Afleveringsopgave 8

Noah Rahbek Bigum Hansen

29. Oktober 2024

Find fuldstændig løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' - y' - 6y = e^{-x} - 7\cos(x).$$

Først opskrives den karakteristiske ligning for den komplementære homogene differentialligning

$$r^2 - r - 6 = 0.$$

Denne 2.-gradsligning løses vha. løsningsformlen

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = 0{,}5 \pm 2{,}5.$$

Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning bliver derfor

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Idet at løsningen til en inhomogen 2. ordens differentialligning er summen af den ovenstående komplementære løsning og en partikulær løsning for den inhomogene 2. ordens differentialligning er vi nu nødt til at finde den føromtalte partikulære løsning. Dette gøres vha. *ubestemte koefficienters metode*. Grundet udtrykket på højresiden af differentialligningen 'gætter' vi på at vores partikulære løsning skal være på formen

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^{-x} + B\cos(x) + C\sin(x) \\ y_p' &= -Ae^{-x} - B\sin(x) + C\cos(x) \\ y_p'' &= Ae^{-x} - B\cos(x) - C\sin(x) \end{aligned}$$

Vi indsætter dette i differentialligningen

$$\begin{aligned} e^{-x} - 7\cos(x) =& Ae^{-x} - B\cos(x) - C\sin(x) + Ae^{-x} + B\sin(x) - C\cos(x) \\ & - 6Ae^{-x} - 6B\cos(x) - 6C\sin(x) \\ =& -4Ae^{-x} + \cos(x)(-7B - C) + \sin(x)(-7C + B) \end{aligned}$$

Dermed har vi tre ligninger med tre ubekendte som løses

$$
\begin{aligned}
-4A &= 1 && \implies && A = -\frac{1}{4} \\
-7B - C &= -7 && \implies && C = 7 - 7B = 7 - 7\left(\frac{49}{50}\right) = \frac{7}{50} \\
-7\left(7 - 7B\right) + B &= 0 && \implies && B = \frac{49}{50}
\end{aligned}
$$

Dermed bliver den fuldstændige løsning

$$
y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{7}{50}\sin\left(x\right) + \frac{49}{50}\cos\left(x\right).
$$