TØ-opgaver uge 5

Noah Rahbek Bigum Hansen

26. september - 2025

Opg. 1

Afgør om talfølgen $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ konvergerer eller divergerer. I tilfælde af konvergens, find grænseværdien.

Idet det gælder at:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

For $a_n \to a$ og $b_n \to b$. Kan vi starte med undersøge den første parentes. Her har vi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Og for den anden parentes har vi:

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

Altså har vi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Opg. 2

Afgør om talfølgen $a_n = n - \frac{1}{n}$ er monoton (voksende eller aftagende), om den er begrænset og om den konvergerer.

Det kan hurtigt ses at vi ved at indsætte en større n-værdi altid får et større tal da første led stiger med mindst 1 pr. n-værdi og 2.-led maksimalt trækker 1 fra (dog i praksis noget mindre end 1 for selv relativt lave n-værdier). Dette betyder altså at a_n er strengt voksende den er dog ikke begrænset med samme argument som ovenfor og den konvergerer derfor ikke.

Opg. 3

Afgør om talfølgen $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ er monoton (voksende eller aftagende), om den er begrænset og om den konvergerer.

Denne splittes op:

$$a_n = \frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

Og her har vi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1$$

Og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Og altså:

$$a = 1 - 0 = 1.$$

Dette er både den laveste øvre grænse og den værdi som den strengt voksende talfølge konvergerer mod.

Opg. 4

Bestem værdien af rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{5^n}$. *Hint: overvej først hvilke værdier* $\cos(\pi n)$ *tager.*

De første værdier af rækken opskrives:

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{\cos(0)}{5^0} = \frac{1}{1} \\ s_1 &= \frac{\cos(\pi)}{5} = -\frac{1}{5} \\ s_2 &= \frac{\cos(2\pi)}{5^2} = \frac{1}{25} \\ s_3 &= \frac{\cos(3\pi)}{5^3} = -\frac{1}{125} \\ s_4 &= \frac{\cos(4\pi)}{5^4} = \frac{1}{625}. \end{aligned}$$

Det indses hurtigt at rækken er absolut konvergent da den i så fald ville aftage hurtigere end eksempelvis $\frac{1}{n^2}$ som er kendt som konvergent. Rækken kan omskrives til:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Hvilket hurtigt kan ses værende en geometrisk række med $z = \frac{1}{5}$. Altså har vi løsningssummen som:

$$s = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Altså konvergerer summen til værdien $\frac{5}{6}$.

Opg. 5

Brug sammenligningskriteriet til at afgøre om rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ konvergerer eller divergerer.

For hver n-værdi vil rækken i opgaven antage en større værdi end rækken $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Da $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ og eksponenten til n derfor er mindre end 1 vil $\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergere og da rækken i opgaven er større til alle n-værdier vil denne også divergere.

Opg. 6

Brug kvotientkriteriet til at afgøre om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergerer eller divergerer.

Kvotientkriteriet siger at hvis der gælder:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = R.$$

Udtrykket indsættes:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Altså konvergerer udtrykket

Opg. 7

Brug kvotientkriteriet til at afgøre om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}n}$ konvergerer eller divergerer.

Samme fremgangsmåde som ovenfor benyttes:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2} \cdot 3^{n-1}n}{3^n n \cdot 2^{n+1}} = \frac{2}{3}.$$

Da $\frac{2}{3} < 1$ har vi altså at serien konvergerer.

Prøveeksamenssættet opg. 7

Bestem summen af følgende uendelige række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{6^n}.$$

Dit svar skal være et helt tal mellem 0 og 99.

Det indses hurtigt at summen kan skrives som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Hvilket er en geometrisk række med $a = 0$ og $z = \frac{5}{6}$. Altså konvergerer denne til:

$$\frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6.$$

Prøveeksamenssættet opg. 8

Bestem grænseværdien:

$$\lim_{n\to\infty} \left[-76e^{\frac{5}{n}} \sin\left(\frac{2n\pi}{n+2}\right) + 47\left(e^{\frac{2n}{n^2+1}} - \cos\left(\pi - \frac{4}{n}\right)\right)\right].$$

Dit svar skal være et helt tal mellem 0 og 99.

Først iagttages 1.-leddet:

$$\lim_{n\to\infty} -76e^{\frac{5}{n}} \sin\left(\frac{2n\pi}{n+2}\right).$$

Her betragtes først den første del af produktet:

$$\lim_{n\to\infty} -76e^{\frac{5}{n}} = -76e^{\frac{5}{\infty}} = -76.$$

Den anden del af produktet kan skrives som:

$$\sin\left(2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}\right) = \sin(2\pi) = 0.$$

Altså bliver første led:

$$\lim_{n\to\infty} -76e^{\frac{5}{n}} \sin\left(\frac{2n\pi}{n+2}\right) = -76 \cdot 0 = 0.$$

Vi kan