Fysik og Mekanik

Noah Rahbek Bigum Hansen

2. december 2024

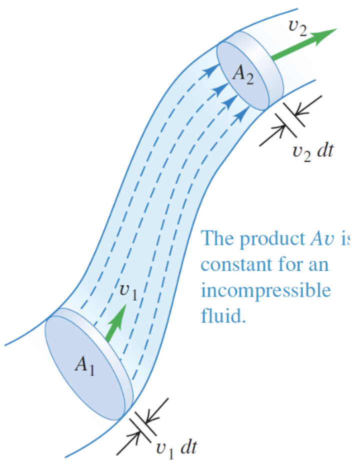
Indhold

Lecture 24: Fluiddynamik

21. November 2024

Sidst blev der arbejdet med stillestående væsker. I dag udvider vi dette til også at inkludere en hastighed.

Figur 1: Tegning af en inkompressibel væske i bevægelse fra bogen.



Vi antager, at alle væsker vi kommer til at arbejde med i det følgende er inkopressible. På **Figur 1** ses en inkompressibel væske i bevægelse. Idet væsken er inkompressibel gælder følgende

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}m_1 &= \mathrm{d}m_2 \\
\rho\,\mathrm{d}V_1 &= \rho\,\mathrm{d}V_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho A_1 v_1\,\mathrm{d}t = \rho A_2 v_2\,\mathrm{d}t \\
\Downarrow \\
A_1 v_1 = A_2 v_2 \\
Av = \text{const.}.
\end{gathered}
$$

Det sidste udtryk fra ovenfor kaldes ofte *kontinuitetslignignen*.

Sætning 0.1: kontinuitetslignignen

Vi har generelt for inkompressible væsker, at

$$Av = \text{const.}.$$

1 Arbejdet på væsken

Vi har generelt at

$$\rho \, \mathrm{d}V_1 = \rho A_1 v_1 \, \mathrm{d}t \implies \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Av.$$

Det ovenstående kan nu omskrives som

$$\mathrm{d}V = A_1 \, \mathrm{d}s_1 = A_2 \, \mathrm{d}s_2.$$

Derfor er arbejdet udført på væsken

$$\mathrm{d}W = P_1 \underbrace{A_1 \, \mathrm{d}s_1}_{\mathrm{d}V} - P_2 \underbrace{A_2 \, \mathrm{d}s_2}_{\mathrm{d}V} = (P_1 - P_2) \, \mathrm{d}V.$$

2 Kinetisk energi

Den kinetiske energi af volumenet af væsken der "flyder ind" er

$$\mathrm{d}K_1 = \frac{1}{2} \, \mathrm{d}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (\rho A_1 \, \mathrm{d}s_1) v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \, \mathrm{d}V v_1^2.$$

Og den kinetiske energi af volumenet af væsken der "flyder ud" er

$$\mathrm{d}K_2 = \frac{1}{2} \, \mathrm{d}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (\rho A_2 \, \mathrm{d}s_2) v_2^2 = \frac{1}{2} \rho \, \mathrm{d}V v_2^2.$$

Ændringen i kinetisk energi er da

$$\begin{aligned} \Delta K &= \mathrm{d}K_2 - \mathrm{d}K_1 \\ &= \frac{1}{2} \rho \, \mathrm{d}V \left(v_2^2 - v_1^2 \right). \end{aligned}$$

3 Ændringen i potentiel energi

Vi har at

$$\underbrace{\mathrm{d}m_1}_{\text{Massen der flyder ind}} = \underbrace{\mathrm{d}m_2}_{\text{Massen der flyder ud}} = \mathrm{d}m.$$

Den potentielle energi for væsken der flyder ind er da

$$\mathrm{d}U_1 = \mathrm{d}m g y_1 = \rho \, \mathrm{d}V g y_1.$$

Og den potentielle energi for den del af væsken der flyder ud er

$$\mathrm{d}U_2 = \mathrm{d}m g y_2 = \rho \, \mathrm{d}V g y_2.$$

Så ændringen er altså

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_2 - \mathrm{d}U_1 = \rho \, \mathrm{d}V g (y_2 - y_1).$$

3.1 Det tilførte arbejde

Tilført arbejde er lig ændringen i mekanisk energi. Altså

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E = \mathrm{d}K + \mathrm{d}U.$$

Hvis vi indsætter de tidligere udledte udtryk fås, at

$$\begin{aligned}(P_1 - P_2)\,\mathrm{dV} &= \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho\,\mathrm{d}V g(y_2 - y_1)\\ (P_1 - P_2) &= \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g(y_2 - y_1)\\ P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 &= P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.\end{aligned}$$

Sætning 3.1: Bernoullis ligning

Idet udtrykket fundet ovenfor gælder for alle punkter i væsken kan vi skrive det som

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{const.}$$

Denne sammenhæng kaldes Bernoullis ligning og den gælder for væsker hvor følgende antagelser er valide

- **Inkompressibel**: En ændring i trykket medfører ikke en ændring i volumen.
- **Inviskos**: Væsken har ingen indre friktion
- **Stationær strømning**: Væskens hastighed er konstant ($\frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}t} = 0$)

Eksempel 3.1: Udstrømningshastighed (12.8)

Vi betragter en stor oliebeholder. Oliebeholderen har en iregulær form og vi ønsker, at finde udstrømningshastigehden for væsken i beholderen. Trykket over væskespejlet indeni beholderen betegnes, p_0, arealet af væskespejlet i toppen betegnes A_1, arealet af "væskespejlet" i bunden betegnes A_2 og trykket lige uden for punktet hvor væsken udstrømmer fra betegnes p_{atm}. Vi kan bruge Bernoullis ligning som

$$p_0 + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_1^2}_{\approx 0,\ \text{da}\ (A_1 \gg A_2)} + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0.$$

Vi får da

$$v_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_0 - p_{atm}) + 2gh.$$

Hvis beholderen, var åben i toppen således at $p_0 = p_{atm}$ så får vi

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Hvilket blot er den almindelige hastighed for et frit fald.