TØ-opgaver uge 8

Noah Rahbek Bigum Hansen

29. Oktober 2024

Opg. 1

Find den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning

$$y'' + 6y' + 5y = 0.$$

Først opskrives den karakteristiske ligning for differentialligningen som så

$$r^2 + 6r + 5 = 0 \implies D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16.$$

Da diskriminanten er over 0 må løsningen være på formen

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

De to rødder til den karakteristiske ligning

$$r = \frac{-6 \pm 4}{2} = -3 \pm 2.$$

Altså er den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x}.$$

Opg. 2

Find løsningen til den homogene differentialligning

$$y'' + 6y' + 5y = 0$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 3$.

Vi har den fuldstændige løsning fra før

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x}.$$

Denne differentieres

$$y'(x) = -5C_1 e^{-5x} - C_2 e^{-x}.$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 && (1) \\ C_1 e^0 + C_2 e^0 &= 0 && (2) \\ C_1 + C_2 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned} y'(0) &= 3 && (4) \\ -5C_1 e^0 - C_2 e^0 &= 3 && (5) \\ -5C_1 - C_2 &= 3 && (6) \\ C_2 &= -3 - 5C_1 && (7) \end{aligned}$$

Ved at indsætte **Ligning 7** i **Ligning 3** fås

$$\begin{aligned} C_1 - 3 - 5C_1 &= 0 \\ 4C_1 &= -3 \\ C_1 &= -\frac{3}{4} \implies C_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dermed er den partikulære løsning

$$y(x) = -\frac{3}{4} e^{-5x} + \frac{3}{4} e^{-x}.$$

Opg. 3

Find løsningerne til den homogene differentialligning

$$y'' + 16y = 0$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 2$ og $y'(0) = -2$

Først opskrives den karakteristiske ligning som

$$r^2 + 16 = 0 \implies r^2 = -15 \implies r = \pm 4i.$$

Eftersom diskriminanten er negativ må det gælde at følgende løsning er den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{0x} \left(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) \right) \\ &= C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) \end{aligned}$$

Vi differentierer denne

$$y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x).$$

Og indsætter begyndelsesbetingelserne

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) \\ C_1 &= 2 \end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned} -2 &= -2 \cdot 4 \sin(0) + C_2 \cdot 4 \cos(0) \\ &= 4C_2 \\ C_2 &= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Altså bliver den partikulære løsning

$$y(x) = 2\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x).$$

Opg. 4

Find fuldstændig løsning til den inhomogene differentialligning

$$7y'' - y' - 2y = 20\cos(x).$$

For at finde løsningen til den inhomogene differentialligning løses først den tilsvarende homogene differentialligning så vi starter med at opskrive den karakteristiske ligning

$$7r^2 - r - 2 = 0.$$

Diskriminanten findes

$$D = 1 - 4 \cdot 7 \cdot (-2) = 57.$$

Altså har vi en positiv diskriminant og derfor må løsningen være på formen

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Vi finder den karakteristiske lignings rødder

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{14}.$$

Altså har vi

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1+\sqrt{57}}{14}x} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{57}}{14}x}.$$

Vi benytter *ubestemte koefficienters metode* så dermed har vi at vores 'gæt' på en partikulær løsning skal være på formen

$$\begin{aligned} y_p &= A\cos(x) + B\sin(x) \\ y_p' &= -A\sin(x) + B\cos(x) \\ y_p'' &= -A\cos(x) - B\sin(x) \end{aligned}$$

Vi indsætter dette i vores differentialligning

$$\begin{aligned} 20\cos(x) &= 7\left(-A\cos(x) - B\sin(x)\right) - \left(-A\sin(x) + B\cos(x)\right) - 2\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \\ &= -7A\cos(x) - 7B\sin(x) + A\sin(x) - B\cos(x) - 2A\cos(x) - 2B\sin(x) \\ &= -9A\cos(x) - 9B\sin(x) + A\sin(x) - B\cos(x) \\ &= \cos(x)\left(-9A - B\right) + \sin(x)\left(-9B + A\right) \end{aligned}$$

Vi har dermed to ligninger med to ubekendte som løses ved

$$\begin{aligned} 0 &= -9B + A & 20 &= -9A - B \\ A &= 9B & 20 &= -81B - B \\ A &= 9 \cdot \left(-\frac{10}{41}\right) & 20 &= -82B \\ A &= -\frac{90}{41} & B &= -\frac{20}{82} = -\frac{10}{41} \end{aligned}$$

Altså har vi at løsningen til differentialligningen er

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{hom} + y_p \\ &= C_1 e^{\frac{1+\sqrt{57}}{14}} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{57}}{14}} - \frac{90}{41}\cos(x) - \frac{10}{41}\sin(x) \end{aligned}$$

Opg. 5

Find fuldstændig løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' - y = e^x + x^2.$$

Den karakteristiske ligning opskrives for den tilsvarende homogene differentialligning

$$r^2 - 1 = 0 \implies r = \pm 1.$$

Den komplementære løsning er altså

$$y_c(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Vi benytter *ubestemte koefficienters metode* og gætter på en løsning på formen

$$\begin{aligned} y_p &= Axe^x + Bx^2 + Cx + D \\ y_p' &= Axe^x + Ae^x + 2Bx + C \\ y_p'' &= Axe^x + 2Ae^x + 2B \end{aligned}$$

Vi indsætter dette i differentialligningen

$$\begin{aligned} e^x + x^2 &= Axe^x + 2Ae^x + 2B - Axe^x - Bx^2 - Cx - D \\ &= 2Ae^x + 2B - Bx^2 - Cx - D \end{aligned}$$

Vi løser for de ubekendte

$$\begin{aligned} 1 &= 2A & &\iff & A &= \frac{1}{2} \\ 1 &= -B & &\iff & B &= -1 \\ 0 &= C & &\iff & C &= 0 \\ 0 &= 2B - D = -2 - D & &\iff & D &= -2 \end{aligned}$$

Altså bliver den løsningen

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - x^2 + 2.$$

Opg. 6

Find løsningen til den inhomogene differentialligning

$$y'' + y = e^{2x}$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = \frac{2}{5}$

Vi løser den karakteristiske ligning

$$r^2 + 1 = 0 \implies r = \pm i.$$

Dette giver den komplementære løsning

$$y_c(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Vha. *ubestemte koefficienters metode* gætter vi på at den partikulære løsning er på formen

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^{2x} \\ y_p' &= 2Ae^{2x} \\ y_p'' &= 4Ae^{2x} \end{aligned}$$

Vi indsætter dette i differentialligningen

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 4Ae^{2x} + Ae^{2x} \\ \implies A &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Den generelle løsning er altså

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{1}{5}e^{2x}.$$

Denne differentieres til

$$y'(x) = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + \frac{2}{5}e^{2x}.$$

Vi indsætter begyndelsesbetingelserne

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + \frac{1}{5} & &\implies & C_1 &= -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} &= C_2 + \frac{2}{5} & &\implies & C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Altså er løsningen

$$y(x) = -\frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x}.$$

Prøveeksamensspørgsmål 13

Bestem løsning til følgende homogene differentialligning med begyndelsesbetingelser

$$2y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = 2.$$

For et tal a er løsningen:

$$y(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x}\left(a \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right) + \cos\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Svaret er et helt tal mellem 0 og 99.

Den karakteristiske ligning opskrives

$$2r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Løsningerne findes

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 2i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Altså bliver løsningen

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(-\frac{1}{2}x\right).$$

Altså må a være 2.

Prøveeksamensspørgsmål 14

Bestem løsning til følgende inhomogene differentialligning med begyndelsesbetingelser

$$y'' - 2y' + y = e^x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2.$$

Løsningen er

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + Px + 1\right)e^x.$$

For et helt tal $0 < P < 99$

Den karakteristiske ligning opskrives

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Dennes løsninger findes

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1.$$

Altså er den fuldstændige løsning

$$y(x) = C_1 x e^x + C_2 e^x.$$

Vores løsningsgæt er

$$\begin{aligned}
y_p &= Ax^2e^x \\
y_p' &= Axe^x + Ax^2e^x \\
y_p'' &= 2Ax^2e^x + 2Ae^x + Ax^2e^x + 2Axe^x = 4Axe^x + 2Ae^x + Ax^2e^x
\end{aligned}$$

Dette indsættes i differentialligningen

$$\begin{aligned}
e^x &= 4Axe^x + 2Ae^x + Ax^2e^x - 4Axe^x - 2Ax^2e^x + Ax^2e^x \\
&= 2Ax^2e^x \\
\implies A &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dette indsættes og vi får at

$$y(x) = \left(C_1 x + C_2 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x.$$

Altså har vi

$$y'(x) = \left(C_1 x + C_2 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x + \left(C_1 + x\right)e^x.$$

Vi indsætter begyndelsesbetingelserne

$$\begin{aligned}
1 &= C_2 \\
2 &= 1 + C_1 \implies C_1 = 1
\end{aligned}$$

Altså er vores partikulære løsning

$$y(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x.$$

Svaret må altså være $P = 1$