2014年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题及解析(完整精准版)

来源文都教育

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项的字母填在答题纸指定位置上。

（1）设 $\lim a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有（　　）

（A）$\left|a_n\right| > \frac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n| < \frac{|a|}{2}$　　(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$　　(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

【解析】$\because \lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ N \in \ N^+ \quad s.t \quad \forall \ n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$

即　$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \quad \Rightarrow \ ||a| - \varepsilon| \leq |a_n| \leq |a| + \varepsilon$

取 $\varepsilon = \frac{|a|}{3}$.　　有　$\left|a_n\right| \geq \frac{2|a|}{3} > \frac{|a|}{2}$

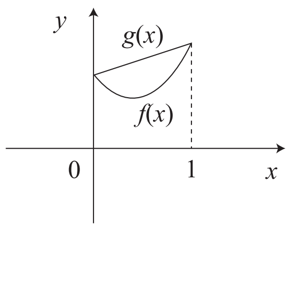
(2)下列曲线有渐近线的是

（A）$y = x + \sin x$　　(B) $y = x^2 + \sin\ x$　　(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$　　(D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

【解析】$a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x + \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}) = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to\infty}[x + \sin\frac{1}{x} - x] = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$

$\therefore y = x$ 是 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 的斜渐近线



(3)设 $P\left(x\right) = a + bx + cx^2 + dx^2$，当 $x \to 0$ 时，若 $P(x) - \tan\ x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列试题中错误的是（　）

（A）$a = 0$　　（B）$b = 1$

（C）$c = 0$　　（D）$d = \frac{1}{6}$

【解析】法 1：由泰勒公式 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^3)$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{a + (b-1)x + cx^2 + (d - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0$$

$a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$, 故选（D）.

法 2：由条件及

$\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$, 知 $a=0$, 又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 x=0$,

故 b=1,同理，再用洛比达法则可得 $c=0,d=\dfrac{1}{3}$, 故选（D）.

【答案】 D

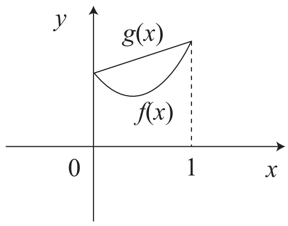
（4）设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)（1-x)+f(1)\ x$，则在区间[0,1]上（　　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\le 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　（D）当 $f''(x)\le 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【解析】 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)$ 是凹函数

而 $g(x)$ 是连接 $(0,f(0))$ 与 $(1,f(1))$ 的直线段，如右图



故 $f(x)\le g(x)$

【答案】 D

（5）行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$ =（　　）

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$　　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　（D）$b^2c^2-a^2d^2$

【解析】 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\overset{\text{按第4行展开}}{=\!=\!=}c\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}+d(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}0&a&b\\a&0&0\\0&c&d\end{vmatrix}$

$=-c\cdot b(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+d\cdot a(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

$=(ad-bc)\cdot bc-ad(ad-bc)$

$=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2$

【答案】 B

（6）设$\alpha_{1,}\alpha_{2,}\alpha_3$均为三维向量，则对任意常数k,1,向量组$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关的（　　）

（A）必要非充分　　（B）充分非必要　　（C）充分必要　　（D）既非充分也非必要

【解析】 由（$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$）$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ k & l\end{pmatrix}$知，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，因为$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\neq 0$

所以$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关

反之不成立．如当$\alpha_3=0$，且α_1与α_2线性无关时，$\alpha_{1,}\alpha_2,\alpha_3$线性相关

【答案】 A

（7）设随机事件A与B相互独立，且P（B）=0.5，P（A-B）=0.3，则P（B-A）=（　　）

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0. 4

【解析】 P（A-B）=P（A）-P（AB）

∵A与B相互独立

∴P（AB）=P（A）P（B）

∴P（A-B）= P（A）- P（A）P（B）=P（A）[1-P（B）]=0.3

P（A）（1-0.5）=0.3

∴P（A）=0.6　　P（AB）=P（A）P（B）=0.6×0.5=0.3

∴P（B-A）=P（B）-P（BA）=0.5-0.3=0.2

【答案】 B

（8）设X_1，X_2，X_3为来自正态总体N（0，σ^2）的简单随机样本，则统计量$S=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$服从的分布为（　　）

（A）F（1，1）　　（B）F（2，1）　　（C）t（1）　　（D）t（2）

【解析】 $S=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sqrt{X_3^2}}$

$X_1-X_2\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$

$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$

$X_3\sim N(0,\sigma^2)$

$\therefore \frac{X_3}{\sigma} \sim N(0,1) \qquad \therefore \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_3}{\sigma}$ 相互独立.

$$\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{X_3^2}{\sigma^2}}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sqrt{X_3^2}} \sim t(1)$$

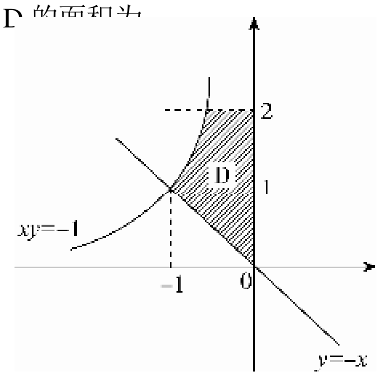
二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设某商品的需求函数为 Q=40-2p（p 为商品的价格），则该商品的边际收益为______.

【解析】 $R(p) = PQ = p(40-2p) = 40p - 2p^2$

$R'(p) = 40 - 4p$.

（10）设 D 是由曲线 xy+1=0 与直线 y+x=0 及 y=2 围成的有界区域，则 D 的面积为



【解析】如右图：

∴区域 D 的面积

$$S = \int_0^1 dy \int_{-y}^{0} dx + \int_1^2 dy \int_{-\frac{1}{y}}^{0} dx$$

$$= \frac{1}{2} + l\,\mathrm{n}^2$$

（11）设 $\int_0^2 xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$，则 $a =$ _____.

【解析】 $\because \int_0^a xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$

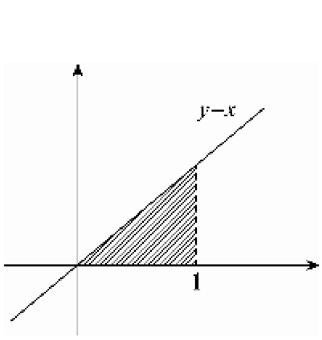
即 $\frac{1}{2}ae^{2a} - \frac{1}{4}e^{2a} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{2}ae^{2a} - \frac{1}{4}e^{2a} = 0$

$\therefore a = \frac{1}{2}$.

（12）二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}) dx =$ _____.

【解析】积分区域如右图



$$
\begin{aligned}
原式 &= \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x} dx - \int_0^1 dy \int_y^1 e^{y^2} dx \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x} dy - \int_0^1 \left(e^{y^2} x \Big|_y^1 \right) dy \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} (1-y) dy \\
&= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} + \int_0^1 y e^{y^2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2} d y^2 = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)
\end{aligned}
$$

（13）设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围______.

【解析】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$

因为 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$，$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A|$，负惯性指数为 1

$\therefore$ 设 $\lambda_1 < 0$, 从而 $\lambda_2 \lambda_3 \geq 0$

$\therefore |A| \leq 0$

①若 $|A| < 0$，则 $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$. 此时符合题意，而 $|A| = a^2 - 4$

$\therefore a^2 - 4 < 0$. 即 $-2 < a < 2$.

②若 $|A| = 0$，则 $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$，此时 $a = \pm 2$

当 a =2 时. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$

$\therefore a = 2$ 符合题意

当 $a = -2$ 时 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$ 符合题意

综上，a 的取值范围是 $-2 \leq a \leq 2$

（14）设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta\\0,其他\end{cases}$，其中$\theta$是未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$

为来自总体X的简单样本，若$E(c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)=\theta^2$，则$c=$______.

【解析】

$$E(X^2)=\int_{\theta}^{2\theta}x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}d\theta=\frac{2}{3\theta^2}\int_{\theta}^{2\theta}x^3dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3\theta^2}x^4\Big|_{\theta}^{2\theta}$$

$$=\frac{1}{6\theta^2}\cdot 15\theta^4=\frac{5}{2}\theta^2$$

$$E\left(C\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=C\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=C\cdot n\cdot\frac{5}{2}\theta^2=\theta^2\Rightarrow C=\frac{2}{5n}$$

三、解答题：15～23题，共94分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分10分）

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$。

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}。$$

（16）（本题满分10分）

设平面区域$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\}$，计算$\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$。

【解】

由对称性得$I=\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D\dfrac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$，

于是$I=\dfrac{1}{2}\left[\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy+\iint\limits_D\dfrac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\right]$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr=\frac{1}{4\pi}\int_1^2\pi r\sin\pi r d(\pi r)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\pi^{2\pi}t\sin t dt=-\frac{1}{4\pi}\int_\pi^{2\pi}td(\cos t)=-\frac{1}{4\pi}t\cos t\,|_\pi^{2\pi}+\frac{1}{4\pi}\int_\pi^{2\pi}\cos t dt=-\frac{3}{4}\text{。}$$

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 二阶连续可导，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y\cdot f',\ \frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y\cdot f',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos y\cdot f'+e^{2x}\cos^2 y\cdot f'',\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos y\cdot f'+e^{2x}\sin^2 y\cdot f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}f'',$$

令 $u=e^x\cos y$，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 得

$f''(u)=4f(u)+u$，或 $f''(u)-4f(u)=u$，

解得 $f(u)=C_1e^{-2u}+C_2e^{2u}-\frac{1}{4}u$，

由 $f(0)=0,f'(0)=0$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\-2C_1+2C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，解得 $C_1=-\frac{1}{16},C_2=\frac{1}{16}$，

故 $f(u)=-\frac{1}{16}(e^{-2u}-e^{2u})-\frac{1}{4}u$ 。

（18）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数。

【解】由 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1$ 得 $R=1$，

当 $x=\pm 1$ 时，因为 $(n+1)(n+3)\to\infty\neq 0$（$n\to\infty$），所以收敛域为 $(-1,1)$。

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+4n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)+(n+1)]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2})''+(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'$$

$$=(\frac{x^2}{1-x})''+(\frac{x}{1-x})'=\frac{3-x}{(1-x)^3}。$$

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（I）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，$x\in[a,b]$。

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$。

【证明】（I）因为 $0\le g(x)\le 1$，

所以 $\int_a^x 0dt\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt$，即 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$。

（II）$\varphi(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$，$\varphi(a)=0$，

$\varphi'(x)=f(x)g(x)-g(x)f[a+\int_a^x g(t)dt]$，

因为 $\int_a^x g(t)dt\le x-a$ 且 $f(x)$ 单调增加，

所以 $f[a+\int_a^x g(t)dt]\le f[a+(x-a)]=f(x)$，

从而 $\varphi'(x)\ge f(x)g(x)-g(x)f(x)=0$，$x\in[a,b]$

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0\\ \varphi'(x)\ge 0(a\le x\le b)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\ge 0$（$x\in[a,b]$），

从而 $\varphi(b)\ge 0$，故 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵。

（I）求方程组 $AX=O$ 的一个基础解系。

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B。

【解】

（I）$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$,

则方程组 $AX=O$ 的一个基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$。

（II）令 $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$,

$$AB=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}&x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}&x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}\\x_4-x_7+x_{10}&x_5-x_8+x_{11}&x_6-x_9+x_{12}\\x_1+2x_4-3x_{10}&x_2+2x_5-3x_{11}&x_3+2x_6-3x_{12}\end{pmatrix},$$

由 $AB=E$ 得

$$\begin{cases}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}=1\\x_4-x_7+x_{10}=0\\x_1+2x_4-3x_{10}=0\end{cases}、\begin{cases}x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}=0\\x_5-x_8+x_{11}=1\\x_2+2x_5-3x_{11}=0\end{cases}、\begin{cases}x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}=0\\x_6-x_9+x_{12}=0\\x_3+2x_6-3x_{12}=1\end{cases}。$$

由 $\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&4&-3&1&-1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5&4\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}$ 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_{10} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k_1 \\ 2k_1-1 \\ 3k_1-1 \\ k_1 \end{pmatrix};$$

由$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_{11} \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-k_2 \\ 2k_2-3 \\ 3k_2-4 \\ k_2 \end{pmatrix};$$

由$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \\ x_9 \\ x_{12} \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-k_3 \\ 2k_3+1 \\ 3k_3+1 \\ k_3 \end{pmatrix},$$

故$B = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$（其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数）。

（21）（本题满分 11 分）证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似。

【证明】

无水印版由【公众号：小盆考研】免费提供

令 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$，

由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$，

由 $|\lambda E-B|=0$ 得 B 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$。

因为 $A^T=A$，所以 A 可对角化；

对 B，因为 $r(0E-B)=r(B)=1$，所以 B 可对角化，

因为 A,B 特征值相同且都可对角化，所以 $A\sim B$。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定 X=i 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),(i=1,2)$.

（I）求 Y 的分布函数 $F_y(y)$;

（II）求 EY.

【解】

（I）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}P\{Y\le y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y\mid X=2\}$

$=\dfrac{1}{2}P\{Y\le y\mid X=1\}+\dfrac{1}{2}P\{Y\le y\mid X=2\}$，

$y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{2}=\dfrac{3y}{4}$；

当 $1\le y<2$ 时，

$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{2}=\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2}$；

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$，

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{3y}{4},0\le y<1\\ \dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2},1\le y<2\\ 1, y\ge 2\end{cases}$。

（II） $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4},0<y<1\\ \dfrac{1}{4},1<y<2\\ 0,其他\end{cases}$，

$EY=\int_0^1\frac{3x}{4}dx+\int_1^2\frac{x}{4}dx=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$。

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X、Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$,$P\{X=1\}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

（I）求(X,Y)的概率分布;

（II）求 $P\{X+Y\leq 1\}$.

【解】

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

（I） $\rho_{XY}=\dfrac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{EXY-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow EXY=\frac{5}{9}$.而 $EXY=1\times p\{X=1,Y=1\}$

X \ Y	0	1	
0	2/9	1/9	$\frac{1}{3}$
1	1/9	5/9	$\frac{2}{3}$
	1/3	2/3	

（II） $P\{X+Y\leq 1\}=1-P\{X+Y>1\}$

$$=1-P\{X=1,Y=1\}$$
$$=1-5/9=4/9$$