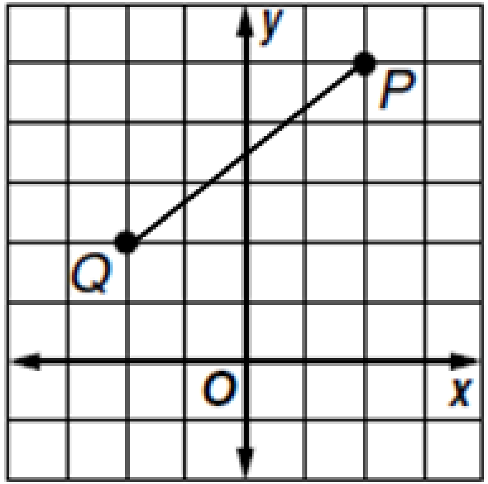
Лекц: Фрактал ба Сиерпинскийн гурвалжин
(Fractals and Sierpinski triangle)

Ч.Цэнд-Аюуш(Ph.D)
Компьютерийн Ухааны Салбар
304 тоот

Удиртгал

PQ сегментийн дунд цэгийн координатыг ол.

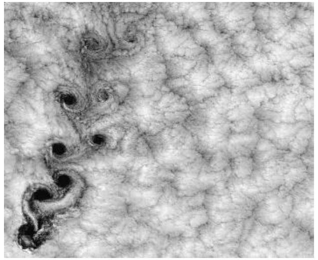


Midpoint Томъёо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Фрактал гэж юу вэ

- Фрактал гэдэг нь хэсэг бүр нь бүхэлдээ ижил статистик шинж чанартай байдаг геометрийн дүрс юм. Энэ бол хэзээ ч дуусдаггүй хэв загвар юм.
- Эдгээр нь энгийн процессыг дахин дахин давтах замаар бүтээгддэг.
- Эдгээр нь ижил төстэй хэв шинжүүд аажмаар жижиг масштабаар давтагддаг бүтцийг загварчлах, үүл, зүлэг, модны үндэс, шингэний эргэлт зэрэг үзэгдлүүдийг дүрслэхэд чухал ач холбогдолтой юм.
- Фракталууд нь компьютер график, анимэйшн зэрэгт хэрэглэгддэг




Фракталын чухал шинж чанарууд

- Рекурсив байна. Өөрөөр хэлбэл, тэднийг бий болгох үйл явц төгсгөлгүй давтагдана.

P1=F(P0), P2=F(P1), P3=F(P2), . . .

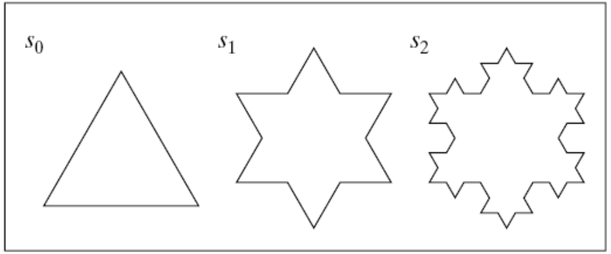
- Self-similarity

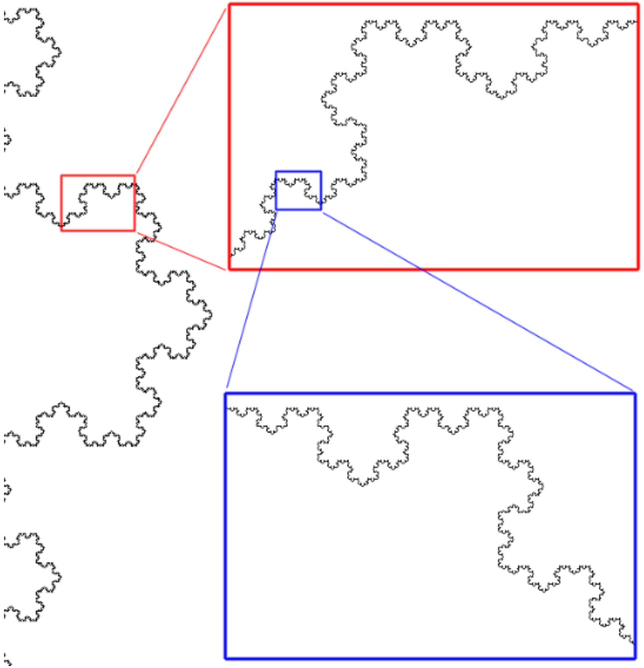
Объектуудын эд анги, ерөнхий шинжүүд хоорондоо ижил төстэй байна.

Self-Similarity

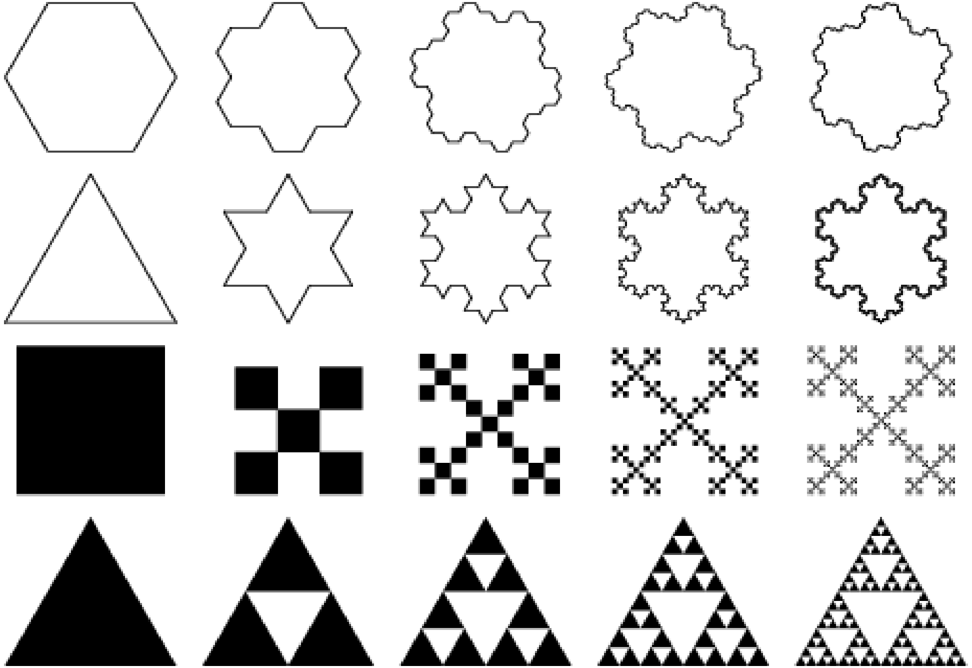
Self similarity: Томруулж харвал түвшин бүртээ ижил байна.

Жишээ: Koch snowflake





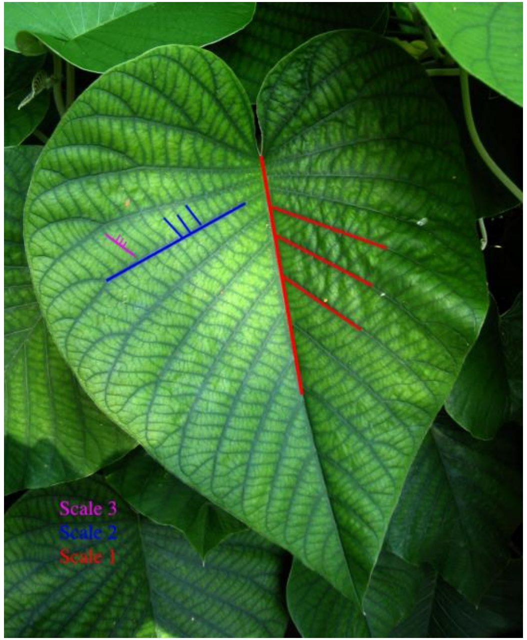
Self-Similarity

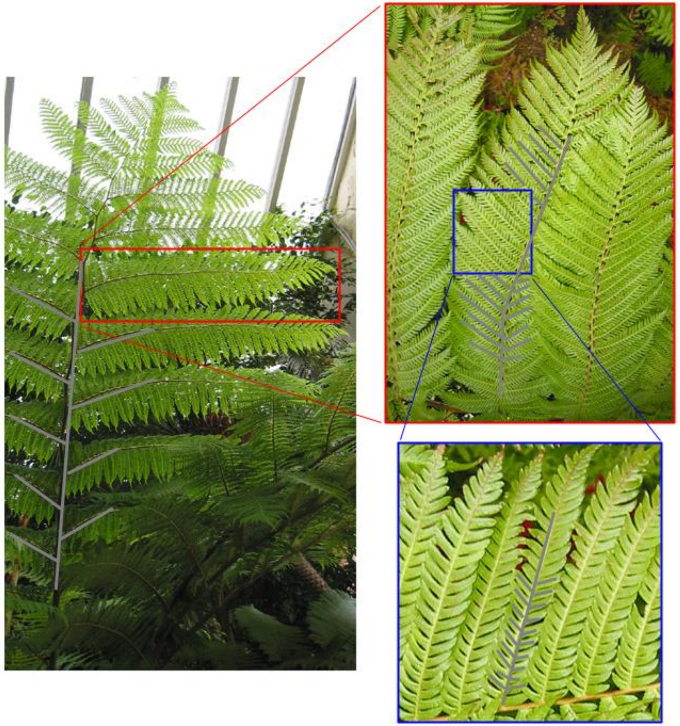


Статиастик Self-Similarity

Жишээ: coastline

Бодит амьдрал дээрх Self-Similarity



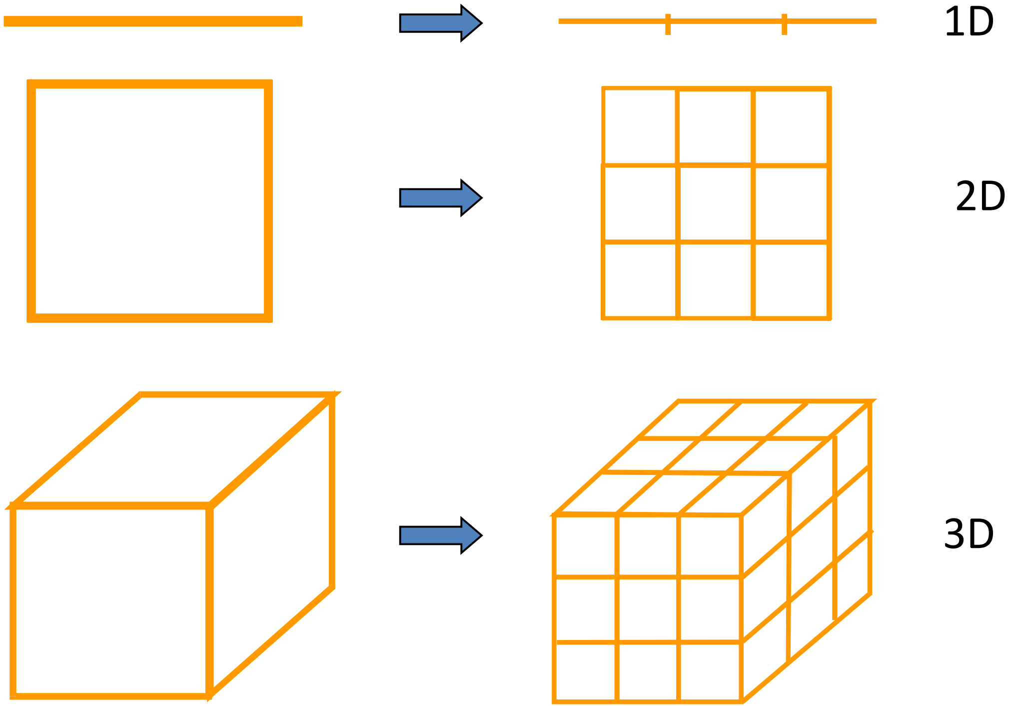


Фракталын ангилал

- Self-similar fractals
  - бүх хувилбарууд нь объектын жижигрүүлсэн масштаб бүхий хэсгүүд байна.
- Self-affine fractals
  - sx,sy,sz зэрэг өөр өөр координатын дагуу масштабладаг утга бүхий хэсэгүүдтэй.
- Invariant fractals
  - Энэ ангилалд Mandelbrot багц болгон self squaring fractals орно.

Хуваагдах хэмжээ

Self-similar хэмжигдэхүүн



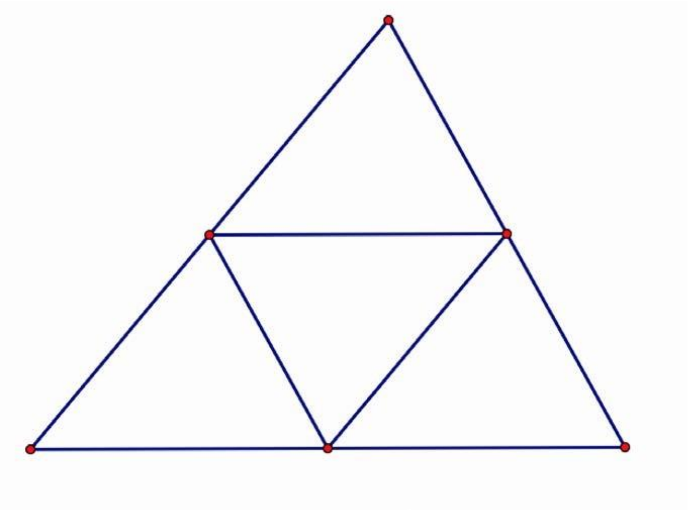
Серпинскийн гурвалжин байгуулах

Хэрэглэгдэхүүн: цаас, шугам, харандаа

Шугам ашиглан цаасыг бүхэлд нь хамрах гурвалжин зур.

Гурвалжин нь ямар ч хэлбэрийн гурвалжин байж болно,гэхдээ энэ нь ойролцоогоор хоёр талт байвал илүү хялбар байх болно.

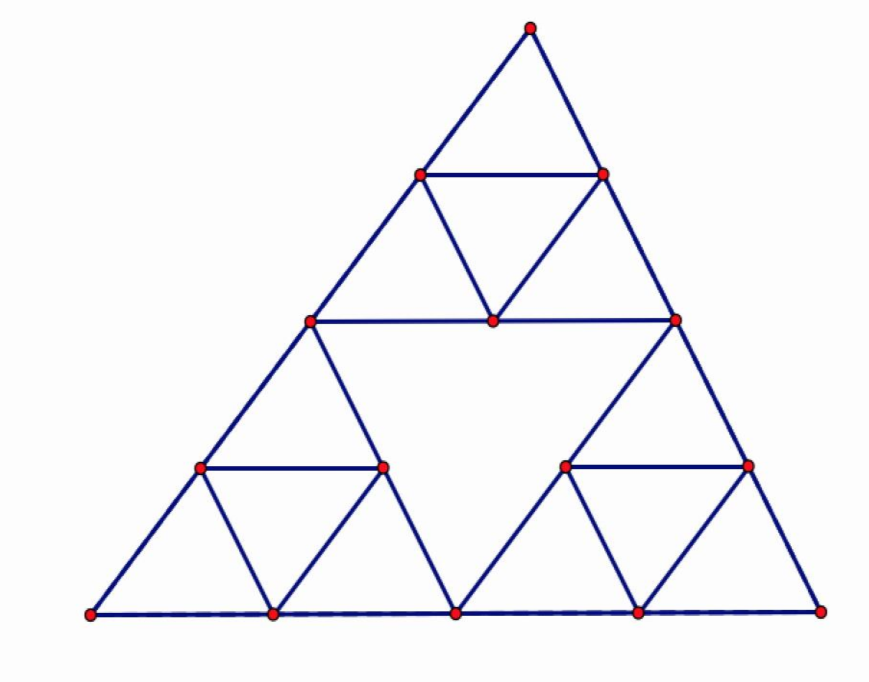
Харандаа ба шугам аван дунд цэгүүдийг олно. Гурвалжингийн хоёр тал ба цэгүүдийг холбоно.



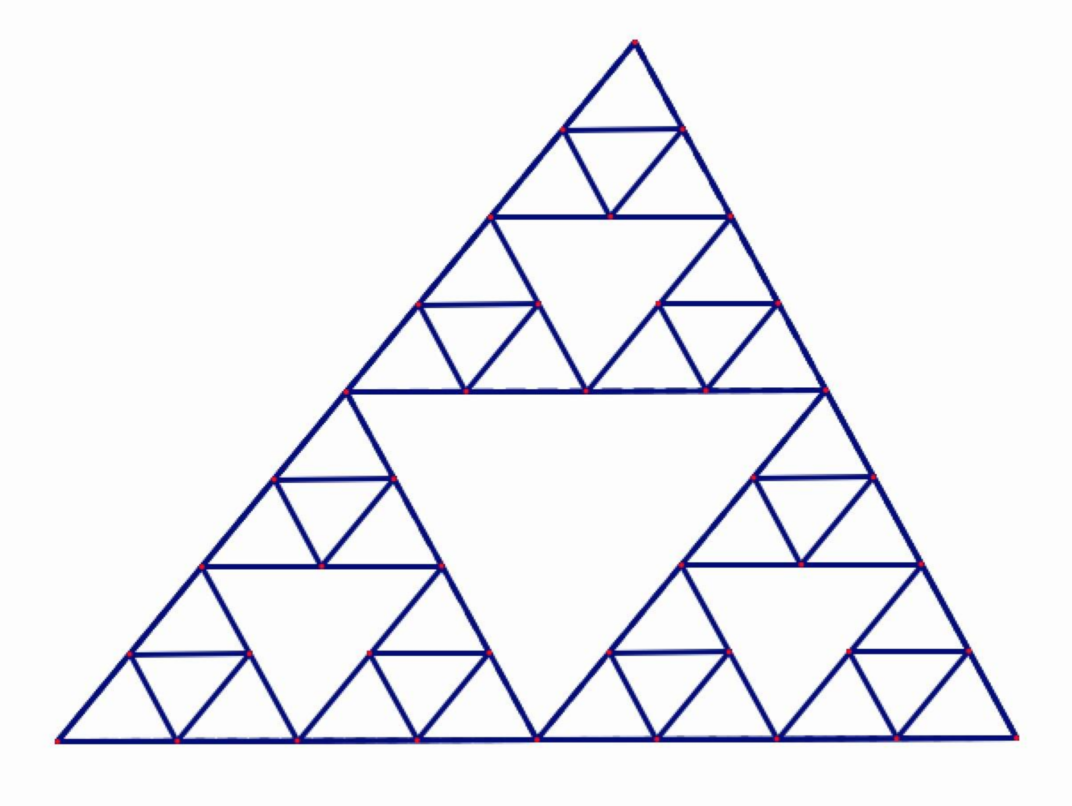
Сиерпинскийн гурвалжин зурах 2 дахь давталт

Хамгийн багадаа нэг удаа давтах, боломжтой бол түүнээс олон давтах

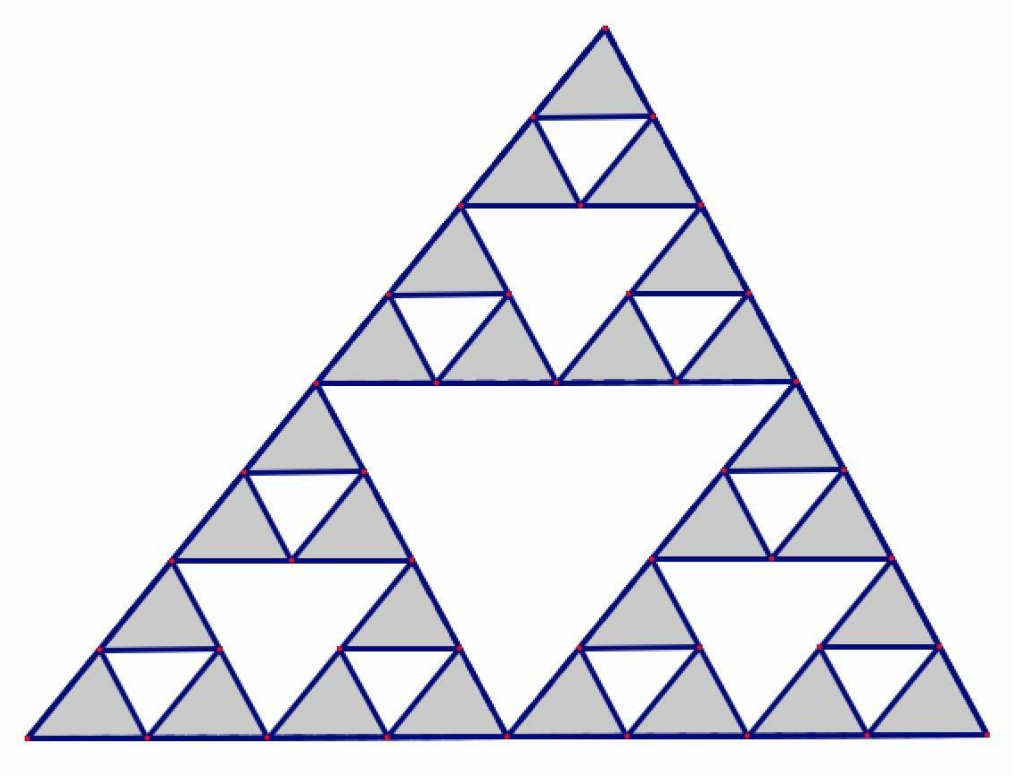
Гурвалжин бүрийн дунд хэсгийг үргэлж нээлттэй орхино.



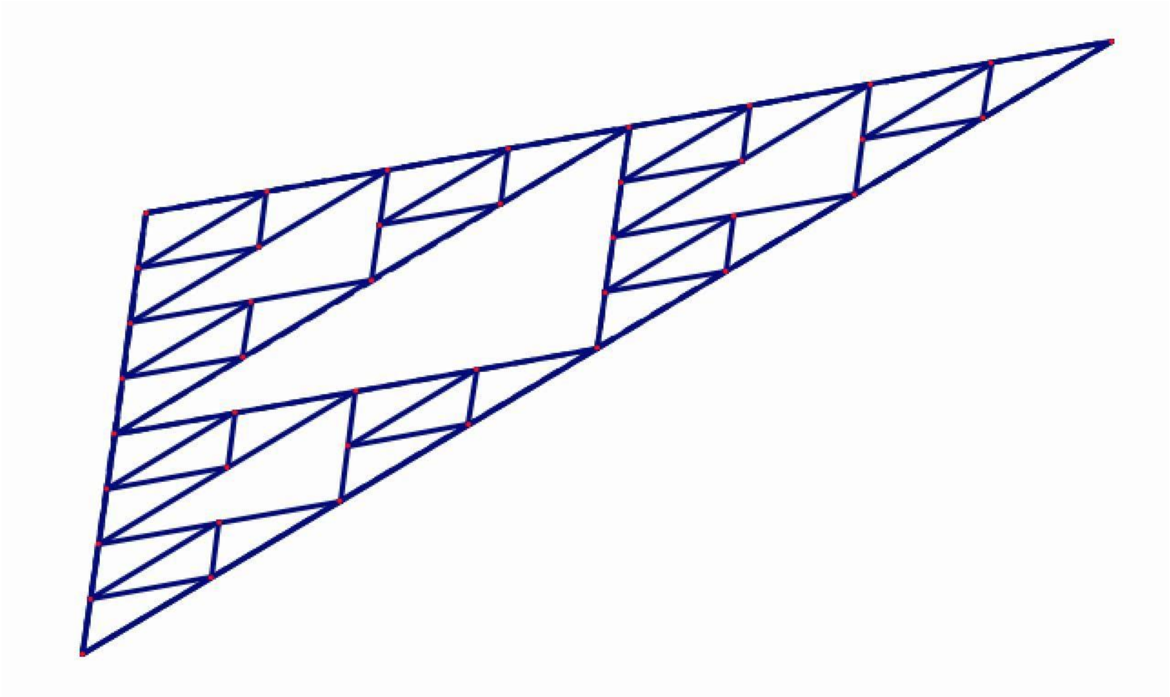
Сиерпинскийн гурвалжин зурах 3 дахь давталт



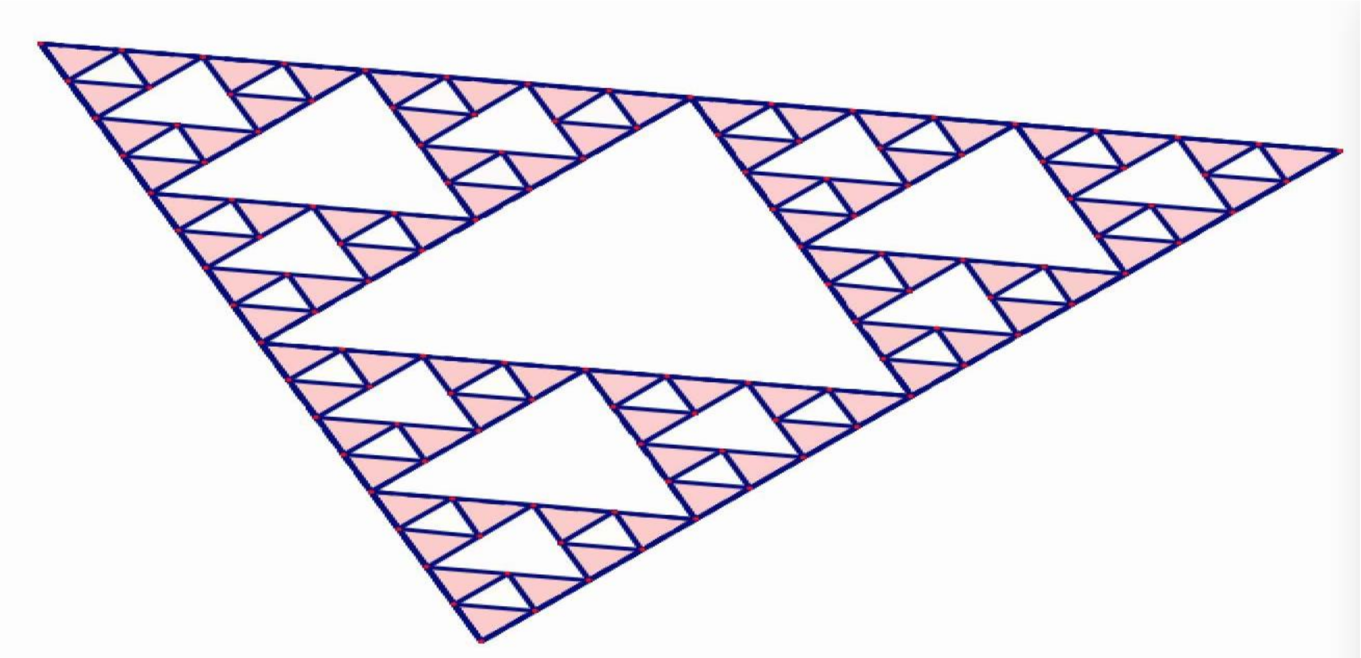
Сиерпинскийн гурвалжин зурах 3 дахь давталт



Процесс нь дурын хэлбэртэй гурвалжин дээр ажиллана



4 давталттай өөр нэг жишээ



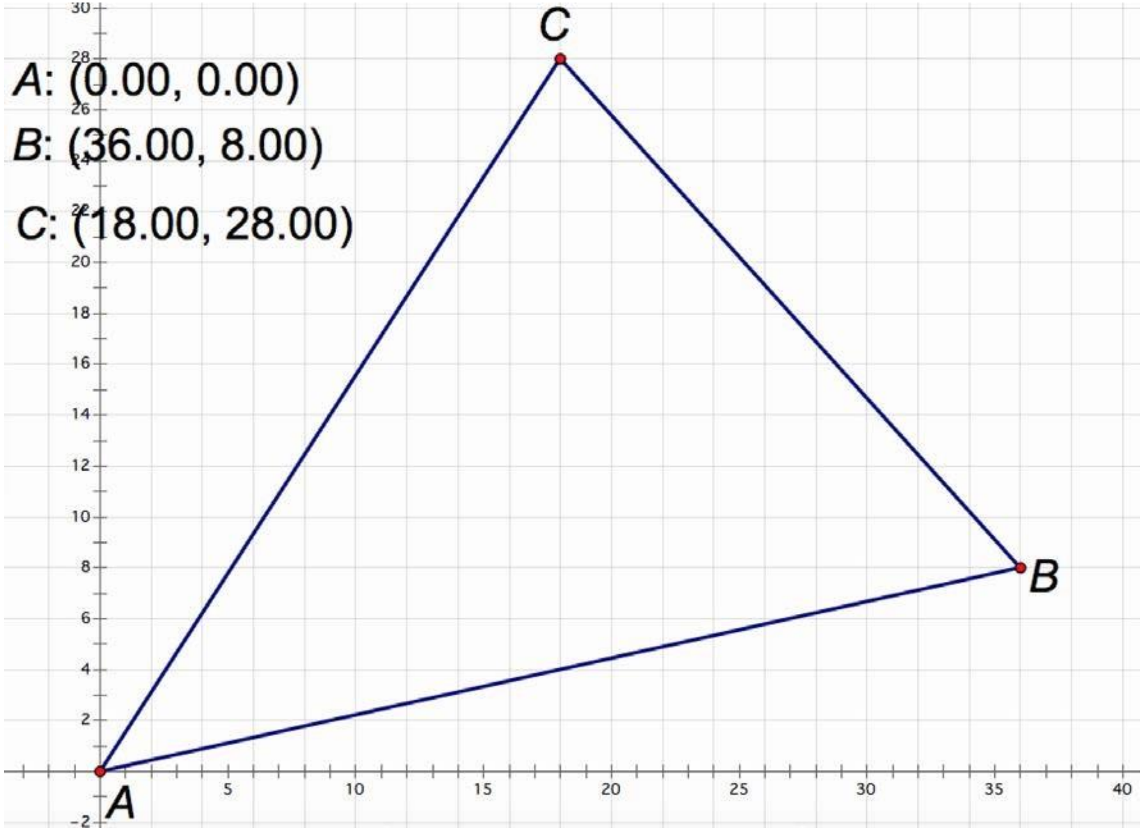
Хоёр дахь арга (Бүлэглэх үйл ажиллагаа)

Хэрэглэгдэхүүн: Харандаа, цаас, шугам, тодруулагч

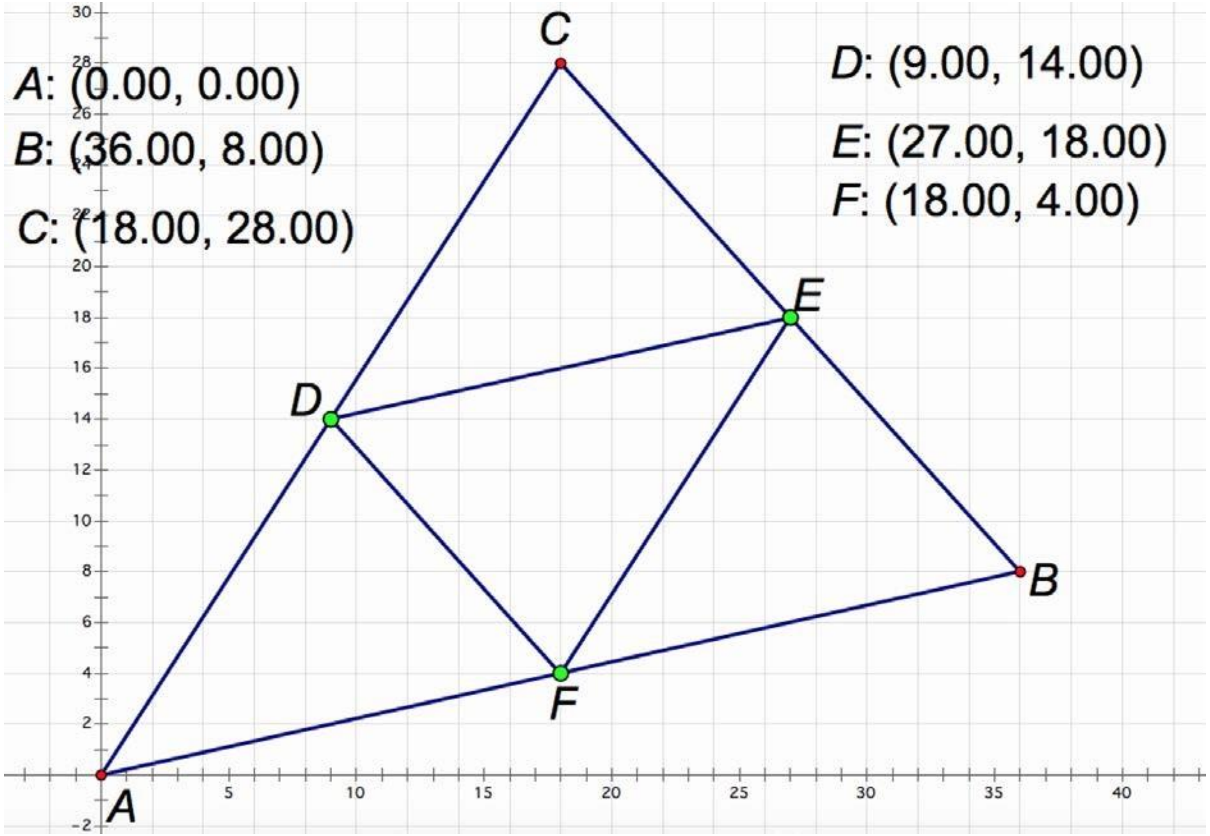
Бүлэг бүр нэг гурвалжинг бүтээнэ.

1. Цаасны зүүн ба доод талд тэнхлэг зур.
2. Том гурвалжин хийхийн тулд гурван цэгийг сонгоно уу. Хэрэв цэгүүдийн нэг нь координатын төв бөгөөд нэг цэг нь тэнхлэгүүдийн аль нэг дээр байрлавал илүү хялбар болно.
3. Гурвалжны хажуу тус бүрийн дунд цэгийг тооцоолж цэгүүдийн графикийг гарга.
4. Дунд цэгүүдийг холбоно.

Эхлэл – Координатын хавтгай дээр гурвалжин зурах

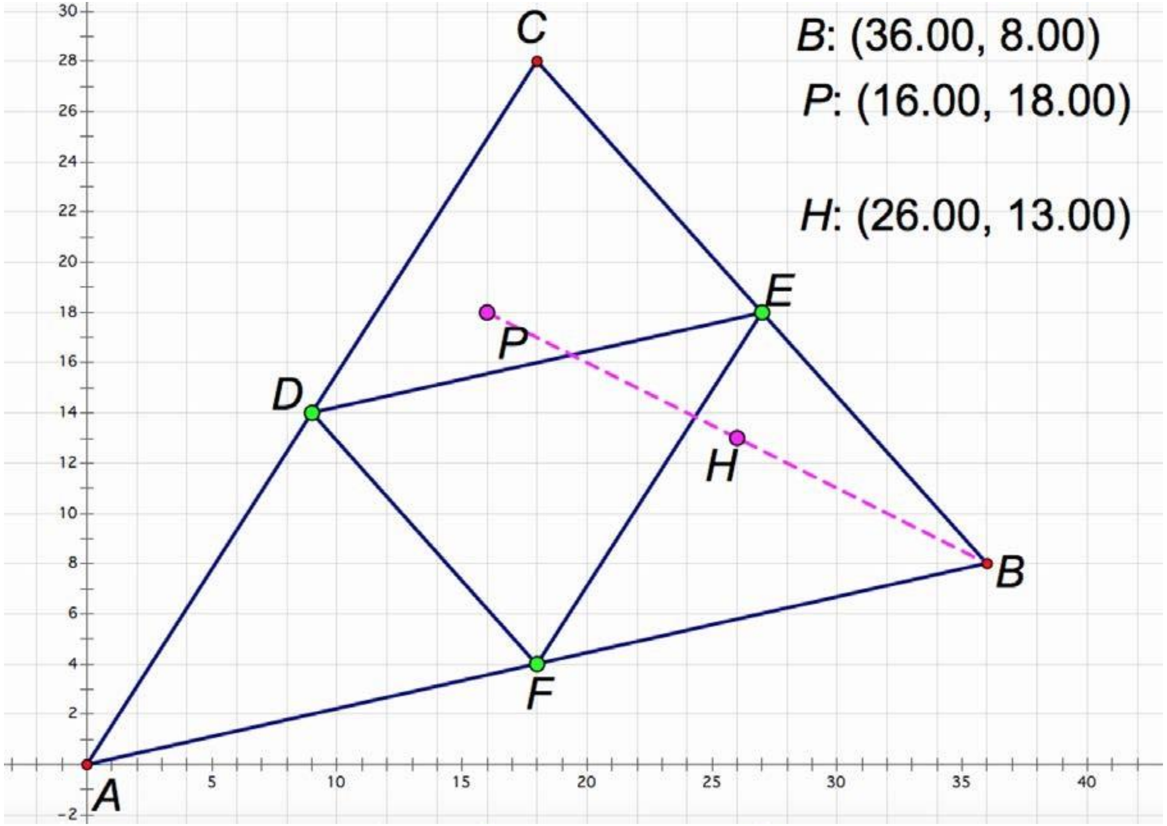


Гурвалжингийн хажуугийн дундаж цэгүүдийг тооцоолох ба холбох

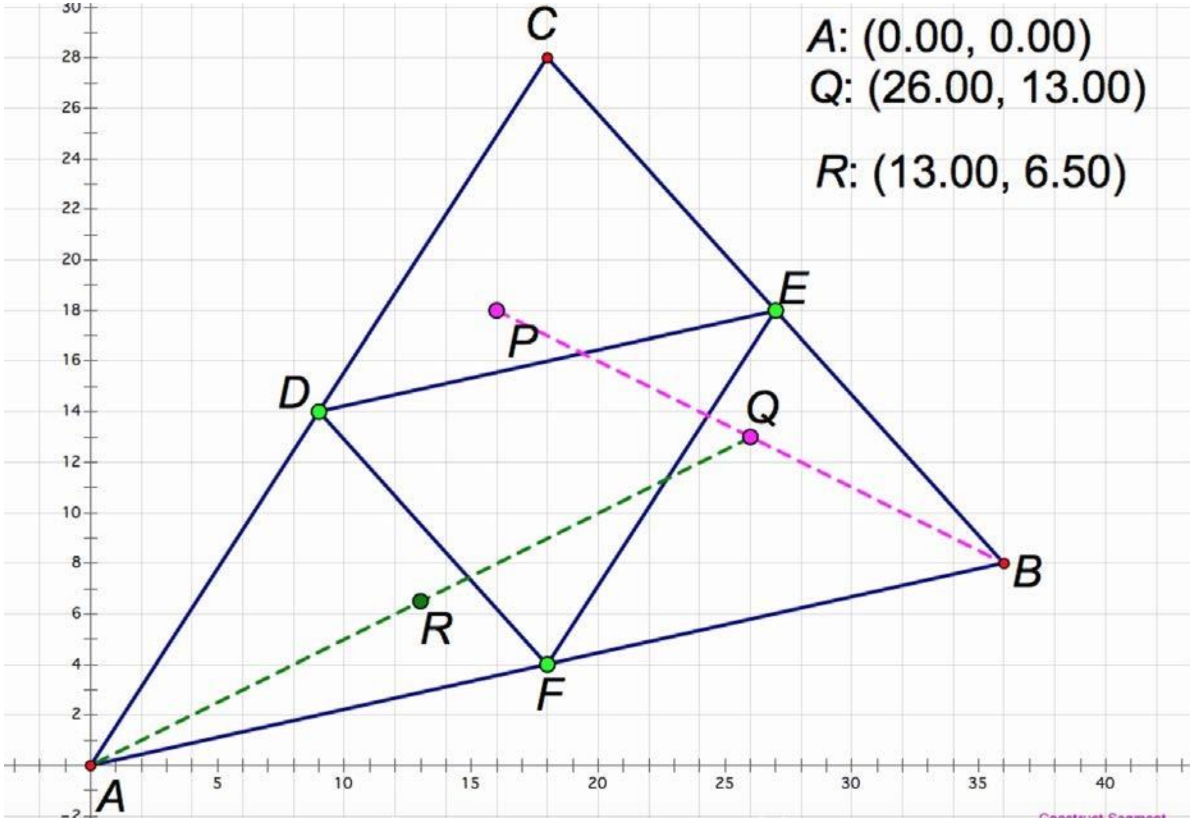


P цэгийг (хаа нэгтээ) тэмдэглэх ба Эхний Midpoint (H) тодорхойлох

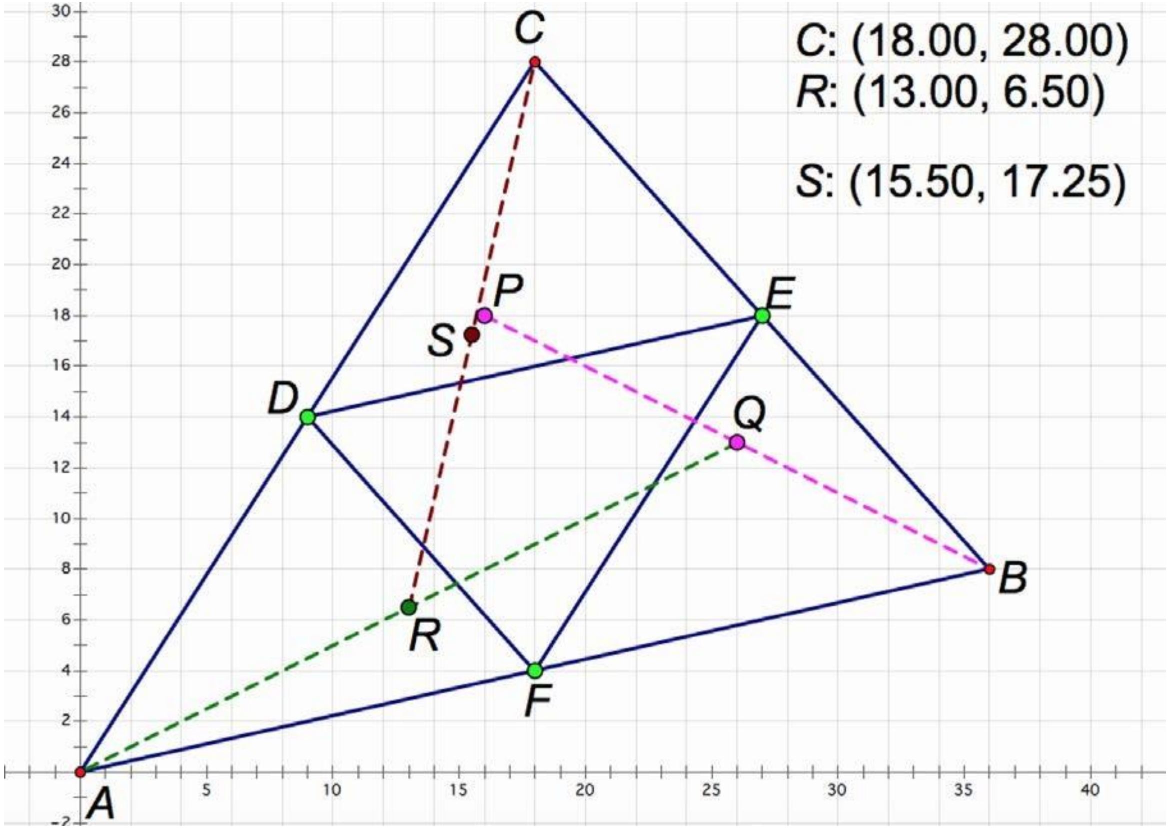
P ба дурын оройн (A, B, C) хоорондох цэгийг ол.



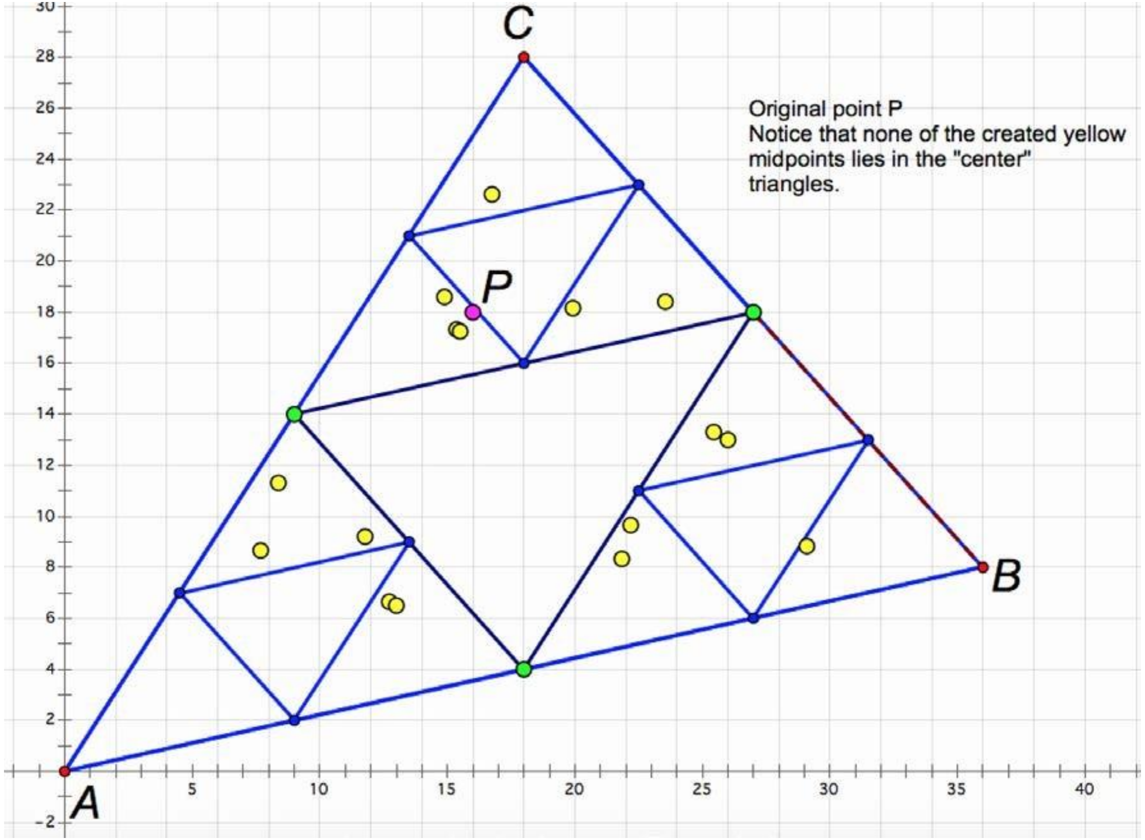
Хоёр дахь Midpoint (R) тодорхойлно



Гурав дахь Midpoint (S) тодорхойлно



Дундаж цэгийг тодорхойлох 16 давталтын дараа



Сиерпинскийн гурвалжин үүсгүүрийг ашиглах

https://www.khanacademy.org/computer-programming/chaos-game/2777397046

- Гурвалжины координатыг өөрчлөж үзэх
  - (x1, y1)
  - (x2, y2)
  - (x3, y3)
- Давталтыг өөрчилж үзэх
- Цэгийн хэмжээг өөрчилж үзэх

Програмчлал

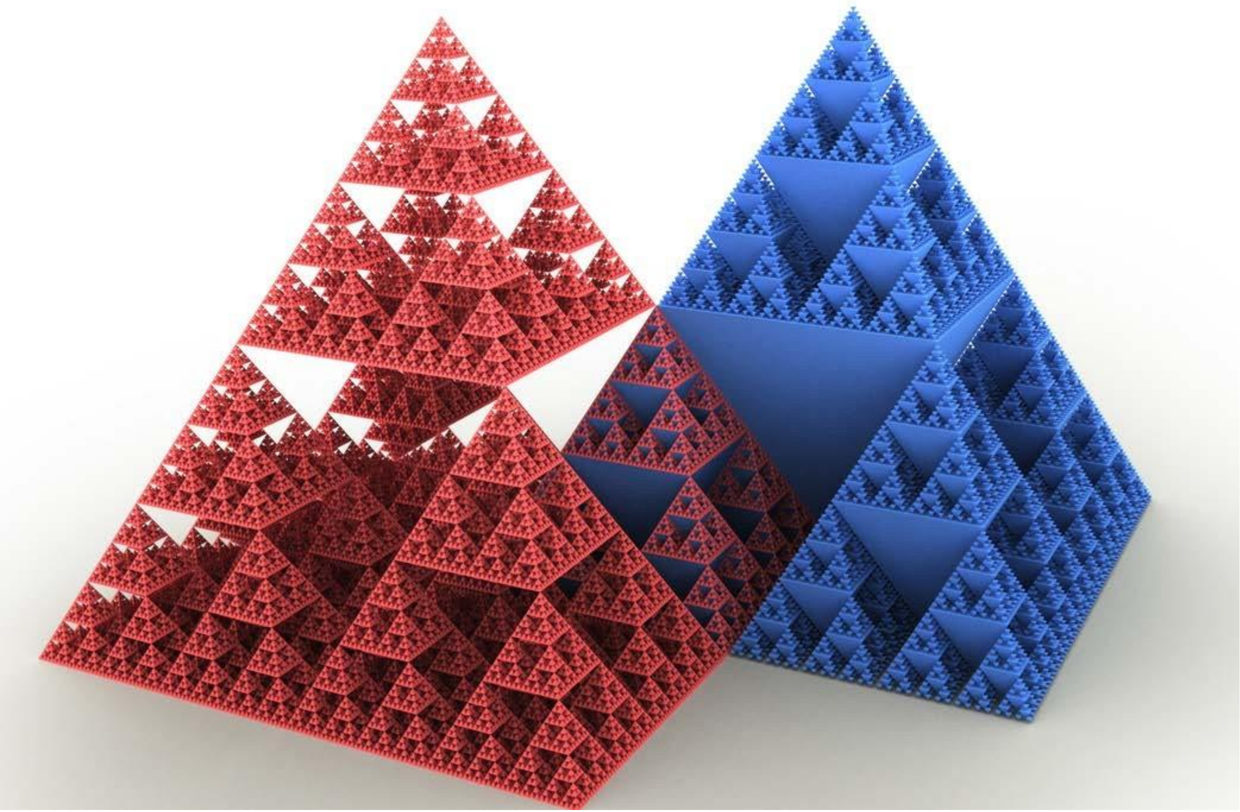
Эхлэл

$$A(x_1, y_1)$$
$$B(x_2, y_2)$$
$$C(x_3, y_3)$$
$$P(a, b)$$

Midpoint томъёо

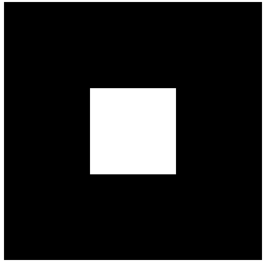
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Гурван хэмжээстийн жишээ- Sierpinski Tetrahedron




M.A.S.T.E.R.S. USA Tour
THE OHIO STATE

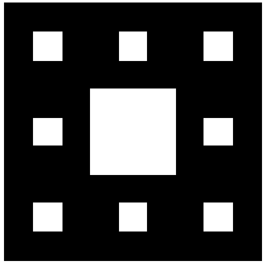
Серпинскийн хивс



периметр = 4(3) + 4(1)

талбай = $3^2 - 1^2$

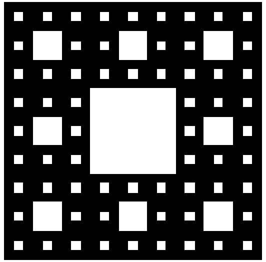
3 хэмжээтэй квадрат, мөн түүний уртыг нэгээр хорогдуулсан өөр нэгэн квадратаас эхэлье.



периметр = $4\cdot 3+4\cdot 1+8\cdot 4\cdot \frac{1}{3}$

талбай = $3^2-1^2-8\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

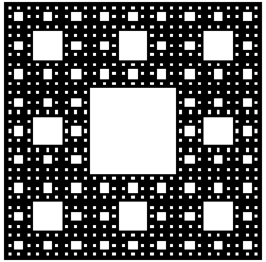
Уг квадрат нь тус бүрийн талын урт нь 1 байх найман жижиг квадратыг агуулсан байг.



$$P = 4\cdot 3+4\cdot 1+8\cdot 4\cdot \frac{1}{3}+8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$S = 3^2-1^2-8\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2-8^2\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2}$$

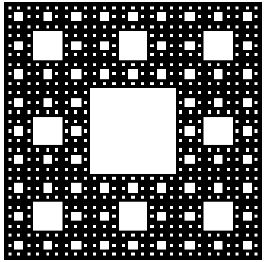
Давталт.



$$P = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \quad S \quad 3^2 - 1^2 - 8\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2} - 8^3\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 3}$$

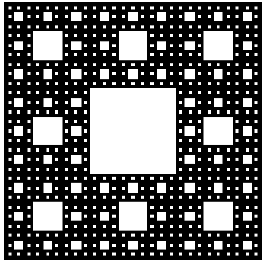
Давталт.



$$P = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

$$= 4\cdot 3 + \sum_{n=0}^{\infty} 4\cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

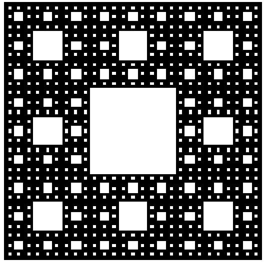
$$= \infty$$



$$S = 3^2 - 1^2 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2} - 8^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 3} - \dots$$

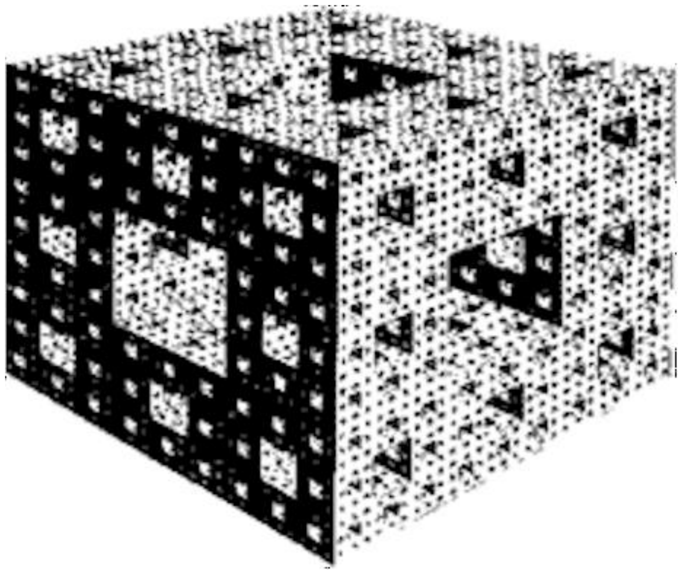
$$= 3^2 - \left[1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \dots\right]$$

$$= 3^2 - \left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}}\right) = 0$$



Sierpinski хивсний Фрактал хэмжээг тооцоолох?

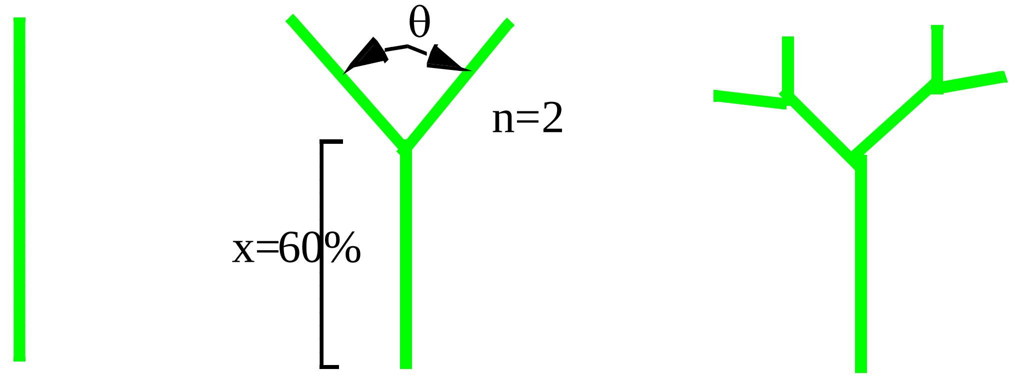
$$\log_3 8 \approx 1.89$$

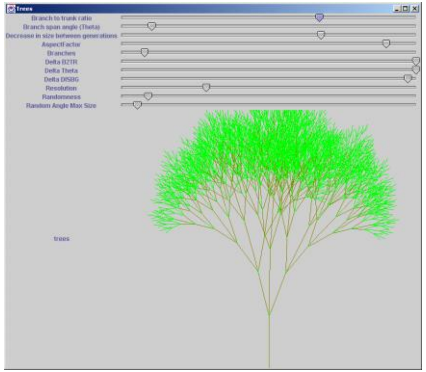


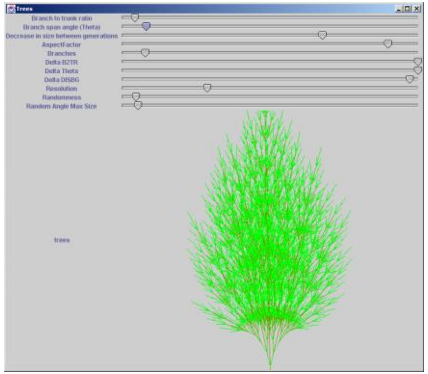
Menger sponge fractal dimension :

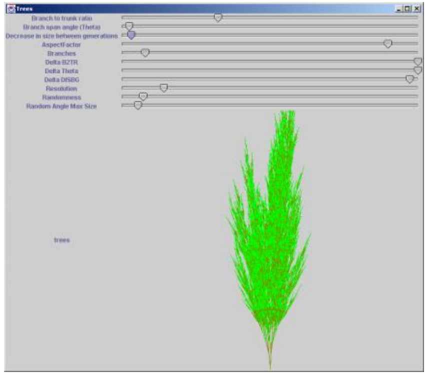
$$\log_3 20 \approx 2.73$$

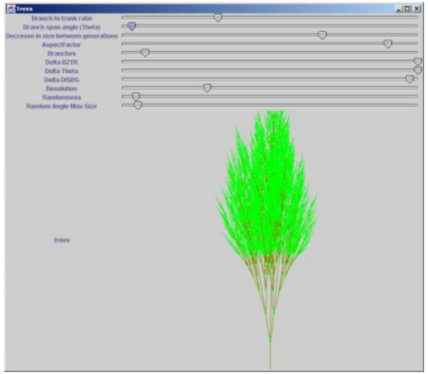
Мод

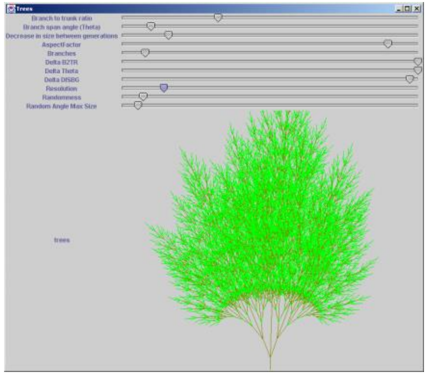



Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees

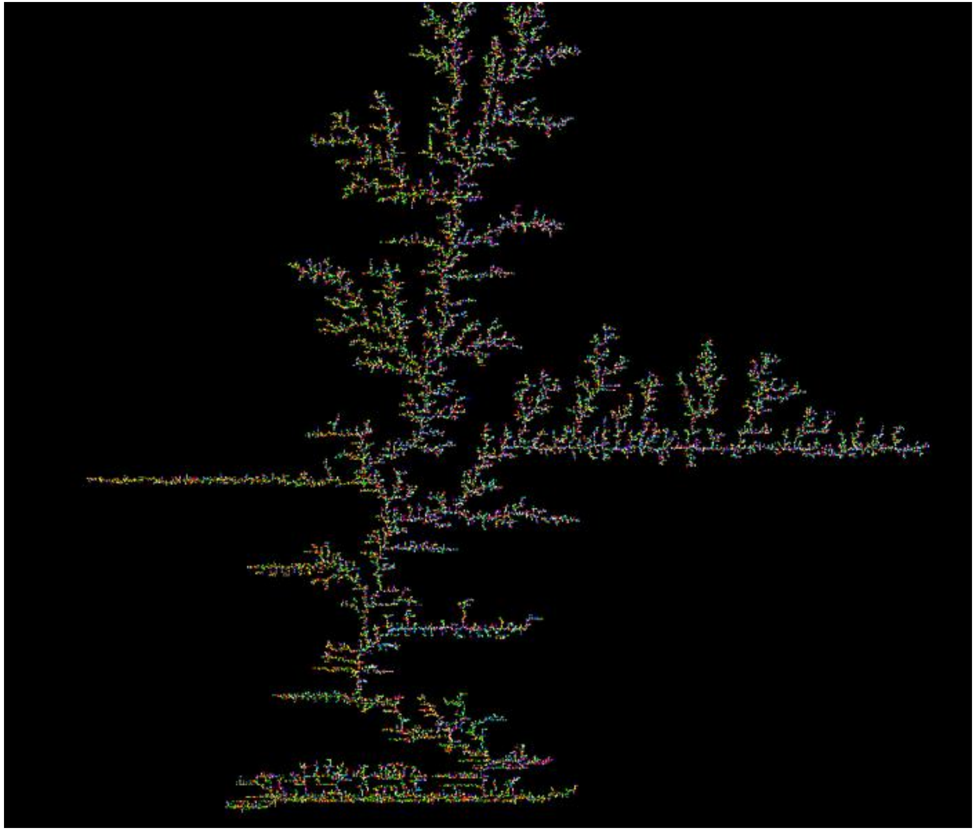

Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees

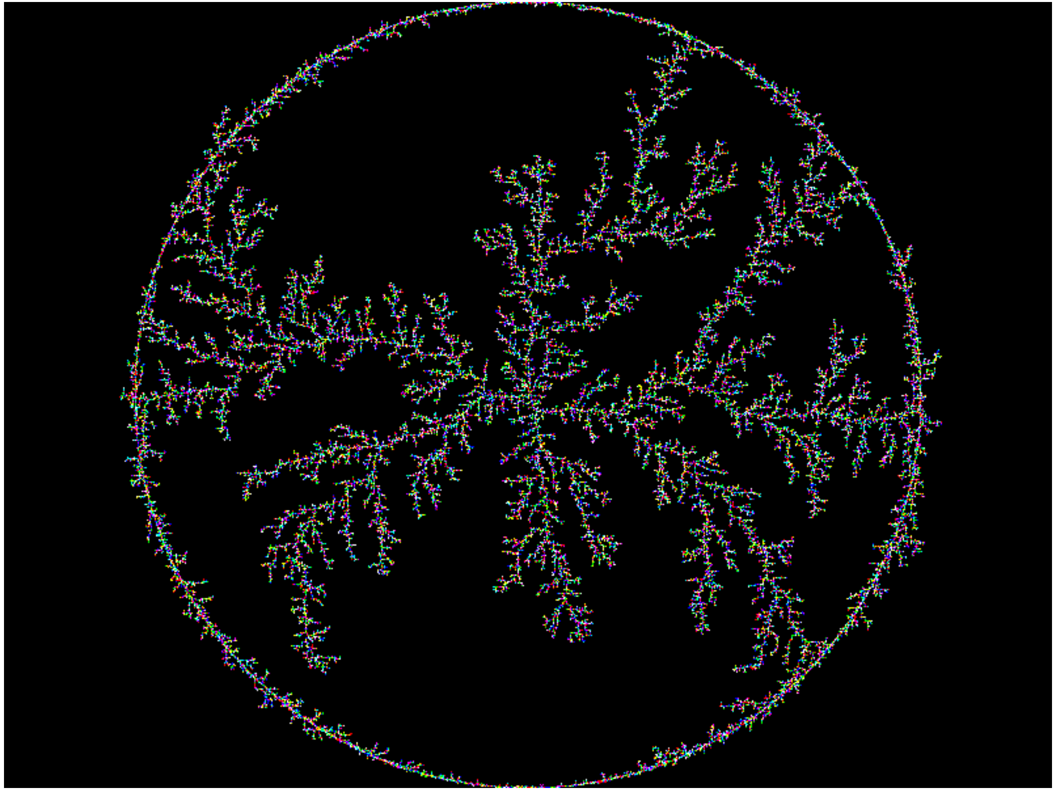

Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees


Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees


Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees

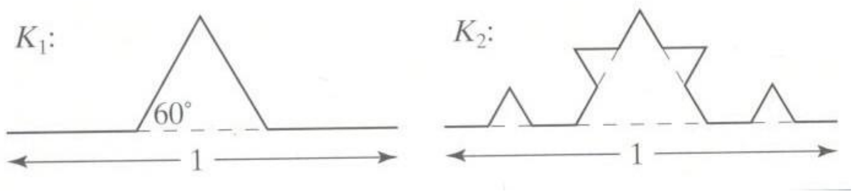
Random Fractal: Brown-ы моднууд



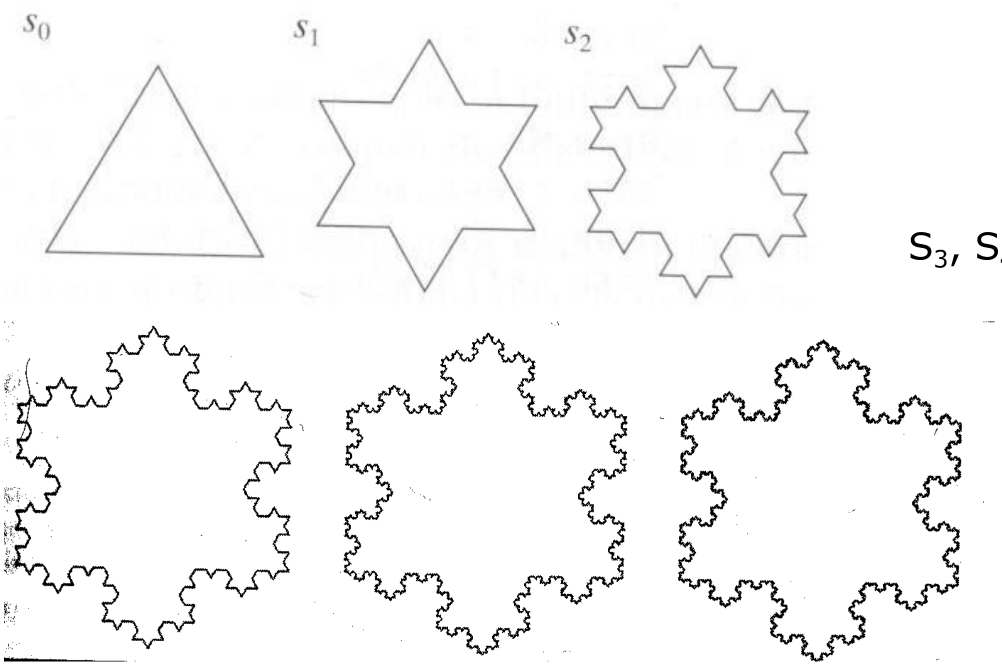


Кохын муруй (Koch Curves)

- 1904 онд Хельге фон Кох (Helge von Koch) нээжээ
- 1 урттай үргэлжилсэн шулуунаас эхэлнэ
- Рекурсив:
  - Шулууныг 3 тэнцүү хэсэгт хуваана
  - Дунд сегментийг хасаж буй сегменттэй ижил урттай тэнцүү талт гурвалжны хоёр талаар орлуулна. Шинэ урт = 4/3



Кохын муруй



S_3, S_4, S_5,

Кохын цасан ширхэг (Koch Snowflakes)

- Кохын гурван муруйг нийлүүлэн Кох цасан ширхгийг үүсгэж болно
- Цасан ширхгийн периметр нь дараахь байдлаар өсдөг.

$$P_i = 3\left(\frac{4}{3}\right)^i$$

P_i нь цасан ширхэгийн i дахь давталтын периметр

- Талбайн өсөлт $S_\infty = 8/5$!!
- Self-similar:
  - Дурын хэсэгт томруулж харвал ижил байна
  - Хэрэв n нь хангалттай бол хэлбэр нь хэвээр байна

Кохын цасан ширхэг

Pseudocode, to draw K_n:

If (n equals 0) draw straight line Else{

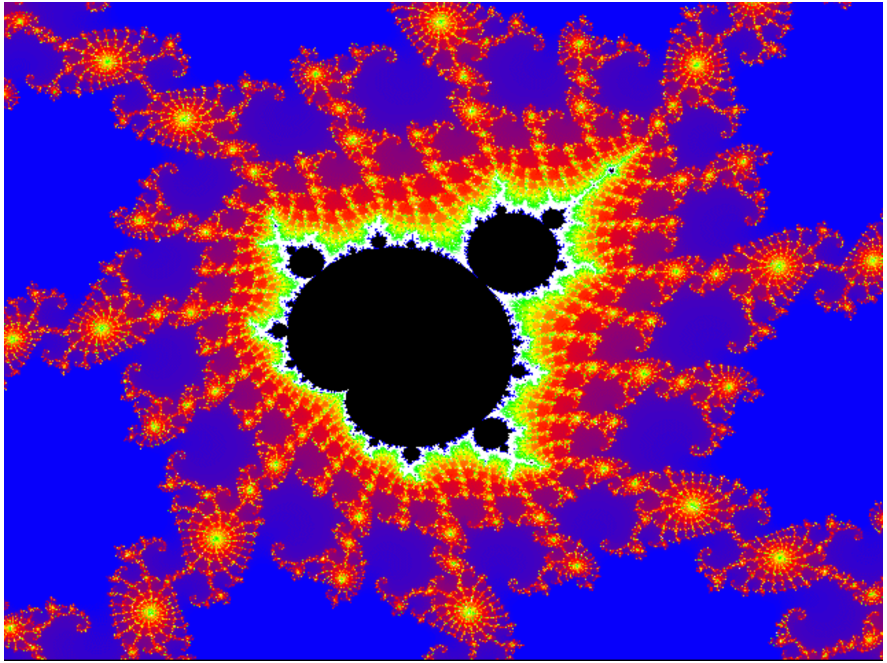
Draw K_{n-1} Turn left 60° Draw K_{n-1}

Turn right 120° Draw K_{n-1}

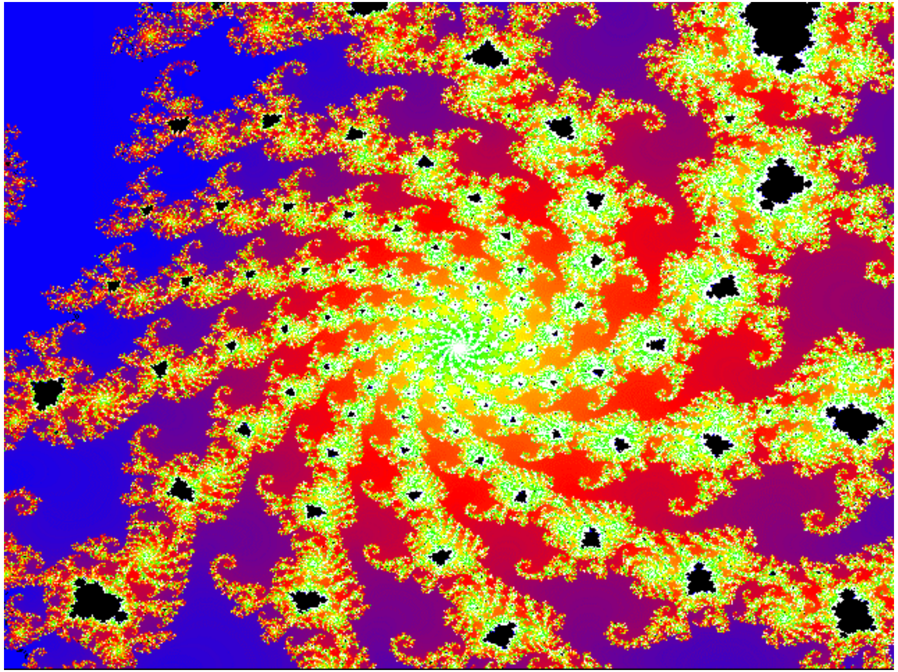
Turn left 60° Draw K_{n-1}

}

Жишээ: Mandelbrot Set



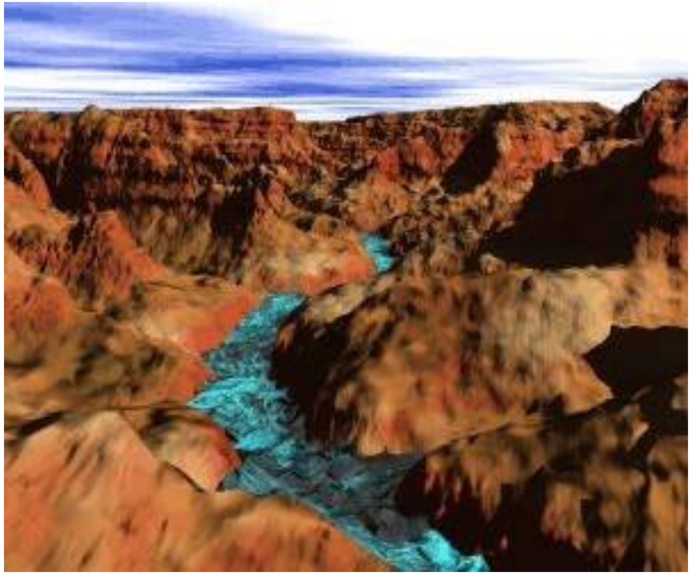
Жишээ: Mandelbrot Set



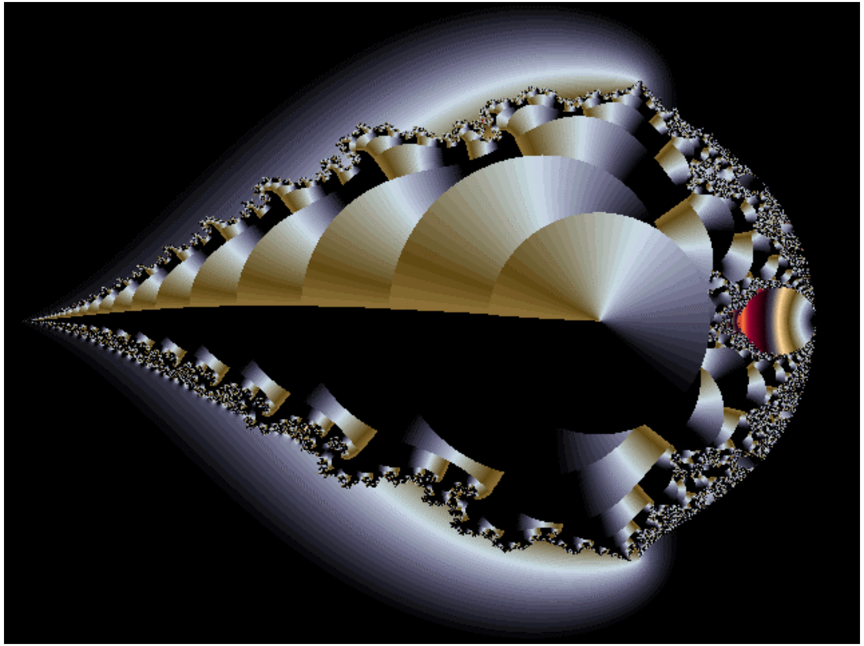
Жишээ: Fractal Terrain

Courtesy: Mountain 3D Fractal Terrain software

Жишээ: Fractal Terrain

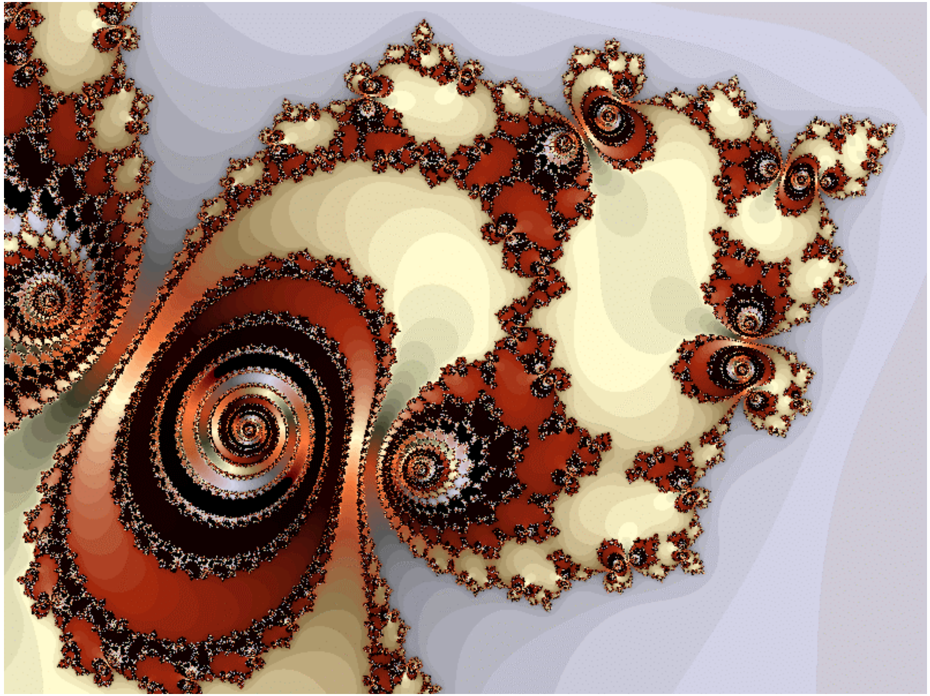


Жишээ: Fractal Art



Courtesy: Internet Fractal Art Contest

Хэрэглээ: Фрактал урлаг



Courtesy: Internet Fractal Art Contest

Mandelbrot Set

- Давталтын онол дээр суурилсан
- Сонирхолын функц:

$$f(z) = (s)^2 + c$$

- Утгуудын дараалал (орбит):

$$d_1 = (s)^2 + c$$
$$d_2 = ((s)^2 + c)^2 + c$$
$$d_3 = (((s)^2 + c)^2 + c)^2 + c$$
$$d_4 = ((((s)^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c$$

Mandelbrot Set

- Mandelbrot set: use complex numbers for *c* and *s*
- Always set $s = 0$
- Choose c as a complex number
- For example:
  - $s = 0$, $c = 0.2 + 0.5i$
- Hence, orbit:
  - $0, \; c, \; c^2, \; c^2 + c, \; (c^2 + c)^2 + c, \ldots\ldots\ldots$
- Definition: Mandelbrot set includes all finite orbit *c*

Mandelbrot Set

- Some complex number math:

$$i * i = -1$$

- For example:

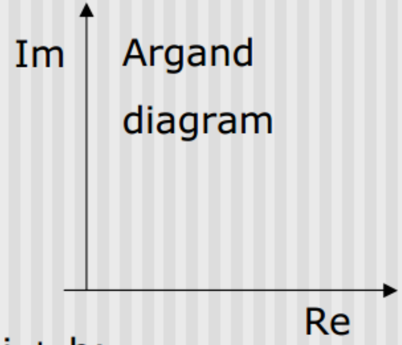
$$2i * 3i = -6$$

- Modulus of a complex number, z = ai + b:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Squaring a complex number:

$$x + yi = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$



Mandelbrot Set

- Эхний 4 нөхцөлийг тооцоолох
  - s=2, c=-1
  - s = 0, c = -2+i

Mandelbrot Set

- Calculate first 3 terms
  - s=2, c=-1, terms are

$$2^2 - 1 = 5$$
$$5^2 - 1 = 24$$
$$24^2 - 1 = 575$$

- s = 0, c = -2+i

$$0 + (-2 + i) = -2 + i$$
$$(-2 + i)^2 + (-2 + i) = 1 - 3i$$
$$(1 - 3i)^2 + (-2 + i) = -10 - 5i$$

Mandelbrot Set

- **Fixed points:** Some complex numbers converge to certain values after *x* iterations.
- **Example:**
  - s = 0, *c* = -0.2 + 0.5i converges to –0.249227 + 0.333677i after 80 iterations
  - **Experiment:** square –0.249227 + 0.333677i and add

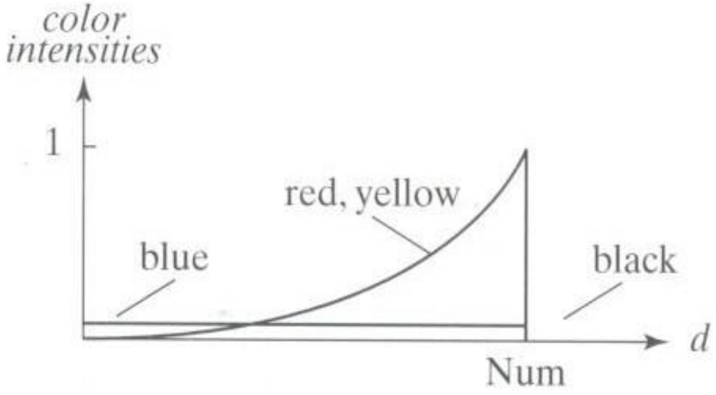
    -0.2 + 0.5i
- Mandelbrot set depends on the fact the convergence of certain complex numbers

Mandelbrot Set

- Routine to draw Mandelbrot set:
- Cannot iterate forever: our program will hang!
- Instead iterate 100 times
- Math theorem:
  - if number hasn't exceeded 2 after 100 iterations, never will!
- Routine returns:
  - Number of times iterated before modulus exceeds 2, *or*
  - 100, if modulus doesn't exceed 2 after 100 iterations
  - See dwell( ) function in Hill (figure A4.5, pg. 755)

Mandelbrot Set

Тасралтгүй функцийг ашиглана



Үнэгүй програм хангамж

- Фрактал үүсгэх програм хангамж
  - Fractint
  - FracZoom
  - Astro Fractals
  - Fractal Studio
  - 3DFract