Шершнев Павел КН-402
Лаб.работа №3
Вариант 19

Решить систему линейных уравнений вида $Ax = b$, используя точные и итерационные методы:

1. Метод Гаусса;
2. Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице;
3. Метод Якоби;
4. Метод Гаусса-Зейделя.

В отчете:

- В методах 1,2 сравнить результаты решения;
- Для методов 3, 4 проверить сходимость метода; в случае сходимости найти решение с точностью $0.5 \cdot 10^{-4}$; сравнить количество итераций.

$$A = \begin{pmatrix} -0.10 & 0.81 & 0.38 \\ -0.11 & -0.39 & -0.50 \\ 1.69 & -0.01 & 0.20 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2.66 \\ -2.39 \\ 2.27 \end{pmatrix}$$

Решение системы:
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3$
1) Решение системы при помощи метода Гаусса:
x_1= 0.9999999999999982
x_2= 2.0
x_3= 3.0000000000000004
2) Решение системы при помощи метода Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице:
x_1= 0.9999999999999982
x_2= 2.0
x_3= 3.0000000000000004
Если взглянуть на результаты работы двух методов, то можно сделать вывод, что оба они работают достаточно хорошо и близко к точному решению, однако имеют небольшую погрешность.
Сравнив результаты, можно заметить, что для x_1 и x_3 метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице сработал точнее, нежели обычный метод Гаусса. Для x_2 метод Гаусса сработал точно, без погрешности.
3) Метод Якоби: сходимости нет.
4) Метод Гаусса-Зейделя: сходимости нет.

Метод Гаусса-Зейделя. Сходимость.

$\det(\lambda L + \lambda D + R) = 0$

$$\begin{pmatrix} -0{,}1\lambda & 0{,}81 & 0{,}38 \\ -0{,}11\lambda & -\lambda 0{,}39 & -0{,}5 \\ 1{,}69\lambda & -\lambda 0{,}01 & \lambda 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Рассматриваем матрицу и считаем определитель

$$0{,}1\lambda \cdot 0{,}39\lambda \cdot 0{,}2\lambda - 0{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}69\lambda + 0{,}38 \cdot 0{,}11\lambda \cdot 0{,}01\lambda +$$

$$+ 0{,}38 \cdot 0{,}39\lambda \cdot 1{,}69\lambda + 0{,}1\lambda \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01\lambda + 0{,}81 \cdot 0{,}11\lambda \cdot 0{,}2\lambda =$$

$$= 0{,}0078\lambda^3 - 0{,}6844\lambda + 0{,}0004\lambda^2 + 0{,}2504\lambda^2 + 0{,}0005\lambda^2 +$$

$$+ 0{,}0176\lambda^2 = 0{,}0078\lambda^3 + 0{,}2689\lambda^2 - 0{,}6844\lambda = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -36{,}8551 \\ \lambda_3 = 2{,}3808 \end{array}\right. \Rightarrow$$

для Метода Гаусса-Зейделя сходимости нет, поскольку существует хотя бы один корень по модулю $> 1 \Rightarrow$ не выполняется условие сходимости.

$\det(\lambda L + \lambda D + R) = 0$. Метод Якоби. Сходимость

$$\begin{pmatrix} -0{,}1\lambda & 0{,}81 & 0{,}38 \\ -0{,}11 & -0{,}39\lambda & -0{,}5 \\ 1{,}69 & -0{,}01 & 0{,}2\lambda \end{pmatrix}$$

Рассматриваем матрицу и считаем определитель

$$0{,}1\lambda \cdot 0{,}39\lambda \cdot 0{,}2\lambda - 0{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}69 + 0{,}38 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}01 +$$

$$+ 0{,}38 \cdot 0{,}39\lambda \cdot 1{,}69 + 0{,}1\lambda \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}81 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}2\lambda =$$

$$= 0{,}0078\lambda^3 - 0{,}6844 + 0{,}0004 + 0{,}2504\lambda + 0{,}0005\lambda +$$

$$+ 0{,}0176\lambda = 0{,}0078\lambda^3 + 0{,}2685\lambda - 0{,}684 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2{,}2267 \\ \lambda_2 = -1{,}1133 + i \cdot 6{,}1759 \\ \lambda_3 = -1{,}1133 - i \cdot 6{,}1759 \end{array}\right.$$

т.к существует корень, абсолютное значение к-рого $> 1 \Rightarrow$ сходимости нет по теореме о сходимости (критерий)