TØ-opgaver uge 10

Noah Rahbek Bigum Hansen

12. November 2024

Opg. 9.6.1

Evaluate the integral

$$\int_0^5 \left(x^4 y + y\right)\,\mathrm{d}x.$$

Vi integrerer som normalt dog med y holdt konstant så

$$\begin{aligned}\int_0^5 x^4 y + y\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{5}x^5 y + yx\right]_0^5 \\ &= 630y.\end{aligned}$$

Opg. 9.6.11

Evaluate the integral

$$\int_1^5 \int_0^3 \left(x^2 y + 5y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Først beregnes det inderste integral så

$$\begin{aligned}\int_0^3 x^2 y + 5y\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 y + 5yx\right]_0^3 \\ &= 24y.\end{aligned}$$

Og slutteligt kan det yderste integral beregnes som

$$\begin{aligned}\int_1^5 24y\,\mathrm{d}y &= \left[12y^2\right]_1^5 \\ &= 12 \cdot 5^2 - 12 \cdot 1^2 \\ &= 12 \cdot (5^2 - 1^2) \\ &= 288.\end{aligned}$$

Prøveeksamensopgave 19

Udregn planintegralet

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{k}$$

hvor k er et helt tal mellem 0 og 99.

Først beregnes det inderste integrale som

$$\begin{aligned} \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

Og dernæst det yderste integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2}y \, \mathrm{d}y &= \left[\frac{1}{4}y^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Altså er $k = 4$

Opg. 9.6.33

Evaluate the integral

$$z = x\sqrt{x^2 + y}; \qquad 0 \leq x \leq 1; \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

Først opskrives integralet fra opgaven

$$\int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{x^2 + y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Vi benytter kædereglen og sætter $u = x^2 + y \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \implies \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$ Den nye øvre grænse bliver da

$$u_{vre} = 1^2 + y = y + 1.$$

Og den nedre bliver

$$u_{nedre} = 0^2 + y = y.$$

Så vi får altså at

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_y^{y+1} \sqrt{u} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{6} \int_0^1 \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_y^{y+1} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (y+1)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \cdot \left[(1+y)^{\frac{5}{2}} - y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \right) \\
&= \frac{2}{15} \left(2^{\frac{5}{2}} - 1 - 1^{\frac{5}{2}} \right) \\
&= \frac{2}{15} \left(2^{\frac{5}{2}} - 2 \right).
\end{aligned}$$

Opg. 9.6.37

Evaluate the integral

$$\iint_R x e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y; \quad 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Først opskrives integralet

$$\int_0^2 \int_0^1 x e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Vi starter med at løse det inderste integrale så

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x e^{xy} \, \mathrm{d}y &= x \int_0^1 e^{xy} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^x e^u \, \mathrm{d}u \\
&= \left[e^u \right]_0^x \\
&= e^x - e^0.
\end{aligned}$$

Og dermed kan det sidste integrale løses

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x - e^0 \, \mathrm{d}x &= \left[e^x - x \right]_0^2 \\
&= e^2 - 2 - e^0 \\
&= e^2 - 3.
\end{aligned}$$

Prøveeksamensopgave 20

Udregn planintegralet

$$\int_0^1 \int_y^{2y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5}{k}$$

hvor k er et helt tal mellem 0 og 99.

Først beregnes det inderste integrale som

$$\begin{aligned}\int_y^{2y} x+y\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2 + yx\right]_y^{2y} \\ &= \frac{1}{2}\left(4y^2 - y^2\right) + y\left(2y - y\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{2}y^2 + y^2 \\ &= \frac{5}{2}y^2.\end{aligned}$$

Og slutteligt løses det yderste integrale som

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{5}{2}y^2\,\mathrm{d}y &= \left[\frac{5}{6}y^3\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6}\cdot 1^3 - \frac{5}{6}\cdot 0^3 \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Altså er $k = 6$

Opg. 9.6.50

Evaluate the integral

$$\iint_R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x; \qquad 1 \le x \le 2; \qquad 0 \le y \le x - 1.$$

Planintegralet opstilles som

$$\int_1^2 \int_0^{x-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Vi løser først det inderste integrale som

$$\begin{aligned}\int_0^{x-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y &= \left[\frac{y}{x}\right]_0^{x-1} \\ &= \frac{x-1}{x} - \frac{0}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Og dermed kan det yderste integrale løses som

$$\begin{aligned}\int_1^2 1 - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [x - \ln(x)]_1^2 \\ &= 2 - \ln(2) - 1 + \ln(1) \\ &= 1 - \ln(2).\end{aligned}$$

Opg. 9.6.54

Evaluate the integral

$$\iint_R x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; R \text{ bounded by } y = x; y = 2x, x = 1.$$

Vi evaluerer ift. y først, da y skal være begrænset af x og x af konstanter. Vi har dermed

$$x \leq y \leq 2x$$

og

$$0 \leq x \leq 1.$$

Vi kan dermed opskrive planintegralet som

$$\int_0^1 \int_x^{2x} x^2y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Først løses det inderste integrale som

$$\begin{aligned}x^2\int_x^{2x} y^2\,\mathrm{d}y &= x^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[y^3\right]_x^{2x} \\ &= \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \left((2x)^3 - x^3\right).\end{aligned}$$

Og vi kan dermed beregne det inderste integrale som

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left(8x^3 - x^3\right) &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 \cdot 7x^3 \\ &= \frac{7}{3}\int_0^1 x^5 \\ &= \frac{7}{18}[x^6]_0^1 \\ &= \frac{7}{18}.\end{aligned}$$

Opg. 9.6.69

Average revenue. A company sells two products. The demand functions of the products are given by

$$q_1 = 300 - 2p_1 \qquad \text{and} \qquad q2 = 500 - 1{,}2p_2,$$

where q_1 units of the first product are demanded at price p_1 and q_2 units of the second product are demanded at price p_2. The total revenue will be given by

$$R = q_1 p_1 + q_2 p_2.$$

Find the average revenue if the price p_1 varies from 25 to 50 and the price p_2 vares from 50 to 75. (*Hint:* Refer to Exercises 61-64.)

Vi indsætter udtrykkene for q_1 og q_2 i udtrykket for R så vi får at

$$R = (300 - 2p_1)p_1 + (500 - 1{,}2p_2)p_2 = 300p_1 - 2p_1^2 + 500p_2 - 1{,}2p_2^2.$$

Og grænserne fra opgaven er $25 \leq p_1 \leq 50$ og $50 \leq p_2 \leq 75$. Gennemsnitsindtjeningen $\overline{r}$ er defineret som den totale indtjening (overfladeintegralet) divideret med integrationsarealet R så vi har at:

$$\overline{r} = \frac{1}{(50-25)(75-50)} \int_{25}^{50} \int_{50}^{75} R \, \mathrm{d}p_2 \, \mathrm{d}p_1.$$

Først løses det inderste integrale som

$$\begin{aligned}\int_{50}^{75} 300p_1 - 2p_1^2 + 500p_2 - 1{,}2p_2^2 \, \mathrm{d}p_2 &= \left[300p_1p_2 - 2p_1^2p_2 + \frac{500}{2}p_2^2 - 1{,}2 \cdot \frac{1}{3}p_2^3\right]_{50}^{75} \\ &= 7500p_1 - 50p_1^2 + 6{,}625 \cdot 10^5.\end{aligned}$$

Og dermed kan det yderste integrale beregnes som

$$\frac{1}{625} \int_{25}^{50} \left(7500p_1 - 50p_1^2 + 6{,}625 \cdot 10^5\right) \, \mathrm{d}p_1 = 34\,833.$$

Altså er gennemsnitsindtjeningen \$ 34 833.