(5)设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=$____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$

(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$

(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(2)设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分,则有(　　)

(A) $\iint\limits_S xdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$

(B) $\iint\limits_S ydS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$

(C) $\iint\limits_S zdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$

(D) $\iint\limits_S xyzdS = 4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

(3)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必收敛的级数为(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

(4)设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为(　　)

(A)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B)向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D)矩阵 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

(5)设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（　　）

(A) $E(X)=E(Y)$

(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$

(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

三、(本题满分 6 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

四、(本题满分 5 分)

设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{x}{y})$,其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心, R 为半径的圆周 $(R>1)$, 取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S, 都有 $\oiint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-\mathrm{e}^{2x}zdxdy=0$, 其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, 求 $f(x)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为R的球体,P_0是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到P_0距离的平方成正比(比例常数$k>0$),求球体的重心位置.

九、(本题满分 6 分)

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi}f(x)dx=0,\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0.$试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

十、(本题满分 6 分)

设矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$,且$\mathbf{ABA}^{-1}=\mathbf{BA}^{-1}+3\mathbf{E}$,其中$\mathbf{E}$为 4 阶单位矩阵,求矩阵$\mathbf{B}$.

十一、(本题满分 8 分)

某适应性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门,其缺额由招

收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工.设第n年1月份统计的熟练工与非熟练工所占百分比分别为x_n和y_n,记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1)求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(2)验证$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是$\mathbf{A}$的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值.

(3)当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$时,求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水线上每个产品不合格的概率为$p(0 < p < 1)$,各产品合格与否相对独立,当出现1个不合格产品时即停机检修.设开机后第1次停机时已生产了的产品个数为X,求X的数学期望$E(X)$和方差$D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命X的概率密度为$f(x;\theta) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & x \le \theta \end{cases}$,其中$\theta > 0$为未知参数.又设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是$X$的一组样本观测值,求参数$\theta$的最大似然估计值.

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})=$____________.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=$____________.

(3) $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$____________.

(4)设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素全为 1,则 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值是 ____________.

(5)设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件: $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$,

且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$, 则 $P(A)=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则( )

(A)当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数

(B)当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数

(D)当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

(2)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2 g(x) & x\le 0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处( )

(A)极限不存在 (B)极限存在,但不连续

(C)连续,但不可导 (D)可导

(3)设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-2x & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$, 其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$,则 $S(-\dfrac{5}{2})$ 等于( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $-\dfrac{3}{4}$

(4)设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则( )

(A)当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\mathbf{AB}|\ne 0$ (B)当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\mathbf{AB}|=0$

(C)当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\mathbf{AB}|\ne 0$ (D)当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\mathbf{AB}|=0$

(5)设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则（　　）

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$

(B) $P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$

(D) $P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

三、(本题满分 6 分)

设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\dfrac{dz}{dx}$.

四、(本题满分 5 分)

求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))dx+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)dy$, 其中 a,b 为正的常数, L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

五、(本题满分 6 分)

设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0,y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 ,区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲线的曲边梯形面积记为 S_2 ,并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1,求曲线 $y=y(x)$ 的方程.

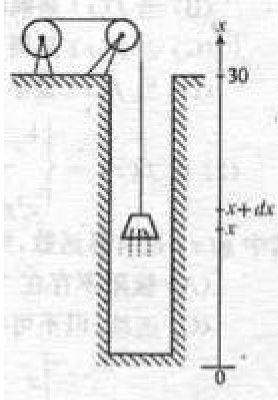
六、(本题满分 7 分)

试证:当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

七、(本题满分 6 分)

为清除井底的淤泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(见图).已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s,在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:①1N × 1m=1Jm,N,s,J 分别表示米,牛,秒,焦.②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



八、(本题满分 7 分)

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S,\pi$ 为 S 在点 P 处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离,求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

九、(本题满分 7 分)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$:

(1)求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值.

(2)试证:对任意的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

十、(本题满分 8 分)

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 其行列式 $|\mathbf{A}| = -1$, 又 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 有一个特征值 λ_0 ,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1,-1,1)^T$, 求 a,b,c 和 λ_0 的值.

十一、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定, $\mathbf{B}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, $\mathbf{B}^T$ 为 $\mathbf{B}$ 的转置矩阵,试证 $\mathbf{B}^T\mathbf{AB}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\mathbf{B}$ 的秩 $r(\mathbf{B}) = n$.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布率及关于 X 和关于 Y 的边缘分布率中的部分数值,试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X = x_i) = p_{i\bullet}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y = y_i) = p_{\bullet j}$	$\frac{1}{6}$			1

十三、(本题满分 6 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & 0< x < \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本

(1)求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

(2)求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

1998年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$____________.

(2)设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y), f,\varphi$ 具有二阶连续导数,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

(3)设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,$ 其周长记为 $a,$ 则 $\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)ds=$____________.

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵 ,$\left|\mathbf{A}\right|\neq 0, \mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 ,$\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵.若 $\mathbf{A}$ 有特征值 $\lambda,$ 则 $(\mathbf{A}^*)^2+\mathbf{E}$ 必有特征值

____________.

(5)设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

(1)设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$（ ）

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

(2)函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是（ ）

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

(3)已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha,$ 且当 $\Delta x\to 0$ 时 ,α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于（ ）

(A) 2π　　(B) π　　(C) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

(4)设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的,则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$（ ）

(A)相交于一点　　(B)重合

(C)平行但不重合　　(D)异面

(5)设 A,B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A}),$ 则必有

(A) $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　(B) $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

三、(本题满分 5 分)

求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

四、(本题满分 6 分)

确定常数 λ, 使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\mathbf{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

五、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系.设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为 m, 体积为 B, 海水密度为 ρ, 仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

六、(本题满分 7 分)

计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$, 其中 Σ 为下半平面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

七、(本题满分 6 分)

求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

八、（本题满分 5 分）

设正向数列$\{a_n\}$单调减少,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散,试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$是否收敛?并说明理由.

九、（本题满分 6 分）

设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(1)试证存在$x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积,等于在区间$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积.

(2)又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导,且$f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的x_0是唯一的.

十、（本题满分 6 分）

已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$化为椭圆柱面方程

$\eta^2+4\xi^2=4$,求a,b的值和正交矩阵$\mathbf{P}$.

十一、（本题满分 4 分）

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵,若存在正整数k,使线性方程组$\mathbf{A}^k x=\mathbf{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$,且$\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

证明:向量组$\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$是线性无关的.

十二、（本题满分 5 分）

已知方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解析为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^T,(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^T,\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^T$. 试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0 \\ \quad\vdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解,并说明理由.

十三、（本题满分 6 分）

设两个随机变量X,Y相互独立,且都服从均值为0、方差为$\frac{1}{2}$的正态分布,求随机变量$|X-Y|$的方差.

十四、（本题满分 4 分）

从正态总体$N(3.4,6^2)$中抽取容量为n的样本,如果要求其样本均值位于区间$(1.4,5.4)$内的概率不小于0.95,问样本容量n至少应取多大?

附:标准正态分布表 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990

十五、（本题满分 4 分）

设某次考试的学生成绩服从正态分布,从中随机地抽取36位考生地成绩,算得平均成绩为66.5分,标准差为15分.问在显著性水平0.05下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70 分?并给出检验过程.

附:t分布表 $P\{t(n)\le t_p(n)\}=p$

	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281