TØ-opgaver uge 6

Noah Rahbek Bigum Hansen

5. Oktober 2024

Opg. 1

Bestem konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$.

Det vides at konvergensradiussen kan findes med kvotientkriteriet

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Skrives udtrykket fra opgave på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} x^n.$$

Bliver det tydeligt at $c_n = \frac{n}{n+2}$. Altså har vi at

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+3)}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n^2+3n+2} = 1.$$

Opg. 2

Bestem konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5}$

Først omskrives rækken så vi får at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5}(x+3)^n.$$

Derfor har vi at

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot 5^{n+1}}{5^n \cdot (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1} = 5.$$

Opg. 3

Bestem 0., 1., 2. og 3.-grads Taylorpolynomier for $f(x) = \ln(x)$ med udviklingspunkt $a = 1$.

Taylorpolynomier dannes ud fra Taylorserien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Af udtrykket for en Taylorserie ses at vi skal have fundet de første tre afledede af funktionen $f(x) = \ln x$. Altså differentierer vi funktionen f tre gange.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$
$$.$$

Disse evalueres dernæst alle ved udviklingspunktet $a = 1$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ f^{(2)}(1) &= -\frac{1}{1^2} = -1 \\ f^{(3)}(1) &= \frac{2}{1^3} = 2 \end{aligned}$$
$$.$$

Dernæst kan Taylorpolynomierne opskrives.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{\ln(1)}{0!}(x-1)^0 = \ln(1) = 0 \\ P_1(x) &= P_0(x) + \frac{1}{1!}(x-1)^1 = x - 1 \\ P_2(x) &= P_1(x) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ P_3(x) &= P_2(x) + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$
$$.$$

Opg. 4

Bestem 0., 1., 2. og 3.-grads Taylorpolynomier for $f(x) = \sqrt{x}$ med udviklingspunkt $a = 4$.

Med samme fremgangsmåde som ovenfor starter vi med at differentiere funktionen f tre gange. Altså har vi at

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}
\end{aligned}
.
$$

Disse evalueres i udviklingspunktet $a = 4$

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(4) &= \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \\
f^{(2)}(4) &= -\frac{1}{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}} = -\frac{1}{32} \\
f^{3}(4) &= \frac{3}{8 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{3}{256}
\end{aligned}
.
$$

Slutteligt kan taylorpolynomierne opskrives

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= \frac{\sqrt{4}}{0!}(x-4)^0 = 2 \\
P_1(x) &= P_0 + \frac{1}{4 \cdot 1!}(x-4)^1 = 2 + \frac{1}{4}(x-4) \\
P_2(x) &= P_1 - \frac{1}{32 \cdot 2!}(x-4)^2 = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 \\
P_3(x) &= P_2 + \frac{3}{256 \cdot 3!}(x-4)^3 = 2 + \frac{1}{2}(x_4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3
\end{aligned}
.
$$

Opg. 5

Bestem Taylorrækken for $\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ med udviklingspunkt $a = 0$. *Hint:* kan viden om Taylorrækken for e^x med fordel anvendes her?

Først findes Taylorrækken for e^x, hvorefter de andre nemt kan findes. Bemærk at der for e^x gælder at

$$f(x) = e^x = f^n(x).$$

Og dermed at

$$f^n(0) = e^0 = 1.$$

Altså har vi at

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Dermed kan e^{-x} hurtigt findes

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Altså har vi at taylorrækken for $e^x + e^{-x}$ er

$$e^x+e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k+(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k+(-1)^k(x^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\left(1+(-1)^k\right)}{k!}.$$

For ulige k bliver $\left(1+(-1)^k\right) = 0$ og for lige k bliver $\left(1+(-1)^k\right) = 2$. Altså har vi at

$$e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}.$$

Vi multiplicerer slutteligt med $\frac{1}{2}$ for at få det rigtige svar.

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Opg. 6

Bestem Taylorrækken for $f(x) = \frac{1}{x^2}$ med udviklingspunkt $a = 1$.

Generelt er en Taylorrække defineret som

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Vi differentierer funktionen et par gange og leder efter et mønster

$$\begin{aligned}
f^{(0)} &= \frac{1}{x^2} \\
f^{(1)} &= -\frac{2}{x^3} \\
f^{(2)} &= \frac{3\cdot 2}{x^4} \\
f^{(3)} &= -\frac{4\cdot 3\cdot 2}{x^5} \\
&.
\end{aligned}$$

Her kan indses at der er et mønster givet ved

$$f^{(n)} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Dermed kan et generelt udtryk for Taylorrækken med et vilkårligt udviklingspunkt, a, opskrives som

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{(k+1)!}{a^{k+2}}}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{a^{k+2}}(x-a)^k.$$

Her kan udviklingspunktet a nu indsættes

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{1^{k+2}}(x-1)^k = (-1)^k(k+1)(x-1)^k.$$

Prøveeksamensopgave 9

For potensrækken

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n+1}}(x-6)^n.$$

Bestem dens konvergensradius R.

Her benyttes kvotientreglen som så

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 \cdot 5^{n+2}}{5^{n+1}(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5n^2}{(n+1)^2}\right| = 5.$$

Prøveeksamensopgave 10

For funktionen

$$f(x) = e^{2x}.$$

bestem andengrads Taylorpolynomiet for f med udviklingspunkt $a = 1$.

Først differentieres funktionen 2 gange.

$$f^{(1)}(x) = 2e^{2x}$$
$$f^{(2)}(x) = 4e^{2x}$$
$$.$$

Dernæst kan disse to evalueres for $x = 1$, hvilket giver at

$$f^{(1)}(x) = 2e^2$$
$$f^{(2)}(x) = 4e^4$$
$$.$$

Altså må 2.-ordens Taylorpolynomiet for e^{2x} med udviklingspunkt $a = 1$ være

$$P_2(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2.$$