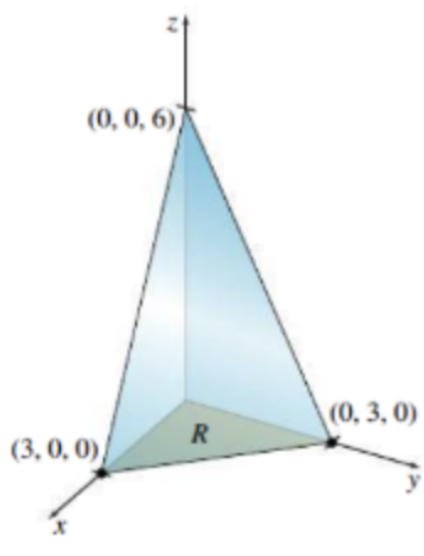
Afleveringsopgave uge 10

Noah Rahbek Bigum Hansen

9. November 2024

Opg. 9.6.65

Packaging. The manufacturer of a fruit juice drink has decided to try innovative packaging in order to revitalize sagging sales. The fruit juice drink is to be packaged in containers in the shape of tetrahedra in which three edges are perpendicular, as shown in the figure below. Two of the perpendicular edges will be 3 in. long, and the third edge will be 6 in. long. Find the volume of the container. (*Hint:* The equation of the plane shown in the figure is $z = f(x, y) = 6 - 2x - 2y$.)

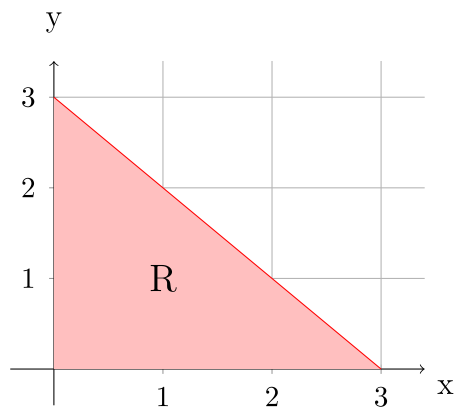


Figur 1:

Volumenet under overfladen z må være lig overfladeintegralet af overfladen z over området R. Så

$$V = \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

For at løse opgaven skal vi altså først have opskrevet et udtryk for området R. Området R kan ses som et Type 1 område begrænset af $0 \leq x \leq 3, y = 0, y = -x + 3$. På Figur 2 er R indtegnet i xy-planen.



Figur 2: Området R indtegnet i xy-planen

Idet R er et type 1 område og at $y = 0 < y = -x + 3$ for alle $0 \leq x \leq 3$ kan vi opstille et planintegral som

$$\int_0^3 \int_{y=0}^{y=-x+3} 6 - 2x - 2y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

For at løse et planintegral som det i Ligning 1 skal vi først løse det inderste integral. Dette opskrives

$$\int_{y=0}^{y=-x+3} 6 - 2x - 2y \,\mathrm{d}y.$$

Idet vi husker at holde x konstant når vi integrerer for y løses integralet som

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{y=-x+3} 6 - 2x - 2y \,\mathrm{d}y &= \left[6y - 2xy - y^2\right]_{y=0}^{y=-x+3} \\ &= 6(-x+3) - 2x(-x+3) - (-x+3)^2 \\ &= -6x + 18 + 2x^2 - 6x - (x^2) + 6x - 9 \\ &= x^2 - 6x + 9.\end{aligned}$$

Vores komplicerede udtryk for planintegralet fra før kan altså skrives som

$$\int_0^3 \int_{y=0}^{y=-x+3} 6 - 2x - 2x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2 - 6x + 9 \,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Vi mangler altså blot at regne det sidste integrale. Dette gøres “lige ud af landevejen” med udgangspunkt i udtrykket i Ligning 2. Altså fås

$$\begin{aligned}\int_0^3 x^2 - 6x + 9 \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \\ &= 9.\end{aligned}$$

Altså må volumenet af figuren afgrænset af planen z, linjen $y = -x + 3$ og af x- og y-akserne være $9\,\mathrm{in.}^3$.