Calculus Tau Noter

Noah Rahbek Bigum Hansen

17. januar 2025

Indhold

Forelæsning 1: Differentialregning og stamfunktioner 26. August 2024

Et kritisk punkt er ethvert punkt med en hældning på 0.

Definition 1: Definition af kritisk punkt

c er et kritisk punkt for f hvis $f'(c) = 0$

1 Globale ekstrema (6.1)

Vi har generelt, at et globalt ekstrema for en funktion kun kan indtræffe i kritiske punkter eller i endepunkter for en funktion. Altså kan alle globale ekstrema findes ved at undersøge alle kritiske punkter og begge (eller det ene eller ingen afhængigt af funktionen) endepunkter kan alle globale ekstrema findes.

Eksempel 1.1: Maksimum for en funktion

Vi ønsker at finde maksimum for funktionen

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}}$$

på intervallet [0,8].
For at gøre dette findes den afledte f' som

$$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}.$$

Denne sættes dernæst lig 0 som

$$f'(x) = 0 = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}.$$

Dernæst kan x isoleres som

$$\begin{aligned} 5x^{\frac{2}{3}} &= 2x^{-\frac{1}{3}} \\ 5x &= 2 \\ x &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Altså er funktionens kritiske punkt i intervallet fundet til $x = \frac{2}{5}$. Vi skal altså evaluere funktionen i det kritiske punkt $x = 2/5$ og i begge endepunkterne $x = 0$ og $x = 8$. Vi får altså at

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(8) &= 12 - 96 = -84 \\ f(\frac{2}{5}) &= 0{,}977. \end{aligned}$$

Altså er det kritiske punkt $x = 2/5$ altså et maksimum.

2 Maksimeringsproblemer (6.2)

Eksempel 2.1: Maksimeringsproblem i to variable

Vi ønsker at finde to positive tal x og y der opfylder

$$x + 3y = 30$$

så x^2y bliver maksimeret.

Vi ønsker altså at maksimere

$$m(x, y) = x^2y$$

For $x + 3y = 30$. Altså findes først et udtryk for y som

$$x + 3y = 30 \implies y = 10 - \frac{x}{3}.$$

Dette indsættes i $m(x, y)$ som

$$m(x, y) = x^2 \cdot \left(10 - \frac{x}{3}\right) = 10x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Vi ønsker nu at finde optimeringsgrænserne. Vi ved at $x, y < 0$. Vi har fra før at

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ 10 - \frac{x}{3} &> 0 \\ 10 &> \frac{x}{3} \\ x &< 30. \end{aligned}$$

Vi har altså, at $0 < x < 30$. Dermed skal $m(x, y)$ maksimeres for $0 < x < 30$. Vi finder de kritiske punkter som

$$\begin{aligned} 0 &= m'(x, y) \\ 0 &= 20x - x^2 \\ 0 &= x(20 - x). \end{aligned}$$

Altså er $x = 0$ og $x = 20$ løsninger, dog forkastes $x = 0$ da denne ikke er inde for optimeringsgrænsen. Vi kan dermed evaluere funktionen i begge endepunkter og i det kritiske punkt som

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(30) &= 0 \\ f(20) &= 1333{,}33\ldots. \end{aligned}$$

Altså er funktionen maksimeret i $x = 20$. Dette tilsvarer en værdi af y på

$$\begin{aligned} y &= 10 - \frac{20}{3} \\ &= \frac{30 - 20}{3} \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

3 Stamfunktioner og ubestemte integraler (7.1)

Definition 2: Stamfunktion

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$ hvis der gælder at $F'(x) = f(x)$.

Definition 3: Ubestemt integrale

Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$. Så er det ubestemte integrale af $f(x)$ givet ved

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Hvor C er en konstant.

4 Simple integraler og differentialer

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
kx^n	$n \cdot kx^{n-1}$	$\frac{k}{n+1}x^{n+1} + C$
ke^{cx}	$ck \cdot e^{cx}$	$\frac{k}{c} \cdot e^{cx} + C$
$kx \cdot e^{cx}$	$(ckx + k)e^{cx}$	$\frac{k}{c^2} \cdot (cx - 1)\, e^{cx}$
ka^{cx}	$ck \cdot \ln(a) \cdot a^{cx}$	$\frac{ka^{cx}}{c \cdot \ln(a)} + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \cdot (\ln(x) - 1) + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\frac{x \cdot (\ln(x)-1)}{\ln(a)} + C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln(x) + C$
$\frac{1}{ax+b}$	$-\frac{a}{(ax+b)^2}$	$\frac{ln(ax+b)}{a} + C$
$A\sin(kx + \phi)$	$kA \cdot \cos(kx + \phi)$	$-\frac{A}{k}\cos(kx + \phi) + C$
$A\cos(kx + \phi)$	$-kA \cdot \sin(kx + \phi)$	$\frac{A}{k}\sin(kx + \phi) + C$
$A\tan(kx + \phi)$	$kA \cdot \left(\tan(kx + \phi)^2 + 1\right)$	$\frac{-a}{2k}\left(\ln\left(\frac{1}{\tan(kx+\phi)^2+1}\right)\right) + C$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$F(x) + G(x) + C$
$f(x) \cdot g(x)$	$f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$	$f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x + C$
$f(g(x))$	$g'(x)f'(g(x))$	Brug substitution
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	Brug delvis integration
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2$	$\ln\lvert g(x)\rvert + C$
$\sqrt[b]{x}^a$	$\frac{a}{b} \cdot x^{\frac{a}{b}-1}$	$\frac{x^{a/b+1}}{a/b+1} + C$

5 Komplicerede integraler og differentialer

Hvis dit udtryk er på formen

$$\int f\,(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Brug da Integration ved Substitution. Hvis dit udtryk er på formen

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Brug da Delvis Integration. Hvis dit udtryk er på formen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)).$$

Brug da Kædereglen.

5.1 Kædereglen

Kædereglen foreskriver at den afledte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\,(g(x)) = f'\,(g(x)) \cdot g'(x)$$

Forelæsning 2: Integration 2. September 2024

6 Integration ved substitution (7.2)

Integration ved substitution kan forstås som kædereglens inverse.

Definition 4: Integration ved substitution

Lad f og g være funktioner. Med substitutionen $u = g(x)$ er

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) = F(g(x))$$

hvor F er en stamfunktion til f. Ofte skrives

$$\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hvilket gør det lettere at huske formlen.

Eksempel 6.1: Et simpelt eksempel

Vi ønsker at bestemme

$$\int 8x\left(4x^2+8\right)^6\,\mathrm{d}x.$$

Vi sætter $u = 4x^2 + 8$ og får dermed $\mathrm{d}u = 8x\,\mathrm{d}x$. Dermed fås

$$\int u^6\,\mathrm{d}u = \frac{u^7}{7}.$$

Sættes definitionen af u ind i det ovenstående fås

$$\int 8x\left(4x^2+8\right)^6 = \frac{u^7}{7} = \frac{\left(4x^2+8\right)^7}{6}.$$

Eksempel 6.2: Et mere kompliceret eksempel

Vi ønsker at finde

$$\int x^3\sqrt{3x^4+10}\,\mathrm{d}x.$$

Vi sætter $u = 3x^4 + 10$ og får dermed $\mathrm{d}u = 12x^3$. Ved at gange integralet fra før med $1 = \frac{12}{12}$ bliver integralet til

$$\frac{1}{12}\int \sqrt{3x^4+10}12x^3\,\mathrm{d}x.$$

Dernæst kan u indsættes som

$$\frac{1}{12}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{18}u^{\frac{3}{2}}.$$

Definitionen af u kan nu indsættes igen som

$$\int x^3\sqrt{3x^4+10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\left(3x^4+10\right)^{\frac{3}{2}}.$$

7 Fundamentalsætningen for calculus (7.4)

Definition 5:

[Bestemte integraler] Hvis f er en positiv funktion så angiver det bestemte integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

arealet mellem x-aksen og funktionen f over intervallet $[a, b]$.

Sætning 7.1: Fundmentalsætningen for calculus

Hvis f er en kontinuert funktion på intervallet $[a, b]$, og F er en stamfunktion til f så er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Eksempel 7.1: Simpelt bestemt integral

Vi ønsker at finde $\int_1^3 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Først bestemmes det ubestemte integral som

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3.$$

Dernæst benyttes fundamentalsætningen for calculus som

$$\int_1^3 3x^2\,\mathrm{d}x = 3^3 - 1^3 = 26.$$

Eksempel 7.2: Et mere bøvlet bestemt integral

Vi ønsker at finde $\int_0^4 2x\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Først findes det ubestemte integral ved at sætte $u = 16 - x^2$ og dermed får $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$. Vi kan altså skrive integralet som

$$\int 2x\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \sqrt{u}\mathrm{d}u = -\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u.$$

Dette integral løses nu som normalt som

$$-\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c.$$

Dermed kan substitutionen sættes tilbage ind som

$$-\frac{2}{3}\left(16-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Og slutteligt kan integrationsgrænserne igen indsættes som

$$\begin{aligned}\int_0^4 2x\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{3}\left(16-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4\\ &= -\frac{2}{3}\left(\left(16-4^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(16-0^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= -\frac{2}{3}\left(0^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= \frac{2}{3}\cdot 16^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{2}{3}\cdot 16\cdot\sqrt{16}\\ &= \frac{128}{3}.\end{aligned}$$

Note fra Basse: Hvis man laver en fortegnsfejl til eksamen er det vigtigt at man laver en mere – så passer pengene. Man skal altid have et lige antal fortegnsfejl.

8 Delvis integration (8.1)

Delvis integration er produktreglens pendant på samme måde som integration ved substitution er kædereglens pendant.

Sætning 8.1: Delvis integration

Der gælder

$$\int u(x)v'(x) = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Med $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$ og $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$ kan det ovenstående skrives som

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Eksempel 8.1: Simpelt integral med delvis integration

Vi ønsker at bestemme

$$\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Vi sætter $u = x$ og $\mathrm{d}v = e^{-2x}$. Vi ønsker at finde et udtryk for v og derfor integreres $\mathrm{d}v = e^{-2x}$ som

$$\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Vi får dermed

$$\int xe^{-2x} = x\cdot -\frac{1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Vi har tidligere fundet $\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Dermed bliver det ovenstående

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.\end{aligned}$$

Eksempel 8.2: Et mere kompliceret eksempel med delvis integration

Vi ønsker at finde

$$\int \ln 2x\,\mathrm{d}x.$$

Vi sætter $u = \ln 2x$ og dermed fås $\mathrm{d}u = \frac{1}{2x}\cdot 2\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}$ dermed fås $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Dermed bliver det ovenstående til

$$\begin{aligned}\int \ln 2x\,\mathrm{d}x &= \ln(2x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(2x)\cdot x - x\\ &= x\left(\ln(2x) - 1\right).\end{aligned}$$

Eksempel 8.3: Dobbelt delvis integation

Vi ønsker at finde

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x.$$

Vi sætter $u = x^2$ og $\mathrm{d}v = e^x$. Dermed fås $\mathrm{d}u = 2x$ og $v = e^x$. Det ovenstående integral bliver derfor

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Vi kan dernæst løse $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ med delvis integration ved at sætte $u = x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$ og dermed $v = e^x$. Vi får dermed

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x = e^x\left(x-1\right).$$

Dette kan sættes tilbage ind i det første integral som

$$x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2e^x\left(x-1\right) = e^x\left(x^2 - 2(x-1)\right).$$

Eksempel 8.4: Et hurtigt integral med delvis integration

Hvis vi ønsker at finde

$$\int \sin(x)e^x\,\mathrm{d}x$$

kan vi sætte $u = \sin x$ og dermed få $\mathrm{d}u = \cos x$. Dette virker umiddelbart ikke til at give et nemmere integral men hvis formlen bruges igen fås $\mathrm{d}\,\mathrm{d}u = -\sin(x)$ og vha. delvis integration fås dermed et udtryk hvor det samme integral står på begge sider af lighedstegnet og løsningen til dette integral kan derfor isoleres herfra. Dermed kan integralet løses uden egentligt at beregne et integral. Dette er vist nedenfor

$$
\begin{aligned}
\int \sin xe^x \,\mathrm{d}x &= \sin xe^x - \int \cos xe^x \,\mathrm{d}x \\
\int \cos xe^x \,\mathrm{d}x &= \cos xe^x - \int -\sin xe^x \,\mathrm{d}x \\
\int \sin xe^x \,\mathrm{d}x &= \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x \,\mathrm{d}x \\
2\int \sin xe^x \,\mathrm{d}x &= \sin xe^x - \cos xe^x \\
\int \sin xe^x \,\mathrm{d}x &= \frac{\sin xe^x - \cos xe^x}{2}.
\end{aligned}
$$

9 Uegentlige integraler

Et uegentligt integral er ethvert integral, der har enten ∞, $-\infty$ eller begge som en af eller begge sine integrationsgrænser.

Sætning 9.1: Uegentlige integraler

For et integral med øvre integrationsgrænse på ∞ har vi

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Og tilsvarende for et integral med nedre integrationsgrænse på $-\infty$ har vi

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

For et integral med funktionsgrænser på $-\infty$ og ∞ har vi i stedet

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Eksempel 9.1: Eksempel på beregning af et uegentligt integral

Vi ønsker at finde

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}.$$

Først benyttes sætningen fra ovenfor så vi får at

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Vi bestemmer dernæst integralet som

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^\infty = -2\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right) = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Vi lader derefter $b\to\infty$ vi får dermed

$$\lim_{b\to\infty}\sqrt{b} = \infty.$$

Vi får dermed

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x &= 2\left(1-\frac{1}{\infty}\right)\\ &= 2\cdot 1\\ &= 2.\end{aligned}$$

Dermed er løsningen fundet.

Forelæsning 3: Komplekse tal 9. November 2024

10 Kort gennemgang af trionometri

For vektorer i planen gælder, at

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$$

hvor θ er vinklen mellem de to vektorer og $\cdot$ angiver det indre produkt, også kendt som prikproduktet.

Note: Der er ingen lyd på optagelsen herfra og de næste 40 minutter frem så de næste par noter er taget alene på baggrund af en meget lille video, derfor tages der forbehold for fejl i det følgende, omend dette heller ikke er den vigtigste del af forelæsningen.

10.1 Additionsformlen for cosinus

Givet en vinkel $\theta = \alpha + \beta$ kan $\cos\theta$ findes vha. en additionsformel såfremt $\cos\alpha$ og $\cos\beta$ er kendt. Vi kan opskrive prikproduktet som

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) &= \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Vi har altså nu vist at

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \implies \cos(\alpha + \beta) = \cos(-\alpha)\cos\beta + \sin(-\alpha)\sin\beta.$$

Idet $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ og $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ kan det ovenstående omskrives til

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

10.2 Additionsformlen for sinus

Idet cos og sin blot er faseforskydninger af hinanden må følgende udtryk for $\sin(\alpha + \beta)$ gælde

$$\sin(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}).$$

Vi kan da benytte additionsformlen for cos på det ovenstående som

$$\sin(\alpha + \beta) = -\Big(\cos\alpha\cos(\beta + \frac{\pi}{2})\Big) - \sin\alpha\sin(\beta + \frac{\pi}{2}).$$

Vi har at $\cos(\beta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\beta$ og $\sin(\beta + \frac{\pi}{2}) = \cos\beta$ derfor kan det ovenstående omskrives til

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

11 Introduktion til komplekse tal

Definition 6: Den imaginære enhed

Den imaginære enhed i opfylder

$$i^2 = -1.$$

Definition 7: Komplekse tal

Et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ er givet ved

$$z = a + ib$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}$. Det ovenstående kaldes også *standardformen* for et komplekst tal.

Definition 8: Realdelen og imaginærdelen af et komplekst tal

Realdelen af det komplekse tal $z = a + ib$ $\Re(z)$ er givet som

$$\Re(z) = a.$$

Tilsvarende er imaginærdelen af z $\Im(z)$ givet ved

$$\Im(z) = b.$$

11.1 Regneregler for komplekse tal

Lad $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$ da gælder følgende relationer

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \\ z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Eksempel 11.1: Multiplikation af to komplekse tal

Vi ønsker at løse

$$(3 + 2i)(4 - 2i).$$

Vi ganger parenteserne ud og får

$$\begin{aligned} (3 + 2i)(4 - 2i) &= 3 \cdot 4 + 2i(-2i) + 3(-2i) + 2i \cdot 4 \\ &= 12 + (-4)i^2 + -6i + 8i \\ &= 16 + 2i. \end{aligned}$$

11.2 Det komplekse talplan

Det komplekse talplan er et $(\Re, \Im)$-plan således at den traditionelle x-akse angiver realdelen af det komplekse tal og den traditionelle y-akse angiver imaginærdelen af det komplekse tal. Ethvert komplekst tal vil da kunne angives som et punkt på dette plan, mens ethvert reelt tal vil kunne findes langs $\Re$-aksen ("x"-aksen).

Definition 9: Absolut værdi

Den absolutte værdi $|z|$ af et komplekst tal $z = a + ib$ er givet som

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dette tilsvarer afstanden fra det komplekse tal til origo i det komplekse talplan.

Definition 10: Kompleks konjugering

Den komplekse konjugering $\overline{z}$ af det komplekse tal $z = a + ib$ er

$$\overline{z} = a - ib.$$

Altså er den komplekse konjugering et fortegnsskifte på imaginærdelen $\Im(z)$.

Desuden gælder det at for to komplekse tal z_1 og z_2 er $|z_1 + z_2|$ afstanden mellem z_1 og z_2 i det komplekse talplan.

Eksempel 11.2: Afstande i det komplekse talplan

Vi ønsker at bestemme hvilke af de komplekse tal

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 + 2i \\ z_2 &= 3 - 3i \\ z_3 &= -1 \end{aligned}$$

der ligger tættest på hinanden i det komplekse talplan.

Først findes afstandende mellem alle tre tal i det komplekse talplan som

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |4 - 3 + 2i + 3i| = |1 - 5i| = \sqrt{26} \\ |z_1 - z_3| &= |4 + 1 + 2i| = |5 + 2i| = \sqrt{29} \\ |z_2 - z_3| &= |3 + 1 - 3i| = |4 - 3i| = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Altså er de to tal der ligger tættest på hinanden i det komplekse talplan ud af de givne tal z_2 og z_3

11.3 Division med komplekse tal

En vigtig udregning er at

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Altså giver produktet af et komplekst tal og dens konjugerede et reelt tal. Dette er et yderst vigtigt resultat. Hvis der divideres med $|z|^2$ på begge sider får vi nemlig at

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \implies \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Altså har vi fundet z's multiplikative inverse til $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Dette gør det da muligt at dividere da

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2} = z_1\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

11.4 Samling af nyttige regneregler for komplekse tal

Vi har generelt følgende regneregler for komplekse tal ($z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 ib_2$)

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \\
z_1 - z_2 &= a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2) \\
z_1 z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \\
|\overline{z}| &= |z| \\
|z_1 z_2| &= |z_1||z_2| \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
\overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2} \\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.
\end{aligned}$$

Eksempel 11.3: Eksempel på division

Vi ønsker at finde

$$\frac{1+2i}{2-3i}.$$

Vi får vha. regnereglen at

$$\begin{aligned}
\frac{1+2i}{2-3i} &= \frac{(1+2i)(2+3i)}{|2+3i|^2} \\
&= \frac{2-6+3i+4i}{4^2+3^2} \\
&= \frac{-4}{13}\frac{7}{13}i.
\end{aligned}$$

Eksempel 11.4: Eksempel på brug af flere regneregler med division

Vi ønsker at finde

$$\left|\frac{4i\overline{(3+4i)}}{(1+2i)(1-i)}\right|.$$

Vi benytter regnereglerne som

$$\begin{aligned}
\left|\frac{4i\overline{(3+4i)}}{(1+2i)(1-i)}\right| &= \frac{|4i||3+4i|}{|1+2i||1-i|} \\
&= \frac{4\sqrt{25}}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \\
&= \frac{20}{\sqrt{10}} \\
&= 2\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

12 Polær form af komplekse tal

For et komplekst tal z i det komplekse talplan kan et linjestykke fra origo til det komplekse tal tegnes. Vinklen θ mellem dette linjestykke og $\Re$-aksen betegnes et *argument* af x. Vi kan opskrive følgende udtryk for z som

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z|\cos\theta \\ |z|\sin\theta \end{pmatrix} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Definition 11: Den komplekse eksponentialfunktion

Den komplekse eksponentialfunktion $e^{i\theta}$ er defineret som

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Altså kan et komplekst tal z skrives på polær form som

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

12.1 Multiplikation på polær form

For $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ og $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ gælder:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right)\right) \\ &= r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \\ &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Bemærk at ovenstående medfører at

$$z^n = r^ne^{in\theta}.$$

Eksempel 12.1: Omregning fra standard til polær form

Vi ønsker at skrive $z = -2 + 2i$ på polær form.

Først indses at absolutværdien af z er

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Det indses at vinklen θ er i 2. kvadrant og derfor må θ være lig $\frac{\pi}{2}$ plus lidt mere. Herfra kan vi benytte trigonometri således at vi får en retvinklet trekant med kateter med længde 2 og hypotenuse med længde $\sqrt{8}$. For at finde vinklen kan trigonometri benyttes som

$$\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Altså er den samlede vinkel θ

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

12.2 Kvadratrødder af komplekst tal

Givet et komplekst tal $d = re^{i\theta}$ er dets kvadratødder

$$\pm\sqrt{d} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Bemærk, at ethvert komplekst tal ha præcis to kvadradtrødder.

12.3 Andengradsligning

For $a, b, c \in \mathbb{C}$ og med $a \neq 0$ er en general andengradsligning

$$az^2 + bz + c = 0$$

er kvadratroden af diskriminanten D givet ved

$$\pm\sqrt{D} = 2az + b.$$

Og andengradsligningens generelle løsning er

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Vi har følgende fremgangsmåde for at løse en andengradsligning $az^2 + bz + c = 0$:

1. Udregn diskriminanten $D = b^2 - 4ac$
2. Bestem polær form $D = re^{i\theta}$
3. Bestem kvadratrødderne $\pm\sqrt{D} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
4. Indsæt i formlen for løsning af andengradsligning:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

13 Kendte uendelige rækker

Følgende er eksempler på kendte uendelige rækker.

13.1 Den geometriske række

Den Geometriske Række foreskriver at $a, z \in \mathbb{C}$, for

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n.$$

Denne har summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}.$$

13.2 Den harmoniske række

Den Harmoniske Række er defineret som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Denne række er divergent. Faktisk er den et eksempel på den mere generelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

som er konvergent for $p > 1$ og divergent for $p \leq 1$.

13.3 Basel-problemet

Basel-problemet er defineret som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Denne er ligeledes et eksempel på en række på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

med $p = 2$ og den er derfor konvergent. Faktisk er summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Forelæsning 4: Talfølger og uendelige rækker 16. September 2024

14 Talfølger

En talfølge er typisk defineret enten

- ved en lukket formel
- eller induktivt

Eksempel 14.1: Eksempel på induktivt defineret talfølge

Givet en initialværdi $a_1 = A$ og et induktionstrin

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n + 1}\right)$$

er en induktivt defineret talfølge givet. Det viser sig faktisk at den ovenstående talfølge netop bliver $\sqrt{A}$ for $n \to \infty$.

14.1 Fibonaccis talfølge

Et andet berømt eksempel på en induktivt defineret talfølge er Fibonaccis talfølge der er givet ved initialværdierne $a_0 = 0, a_1 = 1$ og induktionstrinnet

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Det viser sig at Fibonaccis talfølge faktisk kan skrives på en lukket form som

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Her kan det bemærkes at $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er det gyldne snit.

15 Konvergens/divergens af talfølger

Definition 12: Konvergens af talfølger

En talfølge $a_{n}{}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ kaldes *konvergent* med *grænseværdi* a, skrevet

$$a_n \to a \quad \text{for} \quad n \to \infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

hvis vi for enhver tolerance $\epsilon > 0$ kan gå langt nok ud i talfølgen (fra og med et indeks N) så

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \epsilon.$$

Hvis $n \geq N$ ikke medfører $|a_n - a| < \epsilon$ så kaldes talfølgen $a_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ i stedet divergent og tilskrives ikke en grænseværdi.

Eksempel 15.1: Konvergens af den harmoniske talfølge

Vi ønsker at finde ud af om $\frac{1}{n}$ er konvergent mod 0.

Vi benytter definitionen fra ovenfor som

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n}$$

så for en tolerance $\epsilon > 0$ gælder

$$\frac{1}{n} = |a_n - 0| \leq \epsilon \iff n \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Dermed er det vist, at fra og med et indeks $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, så er a_n indenfor en tolerance ϵ fra 0.

Eksempel 15.2: Divergens af simpel alternerende talfølger

Vi betragter nu talfølgen givet ved $a_n = (-1)^n$

$$a_{n}{}_{n=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, \ldots.$$

Det indses hurtigt at rækken er divergent, da vi aldrig kan vælge en værdi for grænseværdien a således at en tolerance $0 < \epsilon < 2$ er opfyldt.

16 Regneregler for grænseværdier

Sætning 16.1: Regneregler for grænseværdier

Lad $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, så gælder

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ hvis } b \neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \text{ hvis } f \text{ er kontinuert i punktet } a.$$

Eksempel 16.1: Eksempel på brug af regnereglerne

Givet

$$a_n = \frac{17n^4 + 3n^2 - 5\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{-5n^4 - 3n^3 e^{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}}$$

ønsker vi at bestemme om $a_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent og i så fald hvad dens grænseværdi er.

Vi starter med at forkorte hele udtrykket med n^4 så vi får

$$a_n = \frac{17 + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^4}\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{-5 - \frac{3}{n} e^{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}}.$$

Vi kan nu finde grænseværdien for hvert led som

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} e^{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = e^{\sin 0} = 1.$$

Alt dette kan sættes tilbage ind i udtrykket så vi får

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{17+0+0\cdot 1}{5-0\cdot 1} = -\frac{17}{5}.$$

Altså er talfølgen konvegent med grænseværdi $a = .\frac{17}{5}$

Definition 13: Begrænset talfølge

$a_n{}_{n=1}^{\infty}$ kaldes *begrænset* hvis der findes et tal $M \geq 0$ så $|a_n| \leq M$ for alle n.

Sætning 16.2:

Hvis $a_n{}_{n=1}^{\infty}$ er begrænset og $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ så gælder

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0 \text{ da } |a_n b_n| \leq M|b_n| \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Eksempelvis er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos n^3 = 0$$

da $|\cos n^3| \leq 1$.

Definition 14: Monotone talfølger

$a_n{}_{n=1}^{\infty}$ kaldes *voksende* hvis

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ for alle } n.$$

$a_n{}_{n=1}^{\infty}$ kaldes *aftagende* hvis

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ for alle } n.$$

Enhver *voksende* eller *aftagende* talfølge kaldes også en *monoton* talfølge

Sætning 16.3:

For en monoton talfølge gælder

$$\text{konvergent} \iff \textit{begrænset}.$$

17 Uendelige rækker

En uendelig række er summen af alle elementerne i en talfølge

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Definition 15: Den k'te afsnitssum

Den k'te afsnitssum S_k er givet som

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_{k-1} + a_k.$$

Afsnitssummerne danner en talfølge

$$S_0 = a_0, S_1 = a_0 + a_1, S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots.$$

17.1 Konvergens og divergens af uendelige rækker

Sætning 17.1: Konvergens af uendelige rækker

Hvis talfølgen af afsnitssummer $S_k{}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent med $\lim_{k\to\infty} S_k = S$, så siger vi, at den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Hvis $S_k{}_{k=1}^{\infty}$ derimod er divergent siges summen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er divergent.

Sætning 17.2: n'te-ledstesten for divergens

Hvis talfølgen $a_n{}_{n=0}^{\infty}$ er divergent eller $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ så er den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ kan vi derimod ingen konklusion drage.

Vha. n'te-ledstesten ovenfor kan det hurtigt indses at følgende rækker er divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| \geq 1.$$

Definition 16: Geometrisk række

Lad $a, z \in \mathbb{C}$, så kaldes

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n$$

for en *geometrisk række.*

Sætning 17.3: Summen af en geometrisk række

Rækken er konvergent, hvis og kun hvis, $|z| < 1$ eller hvis $a = 0$. Summen af den geometriske række er da

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}.$$

Bevis:

Vi starter med at omskrive summen til

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = a\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Vi kan nu finde et eksplicit udtryk for afsnitssummerne

$$S_k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^k.$$

Hvis vi nu ganger summen med z får vi

$$zS_k = z + z^2 + \ldots + z^{k+1}.$$

Vi kan nu trække disse to afsnitssummer fra hinanden som

$$S_k - zS_k = (1-z)S_k = 1 - z^{k+1} \implies S_k = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}.$$

For $|z| < 1$ har vi $\lim\limits_{k\to\infty} z^{k+1} = 0$ og dermed bliver summen fra starten af beviset

$$a\sum_{n=0}^{\infty} z^n = a \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{a}{1-z}.$$

Q.E.D.

Eksempel 17.1: Løsning af Zenos løbebane-paradoks

Zenos løbebane-paradoks kan skrives som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dette minder om en geometrisk række, men den har startværdi $n = 1$ hvor en geometrisk række har startværdi $n = 0$. Vi kan ændre indekseringen som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Vi har nu en geometrisk række med $z = \frac{1}{2}$ og $a = \frac{1}{2}$ og kan derfor bruge løsningsformlen så

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Altså kan hele løbebanens strækning tilbagelægges og der er derfor ikke et egentligt *paradoks*.

Sætning 17.4:

Man kan bevise at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Er *konvergent* for $p > 1$ og *divergent* for $p \leq 1$.

Eksempel 17.2: Den harmoniske række

Den harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er lige netop divergent idet det kan skrives som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

med $p = 1$. Summen divergerer dog ekstremt langsomt. De første 1 million led summerer til lidt over 14, men summen er altså stadig divergent.

Eksempel 17.3: Basel-problemet

Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

er derimod konvergent idet det kan skrives på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

med $p = 2$. Faktisk summerer summen til $\frac{\pi^2}{6}$.

Sætning 17.5: Sammenligningskriteriet

Lad $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle n, så gælder

- Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ også konvergent
- Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er divergent, så er $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ også divergent

Sammenligningskriteriet bliver stærkere des flere rækker man kender.

Eksempel 17.4: Eksempel på brug af sammenligningskriteriet

Hvis vi har summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{5}{n^4} \right)$$

så kan det hurtigt indses at denne er divergent, da leddene i summen altid er større end leddene i den harmoniske række som er divergent.

Hvis vi derimod har summen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-1}$$
kan det hurtigt indses at denne er konvergens, idet leddene altid er mindre end leddene fra summen i Basel-problemet som er konvergent.

Definition 17: Absolut konvergens

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kaldes *absolut konvergent* hvis $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Sætning 17.6: Sammenhæng mellem konvergens og absolut konvergens

Hvis en sum er absolut konvergent så vil den altid også være konvergent.

Eksempel 17.5:

Hvis man ønsker at bestemme om summen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n^3}{n^2} \right|.$$
Kan man vha. sammenligningskriteriet indse at denne er absolut konvergent og derfor også konvergent da
$$\left| \frac{\cos n^3}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Bemærk dog at en *konvergent* række ikke nødvendigvis behøver at være absolut konvergent da summen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$
er konvergent men ikke absolut konvergent.

Sætning 17.7: Kvotientkriteriet

Hvis der for leddene a_n gælder:
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R$$
Så har vi

- $R < 1$: Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent
- $R > 1$: Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er divergent
- $R = 1$: Ingen konklusion kan drages

Eksempel 17.6: Brug af kvotientkriteriet

Vi ønsker at bestemme om rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

er konvergent.

Fra kvotientkriteriet har vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}.$$

Det ovenstående kan omskrives til

$$\frac{n!5^{n+1}}{(n+1)!5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Vi finder grænseværdien for $n \to \infty$ som

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

Dvs. $R = 0$ så rækken er konvergent pr. kvotientkriteriet.

18 Kendte Taylorpolynomier

I det følgende vil et par kendte Taylorpolynomier med udviklingspunkt omkring $x = 0$ opskrives.

18.1 Sinus

Taylorrækken for $\sin(x)$ er

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

18.2 Cosinus

Taylorrækken for $\cos(x)$ er

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

18.3 Eksponentialfunktionen

Taylorrækken for eksponentialfunktionen e^x er

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Forelæsning 5: Potensrækker og Taylor-approksimation 23. September 2024

Taylor-approksimationer omhandler i sin grundessens at approksimere andre funktioner.

19 Potensrækker og deres konvergens

Definition 18: Potensrækker

For tal c_n (koefficienterne) og a_i kaldes funktionen

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$

for en *potenstække*. Det ovenstående er en uendelig række og det virker derfor naturligt at rækken er konvergent for nogle situationer og divergent for andre.

Sætning 19.1: Konvergensradius

Med afsæt i sektion 15 defineres konvergensradiussen for potensrækker. For en potensrække

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

findes et tal $R \geq 0$ kaldet konvergensradius, som opfylder

- For x så $|x-a| < R$: $p(x)$ er *absolut konvergent*.
- For x så $|x-a| > R$: $p(x)$ er *divergent*.
- For x så $|x-a| = R$: Ingen konklusion kan drages.

Bemærk i øvrigt, at i de reele tal, svarer $|x-a| < R$ til $x \in (a-R, a+R)$.

Sætning 19.2: Beregning af konvergensradius

Ofte kan konvergensradius bestemmes vha. *kvotientkriteriet* fra forelæsning 4.
Hvis

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

eksisterer eller er ∞, så er R konvergensradius for $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Eksempel 19.1: Beregning af konvergensradius

Vi ønsker at bestemme konvergensradiussen for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}(x-5)^n.$$

Vi sætter dette ind i formlen for beregning af konvergensradius som

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)!}{n!\cdot(n+1)^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 n!\cdot(n+1)}{n!\cdot(n+1)^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^2} \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Altså er potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}(x-5)^n$$

Konvergent for alle x.

Eksempel 19.2: Et simplere eksempel

Vi ønsker at finde konvergensradiussen for

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n.$$

Det indses at dette er en konvergensradius med $c_n = \frac{1}{2^n}$ og $a = 0$. Vi sætter dette ind i formlen som

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Altså er potenrækken konvergent for $|x| < 2$.

19.1 Ledvis differentiation og integration (ikke pensum?)

Potensrækkerne minder meget om polynomier og det viser sig da også at man kan differentiere og integrere disse ledvist, som

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-a)^n &= n(x-a)^{n-1} \\
\int (x-a)^n &= \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + C.
\end{aligned}
$$

Sætning 19.3: Ledvis differentiation og integration af potensrækker

Det gælder at indenfor deres konvergensradius er de vilkårligt ofte differentiable (også kaldet *glatte* funktioner). Vi har at hvis $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ har konvergensradius R, så har

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

og

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

også konvergensradius R.

Eksempel 19.3: Eksempel på brug af ledvis differentiation og integration

Lad $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ (konvergensradius $R = 2$). Hvad er $p'(0)$?

Vi finder p' med sætningen ovenfor som

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}.$$

Ved indsætning fås

$$\begin{aligned} p'(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} 0^{n-1} = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Det samme kan gøres med integration. Vi finder altså $P(x)$ som

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1}.$$

Eksempel 19.4: Eksempel på erstatning af x

Vi har fra tidligere at for $|x| < 2$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}.$$

Med differentiation og integration fås

$$\begin{aligned} \frac{2}{(2-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{-1} \\ 2(\ln(2) - \ln(2-x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1}. \end{aligned}$$

For $|x| < 2$.

Vi har nu fundet nye udtryk for summen. Vi kan eksempelvis betragte

$$\frac{2}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}, \qquad |x| < 2.$$

Vi kan nu eksempelvis substituere x for $(x-1)^4$ og derved fås rækkefremstillingen for en ny funktion

$$\frac{2}{(2-(x-1)^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-1)^{4n-4}$$

som holder for $|(x-1)^4| < 2$, dvs. $|x-1| < 2^{\frac{1}{4}}$
Vi kan også erstatte x med $\cos(x)$, hvilket giver

$$\frac{2}{(2-\cos(x))^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cos(x)^{n-1}$$

hvilket holder for $|\cos(x)| < 2$, dvs. for alle x. Det kan bemærkes at det ovenstående ikke engang er en potensrække mere.

19.2 Taylorpolynomier

Definition 19: Afledningsnotation

For en funktion f, betegner vi den afledede

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''', \quad \ldots$$

Generelt betegner $f^{(n)}$ den n'te afledede.

Definition 20: Taylorpolynomier

For en funktion f, der er nok gange differentiabel, kaldes

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N$$

for N'te-grads *Taylorpolynomiet* for f med udviklingspunkt a.

Eksempel 19.5: 7.-grads Taylorpolynomium

Vi ønsker at finde et 7.-grads Taylorpolynomium for $f(x) = \sin(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$.

Vi finder sins afledede som

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) = f^{(5)}(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) = f^{(6)}(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) = f^{(7)}(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Det er i det ovenstående smart at udviklingspunktet $a = 0$, da vi kender funktionsværdien for alle de afledede i dette punkt. Vi får altså

$$\begin{aligned} f(0) &= f^{(4)}(0) = 0 \\ f'(0) &= f^{(5)}(0) = 1 \\ f''(0) &= f^{(6)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(0) &= f^{(7)}(0) = -1. \end{aligned}$$

Vi kan dermed opskrive Taylorpolynomiet som

$$\begin{aligned} P_7(x) &= \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7. \end{aligned}$$

Af ovenstående Taylor-polynomier kan også ses at det er korrekt, at $\sin(x) \approx x$ for små x.

Sætning 19.4: Taylors sætning

Hvis f har $N + 1$ afledede på åben interval I, som indeholder punktet a, så gælder for alle $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_N(x),$$

hvor restleddet, R_N, er lig

$$R_N(x) = \frac{f^{N+1}(c_x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1},$$

for et ukendt tal c_x mellem x og a.

Eksempel 19.6: Restleddet fra 7.-grads Taylorpolynomiet

For $f(x) = \sin(x)$ og $a = 0$ har vi

$$|R_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)}!$$

da alle afledede af $\sin(x)$ opfylder $\left|f^{(N+1)}(x)\right| \leq 1$. For $N = 7$ in intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$|R_7(x)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^8}{8!} \approx 0,0009.$$

19.3 Taylorrækker

Hvis $N \to \infty$ i Taylorpolynomiet for f med udviklingspunktet a, fås en uendelig række, kaldet en Taylorrække:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bemærk: En Taylorrække er en potensrække med koefficienterne

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Dette betyder at begreber som *konvergensradius, ledvis differentiation og ledvis integration* også holder for Taylorrækker.

Taylorrækken p bliver uendeligt præcis og lig med funktionen f, $f(x) = p(x)$, netop for de x, hvor

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0.$$

Eksempel 19.7: Et simpelt eksempel

Vi ønsker at bestemme en Taylorrække for $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt $a = 0$.

Først bemærkes at alle

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Vi kan nu indsætte dette i formlen

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Eksempel 19.8: Et mere kompliceret eksempel

Vi ønsker at bestemme Taylorrækken for $f(x) = x^{-3}$ med udviklingspunkt $a = 2$.

Vi finder den afledede

$$f'(x) = -3x^{-4}.$$

Og den næste

$$f''(x) = 3 \cdot 4x^{-5}.$$

Og den næste

$$f''(x) = -3 \cdot 4 \cdot 5x^{-6}.$$

Vi kan nu begynde at fornemme et system. Et generelt udtryk for dette er

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{(n+2)!}{2}\right) x^{-(n+3)} = \frac{(-1)^n (n+2)!}{2x^{n+3}}.$$

Idet vi husker at udviklingspunktet er $a = 2$ kan det ovenstående indsættes i formlen som

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{2!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)!}{2^{n+4} n!} (x-2)^n.$$

19.3.1 Et par brugbare Taylorrækker

For $\sin(x), \cos(x), e^x$ gælder for alle x (restleddet går mod 0 for alle x og højresiderne har konvergensradius på ∞):

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Det ovenstående er også årsagen til at den komplekse eksponentialfunktion er defineret som den er. Erstattes x i e^x med et komplekst tal $z = i\theta$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+i)!}\theta^{2n+1} \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta). \end{aligned}$$

19.4 Entydighed

Sætning 19.5: Entydighed af potensrækker

Hvis to potensrækker (og dermed også Taylorrækker), med samme udviklingspunkt, er ens,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$

på et ikke-tomt åbent interval I, så er deres koefficienter ens

$$c_n = d_n$$

for alle n.

Eksempel 19.9: Taylorrække besemt ved entydighed

Vi ønsker at bestemme Taylorrækken for $f(x) = (x^2+1)\cos(x^3)$ med udviklingspunkt $a = 0$.

Det ovenstående ville være besværligt lige ud af bogen, idet de afledede er svære at finde. Vi kender dog allerede en Taylorrække for cosinus. Vi kan derfor indsætte Taylorrækken for cosinus som

$$f(x) = (x^2+1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x^3\right)^{2n}.$$

Det ovenstående kan simplificeres til

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n}.$$

Idet der er entydighed må det fundne udtryk for $f(x)$ være lig taylorrækken for $f(x)$.

Forelæsning 6: Første ordens differentialligninger 30. September 2024

20 Første ordens differentialligninger

Vi betragter en differentialligning på typen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

En løsning er en funktion, y, defineret på et åbent interval I, så

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{for alle } x \text{ i } I.$$

Typisk eksisterer der mange løsninger, som vi stadig vil betegne som y.

Løsningerne kan visualiseret i et såkaldt retningsfelt, hvor hvert punkt $(x_0, y_0$ kan tegnes med en pil med hældning $f(x_0, y_0)$. Sådanne retningsfelter kan være med til at give en intuitiv id eom opførslen af differentialligningernes løsninger.

20.1 Seperable differentialligninger

Differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

kaldes seperabel, hvis

$$f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}.$$

Eksempel 20.1: Eksempel på seperabel og ikke-seperabel differentialligning

Vi betragter differentiallignigningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x - 5)y.$$

Denne er seperabel med $g(x) = x - 5$ og $h(y) = y^{-1}$.

Betragtes i stedet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + xy.$$

Denne er ikke seperabel, idet den ikke kan skrives på den rigtige form.

Sætning 20.1: Løsning af seperabel ligning

For en seperabel differentialligning

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)}, \quad \text{med } h(y) \neq 0$$

hvor G er stamfunktionen til g og H er stamfunktionen til h så gælder

$$H(y) = G(x) + C.$$

Nu indgår ingen afledede og ens y kan isoleres for at finde sine løsninger.

Bevis:

Vi starter med at kigge på $H(y(x))$. Denne differentieres med hensyn til x vha. kædereglen som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Det vil sige for $h(y) \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)} \iff h(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x).$$

Ved integration fås

$$H(y) = G(x) + C.$$

Løsningsformlen for en seperabel differentialligning kan nemt huskes, hvis man “lader som om” at $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ er en brøk som

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{g(x)}{h(y)}\\ h(y)\,\mathrm{d}y &= g(x)\,\mathrm{d}x\\ H(y) &= G(x) + C.\end{aligned}$$

Eksempel 20.2: Eksempel på løsning af seperabel differentialligning

Vi ønsker at løse

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-1)(x+3).$$

Først seperares lignignen som

$$\frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = x + 3\,\mathrm{d}x.$$

Dernæst integreres på begge sider som

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y &= \int x + 3\,\mathrm{d}x\\ \ln|y-1| &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + c\\ |y-1| &= Ke^{\frac{1}{2}x^2+3x}, && K > 0\\ y - 1 &= \pm Ke^{\frac{1}{2}x^2+3x}, && K > 0\\ y &= \pm Ke^{\frac{1}{2}x^2+3x} + 1, && K > 0\\ y &= Ke^{\frac{1}{2}x^2+3x} + 1, && K \neq 0.\end{aligned}$$

De to nederste udtryk er ækvivalente. Idet vi dividerede med $y-1$, antogedes, at $y \neq 1$ og det skal derfor tjekkes om dette kunne være en løsning. Vi indsætter

$$0 = 0 \cdot (x+3).$$

Altså går ligningen også op her. Dette svarer til at konstanten $K = 0$. Altså er alle løsninger til differentialligningen

$$y = Ke^{\frac{1}{2}x^2+3x} + 1, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 20.3: Entydig løsning

Vi ønsker at finde den entydige løsning til

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(y-1)(x+3)$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = -1$.

Vi indsætter i den fuldstændige løsning som

$$\begin{aligned}
-1 &= Ke^{\frac{1}{2}\cdot 0^2+3\cdot 0}+1 \\
-1 &= Ke^{0}+1 \\
-1 &= K+1 \\
K &= -2.
\end{aligned}$$

Altså er den entydige løsning der løser begyndelsesværdiproblemet

$$y = 1-2e^{\frac{1}{2}x^2+3x}.$$

Eksempel 20.4: Et nyt eksempel

Vi ønsker at finde løsningen til

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2+1}{y}.$$

Vi separerer først lignignen, idet vi husker at $y \neq 0$ i den oprindelige ligning

$$y\,\mathrm{d}y = x^2+1\,\mathrm{d}x.$$

Vi kan dernæst integrere de to funktioner som

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3+x+c.$$

Slutteligt kan y isoleres som

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+2x+k}, \quad k = 2c.$$

y måtte ikke være 0 så $\frac{2}{3}x^3+2x+k$ må heller ikke være 0 og derfor er løsningen ikke defineret overalt.

Eksempel 20.5: Logistisk ligning

Vi betragter ligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(x)(b-ay(x))$$

for positive tal a, b. Dette kaldes også en logistisk ligning og beskriver bl.a. populationsvækst.

Det viser sig at den ovenstående ligning er separabel som

$$\int 1\,\mathrm{d}x + C_1 = \int \frac{1}{y(b-ay)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{a}{b-ay}\right)\mathrm{d}y.$$

Her sker en partialbrøk-udvikling (ikke pensum) i sidste step. Med substitutionen $u = b - ay > 0$ er

$$\frac{1}{b}\int \frac{a}{b-ay}\,\mathrm{d}y = \frac{a}{b}\int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{-a}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{b}\ln(u) = -\frac{1}{b}\ln(b-ay).$$

I alt fås ligningen

$$x + C_1 = \frac{1}{b}\ln(y) - \frac{1}{b}\ln(b-ay) = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{y}{b-ay}\right).$$

Vi kan nu isolere y som

$$\begin{aligned}
\frac{y}{b-ay} &= e^{bx+bC_1} = C_2e^{bx} \\
y &= bC_2e^{bx} - aC_2e^{bx}y \\
\left(1 + aC_2e^{kx}\right)y &= bC_2e^{bx} \\
y &= \frac{bC_2e^{bx}}{1+aC_2e^{bx}} \\
&= \frac{b/a}{1+Ae^{-bx}}, \quad 0 < A = \frac{1}{aC_2}.
\end{aligned}$$

20.2 Lineær første ordens differentialligning

Vi betragter nu i stedet en generel lineær første ordens differentialligning

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

for kontinuerte funktioner a_1, a_0 og b

20.2.1 Løsning af særtilfælde

For $a_0 = 0$ reduceres det generelle udtryk til

$$a_1(x)y' = b(x) \iff y' = \frac{b(x)}{a_1(x)} \iff y(x) = \int \frac{b(x)}{a_1(x)}\,\mathrm{d}x + C.$$

Hvis $a_0 = a_1'$ i stedet fås vha. produktreglen, at

$$b(x) = a_1(x)y' + a_1'(x)y = (a_1y)' \iff y(x) = \frac{1}{a_1(x)}\left(\int b(x)\,\mathrm{d}x + C\right).$$

20.2.2 Generel løsning af første ordens differentialligning

Generelt starter løsningen af en første ordens differentialligning med at dividere igennem med $a_1(x)$ så udtrykket står på formen

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Hvor $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ og $Q(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}$.

Definition 21: Integrationsfaktor

Vi definerer en integrationsfaktor $v(x)$ til

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Vi kan forsøge at skabe en intuition for dette ved at omskrive således

$$\ln(v(x)) = \int P(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \int P(x)\,\mathrm{d}x.$$

Og nu minder udtrykket om noget, der er kendt fra de seperable differentialligninger. Faktisk er $v(x)$ en løsning til $v' = P \cdot v$

Sætning 20.2: Generel løsning af første ordens differentialligning

Løsningerne til

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

er

$$y(x) = \frac{1}{v(x)}\left(\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + X\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bevis:

Vi har udtrykket

$$Q(x) = P(x)y + y'.$$

Vi ganger nu igennem med $v(x)$ som

$$v(x)Q(x) = v(x) \cdot P(x)y + v(x)y' = v'(x)y + v(x)y' = (v(x)y)'.$$

Vi kan nu integrere som

$$\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + C_1 = v(x)y.$$

Og så kan der divideres over med $v(x)$ som

$$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Integrationsfaktoren viser sig altså at være en smart måde at indføre kædereglen på.

Eksempel 20.6: Eksempel på løsning af generel lineær første ordens differentialligning

Vi ønsker at finde løsningen til

$$y' - 2y = e^{4x}$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1$.

Vi starter med at finde den fuldstændige løsning. Vi sætter $P(x) = -2$ og $Q(x) = e^{4x}$. Vi indsætter dette i formlen for integrationsfaktoren som

$$v(x) = e^{\int -2\,\mathrm{d}x} = e^{-2x}.$$

Dette kan nu indsættes i løsningsformlen som

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{v}\left(\int vQ \,\mathrm{d}x + C\right) \\
&= e^{2x}\left(\int e^{-2x}e^{4x} \,\mathrm{d}x + C\right) \\
&= e^{2x}\left(\int e^{2x} \,\mathrm{d}x + C\right) \\
&= e^{2x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{4x} + Ce^{2x}.
\end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte begyndelsesbetingelsen som

$$1 = \frac{1}{2}e^0 + Ce^0 = \frac{1}{2} + C \implies C = \frac{1}{2}.$$

Altså er den entydige løsning

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{4x} + e^{2x}\right).$$

Eksempel 20.7: Et mere kompliceret eksempel

Vi ønsker at finde løsningen til

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2y}{x^2} = x\cos(x), \quad x > 0$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(\pi) = 1$.

Vi indser at vi har den generelle formel med $Q(x) = x^2\cos(x)$ og $P(x) = \frac{-2}{x}$. Vi starter med at finde integrationsfaktoren som

$$v(x) = e^{-2\cdot\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Vi kan nu indsætte dette i løsningsformlen som

$$\begin{aligned}
y &= x^2\left(\int \cos(x)\,\mathrm{d}x + C\right) \\
&= x^2\sin(x) + x^2\cdot C.
\end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte begyndelsesbetingelsen som

$$\begin{aligned}
1 &= \pi^2\sin(\pi) + \pi^2\cdot C \\
C &= \frac{1}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Dermed bliver den entydige løsnign

$$y = x^2\sin(x) + \frac{x^2}{\pi^2}.$$

Sætning 20.3: Eksistens og entydighed

Lad P og Q være kontinuerte på et åbent interval I, samt lad $x_0 \in I$ og $y(0) \in \mathbb{R}$. Så eksisterer en entydig løsning y til

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

defineret nær x_0.
Altså eksisterer der kun en løsning der går igennem "hvert" punkt

Forelæsning 7: Anden ordens lineære differentialligninger

d. 7. oktober 2024

Definition 22: Anden ordens lineær differentialligning

En anden ordens lineær differentialligning er defineret ved differentialoperatoren $L(x)$ givet ved

$$L(y) = P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \tag{1}$$

Idet at den er lineær ligger desuden at for tal C_1 og C_2 og funktioner y_1 og y_2 gælder at

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_1)$$

Vi kommer i dette kursus til at arbejde med ligninger på formene

- $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ (**homogen**)
  Altså $L(x) = 0$
- $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$ (**inhomogen**)
  Altså L(x)=G(x)

21 Homogene differentialligninger

Sætning 21.1: Superpositionsprincippet

Hvis y_1 og y_2 er løsninger til den homogene differentialligning

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

Så er $C_1y_1 + C_2y_2$ også en løsning for vilkårlige C_1 og C_2.

Bevis:

Såfremt ovenstående gælder har vi at $L(y_1) = 0$ og $L(y_2) = 0$. Nulreglen må derfor betyde at vi ligeledes har at

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = 0$$

21.1 Homogene differentialligninger med konstante koefficienter

Det simpleste tilfælde af en homogen differentialligning er tilfældet, hvor koefficienterne er konstante

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2}$$

for reele konstanter a, b og c med $a \neq 0$. Vi gætter på at denne kan løses med $f(x) = e^{rx}$. Ved indsættelse får vi at

$$a(r^2e^{rx}) + b(re^{rx}) + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx}.$$

Bemærk at $e^{rx} \neq 0$. Derfor må dette være en løsning hvis r løser den karakteristiske ligning

$$\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

21.2 Karakteristisk ligning

Vi husker at

$$ar^2 + br + c = 0$$

kan løses med

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

med diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

21.3 Fuldstændig løsning af homogen anden ordens differentialligning

Sætning 21.2: Fuldstændig løsning af homogen anden ordens differentialligning

Den fuldstændige løsning til $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ er

- **For D > 0**:
  Den karakteristiske ligning har løsningerne $r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ og $r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Altså er den fuldstændige løsning
  $$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \tag{3}$$
- **For D = 0**: Den karakteristiske ligning har løsningen $r_1 = \frac{-b}{2a}$. Den fuldstændige løsning bliver da
  $$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \tag{4}$$
- **For D < 0**: Den karakteristiske ligning har løsningerne $r = \alpha \pm \beta i$ med $\alpha = -\frac{b}{2a}$ og $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a}$. Derfor bliver den fuldstændige løsning her
  $$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{5}$$

Bevis:

Løsningen for $D > 0$ følger af superpositionsprincippet

For $D = 0$ har vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{rx} \\ f'(x) &= (xe^{rx})' = e^{rx} + rxe^{rx} \\ f''(x) &= (e^{rx} + rxe^{rx})' = re^{rx} + re^{rx} + r^2 xe^{rx} = \left(r^2 x + 2r\right) e^{rx} \end{aligned}$$

Altså bliver vores differentialligning

$$a\left(\left(r^2 x + 2r\right) e^{rx}\right) + b\left((rx + 1) e^{rx}\right) + c\left(xe^{rx}\right).$$

Der omskrives

$$\left(2ar + bx\left(ar^2 + br + c\right)\right) e^{rx}.$$

Vi har at $ar^2 + br + c = 0$ idet at det er et krav fra den karakteristiske ligning. Altså har vi

$$e^{rx}(2ar + b).$$

Vi har at $r = -\frac{b}{2a}$. Altså får vi

$$e^{rx}\left(2a \cdot -\frac{b}{2a} + b\right) = e^{rx} \cdot 0 = 0$$

Altså gælder løsningsformlen.

Beviset for $D < 0$ følger beviset for $D = 0$

Eksempel 21.1: Simpelt eksempel

Vi har at

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Vi opskriver den karakteristiske ligning hvor vi egentligt blot erstatter vores afledede af y med potenser af r

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Vi finder diskriminanten som

$$D = 1 + (-4) \cdot (-2) = 9.$$

Vi har dermed de to reele løsninger

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2 \qquad \text{og} \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

Vores fuldstændige løsning er derfor

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},$$

for vilkårlige konstanter C_1 og C_2.

Eksempel 21.2: Med begyndelsesbetingelser

Vi har her samme ligning som ovenfor

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

som dog denne gang har begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 3$. Vi har samme fuldstændige løsning som ovenfor

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Denne differentierer vi med det samme, da den ene betingelse afhænger af y' og denne derfor er nødt til at være kendt

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}.$$

Ved at indsætte betingelserne fås at

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ C_1 e^0 + C_2 e^0 &= 0 \\ C_1 + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned} y'(0) &= 3 \\ 2C_1 e^0 - C_2 e^0 &= 3 \\ 2C_1 - C_2 &= 3 \end{aligned}$$

Disse lægges sammen så vi får

$$\begin{aligned} 2C_1 - C_2 + C_1 + C_2 &= 3 \\ 3C_1 &= 3 \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

Og dermed har vi at

$$\begin{aligned} 1 + C_2 &= 0 \\ C_2 &= -1 \end{aligned}$$

Dermed er løsningen der opfylder både differentialligningen og betingelserne

$$y(x) = e^{2x} - e^{-x}.$$

Eksempel 21.3: Et sværere eksempel

Vi ønsker at løse

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Med begyndelsesbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$. Dermed er vi i tilfældet hvor diskriminanten er negativ. Vi opskriver den karakteristiske ligning

$$r^2 + 2r + 3 = 0.$$

Dermed har vi at

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 \implies \sqrt{D} = \pm\sqrt{8}i.$$

Altså har vi at

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{8}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i \implies \alpha = -1\beta = \sqrt{2}.$$

Den fuldstændige løsning bliver da

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 e^{-x} \sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Denne differentieres

$$\begin{aligned} y'(x) = & \\ & - C_1 e^{-x} \cos\left(\sqrt{2}x\right) - \sqrt{2} C_1 e^{-x} \sin\left(\sqrt{2}x\right) \\ & - C_2 e^{-x} \sin\left(\sqrt{2}x\right) \sqrt{2} C_2 e^{-x} \cos\left(\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

Vi indsætter begyndelsesbetingelser

$$y(0) = 1.$$

Hvilket giver at

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ &= C_1 e^0 \cos(0) + C_2 e^0 \sin(0) \\ &\implies C_1 = 1 \end{aligned}$$

Og den anden begyndelsesbetingelse

$$\begin{aligned}
y'(0) &= 0 \\
&\implies -C_1 e^0 \cos\left(\sqrt{2}\cdot 0\right) - \sqrt{2} C_1 e^0 \sin\left(\sqrt{2}\cdot 0\right) \\
&- C_2 e^0 \sin\left(\sqrt{2}\cdot 0\right) - \sqrt{2} C_2 e^0 \cos\left(\sqrt{2}\cdot 0\right) = 1 \\
&= -C_1 + \sqrt{2} C_2 \\
&= -1 + \sqrt{2} C_2 \\
&\implies C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Altså bliver den endelige løsning

$$y(x) = e^{-x} \cos\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

21.4 Harmonisk oscillator

Eksempel 21.4: Pendul

Vi ønsker at beskrive et penduls bevægelse. Det viser sig at et penduls bevægelse kan beskrives med

$$\begin{aligned}
\theta''(t) &= -\frac{g}{L} \sin\left(\theta(t)\right) \\
\theta(0) &= \theta_0 \\
\theta'(0) &= 0
\end{aligned}$$

Bemærk, at dette *ikke* er en lineær differentialligning, men hvis vi antager at vinklen θ er lille har vi at

$$\sin(\theta) \approx \theta.$$

Dermed har vi at

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t),$$

hvilket *er* en lineær differentialligning. Den karakteristiske ligning opskrives

$$r^2 = -\frac{g}{L} \implies r = \sqrt{\frac{g}{L}}i.$$

Den fuldstændige løsning bliver da

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

For at indsætte begyndelsesbetingelserne findes den afledede som

$$\theta'(t) = -\sqrt{\frac{g}{L}} C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + \sqrt{\frac{g}{L}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

Vi har derfor at

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 & \theta'(0) &= 0 \\ \implies \theta_0 &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) & \implies 0 &= \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot C_2 \\ C_1 &= \theta_0 & C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Altså er den partikulære løsning

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

22 Inhomogene differentialligninger

Det viser sig at det at løse den inhomogene anden ordens differentialligning

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x), \qquad y(x_0) = a, \qquad y'(x_0) = b,$$

svarer til at

1. Finde den fuldstændige løsning til
$$y_{hom} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$
for den tilsvarende homogene differentialligning ($G(x) = 0$).
2. Finde en partikulær løsning y_p til den inhomogene differentialligning
3. Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning er da
$$y = y_p + y_{hom} = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2.$$
4. evt. bestemme C_1 og C_2 vha. givne begyndelsesbetingelser.

Sætning 22.1:

Det er nok kun at bestemme én partikulær løsning til en inhomogen differentialligning for at kunne finde alle løsninger.

Bevis:

Hvis f_1 og f_2 er løsninger til en inhomogen differentialligning

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x).$$

Så er differensen $f_1 - f_2$ den homogene ligning

$$L(f_1 - f_2) = L(f_1) - L(f_2) = G(x) - G(x) = 0.$$

Dvs. at forskelle mellem løsninger til den inhomogene differentialligning findes fra den fuldstændige løsning til den *homogene* differentialligning.

22.1 Konstante koefficienter

Vi betragter tilfældet med konstante koefficienter

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

Dernæst introduceres begrebet *ubestemte koefficienters metode* som svarer til at 'gætte' på løsninger der minder om Gu.

Eksempel 22.1:

Vi betragter differentialligningen

$$y'' - y' - 2y = 2\cos(x).$$

Vi gætter på løsninger af formen

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) \\
y_p'(x) &= -A\sin(x) + B\cos(x) \\
y_p''(x) &= -A\cos(x) - B\sin(x)
\end{aligned}$$

Dette indsættes i venstresiden for at se om gættet var korrekt

$$\begin{aligned}
&- A\cos(x) - B\sin(x) + A\sin(x) - B\cos(x) - 2\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \\
&= (-3A - B)\cos(x) + (A - 3B)\sin(x)
\end{aligned}$$

Vi sætter dette lig $2\cos(x)$

$$2\cos(x) = (-3A - B)\cos(x) + (A - 3B)\sin(x).$$

Altså har vi de to ligninger med to ubekendte

$$\begin{aligned}
-3A - B &= 2 \\
A - 3b &= 0
\end{aligned}$$

Vi forlænger den sidste med 3 og lægger den til den første så vi får at

$$\begin{aligned}
-10B =& 2 \\
B =& -\frac{1}{5} \\
\implies A - \frac{3}{5} &= 0 \\
A =& \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Altså kan vi finde konstanter A og B således at løsningen går op. Vi har altså

$$y_p = -\frac{3}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x).$$

Altså bliver den fuldstændige løsning

$$y(x) = y_p + y_{hom} = -\frac{3}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + C_1y_1 + C_2y_2,$$

og den homogene løsning er fundet i **eksempel 1.1** som

$$C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

Altså bliver den fuldstændige homogene løsning

$$y(x) = -\frac{3}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

22.2 Eksempler på succesfulde gæt til partikulær løsning

Der findes en række 'gæt' som er kendt rigtige.

Hvis g indeholder led af formen	**Og hvis**	**Så inkluder dette i gættet på y_p (forskellige konstanter på hvert led)**
e^{kx}	k ikke er rod i KL	Ae^{kx}
	k er rod i KL og $D > 0$	Axe^{kx}
	k er rod i KL og $D = 0$	Ax^2e^{kx}
$\sin(kx), \cos(kx)$	ki *ikke* er rod i KL	$A\cos(kx) + B\sin(kx)$
	ki er rod i KL	$Ax\cos(kx) + Bx\sin(kx)$
$d_2x^2 + d_1x + d_0$	0 *ikke* er rod i KL	$Ax^2 + Bx + C$
	0 er rod i KL og $D > 0$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx$
	0 er rod i KL og $D = 0$	$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

Tabel 1: Løsningsgæt for inhomogene differentialligninger

Eksempel 22.2: Løsning af inhomogen anden ordens differentialligning

Vi vil forsøge at løse differentialligningen

$$y'' - 4y = e^{2x} + x^2, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 5.$$

Den karakteristiske ligning for den homogene differentialligning opskrives som

$$r^2 - 4 = 0 \implies r^2 = 4 \implies r = \pm 2.$$

Den homogene løsning er altså

$$y_{hom}(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Dernæst findes den partikulære løsning ved at kigge i **Tabel 1** hvor det ses at løsningsgættet skal indeholde noget på formen Axe^{kx}. I vores tilfælde er $k = 2$. Derudover skal gættet indeholde noget på formen $Ax^2 + Bx + C$ altså bliver vores gæt

$$y_p = Axe^{2x} + Bx^2 + Cx + D.$$

Dette differentieres

$$y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 2Bx + C.$$

Og igen

$$y_p'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 2B = 4A(1 + x)e^{2x} + 2B.$$

Det tjekkes om gættet er korrekt ved at indsætte det i differentialligningen

$$\begin{aligned}&4A(1+x)e^{2x}+2B-4\left(Axe^{2x}+Bx^2+Cx+D\right)\\=&4Ae^{2x}-4Bx^2-4Cx+2B-4D\end{aligned}$$

Dette skal give

$$e^{2x}+x^2+0x+0.$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned}4A&=1 &&\implies && A=\frac{1}{4}\\-4B&=1 &&\implies && B=-\frac{1}{4}\\-4C&=0 &&\implies && C=0\\2B+-4D&=0 &&\implies && D=\frac{B}{2}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Altså får vi at vores partikulære løsning bliver

$$y_p=\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}.$$

Den fuldstændige løsning er derfor

$$y(x)=\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}+C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$$

For at kunne indsætte begyndelsesbetingelser differentieres udtrykket så

$$y'(x)=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}x+2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x}.$$

Dernæst kan begyndelsesbetingelserne indsættes

$$\begin{aligned}y(0)&=2\\\implies 2&=-\frac{1}{8}+C_1+C_2\\\implies 2+\frac{1}{8}&=C_1+C_2\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}y'(0)&=5\\\implies 5&=\frac{1}{4}+2C_1-2C_2\\\implies 5-\frac{1}{4}&=2C_1-2C_2\end{aligned}$$

Vi ganger den første ligning med 2 og lægger den til den nederste

$$\begin{aligned}9&=4C_1\\\implies C_1&=\frac{9}{4}\\\implies C_2&=2+\frac{1}{8}-\frac{9}{4}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Den partikulære løsning til vores inhomogene differentialligning bliver derfor

$$y(x)=\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}+\frac{9}{4}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}.$$

Forelæsning 8: Differentialregning i flere variable

d. 21. Oktober 2024

Eksempel 22.3: Overfladeareal af menneske

Et eksempel på en funktion af flere variable er følgende approksimation af overfladearealet af et menneske, $A(h, v)$, givet en højde h og en vægt m

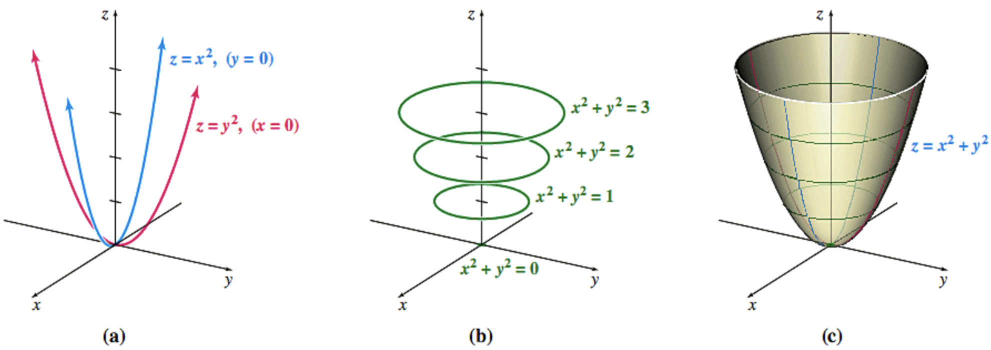
$$A(h, v) = 0,024h^{0,3964}v^{0,5378}.$$

Denne funktion kan bl.a. benyttes til at finde den forventede stigning i overfladeareal givet en vægtøgning eller en vækst i højde.

En funktion af 2 variable kan kun plottes i 3-D idet denne indeholder tre variable $(x, y, f(x, y)$. En funktion af 3 variable ville kræve et 4-D rum for at kunne plottes.

Ved at "fastgøre"forskellige variable kan plottet dog vises med færre dimensioner end ellers påkrævet.

Figur 1: Plots af $f(x, y) = x^2 + y^2$ med forskellige 'faste' variable



På Figur 1 ses den samme funktion, men hvor forskellige variable 'fastholdes'.

En række "standardfunktioner" af flere variable eksisterer

- Paraboloide
$$z = x^2 + y^2.$$
- Ellipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
- Hyperbolsk paraboloide (saddel)
$$z = x^2 - y^2.$$
- Hyperboloide af to 'sheets'
$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1.$$

23 Partielt afledede (Eng: *Partial Derivatives*)

For at kunne lave differentialregning på funktioner med flere variable beskæftiger vi os med partielt afledede, hvor den ene (eller en række af) variablene fastholdes således at der kan differentieres for 1 variabel. Den partielt afledede af f ift. x skrives som

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dette udtryk tilsvarer funktionen, f's, vækstrate i retning af x.

Definition 23: Definition af den partielt afledede

Mere specifikt har vi at den partielt afledede til $f(x,y)$ mht. x i punktet (x_0,y_0) er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y)|_{x=x_0}.$$

Bemærk at notationen f_x også benyttes for ovenstående.
Det samme gør sig i øvrigt gældende langs y-aksen, z-aksen eller hvilken som helst anden akse.

Eksempel 23.1: Partielt afledede i to retninger

Lad $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$. Find $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ i punktet $(4,-5)$.
For at finde $\frac{\partial f}{\partial x}$ differentierer vi først ift. x så vi får at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y,$$

og dermed har vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot -5 = -7.$$

Det samme gøres langs y-aksen hvor vi får at

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 1,$$

og dermed har vi at

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 4 \cdot 3 + 1 = 13.$$

Eksempel 23.2: En mere kompliceret funktion

Lad

$$f(x,y) = \frac{2y}{y + \cos(x)}.$$

Find f_x og f_y.
Vi finder først f_x som

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y\sin(x)}{(y+\cos(x))^2}.$$

Slutteligt findes f_y som

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cos(x)}{(y+\cos(x))^2}.$$

Eksempel 23.3: Funktioner af mere end to variable

Lad

$$f(x,y,z) = x\sin(y+3z).$$

Find f_z. Vi finder den afledte med hensyn til z, f_z som

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x\cos(y+3z).$$

24 2. Ordens partielle afledede

For 2. ordens partielle afledede introduceres følgende notation for den afledte af f mht. y og derefter mht. x

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Og tilsvarende for den afledte mht. x 2 gange

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

De fire 2. ordens afledte af funktionen med to variable $f(x, y)$ er

1. f_{xx}
2. f_{yy}
3. f_{xy}
4. f_{yx}

Eksempel 24.1:

Lad

$$f(x, y) = x\cos(y) + ye^x.$$

Find de fire anden ordens afledte.
Vi finder den partielt afledte mht. x som

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + ye^x.$$

Og den afledte mht. y som

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(y) + e^x.$$

De fire 2. ordens afledte findes derefter som

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\cos(y) + ye^x = ye^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} - x\sin(y) + e^x = -x\cos(y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\cos(y) + ye^x = -\sin(y) + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} - x\sin(y) + e^x = -\sin(y) + e^x
\end{aligned}$$

.

25 Maksimum og minimum

Sætning 25.1: Definition af relativt maksimum og minimum

Relativt maksimum: Et punkt (a, b) er et relativt maksimum hvis $f(a, b) \geq f(x, y)$ for alle (x, y) i en lille omegn af (a, b).

Relativt minimum: Tilsvarende gælder at hvis der for et punkt (a, b) gælder at $f(a, b) \leq f(x, y)$ for alle (x, y) i en lille omegn af (a, b) så er (a, b) et relativt minimum.

Af sætning 25.1 har vi at et punkt (a, b) er et kritisk punkt for f hvis $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Eksempel 25.1:

Find de kritiske punkter for
$$f(x, y) = 4x^3 + 3xy + 4y^3.$$
Først findes $\frac{\partial f}{\partial x}$ som
$$f_x = 12x^2 + 3y.$$
Og dernæst findes $\frac{\partial f}{\partial y}$ som
$$f_y = 3x + 12y^2.$$
Vi har dermed 2 linginger med 2 ubekendte

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 + 3y & \qquad 0 &= 3x + 12y^2 \\ y &= -4x^2 & \qquad 0 &= 3x + 12(-4x^2)^2 = 3x\left(1 + 64x^3\right) \\ y &= -4(-\frac{1}{4})^2 = -\frac{1}{4} & \qquad x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Derudover er $(0, 0)$ et kritisk punkt så de to kritiske punkter er $(0, 0)$ og $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

Bemærk at et relativt maksimum eller minimum medfører et kritisk punkt, men den modsatte implikation gælder ikke. Et kritisk punkt kan godt hverken være et maksimum eller minimum, hvilket er tilfældet med *saddelpunkter*.

25.1 2. ordens test for maksimum/minimum eller saddelpunkt

Hvis du ved at (a, b) er et kritisk punkt kan du finde ud af om det er et maksimum, minimum eller et saddelpunkt ved at beregne diskriminanten D givet ved
$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2.$$
Der gælder derefter at

- Hvis $D < 0$ er (a, b) et saddelpunkt
- Hvis $D = 0$ har du ingen information
- Hvis $D > 0$ og $f_{xx}(a, b) < 0$ er (a, b) et relativt maksimum
- Hvis $D > 0$ og $f_{xx}(a, b) > 0$ er (a, b) et relativt minmum

Forelæsning 9: Planintegraler

28. Oktober 2024

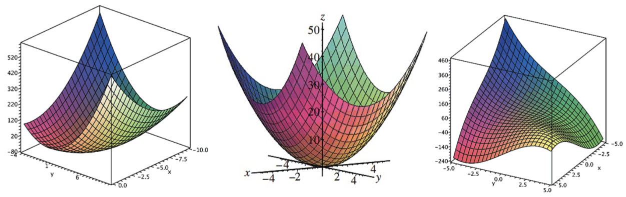
Tidligere er infinitesimalregning i flere variable behandlet i forelæsning 8, hvor der blev arbejdet med differentialregning i to varible – dette er bl.a. brugbart indenfor maksimeringsproblemer. I dag arbejder vi med *differentialregning i flere variables* pendant – *integralregningen i flere variable*.

Planintegraler bruges til at finde volumenet under en overflade. Dette er også hvad der behandles i dag. Vi ved fra integralregningen i en variabel at

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

indikerer arealet under funktionen $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$. Vi ønsker at finde et tilsvarende resultat for flere variable – en pendant om man vil. Vi ønsker formelt set at finde volumenet under en funktion på formen $z = f(x, y)$ (Se evt. **Figur 2**).

Figur 2: Eksempler på funktioner af flere variable



26 Indledende bemærkninger

Hvis vi har en funktion over flere variable $f(x, y)$ kan vi integrere den ene variabel, såsom x, ud som

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Her svarer det til, som var tilfældet med differentialregning i flere variable, at integrere x med y holdt konstant.

Eksempel 26.1: Simpel enkelt-integration af funktion i flere variable

Vi ønsker at integrere funktionen

$$f(x, y) = x^2y^3,$$

ift. x. Så vi ønsker at finde

$$\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2y^3\,\mathrm{d}x.$$

Vi husker at y er konstant og vi sætter derfor denne udenfor integralet

$$y^3\int_0^1 x^2 = y^3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1.$$

Og vi har dermed at

$$\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x = \frac{y^3}{3}.$$

Vi ser fra eksemplet ovenfor at ved at vi ved at integrere x ud får et udtryk der afhænger af y. Noget tilsvarende havde været gældende hvis vi havde integreret y ud. Faktisk vil noget tilsvarende altid være gældende – ved at integrere en variabel ud af en funktion i flere variable får du et udtryk af $n-1$ variable, hvor n er antallet af variable i den oprindelige funktion.

27 Integration over rektangler

Definition 24: planintegralet

Lad $z = f(x, y)$ være en positiv funktion af to variable og lad R betegne et rektangel

$$a \leq x \leq b og c \leq y \leq d.$$

Så har vi at

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dette forstås som at integrere funktionen to gange. Først integreres den ene variabel ud og dernæst integreres den anden variabel ud. Husk i øvrigt fra reglen før at hvis din funktion kun er i to variable vil planintegralet give et tal – arealet under kurven.

Eksempel 27.1: simpelt planintegral

Vi har en funktion

$$f(x, y) = x^2 y^3,$$

som skal integreres over rektanglen, R, defineret ved

$$R = 0 \leq x \leq 1 og 0 \leq y \leq 2.$$

Det er så at sige dette område R som vi "integrerer over". Vi ønsker nu at udregne planintegralet af funktionen. Vi starter med at sætte afgrænsningerne ind

$$\int_0^2 \int_0^1 x^2 y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Først udregnes det inderste integrale givet ved

$$\int_0^1 x^2 y^3\,\mathrm{d}x,$$

resultatet heraf er tidligere fundet til

$$\int_0^1 x^2 y^3\,\mathrm{d}x = \frac{y^3}{3}.$$

Dette integreres nu over y-intervallet så

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{y^3}{3}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{3}\int_0^2 y^3\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^4 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Altså er volumenet under funktionen x^2y^3 i intervallet $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 2$ lig $4/3$.

Sætning 27.1: Fubinis sætning

Der gælder at

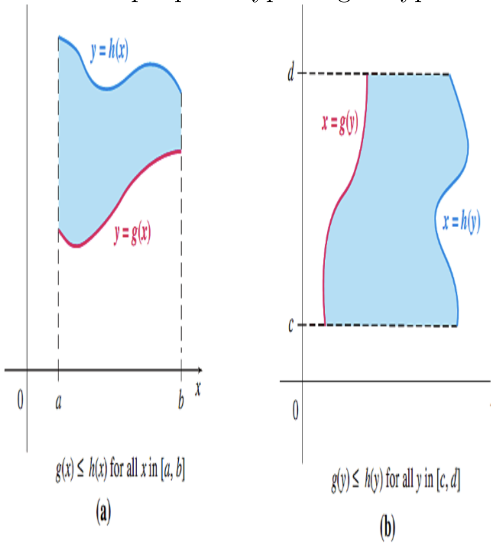
$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

dvs. integrationsrækkefølgen ingen betydning har.

28 Integration over generelle områder

Alting bliver en smule mere kompliceret såfremt integrationsoverfladen ikke er et rektangel men et mere *generelt* område. Vi har følgende definition

Figur 3: Eksempel på et type 1 og et type 2 område



Definition 25: Type 1 og type 2 områder

Vi har generelt at der eksisterer to typer af områder defineret som

- Type 1: $a \leq x \leq b$ og $g(x) \leq y \leq h(x)$
- Type 2: $g(y) \leq x \leq h(y)$ og $c \leq y \leq d$

Vi har altså for type 1 områder et overfladeintegrale på formen

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Og for type 2 områder et overfladeintegrale på formen

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{g(y)}^{h(y)} \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Se evt. Figur 3.

Eksempel 28.1: Et mere kompliceret eksempel

Vi ønsker at finde

$$\iint_R \left(x^3 + 4y\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

hvor R er begrænset af

$$y = 4x og y = x^3.$$

De to funktioners skæringspunkter er i hhv. $x = 0$ og $x = 2$ og vi kan derfor tænke på det som et type 1 område og vi kan derfor opstille følgende planintegrale idet $x^3 \leq 4x$ for alle $x = [0; 8]$

$$\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} x^3 + 4y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Vi opskriver først det inderste integral

$$\int_{x^3}^{4x} x^3 4y\,\mathrm{d}y = [x^3 y + 2y^2]_{y=x^3}^{y=4x}.$$

Vi indsætter integrationsgrænserne så vi får at

$$\left(x^3 \cdot 4x + 2 \cdot (4x)^2\right) - \left(x^3 \cdot x^3 + 2x^{3^2}\right) = 4x^4 + 32x^2 - 3x^6.$$

Vi beregner nu det yderste integrale

$$\begin{aligned}\int_0^2 4x^4 + 32x^2 - 3x^6\,\mathrm{d}x &= [\frac{4}{5}x^5 + \frac{32}{3}x^3 - \frac{3}{7}x^7]_{x=0}^{x=2} \\ &= 56,07\ldots.\end{aligned}$$

Altså er volumenet af funktionen $f(x, y) = x^3 + 4y$ over området mellem funktionerne $y = 4x$ og $y = x^3$ lidt over 56.

29 Kendte fordelinger

29.1 Diskrete stokastiske variable

Fordeling	**Eksperiment, der beskriver fordelingen**
Bernoullifordelingen	Et tilfældigt eksperiment med to outcomes. Success med sandsynlighed p og fiasko med sandsynlighed $1-p$.
Binomialfordelingen	Beskriver antallet af successer ved n uafhængige Bernoulli-forsøg, hvor hvert har samme sandsynlighed p for success.
Poissonfordelingen	En fordeling, der modellerer antallet af gange en hændelse sker på et givent tids-interval. Specielt bruges det for diskrete uafhængige begivenheder, der sker med konstant rate. Eksempelvis radioaktivt henfald.
Den geometriske fordeling	En fordeling, der modellerer antallet af forsøg, der behøves for at få den første success i en række uafhængige Bernoulli-forsøg, med success-sandsynlighed p.
Den negative binomialfordeling	En fordeling, der modellerer antallet af forsøg, der behøves for at få r successer i en række uafhængige Bernoulli-forsøg med success-sandsynlighed p.

29.1.1 Bernoullifordelingen

Bernoullifordelingen. En stokastisk variabel X der kun antager værdierne 0 og 1 siges at være *Bernoullifordelt* med parameter p, hvor $p = P(X = 1)$. Denne har sandsynlighedsfunktion givet ved:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{for } x = 1, \\ 1 - p & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

og fordelignsfunktion givet ved

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ 1 - p & \text{for } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{for } x \ge 1. \end{cases}$$

For bernoullifordelingen gælder

$$E[X] = p$$
$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2.$$

29.1.2 Binomialfordelingen

Binomialfordelingen. Lad $0 \leq p \leq 1$ og $n = 1, 2, 3, \ldots$. En stokastisk variabel X siges da at være *binomial-fordelt* med parametre (n, p), hvis X har en sandsynlighedsfunktion givet som

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \qquad \text{for} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n..$$

p er sandsynligheden for en success så vi har altså fået i successer $n - i$ fiaskoer og $\binom{n}{i}$ er antallet af permutationer af de i successer. Fordelingsfunktionen for binomialfordelingen er givet ved

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

For $k \in \mathbb{R}$. For binomialfordelingen gælder

$$E[X] = np$$
$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

29.1.3 Poissonfordelingen

Poissonfordelingen. Lad $\lambda > 0$. Så siges en stokastisk variabel X at være *Poissonfordelt* med parameter λ hvis sandsynlighedsfunktion p er givet ved

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda i} \lambda^i}{i!} \qquad \text{for} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

og fordelingsfunktion givet ved

$$F_X(k) = \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}.$$

For Poissonfordelingen gælder

$$E[X] = \lambda$$
$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

29.1.4 Den geometriske fordeling

Den geometriske fordeling. Lad $0 < p < 1$ så siges en stokastisk variabel X at være geometrisk fordelt med sandsynlighedsparameter p hvis sandsynlighedsfunktion er givet ved

$$p(n) = p(1-p)^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

og fordelignsfunktion givet ved

$$F_X(k) = P(X \leq k) 1 - (1-p)^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

for $k < 1, F_X(K) = 0$. For den geometriske fordeling gælder

$$E[X] = \frac{1}{p}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

29.1.5 Den negative binomialfordeling

Den negative binomialfordeling er beskrevet med sandsynlighedsparameter p og antalsparameter r, (p, r). Sandsynlighedsfunktionen er givet som

$$P(X) = \binom{r-1}{n-1} p^r (1-p)^{n-r}, \qquad n = r, r+1, \ldots$$

og fordelingsfunktion givet ved

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \binom{i+r-1}{r-1} p^r (1-p)^i, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

For den negative binomialfordeling gælder

$$E[X] = \frac{r}{p}$$
$$\mathrm{Var}(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}.$$

29.2 Kontinuerte stokastiske variable

Fordeling	**Eksperiment, der beskriver fordelingen**
Den uniforme fordeling	Den uniforme fordeling beskriver en stokastisk variabel der har lige stor sandsynlighed for at være enhver given værdi i et interval.
Normalfordelingen	Modellerer mange naturlige fænomener såsom højder, vægte og målefejl. Klokke-kurven.
Eksponentialfordelingen	Eksponentialfordelingen beskriver ventetiden mellem hændelser i en Poisson-process.
Gammafordelingen	Gammafordelingen modellerer tiden indtil k hændelser sker i en Poisson-process.

29.2.1 Den uniforme fordeling

Den uniforme fordeling. Lad $\alpha < \beta$. En stokastisk variabel X siges at være uniformfordelt på intervallet (α, β), hvis X er kontinuert med tæthedsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \text{for } \alpha < x < \beta \quad \text{og} \quad f(x) = 0 \text{ ellers.}$$

Denne har fordelignsfunktion givet som

$$F(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \text{for} \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

For denne gælder, at

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\beta - \alpha}{12}.$$

29.2.2 Normalfordelingen

Normalfordelingen. Lad $\mu \in \mathbb{R}$ og $\sigma^2 \geq 0$. En stokastisk variabel X siges at være normalfordelt med parametre μ og σ^2, hvis X har tæthedsfunktion givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ for alle } x.$$

Hvis $\mu = 0$ og $\sigma^2 = 1$ siges X endvidere at være standard-normalfordelt. Normalfordelingen har fordelingsfunktion (se evt. Figur 4) givet ved

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{s^2}{2}} \,\mathrm{d}s.$$

For normalfordelingen gælder

$$E[X] = \mu$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

29.2.3 Eksponentialfordelingen

Eksponentialfordelingen. Lad $\lambda > 0$. En stokastisk variabel X siges at være eksponentialfordelt med parameter λ, hvis X har tæthedsfunktion givet ved

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \text{for } x > 0 \text{ og } f(x) = 0, \text{ ellers.}$$

Denne har fordelingsfunktion givet ved:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ for } x > 0.$$

For eksponentialfordelingen gælder at

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

29.2.4 Gammafordelingen

Gammafordelingen. Lad $\alpha, \lambda > 0$. En stokastisk variabel X siges at være gammafordelt med parametre (α, λ), hvis X har tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ for } x > 0.$$

Denne har fordelingsfunktion givet ved

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x \lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t.$$

For gammafordelingen gælder

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Forelæsning 11: Sandsynlighedsregning 1 11. November 2024

30 Stokastiske variable

En stokastisk variabel X angiver værdien af et *stokastisk eksperiment*. Dette kunne eksempelvis være et terningekast. Normalt skrives stokastiske variable med store bogstaver, f.eks. X, Y og Z.

For at kunne beskæftige os med forskellige typer af stokastiske variable skal vi først igennem lidt basal mængdelære.

30.1 Tællelige mængder

En mængde A kaldes tællelig hvis vi kan skrive A på formen

$$A = a_n : n \in \mathbb{N}$$

hvor $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ angiver de naturlige tal. Altså er alle mængder, hvor vi kan "tælle" alle elementerne ved at indicere dem *tællelige*.

Det gælder generelt at alle endelige mængder er tællelige og desuden kan vises at både de naturlige tal $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$, de relle tal $\mathbb{Z} = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ og de rationelle tal $\mathbb{Q} = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ samt alle deres delmængder er tællelige.

Ikke-tællelige mængder inkluderer ethvert kontinuert interval, f.eks. (a, b) eller $(a, b]$ hvor $a < b$. Altså gælder det også at de irationelle tal er ikke-tællelige og dermed er de relle tal $\mathbb{R}$ og de komplekse tal $\mathbb{C}$ begge ikke-tællelige.

30.2 Diskrete stokastiske variable

Definition 26:

En stokastisk variabel der antager værdier i en *tællelig* mængde kaldes *diskret*. Så alle stokastiske variable der antager værdier i endelige mængder, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ eller $\mathbb{Q}$ er diskrete.

For at arbejde med diskrete stokastiske variable skal vi bruge summer og for de kontinuerte stokastiske variable skal vi bruge integraler. Ellers er de to typer af stokastiske variabler analoge.

30.2.1 Sandsynlighedsfunktionen

Sætning 30.1: sandsynlighedsfunktionen

Sandsynlighedsfunktionen (Eng: *Probability mass function* er givet ved

$$p(x) = P(X = x).$$

Altså er sandsynligheden p for at hændelsen x sker lig sandsynligheden for at vores stokastiske variabel X er lig vores hændelse x. Hvis X er diskret så findes der tal x_n for $n = 1, 2, 3, \ldots$ så at

$$p(x_n) \geq 0$$

og hvor $p(x) = 0$ for alle andre værdier af x ikke inkluderet i x_n.

Sætning 30.2:

Idet vi ved at sandsynligheden for at vores stokastiske variabel ligger i hele området er 1 må det gælde at

$$\sum_{n=1}^{n} p(x_n) = 1.$$

31 Middelværdi

Givet et stokastisk eksperiment ønsker vi ofte at få nogle tal ud som vi kan fortolke. Det hyppigst brugte tal for en stokastisk model er *middelværdien*.

Definition 27: Middelværdien

Hvis X er en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedfunktion p så er *middelværdien* $E[X]$ givet ved

$$E[X] = \sum_{n=1}^{n} x_n p(x_n).$$

Den ovenstående definition af middelværdien antager samme form som et vægtet gennemsnit af alle de værdier som vores stokastiske variabel X kan antage og sandsynligheden $p(x_n)$ for at den stokastiske variabel X antager værdien x_n. Dette er en *meget vigtigt* formel.

31.1 Gennemsnittet

Grundet stokastiske eksperimenters grundlæggende og indbyggede tilfældighed kan vi ikke sige hvilken "værdi" de giver, men vi kan derimod udregne en *gennemsnitsværdi* for eksperimentet, hvis vi har tilpas mange observationer. Vi kan eksempelvis ikke sige hvilken værdi et terningekast giver, men vi ved at vi i gennemsnit kan forvente at få 3,5. Dette er ligeledes middelværdien idet

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Sætning 31.1: Gennemsnittet konvergerer mod middelværdien

Mere generelt har vi at hvis $G_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ angiver gennemsnittet af n uafhængige og ens fordelte stokastiske variable, alle fordelt som X. Så vil

$$G_n \to E[X], \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

31.2 Fysisk fortolkning af middelværdien

Givet en vægtløs stang, hvor vægte med massen $p(x_n)$ er placeret i punkterne x_n så er middelværdien lig stangens tyngdepunkt.

Eksempel 31.1: Beregning af middelværdien

Antag

$$P(X = -1) = 0{,}2, \qquad P(X = 0) = 0{,}5, \qquad P(X = 1) = 0{,}3.$$

Find middelværdien.

Vi har at $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 1$. Altså får vi at

$$E[X] = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}1.$$

Altså er middelværdien 0,1.

32 Middelværdi af en funktion på en stokastisk variabel

I mange sammenhænge er man interesseret i at finde middelværdien af en funktion g taget på en stokastisk variabel. Eksempelvis når man skal finde variansen af stokastiske variable skal man benytte $g(X) = x^2$.

Sætning 32.1: Middelværdi af en funktion på en stokastisk variabel

Lad X være en stokastisk variabel med sandsynlighedfunktion p og lad g betegne en funktion. Så har vi at

$$E[g(X)] = \sum_{n=1}^{n} g(x_n)p(x_n).$$

Eksempel 32.1: Beregning af middelværdien for en funktion på en stokastisk variabel

Vi ønsker at finde $E[x^2]$ for tallene fra sidste eksempel så vi har altså $E[g(X)]$ med $g(X) = x^2$. Altså får vi at

$$E[x^2] = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}5.$$

Dog skal man, når man bruger ovenstående, være opmærksom på at $E[g(X)] \neq g(E[X])$. Dette ses også idet $E[x^2] = 0{,}5 \neq g(E[x]) = 0{,}1^2$.

Sætning 32.2: Linearitet af middelværdien og momenter

Hvis a og b er konstanter så gælder at

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Hvilket er et meget nyttigt resultat.

Specialtilfælde:
Hvis $k = 1, 2, 3, \ldots$ så kaldes $E\left[X^k\right]$ for *det k'te moment af X*. Fra det ovenstående gælder der at

$$E\left[X^k\right] = \sum_{n=1}^{n} x_n^k p(x_n).$$

33 Varians

Mens middelværdien siger noget om hvor stor den stokastiske variabel gennemsnitligt er, siger variansen noget om hvor tæt den stokastiske variabel *typisk* er på sin middelværdi – Er der stor varians kan ens resultater være sværere at stole på end hvis der er lille varians.

Definition 28:

Lad X være en stokastisk variabel og lad $\mu = E[X]$ betegne middelværdien af X. Så er variansen af X givet ved

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Variansen er altså *middelværdien* af den kvadrerede afstand mellem den stokastiske variabel X og den normale middelværdi μ. Det ovenstående kan også skrives som

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

Alstå er variansen lig 2.-momentet af X minus middelværdien af X i anden potens.

33.1 Fysisk fortolkning af variansen

Mens middelværdien tidligere blev beskrevet som *tyngdepunktet* af en stang kan variansen fortolkes som *inertimomentet*, hvilket også kan ses af formlen.

Eksempel 33.1: Variansen af et terningekast

Først findes 2.-momentet af den stokastiske variabel som

$$E\left[x^2\right] = \frac{1}{6}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) = 15{,}1666.$$

Og vi har tidligere fundet middelværdien af et terningekast til $E[X] = 3{,}5 \implies E[X]^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$. Altså er den samlede varians af et terningekast

$$\mathrm{Var}(X) = 15{,}1666 - 12{,}25 = 2{,}9166.$$

Vi har fra definitionen af variansen at

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right].$$

Dette er blot middelværdien af en funktion og det kan derfor skrives som

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{n=1}^{n} (x_n - \mu)^2 p(x_n).$$

Og idet $(x_n - \mu)^2 \geq 0$ og $p(x_n) \geq 0$ må det gælde at $\mathrm{Var}(X) \geq 0$. Så vi har altså at

$$0 \leq \mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 \implies E[X]^2 \leq E[X^2].$$

Altså har vi at 2.-momentet af X altid er større end middelværdien af X. Faktisk er de to størrelser kun lige store for $X = \text{const.}$ og derfor er der streng ulighed for alle de tilfælde vi ønsker at arbejde med her.

Desuden har vi at

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

Dette betyder at multiplikation med konstanter påvirker variansen idet disse konstanter kvadrereres mens addition med konstanter ikke påvirker variansen idet disse konstanter udgår.

33.2 Standardafvigelsen

Standardafvigelsen er en anden vigtig størrelse. Denne er relateret til variansen med

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Standardafvigelsen tager, så at sige, variansen "tilbage til de *rigtige* enheder".

34 Bernoulli- og binomialfordelingen

Definition 29: Bernoullifordelingen

En stokastisk variabel X der kun antager værdierne 0 og 1 siges at være *Bernoullifordelt* med parameter p hvor

$$p = P(X = 1).$$

Her vil vi ofte associere 1 med success og 0 med fiasko så Bernoullifordelinger er ofte brugt i forbindelse med binære stokastiske variable.

34.1 Binomialkoefficienten

For $n = 1, 2, \ldots$ og $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ er

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-1)!}.$$

$\binom{n}{i}$ (n *choose* i) angiver antallet af delmængder med i elementer i som kan udtrækkes af en mængde med n elementer.

Definition 30: Binomialfordelingen

Lad $0 \leq p \leq 1$ og $n = 1, 2, 3, \ldots$. En stokastisk variabel X siges da at være *binomialfordelt* med parametre (n, p) (hvor p kaldes sandsynlighedsparameteren og n kaldes antalsparameteren) hvis X har sandsynlighedsfunktion givet som

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad \text{for} i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

p er sandsynligheden for en success så vi har altså fået i successer $n - i$ fiaskoer og $\binom{n}{i}$ er antallet af permutationer af de i successer. Vi kan i øvrigt bemærke at

$$\text{Bernoulli}(p) = \text{Binomial}(1, p).$$

Altså er Bernoulli-fordelingen et specialtilfælde af binomialfordelingen.

34.2 Eksperimenter der er binomialfordelte

En binomialfordeling kan eksempelvis opstå i det vi betragter et eksperiment med kun to udfald; *success* eller *fiasko*. Vi antager at sandsynligheden for at få success er p. Hvis X da angiver antallet af successer der fås ved at udføre eksperimentet n gange så er X binomialfordelt med parametre (n, p).

34.3 Middelværdi og varians for binomialfordelingen

I det følgende vil vi finde et udtryk for middelværdien og variansen af binomialfordelingen.

Sætning 34.1: Middelværdi og varians for binomialfordelingen

Lad X være binomialfordelt med parametre (n, p). Så er middelværdien

$$E[X] = np$$

og variansen er

$$\text{Var}(X) = np(1-p).$$

Bevis:

Lad $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vi ønsker da at finde $E\left[X^k\right]$. Vi har at

$$E[g(X)] = \sum_{n=1}^{n} g(x_n) p(x_n).$$

Sættes $g(x) = X^k$ fås at

$$E\left[X^k\right] = \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Vi ønsker at finde et andet udtryk for binomialkoefficienten. Vi har at

$$i\binom{n}{i} = i\frac{n!}{i!(n-i)!} = n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}.$$

Vi har derfor at

$$E\left[X^k\right] = np\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-i}.$$

Vi sætter $j = i-1$ og får at

$$E\left[X^k\right] = np\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{k-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j} = npE\left[(Y+1)^{k-1}\right].$$

Hvor Y er binomialfordelt med parametre $(n-1,p)$. Vi sætter $k=1$ og får middelværdien som

$$E[X] = npE\left[(Y+1)^0\right] = np.$$

Hvis vi i stedet sætter $k=2$ fås at

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= npE\left[(y+1)^1\right] \\ &= npE[Y+1] \\ &= np(1+E[Y]) \\ &= np(1+(n-1)p) \\ &= np+(np)^2-np^2. \end{aligned}$$

Vi er nu klar til at finde et udtryk for variansen idet vi har at

$$\operatorname{Var}(X) = E[X^2]-E[X]^2.$$

Sættes resultaterne fra ovenfor ind fås at

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= np+(np)^2-np^2-(np)^2 \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

Altså er det vist.

Eksempel 34.1: Kommunikationssystemer

Et kommunikationssystem virker hvis mindst halvdelen af dens komponenter virker. Antag at sandsynligheden for at en komponent virker er p. Vi ønsker at svare på hvornår et system med 5 komponenter virker bedre end et system med 3 komponenter. Først betragtes systemet med 5 komponenter. Vi

lader X betengne antallet af komponenter der virker for systemet med 5 komponenter. Vi ved da at X er binomialfordelt med antalsparameter 5 og sandsynlighedsparameter p. Vi får da at

$$p(virker) = p(X=3)+p(X=4)+p(X=5).$$

Idet vores stokastiske variabel X antages at være binomialfordelt får vi at

$$p(virker) = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)^1+\binom{5}{5}p^5(1-p)^0 = 10p^3(1-p)^2+5p^4(1-p)+p^5.$$

Noget tilsvarende gøres for 3-komponent systemet så

$$\begin{aligned} p(virker) &= p(X=2)+p(X=3) \\ &= \binom{3}{2}p^2(1-p)+\binom{3}{3}p^3(1-p)^0 \\ &= 3p^2(1-p)+p^3. \end{aligned}$$

Vi skal derfor afgøre for hvilke p det gælder at

$$10p^3(1-p)^2+5p^4(1-p)+p^5 > 3p^2(1-p)+p^3.$$

Man kan vise at dette gælder for $p > \frac{1}{2}$. Altså er 5-komponent systemet bedre end 3-komponent systemet, hvis sandsynligheden for at et komponent virker er mere end $\frac{1}{2}$.

35 Poissonfordelingen

Definition 31: Poissonfordelingen

Lad $\lambda > 0$. Så siges en stokastisk variabel X at være *poissonfordelt* med parameter λ hvis sandsynlighedsfunktionen p er givet ved

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda i}\lambda^i}{i!}$$

for $i = 0, 1, 2, \ldots$

35.1 Eksperimenter der er Poissonfordelte

Poissonfordelte eksperimenter opstår når vi har et meget stort antal hændelser n der hver har en lille sandsynlighed p_i. Vi antager at alle sandsynlighederne er små og hændelserne er "næsten" uafhængige. Så er antallat af hændelser der indtræffer approksimativt Poissonfordelt med parameter $\lambda = p_1 + \ldots + p_n$.

Der gælder i øvrigt at hvis X er binomialfordelt med (n, p), hvor n er stor, p er lille og np er moderat. Så er X approksimativt Poissonfordelt med parameter $\lambda = np$.

Mere præcist har vi at hvis x_n er binomialfordelt med parametre $(n, \frac{\lambda}{n})$, p_n er sandsynlighedsfunktion for x_n og p er sandsynlighedsfunktionen for en Poissonfordeling med parameter λ så vil

$$p_n(i) \to p(i), \quad \text{for} n \to \infty.$$

Altså konvergerer sandsynlighedfunktionen for en binomialfordelt stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktionen for en Poissonfordeling for $n \to \infty$.

De typiske anvendelser af Poissonfordelingen er altså at finde

- Trykfejl i en bog.
- Antallet af mennesker i et samfund der bliver over 100 år.
- Antallet af forkerte telefonnumre der ringes til i løbet af en dag.
- Antallet af kunder der besøger et posthus en given dag.
- Antallet af α-partikler, der udsendes i en fast periode fra et radioaktivt materiale.

Sætning 35.1: Middelværdien i en Poissonfordeling

Lad X være Poissonfordelt med parameter λ. Så er middelværdien for X

$$E[X] = \lambda.$$

Bevis:

Vi benytter formlen for middelværdien idet vi, dog summer til uendeligt denne gang så vi får at

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Vi sætter $j = i - 1$ og får at

$$E[X] = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = \lambda$$

idet sandsynlighedsfunktionen summmer til 1 og derfor udgår. Altså er det vist

Sætning 35.2: Variansen i en Poissonfordeling

Det kan relativt let vises at der for en Poissonfordeling gælder at

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Altså gælder for en Poissonfordeling at

$$E[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

For Poissonfordelinger ser vi ofte, at hvis en hændelse sker tilfældigt over tid så vil hændelsen forekomme i "klumper" således at en række hændelser sker med relativt kort tidsmellemrum. Dette giver bl.a. anledning ti eksempelvis at overvurdere truslen fra hajangreb i perioder, hvor der kommer mange angreb – de mange angreb skyldes ikke en øget risiko men er blot et artefakt af Poissonfordelingen.

Forelæsning 12: Sandsynlighedsregning 2 18. November 2024

36 Andre diskrete fordelinger

Vi har fra sidst de to fordelinger

- **Binomialfordelignen**: Hvor mange ud af n eksperimenter er successer givet et eksperiment der kun kan være success eller fiasko
- **Poissonfordelingen**: Hvis du har et fast tidsinterval, hvor mange hændelser indtræffer så indenfor dette interval

I dag vil vi bl.a. kigge på ventetidsfordelinger.

36.1 Den geometriske fordeling

Den geometriske fordeling har sandsynlighedsparameter $0 < p < 1$ og sandsynlighedsfunktion givet ved

$$P(n) = p(1-p)^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Funktionen ovenfor kan ses som sandsynligheden for først at få $n-1$ fiaskoer og dernæst 1 enkelt success. Altså er der også her tale om et binært eksperiment. Den geometriske fordeling siger altså noget om hvor længe man skal vente på en success; hvad er sandsynligheden for at få $n-1$ fiaskoer efterfulgt af success?

Sætning 36.1: middelværdi og varians for geometriske fordelinger

Middelværdien for en geometrisk fordeling kan nemt ses til at være

$$E[X] = \frac{1}{p}.$$

Og variansen er givet ved

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Bevis:

Vi har generelt en middelværdi givet ved

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} np(n).$$

Og vi får dermed

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p(1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

.

For $n = 1$ bliver det første led 0 og vi kan derfor starte summen fra 2 i stedet

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p(1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}p(1-p)^{n-1} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}jp(1-p)^{j} + \sum_{n=1}^{\infty}p(1-p)^{n-1} \\
&= (1-p)\sum_{j=1}^{\infty}jp(1-p)^{j} + \sum_{n=1}^{\infty}p(1-p)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Vi genkender først summen $\sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^j$ som middelværdien

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^j = E[X]$$

.

Summen $\sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = 1$, da vi summer sandsynlighedsfunktionen for en geometrisk fordeling over alle udfaldene og sandsynlighdeden for hele udfaldsrummet er 1 for enhver fordeling. Vi har dermed

$$\begin{aligned}
(1-p)E[x] + 1 = E[X](1-(1-p) &= 1 \\
&= pE[X] = 1 \\
&= E[X] = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Altså er middelværdien for en geometrisk fordeling

$$E[X] = \frac{1}{p}.$$

Noget tilsvarende kan gøres for at vise at variansen er givet som

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

For at vise hvordan man regner med geometriske fordelinger vil et kort eksempel i det følgende præsenteres.

Eksempel 36.1: Træk af kugler

En krukke indeholder N hvide kugler og M sorte kugler. Kuglerne trækkes tilfældigt, én ad gangen, indtil en sort kugle er trukket. Kuglerne lægges tilbage i krukken efter hvert træk. Vi ønsker da at finde sandsynligheden for at netop n hvide kugler trækkes før vi får en sort. Idet der er tilbagelægning er eksperimentet binært og vi kan derfor regne på det med den geometriske fordeling. Hvis vi sætter X til at være antallet af hvide kugler, der trækkes, før vi får en sort så ved vi at X er geometrisk fordelt med parameter $p = \frac{M}{N+M}$. Vi ønsker at finde sandsynligheden for $P(X = n)$. Idet X er geometrisk fordelt har vi derfor at

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Hvis vi indsætter p fås

$$\begin{aligned}P(X = n) &= \frac{M}{N+M} \cdot \left(1 - \frac{M}{N+M}\right)^{n-1} \\ &= \frac{M}{N+M} \cdot \left(\frac{N}{N+M}\right)^{n-1} \\ &= \frac{MN^{n-1}}{(N+M)^n}\end{aligned}$$

.

Hvis vi i stedet ønsker at finde ud af hvor mange hvide kugler vi får i middel før vi får en sort sættes blot $p = \frac{M}{N+M}$ ind i formlen for middelværdi som

$$E[X] = \frac{N+M}{M}.$$

36.2 Den negative binomialfordeling

Den negative binomialfordeling er beskrevet med en sandsynlighedsparameter, p og antalsparameter, r, (p, r). Sandsynlighedsfunktionen er givet som

$$P(X) = \binom{r-1}{n-1} p^r (1-p)^{n-r}, \qquad n = r, r+1, \ldots.$$

Denne kan fortolkes som antallet af forsøg indtil r succeser for et binært eksperiment. Dette kunne f.eks. være, hvis man ønsker at beregne chancen for at få r plat'ter, hvis man kaster en mønt, n gange. Den geometriske fordeling er altså et specialtilfælde af den negative binomialfordeling, hvor $r = 1$, hvilket også kan ses af sandsynlighedsfunktionen. Det er vigtigt at være opmærksom på at binomialfordelingen og den negative binomialfordeling er forskellige fordelinger med meget forskellige fortolkninger og brugstilfælde.

Sætning 36.2: Middelværdi og varians for den negative binomialfordeling

Middelværdien for den negative binomialfordeling er givet som

$$E[X] = \frac{r}{p}.$$

Og variansen er givet ved

$$\mathrm{Var}(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}.$$

Disse er altså begge lig resultaterne for den geometriske fordeling skaleret med faktoren, r, hvilket også givet fin logisk mening idet den geometriske fordeling angiver antallet af forsøg for 1 success og den negative binomialfordeling angiver antallet af forsøg for r succeser.

37 Middelværdi for summer af stokastiske variable

Det bør bemærkes at alt i dette afsnit både gælder diskrete og kontinuerte stokastiske variable medmindre andet er anført (kontinuerte stokastiske variable er beskrevet længere nede). Den helt centrale regel for middelværdien af summer for stokastiske variable er, at middelværdien af en sum er lig summen af middelværdierne, altså

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \tag{6}$$

Dette vil i det følgende blive illustreret med et eksempel

Eksempel 37.1:

Betragt følgende stokastiske variable

- X er binomialfordelt $(5, \frac{1}{3})$
- Y er Poissonfordelt (7)
- Z er geometrisk fordelt $(\frac{1}{5})$

Vi ønsker da at beregne

$$E[6X + 4Y + 7Z + 2].$$

Vha. **Ligning 6** og almindelige regneregler for middelværdier kan vi omskrive ovenstående til

$$E[6X + 4Y + 7Z + 2] = 6 \cdot E[X] + 4 \cdot E[Y] + 7 \cdot E[Z] + 2.$$

Dermed bliver problemet noget nemmere at løse. Vi betragter først $E[X]$ som

$$E[X] = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Dernæst betragtes $E[Y]$ som

$$E[Y] = 7.$$

Og slutteligt $E[Z]$ som

$$E[Z] = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Vi har dermed at

$$E[6X + 4Y + 7Z + 2] = 6 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 5 + 2 = 75.$$

38 Egenskaber ved fordelingsfunktionen (Eng: *Cumulative Distribution Function*

Det bør, som for sidste afsnit, bemærkes at alt der bliver præsenteret i dette afsnit både gælder for diskrete og kontinuerte variable.

Sætning 38.1: Fordelingsfunktionen for en stokastisk variabel

Fordelingsfunktioneb, F, for den stokastiske variabel, X, er givet som

$$F(X) = P(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fordelingsfunktionen beskriver *entydigt* alle fordelinger – dvs. både kontinuerte og diskrete stokastiske variable. Dette står i modsætning til sandsynlighedsfunktionen som kun kan bruges for diskrete stokastiske variable.
Disse fordelingsfunktioner er rigtigt smarte, for ikke nok med at vi kan regne sandsynligheden for at den stokastiske variabel er under en bestemt værdi kan vi også regne sandsynligheden for at den

stokastiske variabel er i et interval idet dette blot er differensen mellem fordelingsfunktionen til to forskellige værdier af x.

39 Kontinuerte stokastiske variable

For at kunne arbejde med kontinuerte stokastiske variable er vi nødsaget til at definere, hvad forskellen på en sådan og en diskret stokastisk variabel er. Vi arbejder med følgende definitioner

Definition 32: Diskrete stokastiske variable

En stokastisk variabel, der antager værdier i en *tællelig* mængde kaldes *diskret*.

Definition 33: Kontinuerte stokastiske variable

En stokastisk variabel, X, kaldes *kontinuert*, hvis der findes en positiv funktion f så at for alle $A \subseteq \mathbb{R}$ vi har

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Altså, er den stokastiske variabel kontinuert, hvis man kan udregne sandsynligheden for at den stokastiske variabel X ligger i en mængde A ved at integrere over A for alle $A \subseteq \mathbb{R}$. Funktionen f for hvilken ovenstående gælder for en given stokastisk variabel kaldes tæthedsfunktionen for selvsamme stokastiske variabel.

Der er desuden næsten 1:1 korrespondance mellem sandsynlighedsfunktionen for diskrete stokastiske variable og tæthedsfunktionen for kontinuerte stokastiske variable og de kan i langt de fleste tilfælde tænkes som tilsvarende koncepter, men for forskellige slags stokastiske variable.

Sætning 39.1: Punktsandsynligheder for kontunierte stokastiske variable

Hvis X er en kontinuert stokastisk variabel så er

$$P(X = x) = 0, \qquad \text{for alle } x.$$

Dette følger fra

$$P(X = x) = P(X \in \{x\}) = \int_x^x f(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) = 1$ for diskrete stokastiske variable kan en stokastisk variabel ikke både være kontinuert og diskret – de to slags stokastiske variable siges at være disjunkte.

Det uegentlige integrale af tæthedsfunktionen (dvs. fra $-\infty$ til ∞) er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

da

$$P(X \in \mathbb{R}) = 1.$$

Eksempel 39.1: Ventetiden indtil en computer går i stykker

Lad X betegne ventetiden indtil en computer går i stykker. Antag at X er kontinuert med tæthedsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}, \qquad 0 \le x \text{ og } f(x) = 0 \text{ for } x < 0.$$

Vi ønsker da at finde sandsynligheden for at der går mellem 50 og 150 tidsenheder før computeren går i stykker. Vi ønsker altså at finde $P(50 \leq X \leq 150)$. Vi integrerer altså tæthedsfunktionen over intervallet

$$\begin{aligned} P(50 \leq X \leq 150) &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-\frac{x}{100}}\right]_{50}^{150} \\ &= -e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} \\ &= 0{,}38. \end{aligned}$$

39.1 Middelværdi og varians for kontinuerte stokastiske variable

Hvor vi i "den diskrete verden" arbejdede meget med summer arbejder vi i "den kontinuerte verden" med integraler. For de diskrete variable er middelværdien *summen af de værdier* den stokastiske variabel kan antage vægtet med *sandsynlighedsfunktionen* medens den for de kontinuerte variable er *integralet over de værdier* den stokastiske variabel kan antage vægtet med *tæthesfunktionen*.

Sætning 39.2: Middelværdien for en kontinuert stokastisk variabel

Middelværdien for en kontinuert stokastisk variabel X er givet ved

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Vi ønsker at bruge dette i praksis og tager derfor et hurtigt eksempel

Eksempel 39.2: Middelværdien for en kontinuert stokastisk variabel

Lad X have tæthedsfunktion

$$f(x) = 2x, \text{ for } 0 \leq x \leq 1 \text{ og } f(x) = 0 \text{ ellers.}$$

Vi ønsker da at finde middelværdien af X. Af tæthedsfunktionen ses at X kun antager værdier mellem 0 og 1. Hvis vi bruger formlen for middelværdien fra før får vi at

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} x(2x) \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_{0}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

39.2 Middelværdi for funktioner taget på kontinuerte stokastiske variable

Sætning 39.3:

Ønsker man at finde middelværdien for en funktion taget på en kontinuert stokastisk variabel $E[g(x)]$ skal man i stedet for at integrere x op mod sin tæthedsfunktion integrere g op mod sin tæthedsfunktion som

$$E[g(x)] = \int g(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Det bør desuden bemærkes at der også for kontinuerte stokastiske variable gælder relationen

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

39.3 Variansen for kontinuerte stokastiske variable

Definition 34: Variansen af en kontinuert stokastisk variabel

Variansen for en kontinuert stokastisk variabel er givet som

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right], \qquad \mu = E[X].$$

Dette kan omskrives til

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2.$$

Hvilket er den velkendte formel for variansen som er tilsvarende den for diskrete stokastiske variable.

Eksempel 39.3: Variansen af en kontinuert stokastisk variabel

Lad X have tæthedsfunktionen

$$f(x) = 2x, \qquad \text{for } 0 < x < 1 \text{ og } f(x) = 0 \text{ ellers.}$$

Vi ønsker da at finde variansen af X. Vi har tidligere fundet middelværdien for tæthedsfunktionen givet ovenfor. Vi mangler derfor blot at finde 2.-momentet. Vi sætter $g(x) = x^2$ og har derfor $E[g(x)]$ som løses som

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vi kan dermed finde variansen som

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Forelæsning 13: Sandsynlighedsregning 25. November

40 Den uniforme fordeling (2.3)

Vi betragter et interval fra α til β og vi trækker et helt tilfældigt tal mellem punkterne vil valgene være uniformfordelt.

Definition 35: Den uniforme fordeling

Lad $\alpha < \beta$. En stokastisk variabel X siges at være uniformfordelt på intervalet $(\alpha;\beta)$, hvis X er kontinuert med tæthed

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \text{for } \alpha < x < \beta, \quad \text{og } f(x) = 0 \text{ ellers.}$$

Den uniforme fordeling beskriver et helt tilfældigt valg mellem α og β. Den uniforme fordeling på $(0,1)$ har tæthed f givet ved $f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$ for $0 < x < 1$, og $f(x) = 0$ ellers.

Sætning 40.1: Fordelingsfunktionen for den uniforme fordeling

Fordelingsfunktionen F for en uniform fordeling på $(\alpha;\beta)$ er givet ved

$$F(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \text{for} \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Det følger af

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Sætning 40.2: Middelværdi og Varians for en uniform fordelign

Middelværdien E af en uniformfordelt stokastisk variabel X er

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dette svarer til midtpunktet af $(\alpha;\beta)$.

Variansen Var af en uniformfordelt stokastisk variabel X er

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\beta - \alpha}{12}.$$

Dette svarer til intervallængden delt med 12.

Bevis:

Middelværdien af en stokastisk variabel er generelt givet ved

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vi kan indsætte vores tæthedsfunktion $f(x)$ som

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_\alpha^\beta x \frac{1}{\beta-\alpha} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta x \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha^2 \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \\ &= \frac{\beta+\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Altså er det vist.

Eksempel 40.1: Uniformfordeling

Lad X være uniformfordelt på $(0, 10)$. Bestem $P(3 < X < 7$.

Vi vil regne dette vha. fordelingsfunktioner. Vi har fordelingsfunktionen som

$$F(x) = \frac{x-0}{10-0} = \frac{x}{10}.$$

Vi kan nu finde $P(3 < X < 7)$ som tilvæksten i fordelingsfunktionen fra den nedre til den øvre grænse. Vi får altså

$$P(3 < X < 7) = \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

Vi kunne også have gjort dette vha. integration af tæthedsfunktionen fra nedre til øvre grænse. som

$$\int_0^{10} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

41 Normalfordelingen (2.4)

Normalfordelingen er en af de vigtigste og hyppigst brugte fordelinger.

Definition 36: Normalfordeling

Lad $\mu \in \mathbb{R}$ og $\sigma^2 \geq 0$. En stokastisk variabel X siges at være *normalfordelt* med parametre μ og σ^2, hvis X har tæthedsfunktion givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{for alle } x.$$

Hvis $\mu = 0$ og $\sigma^2 = 1$ siges X endvidere at være standard-normalfordelt.

Sætning 41.1: Middelværdien og variansen for normalfordelingen

Lad X være normalfordelt med parametre $\left(\mu, \sigma^2\right)$ så gælder at

$$E[X] = \mu$$
$$\text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Sætning 41.2: Fordelingsfunktionen for standard-normalfordelingen

Fordelingsfunktionen for standard-norrmalfordelingen skrives som

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} \, \mathrm{d}s.$$

Dette integrale kan imidlertid ikke løses analytisk og man er derfor nødt til at have gang i sin lommeregner eller finde en tabel (som Figur 4) og slå op i.

41.1 Tabel over værdier af fordelingsfunktionen for standard-normalfordelingen

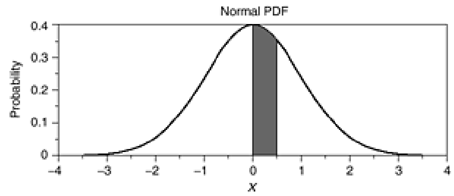
Vi har desuden at $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, så hvis vi kender $\Phi(x)$ for $x > 0$ kan vi også finde $\Phi(-x)$.

Desuden gælder at hvis X er normalfordelt (μ, σ^2) så er fordelignsfunktionen for X givet ved

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Således kan man transformere en hvilken som helst normalfordeling stil standard-normalfordelingen, idet vi kan finde en generel fordelingsfunktion vha. fordelingsfunktionen for standard-normalfordelingen.

Figur 4: Tabel over værdien af $\Phi(x)$ for forskellige x for standard-normalfordelingen.



Area under the Normal Curve from 0 to X

X	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3.3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3.4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3.5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3.6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3.7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3.8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3.9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997
4.0	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998

41.2 Den Centrale Grænsværdi Sætning

Normalfordelingen er en vigtig fordeling idet den er meget tæt forbundet til den centrale grænseværdi sætning. Denne er den ene af sandsynlighedsteoriens store perler, mens den anden er den såkaldte "store tals lov" der siger at det empiriske gennemsnit kommer vilkårligt tæt på middelværdien for store antal forsøg.

Sætning 41.3: Den Centrale Grænseværdi Sætning

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uafhængige og identiske fordelte stokastiske variable. Lad endvidere $\mu = E[X_1]$ og $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Slutteligt, lad $G_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ betegne deres gennemsnit. Så vil

$$\sqrt{n}(G_n - \mu) \to Z \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

hvor Z er normalfordelt med $(0, \sigma^2)$.
Specielt vil

$$P\left(\sqrt{n}\,(G_n - \mu) \leq b\right) \to \Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right)$$

Dvs. gennemsnittet er asymptotisk normalfordelt som

$$G_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Altså har "gud" valgt normalfordelingen som den specielle fordeling der angiver gennemsnittet af forskellige vilkårligt fordelte variable.

Af den centrale grænseværdi sætning kan ses at normalfordelingen opstår som et resultat af en samling af mange små, tilfældige fejl eller afgivelser.

Vi kan betragte terningekast som jo egentligt ellers er et diskret eksperiment og derfor umiddelbart ikke har meget med normalfordelingen at gøre. Vi kan dog forsøge at modellere gennemsnittet. Med en observation bliver gennemsnittet X_1, med to bliver det $\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)$ med tre observationer er gennemsnittet $\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)$. Det her gennemsnit vil tilnærme normalfordelingen bedre og bedre for hvert kast. Dette er altså et eksempel på den centrale grænseværdi sætning.

42 Eksponentialfordelingen

Definition 37: Eksponentialfordelingen

Lad $\lambda > 0$. En stokastisk variabel X siges at være *eksponentialfordelt* med parameter λ, hvis X har tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{for } x > 0, \text{ og } f(x) = 0, \text{ ellers}$$

Eksponentialfordelingen kan fortolkes til at angive ventetiden før en hændelse indtræffer, eksempelvis et jordskæv eller en krig.

Sætning 42.1: Fordelingsfunktionen for eksponentialfunktionen

Fordelingsfunktionen F er (for $x > 0$)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

For $x > 0$. Det ovenstående kan også blot skrives som

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ fot } x > 0.$$

Sætning 42.2: Middelværdi og varians af eksponentialfunktionen

Middelværdien af en eksponentialfordelt stokastisk variabel X er givet ved

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Og variansen af en eksponentialfordelt stokastisk variabel X er givet ved

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bevis:

Først udledes et udtryk for det n'te moment af den stokastiske variabel X. Vi ønsker altså at finde

$$E\left[X^n\right].$$

Vi kan sætte vores tæthedsfunktion ind som

$$E\left[X^n\right] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x.$$

Dette udtryk kan vi nu beregne vha. delvis integration som

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^n \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x &= \left[x^n \left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_0^b - \int_0^b n x^{n-1} \left(-e^{-\lambda x}\right) \mathrm{d}x \\
&= b^n \left(-e^{-\lambda b}\right) - 0^n \left(-e^{-\lambda 0}\right) - \int_0^b n x^{n-1} \left(-e^{-\lambda x}\right) \mathrm{d}x \\
&= b^n \left(-e^{-\lambda b}\right) + \frac{1}{\lambda} \int_0^b n x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
\implies \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x &= \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}].
\end{aligned}$$

Dette udtryk kan nu bruges til at beregne eksempelvis med $n = 1$ som

$$E[X^1] = \frac{1}{\lambda} \cdot E[X^0] = \frac{1}{\lambda}.$$

Vi kan gøre det samme med $n = 2$ som

$$E[X^2] = \frac{2}{\lambda} \cdot E[X^1] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Vi kan derfor finde udtrykket for variansen som

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er det vist

42.1 Fortolkning af eksponentialfordelingen

En stokastisk variabel X siges at være glemsom, hvis sandsynligheden for, at $X > t + s$, givet $X > t$, er den samme som den ubetingede sandsynlighed for, at $X > s$. Altså at sandsynligheden for, at der ikke sker f.eks. et uheld er ligeså stor for en tidsmængde $t + s$ som for en tidsmængde t plus en tidsmængde s.

- Eksponentialfordelingen er den eneste glemsomme fordeling.
- Eksponentialfordelingen benyttes til at modellere ventetiden på at en hændelse sker i kontinuert tid.
- Eksponentialfordelingen (kontinuert) er analog til den geometriske fordeling (diskreT).

Af det ovensteånde følger, at fordelinger, hvor X er glemsom er eksponential-fordelte.

43 Gamma fordelingen (2.6)

Definition 38: Gamma fordelingen

Lad $\alpha, \lambda > 0$. En stokastisk variabel X siges at være *gammafordelt* med parametre (a, λ), hvis X har tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \text{for} \qquad x > 0$$

hvor $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x$. Igen kan $\Gamma(\alpha)$ ikke findes analytisk. Dog kan Gamma-funktionen løses i specialtilfæde, eksempelvis hvis $\lambda = 1, 2, \dots$ er et heltal så kan integralet løses ved delvis integration hvorved løsningen bliver $(\alpha - 1)!$

43.1 Fortolkning af Gammafunktionen.

For $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ betegner gammafordelingen ventetiden på at α hændelser er indtruffet. For $\alpha = 1$ reduceres Gammafordelingen faktisk til eksponentialfordelingen

$$\text{eksponential}(\lambda) = \text{gamma}(1, \lambda).$$

Hvis X er gamma(α, λ) så er

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Gammafordelingen er den kontinuerte analog til den negative binomailfordeling

44 Fordelingen af en funktion taget på stokastiske variable

Givet

- En stokastisk variabel X med tæthed f_X.
- En funktion g.

Så ønsker vi at finde tæthedsfunktionen f_Y for den stokastiske variabel $Y = g(X)$.

44.1 Inverse funktioner

Hvis g er en kontinuert og strengt voksende/aftagende funktion, så har g en *invers funktion* g^{-1}.

For en given y-værdi er $g^{-1}(y)$ det x som opfylder at $g(x) = y$.

Eksempel 44.1: Eksempel på invers funktion

Vi ønsker at finde e^{2x}'s inverse.

Funktionen er strengt voksende og kontinuert og har derfor en invers. Vi sætter ind som:

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ y &= e^{2x} \\ \ln(y) &= 2x \\ x &= \frac{\ln(y)}{2}. \end{aligned}$$

Sætning 44.1: Transformationssætningen

Lad X betegne en stokastisk variabel med tæthedsfunktionen f_X. Lad g være strengt voksende/aftagende og differentiabel. Lad g^{-1} betegne den inverse funktion til g. Lad $R = [g(x) : x]$ være alle de punkter som g "rammer". Sæt $Y = g(x)$.
Så har Y tæthedsfunktionen f_Y, hvor for $y \in \mathbb{R}$

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right|.$$

og $f_Y(y) = 0$ for $y \notin R$

44.2 Brug af transformationssætningen

- Tjek om g er strengt voksende/aftagende
- Find g^{-1}
- Find $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}$
- Find $R = g(x) : x$
- Find f_X
- Indsæt i formlen:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right|.$$

Eksempel 44.2: Transformationssætningen på lognormal fordelingen

En stokastisk variabel Y siges at være lognormal fordelt, hvis $Y = e^x$, hvor X er normalfordelt (μ, σ^2). Dette er en vidt-brugt model inden for bl.a. finans-verdenen idet Black-sholes-modellen kommer heraf. Vi kan benytte den ovenstående sætning til at finde tæthedsfunktionen for en lognormal-fordelt stokastisk variabel.

Vi sætter

$$Y = e^x$$

hvor X er normalfordelt med $\left(\mu, \sigma^2\right)$. Dette svarer til at $g(x) = e^x$. Først findes den ikketransformerede tæthedsfunktion, f_X som egentligt blot er tæthedsfunktionen af normalfordelignen.

Altså
$$f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$
Det indses hurtigt at g er streng voksende og differentiabel og derfor opfylder betingelserne.
Vi kan nu finde R, som er alle punkterne som g rammer. Denne rammer vilkårligt små positive reele tal og op til vilkårligt store. Altså er $R = \{g(x) : x\} = \{e^x : x\} = (0, \infty)$.
Nu kan vi finde g^{-1} ved at løse
$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ e^x &= y \\ x &= \ln(y). \end{aligned}$$
Altså er $g^{-1}(y) = \ln(y)$
Nu kan vi differentiere g^{-1} som
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln(y) \\ &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$
Nu kan vi indsætte i formlen idet vi husker at vores R medfører at det nedenstående gælder for alle $y > 0$
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_x\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{-1}(y) \right| \\ &= f_X\left(\ln(y)\right) \cdot \frac{1}{y} \\ &= \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$
Og dermed er tæthedsfunktionen for den transformerede variabel fundet.

44.3 Fordelingsfunktion vs. tæthedsfunktion: Alternativ metode til at bestemme transformerede fordelingsfunktioner

Hvis X er en stokastisk variabel med tæthedsfunktion f og fordelingsfunktion F. Så gælder der at
$$f = F'$$
og
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$
Med afsæt i det ovenstående findes også en alternativ måde at bestemme f_Y, hvor $Y = g(X)$, idet man først kan finde fordelingsfunktionen F_Y for Y og dernæst finde tæthedsfunktionen f_Y via $f_Y = F'_Y$.

Eksempel 44.3: Eksempel på brug af den alternative transformation

Lad X være uniformfordelt på $(-1, 1)$. Vi ønsker da at finde tæthedsfunktionen for $Y = X^2$.

Vi kan bemærke at $g(x) = x^2$ ikke er strengt voksende/aftagende ved (0,0) og derfor kan transformationssætningen ikke benyttes. I stedet kan vi benytte den alternative metode. Fordelingsfunktionen for X f_X er kendt idet X er uniformfordelt. Vi har

$$F_X = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Dette er fordelingsfunktionen for den uniforme fordeling mellem -1 og 1.
Det første vi gør er at opskrive definitionen af fordelingsgunktionen af Y som

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right).$$

Nu har vi noget på formen $P(a \leq X \leq b)$, hvilket vi nu kan opskrive med vores fordelingsfunktion idet skarpe og bløde uligheder er ækvivalente for kontinuerte fordelinger

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Fordelingsfunktionen er kendt som $f_X = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ så vi har altså

$$F_Y(y) = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{-\sqrt{y}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{y}.$$

Nu har vi fundet fordelignsfunktionen og tæthedsfunktionen kan derfor blot findes ved differentiation som

$$\begin{aligned} f_Y &= F_Y' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$