

Afleveringsopgave uge 11

Noah Rahbek Bigum Hansen

12. November 2024

Opg. 6

Betragt differentialligningen

$$y' = \sin(y) \tag{1}$$

1.

Er differentialligningen (1) lineær?

Idet differentialligningen ikke er en linearkombination af y og y 's afledede er differentialligningen (1) ikke lineær.

2.

Benyt Python til at løse differentialligningen 1 (numerisk) og plot din løsning med begyndelsesbetingelse $y(0) = 0$.

Følgende prompt er givet til ChatGPT 4o:

Write some python code that solves the differential equation $y' = \sin(y)$ for $y(0) = 0$ and plots the solution function

ChatGPT gav da følgende python-kode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Define the differential equation y' = sin(y)
def dydt(t, y):
    return np.sin(y)

# Initial condition y(0) = 0
```

```
y0 = [0]

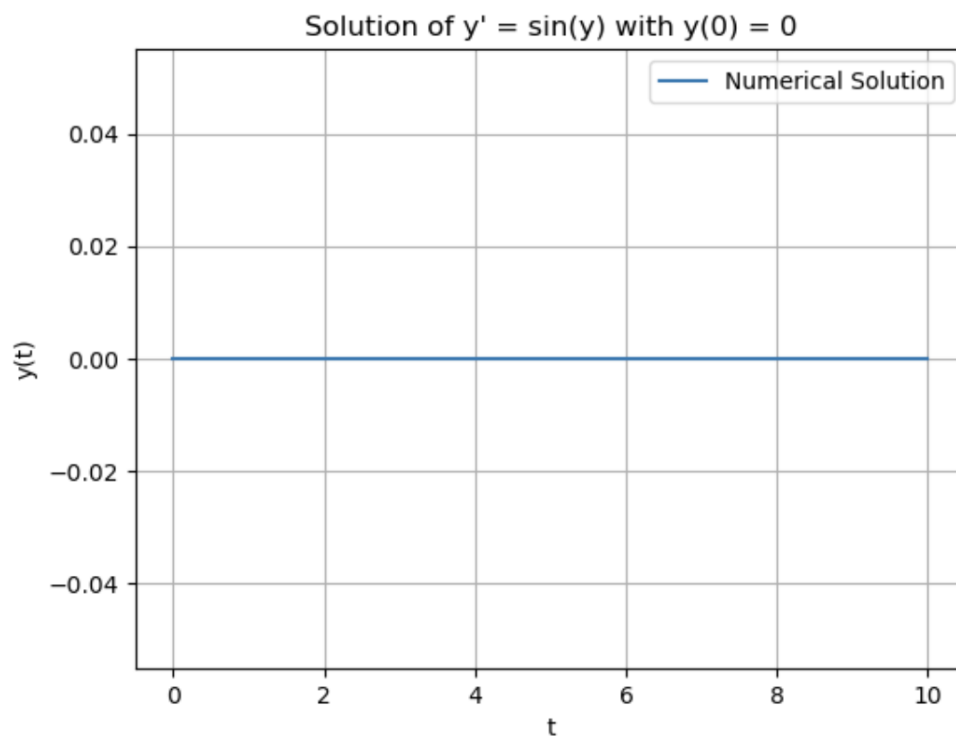
# Time span for the solution
t_span = (0, 10)
t_eval = np.linspace(0, 10, 1000)

# Solve the differential equation numerically
solution = solve_ivp(dydt, t_span, y0, t_eval=t_eval)

# Plot the numerical solution
plt.plot(solution.t, solution.y[0], label="Numerical Solution")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y(t)")
plt.title("Solution of y' = sin(y) with y(0) = 0")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Hvilket giver følgende plot når koden køres

Figur 1: Resultat af python koden hvor løsningen til $y' = \sin(y)$; $y(0) = 0$ plottes



Altså ses at løsningen til differentiallingen med den givne begyndelsesbetingelse er $y(t) = 0$, hvilket hurtigt kan ses er en korrekt løsning.

3.

Benyt Python til at løse differentialligningen 1 (numerisk) og plot din løsning med begyndelsesbetingelse $y(0) = 1$. Sammenlign med resultatet fra punkt 2. Har startbetingelsen betydning for løsningen?

Ved at ændre vores *initial condition*, y_0 i koden fra $[0]$ til $[1]$ og ellers opdaterer de andre steder hvor $y(0) = 0$ er brugt til $y(0) = 1$ kan vi omskrive Python-koden fra før til

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Define the differential equation  $y' = \sin(y)$ 
def dydt(t, y):
    return np.sin(y)

# Initial condition  $y(0) = 1$ 
y0 = [1]

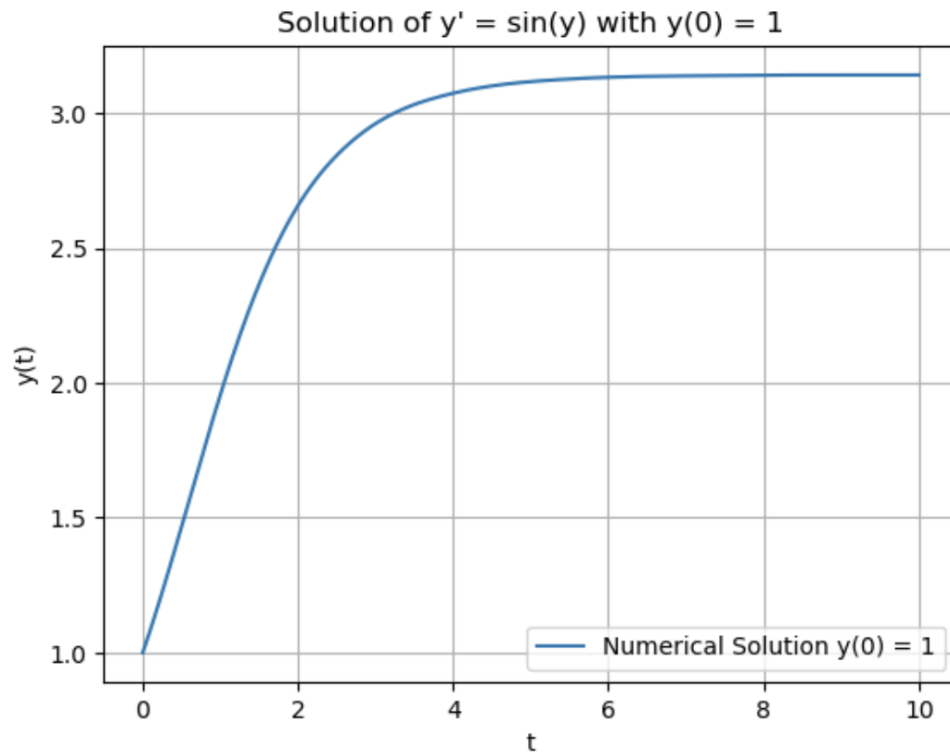
# Time span for the solution
t_span = (0, 10)
t_eval = np.linspace(0, 10, 1000)

# Solve the differential equation numerically
solution = solve_ivp(dydt, t_span, y0, t_eval=t_eval)

# Plot the numerical solution
plt.plot(solution.t, solution.y[0], label="Numerical Solution  $y(0) = 1$ ")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y(t)")
plt.title("Solution of  $y' = \sin(y)$  with  $y(0) = 1$ ")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Når denne kode køres fås følgende plot

Figur 2: Resultat af python koden hvor løsningen til $y' = \sin(y)$; $y(0) = 1$ plottes



Ved sammenligning af Figur 1 og Figur 2 kan ses at løsningen afhænger af bgyndelsesbetingelserne.

Opg. 7

Lad $f(x, y)$ betegne funktionen

$$f(x, y) = \sin(3y)e^{7x}.$$

1.

Udregn $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ved hjælp af Python

Følgende prompt er givet til ChatGPT 4o:

Write some python code to calculate the pratial derivative with respect to x of the partial derivative with respect to y of $\sin(3y)e^{7x}$

ChatGPT gav da følgende python-kode:

```

import sympy as sp

# Define the variables
x, y = sp.symbols('x y')

# Define the function
f = sp.sin(3*y) * sp.exp(7*x)

# Calculate the partial derivative with respect to y
partial_y = sp.diff(f, y)

# Calculate the partial derivative with respect to x of the result
partial_x = sp.diff(partial_y, x)

# Display the result
print("Partial derivative with respect to y:", partial_y)
print("Partial derivative with respect to x of the above result:",
      partial_x)

```

Hvilket giver følgende resultat når koden køres

Partial derivative with respect to y: $3 \cdot \exp(7x) \cdot \cos(3y)$

Partial derivative with respect to x of the above result: $21 \cdot \exp(7x) \cdot \cos(3y)$

Altså er løsningen fundet vha. Python

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin(3y) e^{7x} = 21 e^{7x} \cdot \cos(3y).$$

2.

Udregn $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ved at benytte matematik. Får du det samme resultat.

Først findes den afledede med hensyn til y så vi har at

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \sin(3y) e^{7x} &= e^{7x} \frac{\partial}{\partial y} \sin(3y) \\ &= 3 e^{7x} \cos(3y). \end{aligned}$$

Og dernæst kan vi finde den afledede af dette resultat mht. x som

$$\begin{aligned} 3 \cos(3y) \frac{\partial}{\partial x} e^{7x} &= 3 \cos(3y) \cdot 7 e^{7x} \\ &= 21 e^{7x} \cos(3y). \end{aligned}$$

Altså er løsningen fundet i hånden den samme so løsningen fundet vha. Python.