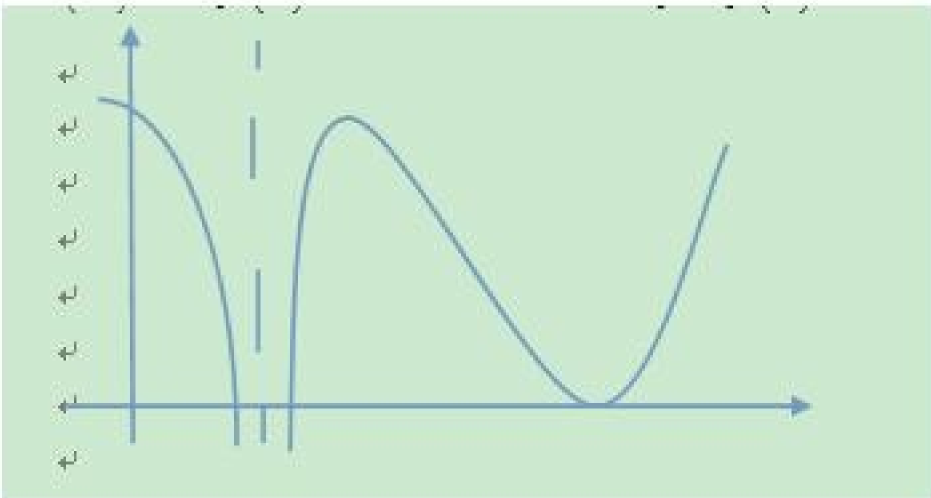
2016全国研究生入学考试考研数学（数学三）解析

本试卷满分150，考试时间180分钟

一、**选择题：**1~8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数的图像，如图所示，则



（A）函数 $f(x)$ 有2个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有2个拐点

（B）函数 $f(x)$ 有2个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有3个拐点

（C）函数 $f(x)$ 有3个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有1个拐点

（D）函数 $f(x)$ 有3个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有2个拐点

【答案】:(B)

【解析】由图可知曲线有两个点左右两边导数符号不一样，有三个点左右两边导函数单调性不一样，故有 2 个极值点，3 个拐点.

(2) 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

(A) $f_x'-f_y'=0$　(B) $f_x'+f_y'=0$　(C) $f_x'-f_y'=f$　(D) $f_x'+f_y'=f$

【答案】: (D)

【解析】 $f_x'=\dfrac{e^x}{x-y}-\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$, $f_y'=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$, $f_x'+f_y'=f$.

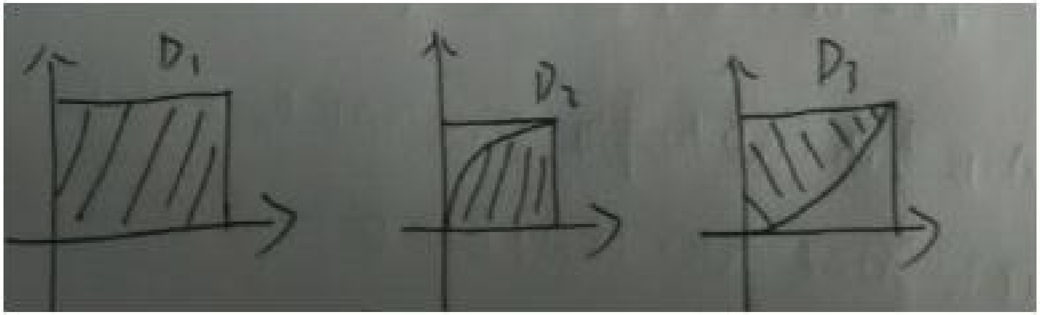
(3) 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy\,(i=1,2,3)$, 其中

$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$, $D_2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\}$, $D_3=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$

(A) $J_1<J_2<J_3$　(B) $J_3<J_1<J_2$　(C) $J_2<J_3<J_1$　(D) $J_2<J_1<J_3$

【答案】:（B）

【解析】D_1, D_2, D_3 如图



易知在 D_1-D_2 中 $\sqrt[3]{x-y}<0$，在 D_1-D_3 中 $\sqrt[3]{x-y}>0$，可知 $J_1<J_2$, $J_1>J_3$，故选 B

（4） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$，$k$ 为常数

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）收敛性与 k 有关

【答案】：（A）

【解析】

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\sim\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛的，故原级数绝对收敛.

（5） 设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　）

(A) A^T 与 B^T 相似　　　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$与$B+B^T$相似　　　　(D) $A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

【答案】: (C)

【解析】: 因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$. 两端取转置与逆可得：

$P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=B^T$, $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$, $P^{-1}\left(A+A^{-1}\right)P=B+B^{-1}$, 可知$(A)$、$(B)$、$(D)$均正确，故选择$(C)$。

(6) 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$的正负惯性指数分别为1,2，则

(A) $a>1$　　(B) $a<-2$　　(C) $-2<a<1$　　(D) $a=1$或$a=-2$

【答案】(C)

【解析】二次型矩阵为$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，其特征值为$a-1,a-1,a+2$，可知$a-1<0,a+2>0$，即

$-2<a<1$，故选择（C）

（7） 设 A,B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则

（A） $P(\bar{B}|\bar{A})=1$　　（B） $P(A|\bar{B})=0$　　（C） $P(A\cup B)=0$　　（D） $P(B|A)=1$

【答案】：（A）

【解析】 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，可知 $P(AB)=P(B)$，$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=0$

可知 $P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\bar{A})-P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=1$

（8） 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,\ 4)$，则 $D(XY)=$

（A） 6　（B） 8　（C） 14　　（D） 15

【答案】：（C）

【解析】 $D(XY)=EX^2Y^2-(EXY)^2$，

$EXY=EXEY=1$，$EX^2Y^2=EX^2EY^2=3\times 5=15$，则 $D(XY)=14$。故选（C）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

【答案】：6

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$

由等价无穷小替换得，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}=2$。因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$

（10）极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$__________.

【答案】：$-\cos 1+\sin 1$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}i\sin\dfrac{i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n}\sin\dfrac{i}{n}$

$$=\int_0^1 x\sin x dx=-\int_0^1 x d\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x dx=-\cos 1+\sin 1$$

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则

$dz\big|_{(0,1)}=$________

【答案】：$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

【解析】：由一阶微分形式不变性，

$$zdx+(x+1)dz-2ydy=2xf(x-z,y)dx+x^2f_1'(x-z,y)(dx-dz)+x^2f_2'(x-z,y)dy$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入，$dx+dz-2dy=0$,所以，$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

（12）设 $D=\{(x,y)\,\|\,x|\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$ ________

【答案】：$\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$

【解析】：$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1} x^2e^{-y^2}dxdy=2\int_0^1dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$

（其中 D_1 为 D 在第一象限部分）

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$ ______

【答案】：$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】：令 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=D_4$

由展开定理地递推公式 $D_4=\lambda D_3+4, D_3=\lambda D_2+3, D_2=\lambda^2+\lambda+2$，故

（14）设袋中有红、白、黑球个 1 个，从中有效回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的求都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为________________.

【答案】 $\dfrac{2}{9}$

【解析】: 要求前三次必须恰好取到两种不同颜色的球，第四次取到剩下一种颜色的球

前三次恰好取到两种不同颜色球的概率为 $\dfrac{C_3^2\left(2^3-2\right)}{3^3}=\dfrac{2}{3}$，在前三次恰好取到两种不同颜色的球的前提下，最后一次取到剩下一种颜色的球的概率为 $\dfrac{1}{3}$。故所求概率为 $\dfrac{2}{9}$。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】 由重要极限得，原式为

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+2x\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-1+o(x^4)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$$

（16）(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性

$\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价（万元）

（Ⅰ）求需求函数的表达式

（Ⅱ）求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义。

【解析】（1）由弹性的计算公式 $\eta=-\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$ 可得，$\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}=\frac{P}{P-120}$。

分离变量，得 $\frac{dQ}{Q}=\frac{dP}{P-120}$；两边同时积分，可得 $\ln Q=\ln(120-P)+C$，即 $Q=C(120-P)$（C

为任意常数）。由于最大需求量为 1200，可知 $Q(0)=1200$，故 $C=10$，因此 $Q=10(120-P)$

（Ⅱ）$R=QP=10(120-P)P$

边际收益为 $\frac{dR}{dQ}=\frac{dR}{dP}\frac{dP}{dQ}=(1200-20P)(-\frac{1}{10})=2P-120$，从而 $\frac{dR}{dQ}\big|_{P=100}=80$。

它的经济意义是需求量每提高 1 件，收益增加 80 万元。

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 \left|t^2-x^2\right| dt \quad (x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值。

【解析】：$0<x<1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)dt=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

当 $x\ge 1$时，$f(x)=\int_0^1\left(x^2-t^2\right)dt=x^2-\frac{1}{3}$

所以，$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3},0\le x<1\\ x^2-\frac{1}{3},x\ge 1\end{cases}$，从而 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0<x<1\\ 2x,x>1\end{cases}$

由导数的定义可知 $f'(1)=2$，，可知 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0\le x<1\\ 2x,x\ge 1\end{cases}$

易知，当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$。

可知，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$，求 $f(x)$

【解析】：$\int_0^x f(x-t)\,dt$ 做变量替换 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\,dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)\,du$

则代入方程可得：

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt \quad (x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值。

【解析】： $0<x<1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)dt=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

当 $x\geq 1$时，$f(x)=\int_0^1\left(x^2-t^2\right)dt=x^2-\frac{1}{3}$

所以，$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3},0\leq x<1\\ x^2-\frac{1}{3},x\geq 1\end{cases}$，从而 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0<x<1\\ 2x,x>1\end{cases}$

由导数的定义可知 $f'(1)=2$，，可知 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0\leq x<1\\ 2x,x\geq 1\end{cases}$

易知，当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$。

可知，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$ ，求 $f(x)$

【解析】：$\int_0^x f(x-t)dt$ 做变量替换 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\,dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$

则代入方程可得：

$$\int_0^x f(u)\,du = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt + e^{-x} - 1$$

两边同时求导数可得：

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt - e^{-x} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由于 $f(x)$ 连续，可知 $\int_0^x f(t)\,dt$ 可导，从而 $f(x)$ 也可导，故对上式两边在求导可得：

$$f'(x) = f(x) + e^{-x}$$

由 (1) 式两边令 $x=0$ 可得到，$f(0)=-1$

解微分方程可得：$f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x}$

（19）（本题满分 10 分）

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的收敛域及和函数。

【解析】：易知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的收敛半径为$1$，且当$x=1$与$x=-1$时，级数收敛，

可知幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

令$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$，两边同时求导可得：$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$.

两边再求导可得$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$.

积分可得$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

由于$f'(0)=0$，可知$f'(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，

再积分可得$f(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)+C$.

由于$f(0)=0$，可知$f(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$.

因此，$f(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$，$x\in[-1,1]$.

（20）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

（1）求 a 的值.

（2）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

【解析】:（1）$(A\vdots\beta)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a & \vdots & 0\\ 0 & -1 & 2a-1 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & -a^2+2a & \vdots & a-2\end{pmatrix}$，方程组 $Ax=\beta$ 无解，可知 $a=0$。

（2）$A^TA=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，　$A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$(A^TA\vdots A^T\beta)=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2 & \vdots & -1\\ 2 & 2 & 2 & \vdots & -2\\ 2 & 2 & 2 & \vdots & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$，则通解为 $k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, k\in R$

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{99}.

（2）设三阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

【解析】: （1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ -2 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+3\lambda+2)\lambda$，可知 A 的特征值为：$0,-1,-2$。

$A\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 0 的特征向量为 $\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$

$A+E\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 -1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

$$A+2E \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，则-2的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，

则有

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）$B^2=BA$可知 $B^{100}=BA^{99}$，即

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\beta_1=\left(2^{99}-2\right)\alpha_1+\left(2^{100}-2\right)\alpha_2$，$\beta_2=\left(1-2^{99}\right)\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2$，$\beta_3=\left(2-2^{98}\right)\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2$

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$服从均匀分布，令$U=\begin{cases}1 & X\le Y\\ 0 & X>Y\end{cases}$

（1）写出(X,Y)的概率密度.

（2）问U与X是否相互独立，说明理由。

（3）求$Z=U+X$的分布函数$F(Z)$.

【解析】：（1）D的面积$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$，则$(X,Y)$的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}3 & (x,y)\in D\\ 0 & 其他\end{cases}$.

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x^{\frac{3}{2}}-x^3 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

当$U=0$时，$P\{X\le x\}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$，可知$X$与$U$有关，故不独立。

（3）$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+U\le z\}$

$$=P\{U=1\}P\{X+U\le z\mid U=1\}+P\{U=0\}P\{X+Y\le z\mid U=0\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X\le z-1\mid U=1\}+\frac{1}{2}P\{X\le z\mid U=0\}$$

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

其中 $P\{X\le x|U=0\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$, $P\{X\le x|U=1\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 4x^{\frac{3}{2}}-3x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

故 $P\{X\le z-1|U=1\}=\begin{cases}0 & z<1\\ 4(z-1)^{\frac{3}{2}}-3(z-1)^2 & 1\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$

$P\{X\le z|U=0\}=\begin{cases}0 & z<0\\ 3z^2-2z^3 & 0\le z<1\\ 1 & z\ge 1\end{cases}$.

从而 $F(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{1}{2}\left(3z^2-2z^3\right), 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[4(z-1)^{\frac{3}{2}}-3(z-1)^2\right], 1\le z<2\\ 1, z\ge 2\end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为 $f(X;\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$,

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，

令$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$

（1）求T的概率密度。

（2）确定a，使得$E(aT)=\theta$.

【解析】:（1）T的分布函数为

$$F_T(x)=P\{T\le x\}=P\{X_1\le x,X_2\le x,X_3\le x\}$$

$$=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i\le x\}$$ （$F(x)$为X的分布函数）.

$$=[F(x)]^3$$

则T的概率密度为$f_T(x)=3[F(x)]^2f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^8}{\theta^9} & 0<x<\theta \\ 0 & 其他\end{cases}$.

(2) $ET=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_T(x)dx=\int_0^{\theta}\dfrac{9x^9}{\theta^9}dx=\dfrac{9\theta}{10}$，则$E(aT)=aET=\dfrac{9a}{10}\theta$，可知$a=\dfrac{10}{9}$.