2019年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的.

（1）当$x \to 0$时，若$x - \tan x$与x^k是同阶无穷小，则k=（ ）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(2)已知方程$x^5 - 5x + k = 0$有3个不同的实根，则k的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-4)$　　(B) $(4,-\infty)$　　(C) $(4,-4)$　　(D) $(-4,4)$

(3) 已知微分方程$y'' + ay' + by = ce^x$的通解为$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$,则$a,b,c$依次为 ( )

(A) 1,0,1　　(B) 1,0,2　　(C) 2,1,3　　(D) 2,1,4

(4) 若$\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$条件收敛，则( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$条件收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$绝对收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$发散

(5) 设A是4阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，若线性方程组$Ax = 0$的基础解中只有2个向量，则$r(A^*)$ = ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(6) 设A是3阶实对称矩阵，E是3阶单位矩阵，若$A^2 + A = 2E$，且$|A| = 4$.则二次型$x^T Ax$的规范形为 ( )

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$　　(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

（7）设A,B为随机事件，则$P(A) = P(B)$的充分必要条件是 ( )

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$　　(B) $P(AB) = P(A)P(B)$

(C) $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$　　(D) $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$

（8）设随机变量X与Y相互独立，且都服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|<1\}$（ ）

(A) 与μ无关，而与σ^2有关　　(B) 与μ有关，而与σ^2无关

(C) 与μ，σ^2都有关 (D) 与μ，σ^2都无关

二、填空题：9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{n(n+1)})^n=$ ________.

(10) 曲线$y=x\sin x+2\cos x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})$的拐点坐标为 ________.

(11已知函数$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$,则$\int_0^1 x^2f(x)dx=$ ________.

(12) 以P_A,P_B分别表示A,B两个商品的价格，设商品A的需求函数$Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$,则当$P_A=10$，$P_B=20$时，商品$A$的需求量对自身价格弹性$\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$为_____.

(13)已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$,$b=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$.若线性方程组$Ax=b$有无穷多解，则$a=$ _____.

(14) 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\0, & \text{其他}\end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数，$EX$为$X$的数学期望，则$P\{F(X)>EX-1\}=$ ________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数$f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\xe^x+1, & x\le 0\end{cases}$,求$f'(x)$,并求$f(x)$的极值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数$f(u,v)$具有2阶连续偏导数，函数$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$,求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数$y(x)$是微分方程$y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(1)=\sqrt{e}$的特解.

(1）求$y(x)$;

(2）设平面区域$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$,求$D$绕$x$轴旋转所得旋转体的体积.

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

(18)(本题满分 10 分)

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\left(x\geq 0\right)$与$x$轴之间图形的面积.

(19)(本题满分 10 分)

设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n=0,1,2)$

（1）证明：数列$\{a_n\}$单调减少，且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,L)$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知向量组

I：$\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$

II：$\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$

若向量组 I 与向量组 II 等价，求a的取值，并将β_3用α_1，α_2，α_3线性表示

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似.

(1) 求x、y;

(2) 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布. Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$,令$Z=XY$

（1） 求Z的概率密度;

（2） p为何值时，X与Y不相关;

（3）X与Z是否相互独立.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu.\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求A;

(2) 求σ^2的最大似然估计量.