=1

TØ-opgaver uge 7

Noah Rahbek Bigum Hansen

13. Oktober 2024

Opg. 10.1.2

Find the general solution for each differential equation. Verify that each solution satisfies the original differential equation.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x + 12x^2.$$

Differentialligningen separeres så vi får at

$$\mathrm{d}y = -4x + 12x^2 \,\mathrm{d}x \implies \int \mathrm{d}y = \int -4x + 12x^2 \,\mathrm{d}x.$$

Altså får vi at

$$y(x) = -2x^2 + 4x^3 + c.$$

Det indses at ovenstående er korrekt ved indsættelse i det oprindelige udtryk og at differentialligningen derfor må være korrekt løst.

Opg. 10.1.9

Find the general solution for each differential equation. Verify that each solution satisfies the original differential equation.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8x^2y - 9xy.$$

Først omskrives som

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\left(8x^2 - 9x\right) \implies \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 8x^2 - 9x \,\mathrm{d}x.$$

Dermed får vi at

$$\ln(y) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + c \implies y = ke^{\frac{8}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2}.$$

Opg. 10.1.21

Find the particular solution for each initial value problem.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5x^3}{4y}; \qquad y(0) = 2.$$

Først separeres differentialligningen så vi får at

$$\int y \, \mathrm{d}y = \int \frac{5}{4}x^3 \, \mathrm{d}x \implies \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{16}x^4 + c.$$

Og dermed har vi at

$$y^2 = \frac{5}{8}x^4 + 2c.$$

Hvilket giver os at

$$y = \sqrt{\frac{5}{8}x^4 + 2c}.$$

Opg. 10.2.3

Find the general solution for each differential equation.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 16x.$$

Vi omskriver så vi får at

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x(y-8).$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{1}{y-8} \, \mathrm{d}y = \int -2x \, \mathrm{d}x.$$

Hvilket giver

$$\ln(y-8) = -x^2 + c \implies y - 8 = e^{-x^2+c} \implies y = ke^{-x^2} + 8.$$

Opg. 10.2.6

Find the general solution for each differential equation.

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy - x^2 = 0.$$

Ved at addere med x^2 og dividere med x kan omskrives så

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = x.$$

Det indses at dette er en 1.-ordens lineær inhomogen differentialligning. Standardløsningen for denne er

$$y = \frac{1}{v(x)} \left(\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + C \right),$$

for

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$
$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

Vi indsætter

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2\,\mathrm{d}x} \left(\int e^{\int 2\,\mathrm{d}x} x\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\int e^{2x} x\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{1}{2} \int e^{2x}\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{1}{4} e^{2x} + C \right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + e^{-2x} C \end{aligned}$$

Opg. 10.2.20

Solve each differential equation, subject to the given initial conditions.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2 y - 2xe^{-x^3} = 0; \qquad y(0) = 1000.$$

Der omskrives til standardform

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2 y = 2xe^{-x^3}.$$

Indsætter i standardløsning

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3x^2\,\mathrm{d}x} \left(\int e^{\int 3x^2\,\mathrm{d}x} 2xe^{-x^3}\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= e^{-x^3} \left(\int e^{x^3} 2xe^{-x^3} + C \right) \\ &= e^{-x^3} \left(\int 2x\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= e^{-x^3} \left(x^2 + C \right) \end{aligned}$$

.

Vi indsætter begyndelsesbetingelsen

$$1000 = e^{-0^3}\left(0^2 + C\right) = 1\,(C) = C.$$

Altså er den partikulære løsning

$$y = e^{-x^3}\left(x^2 + 1000\right).$$

Prøveeksamensopgave 11

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = x; \qquad x > 0.$$

Det er funktioner på følgende form (hvor C er en konstant)

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{?}.$$

Dit svar skal være et helt tal mellem 0 og 99.

Differentialligningen er allerede skrevet på standardform og kan derfor sættes direkte ind i standardløsningen så vi får at

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} x\,\mathrm{d}x + C\right)\\
&= \frac{1}{|x|}\left(\int |x| x\,\mathrm{d}x + C\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(\int x^2\,\mathrm{d}x + C\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\\
&= \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

.

Altså er svaret 3.

Prøveeksamensopgave 12

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy^2}{8}.$$

Det er funktioner på følgende form (hvor K er en konstant):

$$y(x) = \frac{-?}{K + x^2},$$

defineret på et interval så nævneren er forskellig fra nul. Dit svar skal være et helt tal mellem 0 og 99.

Differentialligningen er seperabel idet følgende omskrivning kan udføres

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}x\,\mathrm{d}x.$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{8}x\,\mathrm{d}x \implies -\frac{1}{y} = \frac{1}{16}x^2 + C.$$

Dermed fås at

$$y = -\frac{16}{x^2 + K}.$$

Altså er svaret 16.