
Лекц #2-3: Өнгө ба шугаман алгебр

Ч.Цэнд-Аюуш

Компьютерийн ухааны салбар

ШУТИС, МХТС

tsend-ayush@must.edu.mn

1 Өнгөний Физик (Physics of Color)

1.1 Өнгө гэж юу вэ?

Өнгө бол гэрлийн нэгэн өмч юм. Цахилгаан соронзон цацраг туяа(electromagnetic radiation) нь энергийг дамжуулдаг. Өөрөөр хэлбэл гэрэл тусаж буй объектийн физик шинж чанараас хамаарч зарим өнгө шингэж, зарим өнгө ойж байдаг. Ингээд ойсон өнгө нь тухайн биетийн өнгө болон харагддаг. Нарны гэрэл буюу байгалийн цагаан өнгө нь цахилгаан соронзон чичиргээний өөр өөр долгионы урттай энерги бүрдэл юм. Цахилгаан соронзон чичиргээнүүд нь бүх чиглэлд долгиолон хөдөлдөг учраас үүнийг долгионы урт гэж нэрлэдэг.

1.2 Өнгө ба Гэрэл

Бүх биетүүд нарны долгионыг шингээх болон ойлгох боломжтой. Цахилгаан соронзон цацраг туяаг долгионы давтамжаас хамааран үзэгдэх гэрэл, гамма туяа, хэт ягаан туяа, инфрар туяа, радио долгион зэргээр ангилдаг. Хүний таньж чадах цахилгаан соронзон цацраг туяа нь үзэгдэх спектр буюу өнгөний спектр гэж нэрлэдэг үзэгдэх гэрлийн долгионы урт(чернилэн ягаанаас улаан хүртэл) ын маш бага хүрээгээр хязгаарлагддаг. Гэрлийн долгионыг angstrom (анстром \AA) гэдэг уртын нэгжээр хэмждэг. 1ангстрем нь 10^{-8} м-тэй зэрэгцэнэ. Хүний нүд хамгийн ихдээ 400~700нанометрийн долгионы уртыг таньж чадна. 100мянгаас 1сая хүртэлх өнгийг ялгах чадвартай.

1.3 Цахилгаан соронзон спектр (Electromagnetic Spectrum)

Гэрлийн өнгө бүр нь өөр өөр долгионы урттай байдаг. Долгионы урт нь богино байх тусам агуулах энергийн хэмжээ их байдаг. Энергийн хэмжээнээс үл хамааран гэрэл нь ижил хурдтай тархдаг. Цагаан гэрэл нь маш олон төрлийн өөр өөр өнгийн гэрлийн цуглуулга юм. Цагаан гэрэл призм дундуур ороход хугарал үүсч бидний мэдэх солонго үүсдэг. Солонгод хүний нүдээр харж чадах янз бүрийн долгионы урттай гэрлүүд байдаг. Улаан гэрэл нь хамгийн урт долгионы урттай бол харин ягаан гэрлийнх хамгийн богино байдаг.

Хүний нүд нь цацарч байгаа гэрэл эсвэл ямар нэгэн биетэд туссан гэрлийг хардаг. Жишээ нь, чийдэн гэрэл цацруулах бөгөөд өрөөн дотор байгаа бусад бүх зүйлд гэрэл тусаж байна. Гэрлийн визуал спектр нь 400nm-ээс 700nm хооронд хэлбэлздэг бөгөөд хүмүүс энэ спектрийн дундаж долгионы урттай гэрэлд хамгийн мэдрэг байдаг.

Ягаан өнгийн гэрлээс богино долгионы урттай гэрлийг хэт ягаан гэрэл гэж нэрлэдэг. Харин улаан гэрлээс их долгионы урттай гэрлийг хэт улаан гэж нэрлэдэг. Радио долгион нь хэт улаан гэрлийн долгионоос ч илүү урттай гэрэл юм. Бидний хүнсний зүйл халаахад хэрэглэдэг бичил долгионы зуух нь мөн гэрлийн нэгэн төрлийг ашигладаг юм. Бидний нүд хэдийгээр эдгээр төрлийн гэрлийг харж чадахгүй ч тусгай зориулалтын камерууд харж чаддаг.

1.4 Үзэгдэх гэрэл

Планкийн Блэкбоди (Planck's Law for Blackbody radiation) цацрагийн тухай хууль нь гадаргуугийн температур дээр үндэслэн одны ялгаруулдаг цахилгаан соронзон цацрагийн долгионы уртыг тооцдог. Жишээлбэл, нарны гадаргуу 5800K орчим байдаг тул нарны цацрагийн дээд оргил нь үзэгдэхүйц бүсэд оршдог.

1.5 Гэрлийн физик

Гэрлийн аль ч эх үүсвэрийг спектрээр нь бүрэн тодорхойлж болно (өөрөөр хэлбэл цаг хугацааны нэгж тутамд 400-700nm долгион тус бүрт ялгарах энергийн хэмжээ). Гадаргуу нь цацруулагч спектртэй байдаг: туссан гэрэл нь харагдахуйц гэрлийн спектрийн тодорхой тал дээр төвлөрдөг. Жишээлбэл, банана ихэвчлэн шар гэрлийг, улаан лооль нь ихэвчлэн улаан гэрлийг тусгадаг.

1.6 Гэрэл ба гадаргуугийн харилцан үйлчлэл (Interaction of light and surfaces)

Туссан өнгө нь гэрлийн спектр гадаргуугийн тусгалтай харилцан үйлчлэлийн үр дүн юм. Дүрмээр бол тодорхойлолт ба нэгж нь “нэгж долгионы урт” гэж томъёолж, нэр томъёог "спектр" (жнь дан ганц долгионы урт гэдгээр биш, өнгөний спектр гэдгээр авч үзнэ). Гэрэлтүүлгийг тоон үзүүлэлтээр тодорхойлвол

$$\text{Illumination} \cdot \text{Reflectance} = \text{ColorSignal} [?]$$

2 Хүний өнгөний кодчлол (Human Encoding of Color)

Өмнөх хэсэгт дурьдсанчлан өнгө нь зөвхөн гэрлийн физик шинж чанар биш бөгөөд харин гэрэл ба хүний харааны систем хоорондын харилцан үйлчлэлээр өнгөт үзэгдэл үүсдэг.

2.1 Род эс /rod cell/ ба Конус эс /cone cell/

Дижитал зургын аппарат дүрс буулгах объектоос ойсон гэрлийг цахилгаан дохионд хувирган бичиж авдаг бол хүний нүдний үүрэг ч гэрлийг мэдэрч цахилгаан дохионд хувирган тархи руу илгээх явдал юм. Бид үзэгдэл дээр тогтож харах үед гэрэл торлог бүрхэвчинд хүрэхийн өмнө хүүхэн хараагаар дамжин бидний нүдрүү ордог. Нүдний торлог бүрхэвч нь үндсэндээ гэрэлд мэдрэмтгий хоёр төрлийн эсээс тогтдог: rod ба cones. **Rods** нь хоёроос илүү олон байх бөгөөд гэрэлд хэт мэдрэг тул гэрэл багатай нөхцөлд объектийг илрүүлэхэд тохиромжтой. Гэхдээ ямар нэг өнгөний мэдээллийг кодлодоггүй. **Cones** нь эсэргээрээ цөөн тоотой, гэрэл бага мэдэрдэг ч гэрэлтүүлэг өндөртэй нөхцөлд объектуудыг ялгахад өргөн ашигладаг. Эдгээр нь мөн өнгийг доор авч үзсэн механизмаар мэдрэх боломжийг олгодог.

2.2 Конус ба Өнгө (Cones and Color)

Rod ба cones хоорондох ялгаа нь cones нь гурван өөр төрөлд хуваагдах бөгөөд тус бүр нь гэрлийн янз бүрийн долгионы уртад өвөрмөц муруйн хариугаар тодохойлогддог. Хариу (муруй) тус бүр 440, 530, 560нм долгионы уртад улаан, ногоон, цэнхэр өнгөтэй зэрэгцэн орой оршино. Rod ба cones хоёулаа филтерийн үүрэг гүйцэтгэдэг бөгөөд тэдгээрийн гаралтыг бүх долгионы уртуудыг нэгтгэсэн спектрээр үржүүлж авч үзэж болно.

While the information encoded by the resulting three numbers is sufficient for most tasks, some information is lost in the compression from spectrum to electrical impulse in the retina. This implies that some subset(s) of spectra will be erroneously perceived as identical - such spectra are called **metamers**

2.3 Өнгөний тохируулга (Color Matching)

Wandell's Foundations of Vision (Sinauer Assoc., 1995) -ийн хийсэн туршилт нь ихэнх хүмүүс өөр өөр өнгийн гурван гэрлийг тохируулах замаар тухайн гэрлийн өнгийг сэргээж чаддаг болохыг харуулсан. Цорын ганц нөхцөл нь гэрэл (3) тус бүр үндсэн өнгө байх ёстой. Түүнчлэн туршилтаас харахад үндсэн өнгөний туршилтын ижил гэрлийн хувьд хүмүүсийн ихэнх нь ижил төстэй жинг сонгож байсан бөгөөд хараагүй хүмүүст үл хамаарах зүйл юм. Эцэст нь энэхүү туршилт нь өнгөний трихроматик онолыг баталж, өнгийг кодлоход гурван тоо хангалттай гэсэн таамаглал дэвшүүлсэн бөгөөд энэ нь Томас Янгийн 1700-аад оны үед бичсэн бичээсүүдээс үүдэлтэй юм.

3 Өнгөний орон зай (Color Spaces)

3.1 Тодорхойлолт

Өнгөний орон зай буюу өнгөний загвар нь өнгөний мужийг ихэвчлэн 3 эсвэл 4 өнгөний бүрэлдэхүүнээс (жишээ нь RGB) тогтох гурвалсан тоогоор тодорхойлдог хийсвэр математик загвар юм. Өнгөний орон зай нь дурын эсвэл математик бүтэцтэй байж болно. Ихэнх өнгөний загварууд дэлхий нийтээр ойлгодог өнгөний тайлбар системээр загварчлагддаг.

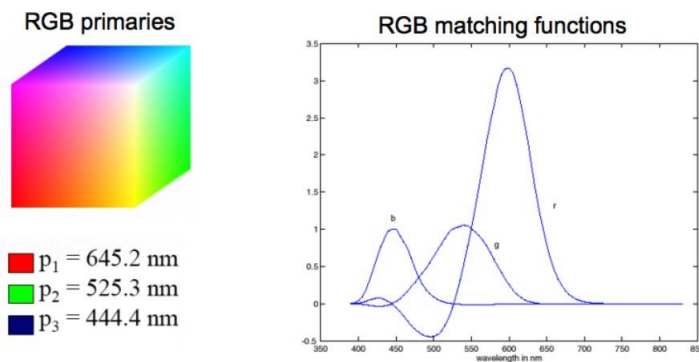
3.2 Шугаман өнгөт орон зай (Linear Color Spaces)

Гурван үндсэн өнгөний сонголтоор тодорхойлогдох ба өнгөний координатад үндсэн өнгөний жин өгөгдөнө:

- RGB орон зай (RGB Space)
 - Үндсэн өнгөнүүд нь монохромат гэрэл (monochromatic lights-мониторын хувьд гурван төрлийн фосфортой тохирч байдаг)
 - Гэрлийн тодорхой долгионы уртад хасах тохируулга хийх шаардлагатай
- CIE XYZ Color Space



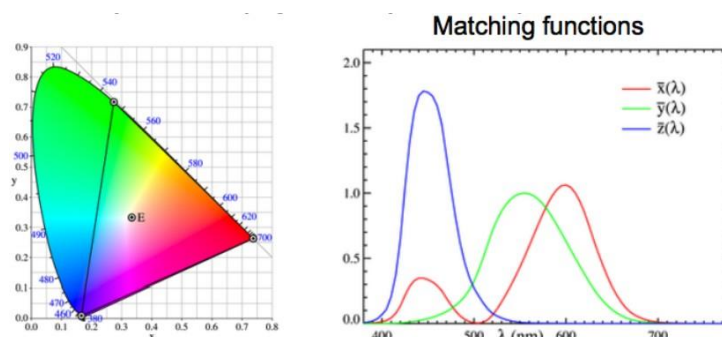
Зураг: Хоёр гэрлийг холих нь өнгөний орон зайд шулуун шугамын дагуу байрлах өнгө үүсгэдэг. Гурван гэрлийг холисоноор өнгөний орон зайд тодорхойлсон гурвалжин дотор байрлах өнгийг үүсгэдэг.



Зураг 2: RGB дүрслэлийн үндсэн өнгөнүүд болон matching функцууд. matching функцууд нь хэвтээ тэнхлэгт харуулсан долгионы уртад монохроматик туршилтын өнгийг тааруулахад шаардагдах үндсэн өнгөний хэмжээ.

Мэдээллийн эх үүсвэр: https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space

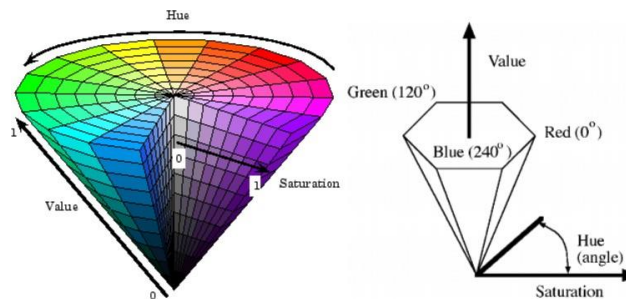
- Үндсэн өнгөнүүд нь хуурмаг боловч matching функцууд нь хаа ч эерэг утгатай байна.
- Y параметр өнгөний тодрол эсвэл өнгөний гэрэлтүүлэгтэй тохирч байдаг.
- RGB өнгөний орон зайг шугаман хувиргалтаар хувиргах нь Грассманы хууль (Grassmann's Law)-д хамааралтай.



Зураг 3: Мэдээллийн эх үүсвэр:
https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space

3.3 Шугаман бус өнгөт орон зай (Nonlinear Color Spaces: HSV)

- Илүү уламжлалт, холимог өнгөний загварт зориулагдсан (жнь будаг холих гэх мэт)
- Өнгө нь хүний харааны системд хэрхэн ойлгогддог, зохион байгуулагддаг гэдэг дээр тулгуурладаг
- Хэмжигдэхүүн нь: Hue, Saturation, and Value (Intensity)



Зураг 4: Эх үүсвэр https://en.wikipedia.org/wiki/HSL_and_HSV

4 Цагаан тэнцвэржүүлэлт (White Balancing)

4.1 Тодорхойлолт

White Balance нь саармаг (завсрын) өнгүүдийг (white, gray, гэх мэт) рендерлэхийн тулд sensor-уудаас хүлээн авсан зурган өгөгдөлд тохиргоо хийх үйл явц юм. Энэхүү тохиргоог дижитал камерууд автоматаар хийдэг бөгөөд кино камерууд (гэрлийн өөр өөр нэмэлт тохиргоо) нь янз бүрийн зураг авалтын нөхцөлд хэд хэдэн филтер болон хальсны төрлийг санал болгодог. Видео камерууд нь автоматаар цагааны тэнцвэржүүлэлтээ хангалттай хийж өгдөг боловч цагаан тэнцвэржүүлэлтийг гараар хийх нь гэрэл солигдох үед хэрэг болдог. Жишээлбэл дотор талаас гадагшаа гарах гэх мэт. Хэрэв та камераар ямар нэгэн байрлалд зураг авахаар бэлтгэгдсэн бол (жишээлбэл, албан тасалгаанд ярилцлага авах) тухайн үзэгдэлдээ зориулан гэрлээ болон камерийн white balance буюу цагаан тэнцвэржүүлэлтийг хийх хэрэгтэй.

4.2 Цагаан тэнцвэржүүлэхийн давуу тал

Тохируулга хийгдээгүй зургууд нь цөөн хэдэн шалтгаанаар бодит бус өнгөтэй "бүдэг" байдаг тул цагаан тэнцвэржүүлэлт хийх маш чухал:

1. Кино буюу камерийн мэдрэгч нь бидний нүднийхээс өөр байдаг
2. The sensors in cameras or film are different from those in our eyes
3. Янз бүрийн дэлгэцийн медиа зургийг ялгаатай рендэрлэдэг бөгөөд үүнийг тооцох ёстой.
4. Зургийг авах үед харагдах нөхцөл нь зураг үзэх нөхцөлөөс өөр байдаг.



Зураг 5: Нэг нь тэнцвэржүүлэлт хийгдээгүй, нөгөөн нь цагаан тэнцвэржүүлэлт буруу хийсэн хоёр зургийн жишээ. Эх үүсвэр:

<https://www.cambridgeincolour.com/tutorials/white-balance.htm>

4.3 Фон Кризийн арга (Von Kries Method)

Фон Кризийн цагаан тэнцвэржүүлэх арга нь суваг бүрийг саарал саармаг объектын үзэгдэлтэй тохируулахын тулд "хүч нэмэгдүүлэх коэффициент" –оор масштаблах явдал байв.

Практик дээр үүнийг хэрэгжүүлэх хамгийн сайн арга бол Саарал картын арга (Саарал карт - Мэргэжлийн хүмүүст зориулж бүтээсэн, хоёрдмол утгагүй функциональ зориулалтын хэрэгсэл бүхий фото хэрэгслүүд. Ихэнх тохиолдолд цагаан өнгийн тэнцвэрийг (BB) зөв тохируулахад хэрэглэдэг) юм: завсрын (саарал эсвэл цагаан) өнгийг барьж суваг бүрийн утгыг тодорхойлдог. Хэрэв карт нь r_w, g_w, b_w гэсэн RGB утгатай болохыг олж мэдвэл бид зургийн суваг бүрийг $\frac{1}{r_w}, \frac{1}{g_w}, \frac{1}{b_w}$ масштаблана.

4.4 Бусад аргууд

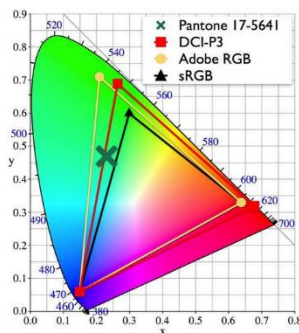
Саарал картгүйгээр бид аль пиксел нь цагаан объектой тохирч буйг таамаглах шаардлагатай болно. Үүнийг хэрэгжүүлэх хэд хэдэн аргууд бий, үүнд статик болон Машин сургалтын загвар (Machine Learning models) орно.

Gray World Assumption: Энэ загварт бид зураг $(r_{ave}, g_{ave}, b_{ave})$ дахь цэгийн дундаж утгыг саарал (gray) гэж таамаглах бөгөөд $\frac{1}{r_{ave}}, \frac{1}{g_{ave}}, \text{ and } \frac{1}{b_{ave}}$ Утгаар масштаблана.

Brightest Pixel Assumption: Энэ загварыг non-saturated зурагт ажиллуулдаг бөгөөд зургийн тодрол гэрлийн эх үүсвэрийн өнгөтэй байдаг (ихэвчлэн цагаан). Энэ нь суваг тус бүрийг хамгийн тод пикселийн утгатай урвуу харьцаагаар жинлэж, цагаан тэнцвэрийг засаж залруулдаг.

Gamut Mapping: Зургийн gamut нь зурагт харуулсан бүх пикселийн өнгөний багц юм (математикийн хэллэгээр бол энэ нь "өнгөний багтаамж" ба бүх боломжит өнгөний хослолуудын дээд тулсан өнгө юм). Амьдрал дээр тайлбарлавал өдрийн

нарны гэрэлд байх бүх өнгө, тэндээс улаан, ногоон, цэнхэр өнгийн хамгийн дээд тулсан өнгө нь дижитал дээр ямар утгаар гарах вэ гэдгийг дэлгэц үйлдвэрлэгчид өөр өөрөөр хийдэг. Үүнийг Color Gamut гэж нэрлэдэг. Жишээ sRGB, Rec709, DCI-P3 гэх мэт.



Зураг 6. Өнгөний график

Зурагт өнгүүдийг багтаасан график харуулсан бөгөөд ногоон болон улаан өнгө өөр өөр байршилд байна. Өмнө дурьдсанаар гурван өнгө нийлж нэг өнгийг бүтээж байгаа учир нэг өнгө өөр өөр Color Gamut -тай дэлгэц дээр өөр өөр болж харагдана гэсэн үг юм. Эндээс дэлгэц бүр өнгийг хангалттай тод гаргадаггүй гэж ойлгож болно. Кино театрын дэлгэц P3 стандарттай байдаг.

4.5 Компьютер хараа (Computer Vision) дахь өнгөний бусад хэрэглээ

Өнгө нь дүрс танилт, зургийн сегментчлэл зэрэг чухал үүрэг гүйцэтгэдэг.

5 Шугаман алгебрийн үндэс: Вектор ба Матриц

Тодорхойлолт Вектор ба матрицууд нь ямар нэгэн зүйлийг илэрхийлэх дараалсан тооны нэгдэл (тоон таблиц): орон зайд шилжих шилжилт, масштаблах, цэгийн тодрол гэх мэт.

5.1 Вектор

$$v \in \mathbb{R}^{n \times 1} \text{ where } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Баганан вектор

Мөрөн вектор $v^t = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ байх $V^T = R^{1 \times n}$. Т нь матрицын мөр ба баганийн индексийг сольж, диагональ дээр матрицыг эргүүлж шилжүүлэх үйлдлийг илэрхийлнэ.

Компьютерийн график, компьютерийн хараа хичээлд бид баганан векторыг ашигладаг. Python хэл дээр векторыг шилжүүлэх боломжтой: for vector v , do $v.t$.

Векторын хэрэглээ: Векторын үндсэн хоёр хэрэглээ байдаг. Нэгдүгээрт вектор нь 2 болон 3 хэмжээст орон зайд offset (эхлэл) дүрслэнэ. Хоёрдугаарт вектор нь өгөгдлийг (pixels, зураг keypoint дээрх gradients гэх мэт). Энэ тохиолдолд векторууд геометр тайлбаргүй боловч "distance" гэх мэт тооцоолол утгатай байна.

5.2 Матриц

А матриц: $A \in R^{m \times n}$ нь m мөр n баганатай тоонуудын таблиц байна.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Хэрэв $m=n$ тэгш өнцөгт матриц

Grayscale зургууд нь нэг пиксел тутамд нэг тоо ба $m \times n$ матриц хэлбэрээр

хадгалагддаг. Өнгөт зураг нь пиксел бүр улаан, ногоон, цэнхэр (RGB) 3 өнгөний утгатай байх ба $m \times n \times 3$ матрицад хадаглагдана. Үүнтэй адил олон хэмжээст матрицыг тензор (tensors) гэж нэрлэдэг.

5.3 Матрицын үндсэн үйлдлүүд

Нэмэх үйлдэл

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & b+2 \\ c+3 & d+4 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ хэмжээст A ба B матрицуудын нийлбэр гэдэг нь $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$; хувьд $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ элемент бүхий (матрицууд элементүүдээрээ нэмэгдэнэ) $C=A+B$ матрицыг хэлнэ.

Масштаблах (Scaling)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * 3 = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

Норм (Norm) мий

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Norm гэдэг нь доорхи шинж чанарыг хангасан функц $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ байна.

1. **Non-negativity**: for all $x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq 0$
2. **Definiteness**: $f(x) = 0$ if and only if $x = 0$
3. **Homogeneity**: for all $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, f(tx) = |t|f(x)$
4. **Triangle Inequality**: for all $x, y \in \mathbb{R}^n, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

Norms жишээ:

One Norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Infinity Norm $\|x\|_{\inf} = \max_i |x_i|$

General P Norm $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}$

Matrix Norm $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$

Цэгийн үржвэр: хоёр векторын утгуудыг харгалзуулан үржүүлээд үр дүнг нэмнэ. $x \cdot y$ нь $\|x\| \|y\| \cos(\theta)$ ба θ нь хоорондын өнцөг. Хэрэв y нь нэгж вектор бол $x \cdot y$ нь x чиглэл дэх x уртыг өгнө.

One dimensional dot product: $x^T y = x \cdot y = [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (scalar)

Матрицын үржвэр: хоёр матрицын $A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}$ үржвэрийн үр дүн $C = AB \in R^{m \times p}$ ба дараах томъёо байна.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}.$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ & a_2^T & - \\ & \vdots & - \\ - & a_m^T & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & \dots & a_1^T b_p \\ a_2^T b_1 & a_2^T b_2 & \dots & a_2^T b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^T b_1 & a_m^T b_2 & \dots & a_m^T b_p \end{bmatrix}$$

А матрицыг В матрицаар үржих нь нэг дэх матрицын баганы тоо нь хоёр дахь матрицын мөрийн тоотой тэнцүү үед гүйцэтгэгдэнэ. Матрицын үржвэр нь А матрицын i дүгээр мөрийн элементийг В матрицын j дүгээр баганы элементүүдээр харгалзан үржсэн үржвэрүүдийн нийлбэртэй тэнцүү байна:

Үржих үйлдлийн хувьд зарим нэгэн өвөрмөц чанарууд байдаг.

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $(A + B) \cdot C = AC + BC$
3. Коммутатив биш: АВ ба ВА үржвэрүүд хоёулаа оршдог ба А ба В матрицууд хоёулаа адилхан хэмжээтэй тохиолдолд үржихийн коммутатив (байр солих) хууль ерөнхийдөө биелэхгүй. Өөрөөр хэлбэл $AB \neq BA$.

Зэрэг дэвшүүлэх: Квадрат матриц А-ын бүхэл эерэг $m(m > 0)$ зэрэг гэдэг нь А матрицын m үржвэрийг хэлнэ. Өөрөөр хэлбэл A^m матриц нь

$$A^m = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$$

Хөрвүүлсэн матриц А матрицын эрэмбийг өөрчлөхгүйгээр мөр ба баганын байрыг солих үйлдэл:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Тодорхойлогч $\det(A)$ скаляр утга буцаана. Энэ нь матрицын мөрөнд байгаа векторуудаар тодорхойлсон параллелограммын талбай (эсвэл эзэлхүүн) -ийг илэрхийлнэ.

$$\text{For } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

Шинж чанарууд:

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$
- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{A}) = 0$ if and only if \mathbf{A} is singular.

Trace диагональ элементүүдийн нийлбэр байна.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{tr}(\mathbf{A}) = 1 + 7 = 8$$

Шинж чанарууд:

- $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$
- $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$

Тусгай матрицууд

Нэгж матриц диагональ утга 1 бусад нь 0 байх квадрат матриц. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Диагональ матриц Диагоналийн утгуудтай бусад нь 0 байх квадрат матриц. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$

References

- [1] Stephen E Palmer. *Vision science: Photons to phenomenology*. MIT press, 1999.
- [2] Brian A Wandell. *Foundations of vision*. Sinauer Associates, 1995.