Opgaver til forelæsning 17

Noah Rahbek Bigum Hansen

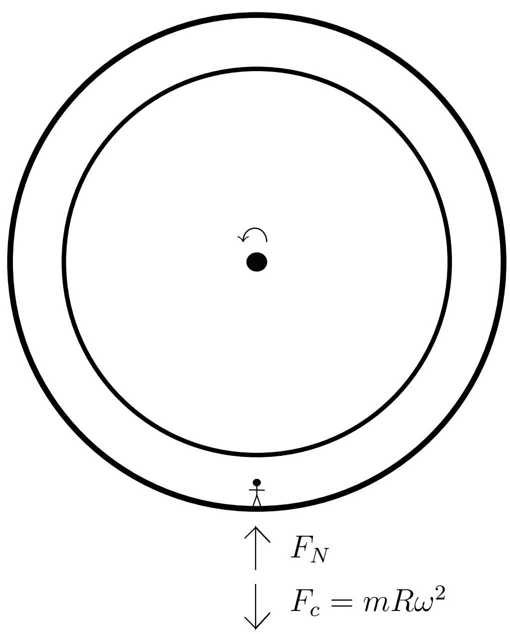
31. Oktober – 17. November 2024

Opg. 9.2

A donut-shaped space station (outer radius R) arranges for artificial gravity by spinning on the axis of the donut with angular velocity, ω. Sketch the forces on, and accelerations of, an aastronaut standing in the station

(a)

as seen from the inertial frame outside of the station and



Figur 1: Fritlegemediagram for astronauten på rumstationen

Fritlegemediagrammet er vist på **Figur 1** .

(b)

as seen in the astronaut's personal rest frame (which has centripetal acceleration $A = \omega^2 R$ as seen in the inertial frame). What angular velocity is needed if $R = 40\,\mathrm{m}$ and the apparent gravity is to equal to the usual value of about $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

Vi opskriver ligevægten som

$$m\ddot{r} = 0 = -N + mR\omega^2 \implies N = mR\omega^2.$$

Vi har dermed at

$$\begin{aligned}\omega^2 R &= \frac{N}{m} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\\ \omega &= \sqrt{\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{40\,\mathrm{m}}} = 0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}.\end{aligned}$$

(c)

What is the difference between the percieved g at a six-foot astronaut's feet ($R = 40\,\mathrm{m}$) and at his head ($R = 38\,\mathrm{m}$)?

Vi har fra før at

$$\frac{N}{m} = R\omega^2 = 38\,\mathrm{m}\cdot\left(0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 = 9{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Opg. 9.8

What are the directions of the centrifugal and the Coriolis forces on a person moving

(a)

south near the north pole

Coriolis kraften vil virke mod højre (vestgående retning) og centrifugalkraften vil virke vinkelret væk fra jordens omdrejningsakse.

(b)

east on the equator, and

Coriolis- og centrifugalkraften vil i dette tilfælde begge pege vinkelret væk fra jordens omdrejningsakse.

(c)

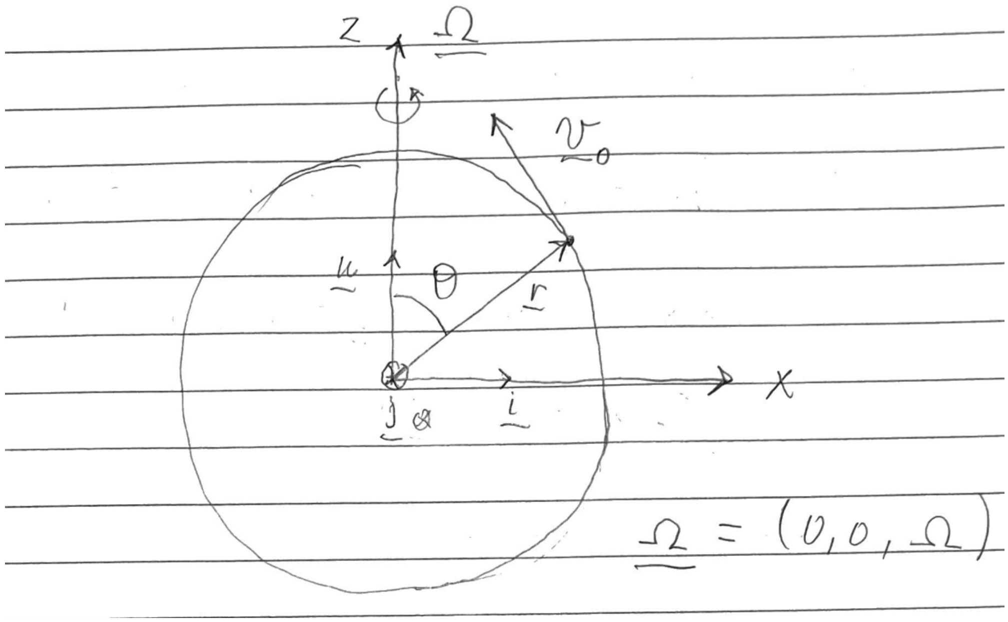
south across the equator?

I dette tilfælde er omdrejningsaksen og bevægelsesaksen vinkelrette og corioliskraften forsvinder derfor. Centrifugalkraften vil fortsat pege vinkelret væk fra jordens omdrejningsakse.

Opg. 9.9

A bullet of mass m is fired with muzzle speed v_0 horizontally and due north from a position of colatitude θ. Find the direction and magnitude of the Coriolis force in terms of m, v_0, θ, and the earth's angular velocity Ω. How does the Coriolis force compare with the bullet's weight if $v_0 = 1000\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ and $\theta = 40°$?

Figur 2: Langthjems skitse af situationen



Vi har generelt at Coriolis-kraften er givet som

$$F_{cor} = 2m\vec{v_0} \times \vec{\Omega}.$$

Og krydsproduktet $\vec{v_0} \times \vec{\Omega}$ er givet ved

$$\vec{v_0} \times \vec{\omega} = v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \Omega.$$

Vi har dermed at

$$F_{cor} = 2m \cdot v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \Omega.$$

Fra højrehåndsreglen må det i øvrigt gælde at Corioliskraftens retning er mod højre (se evt. **Figur 2**). For at finde $\frac{a_{cor}}{g}$ regner vi først jordens omdrejningshastighed som

$$\Omega = \frac{2\pi}{24\,\mathrm{hr} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{hr}}} = 7{,}2722 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Vi kan dermed regne $\frac{a_{cor}}{g}$ som

$$\frac{a_{cor}}{g} = 2v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \Omega = 2 \cdot 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(40°) \cdot 7{,}2722 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{1}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}0114.$$

Altså er størrelsen på Corioliskraften lidt over 1% så stor som kuglens tyngdekraft.

Opg. 9.10

The derivation of the equation of motion for a rotating frame made the assumption that the angular velocity Ω was constant. Show that if $\dot{\Omega} \neq 0$ then there is a third "fictuous force," sometimes called the *azimuthal force*, on the right side of (9.34) equal to $mr \times \dot{\Omega}$

Fra Taylor-notatet haves at

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_{S_0} &= \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_S + \sum r_i \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t}\right)_{S_0} \\
&= \dot{r} + \sum r_i (Om\vec{e}ga \times \vec{e}_i) \\
&= \dot{r} + Om\vec{e}ga \times r \\
&= \dot{r} + \vec{\Omega} \times \vec{r}
\end{aligned}$$

Der differentieres igen så vi får at

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{S_0} = \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}).$$

Hvilket kan skrives som

$$\ddot{r} = \vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}} + 2\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{\Omega}.$$

Og dermed fås at $N2$ er

$$N2 = m\ddot{r} = \vec{F} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{\Omega}.$$

Opg. 9.12

(a)

Show that to design a static structure in a rotating frame (such as a space station) one can use the ordinary rules of statics except one must include the extra "fictitous" centrifugal force.

Vi opskriver Newtons 2. lov for et roterende system

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}.$$

I det statiske tilfælde har vi at

$$\vec{0} = \vec{F} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}.$$

Altså ses at centrifugalkraften overlever, selv for det statiske tilfælde.

(b)

I wish to place a puck on a rotating horizontal turntable (angular velocity Ω) and to have it remain at rest on the table, held by the force of static friction (coefficient μ). What is the maximum distance from the axis of rotation at which I can do this? (Argue from the point of view of a observer in the rotating frame.)

For statik har vi at $\sum F_r = 0$. Altså har vi at

$$\begin{aligned} mr\Omega^2 - mg\mu &= 0 \\ g\mu &\geq r\Omega^2 \\ r &\leq \frac{g\mu}{\Omega^2}. \end{aligned}$$

Opg. 6-3

En partikel kan bevæge sig uden gnidning på en vandret flade. På grund af Jordens rotation, vil partiklen fjerne sig fra startsituationens tangent. Stedets bredde er 60°. Partiklens hastighed er 16,0 m/s. Det antages, at corioliskraftens størrelse og retning er konstant under bevægelsen. Beregn hvor langt partiklen i løbet af 10 s vil fjerne sig startsituationens tangent.

Coriolisaccelerationen er givet som

$$a_{cor} = 2v\Omega\sin(\beta).$$

Hvor β er breddegraden. Vi har generelt jordens omdrejningshastighed som

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vi har desuden, at $\sin(60°) \approx 0{,}866$ og $v = 16{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dermed fås

$$a_{cor} = 2v\Omega\sin(\beta) = 2{,}015 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Denne acceleration er konstant og derfor kan formlen for konstant acceleration bruges til at finde den samlede bevægelse i løbet af $\Delta t = 10\,\text{s}$ som

$$\Delta x = \frac{1}{2}a_{cor}(\Delta t)^2 = 0{,}101\,\text{m}.$$

Opg. 6-4

En lastbil starter fra hvile til tiden $t = 0$ og accelererer jævnt, således at dens fart er $v_1 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ til tiden $t = t_1 = 10\,\mathrm{s}$. En lille kasse med massen $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ er før starten anbragt i afstanden $\ell = 3{,}0\,\mathrm{m}$ fra bagenden. Til $t = 0$ begynder kassen at glide. Gnidningskoefficienten mellem kasse og lad er $\mu_k = 0,15$.

(a)

Angiv de kræfter, der virker på kassen såvel i bilens som i vejbanens henførelsessystem.

I begge tilfælde virker følgende kræfter

- Tyngdekraft: mg
- Normalkraft: N
- Gnidningskraft: F_μ

(b)

Find kassens acceleration i begge henførelsessystemer

Normalkraften, N, er givet som

$$N = mg.$$

Vi har dermed også et udtryk for gnindningskraften, F_μ, som

$$F_\mu = ma = mg\mu \implies a = g\mu = 1{,}47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

For at finde accelerationen i det accelererende koordinatsystem benyttes Newtons 2. lov for et accelererende koordinatsystem

$$\begin{aligned}
ma' &= F_\mu + (-ma_0) = 0 \\
a' &= g\mu - a_0 \\
&= 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}15 - \frac{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\mathrm{s}} \\
&= -0{,}53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.
\end{aligned}$$

(c)

Bestem den tid, som kassen er om at nå bagenden.

Vi har den generelle formel for bevægelse ved konstant acceleration som

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{1}{2}|a'|t^2 \\ \implies t &= \sqrt{\frac{2\ell}{|a'|}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \\ &= 3{,}36\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

(d)

Find den vandrette komposant af kassenss hastighed, når kassen rammer vejen.

Kassen kan kun blive accelereret når den ligger på bilens lad og der antages ingen luftmodstand og derfor vil bilens hastighed være konstant fra den forlader bilen til den rammer vejen. Altså kan den vandrette hastighed findes med den almindelige formel for hastighed ved konstant acceleration som

$$\begin{aligned} v &= at \\ &= 1{,}47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3{,}36\,\mathrm{s} \\ &= 4{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Opg. 6-9

En dødsdrom er en lodretstående cylinder, på hvis indre overflade en motorcyklist kan køre rundt. Tidligere har dødsdromer været populære forlystelser på omrejsende markeder. I en dødsdrom med radius $R = 4\,\mathrm{m}$ kører en motorcyklist med hastigheden $v = 40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

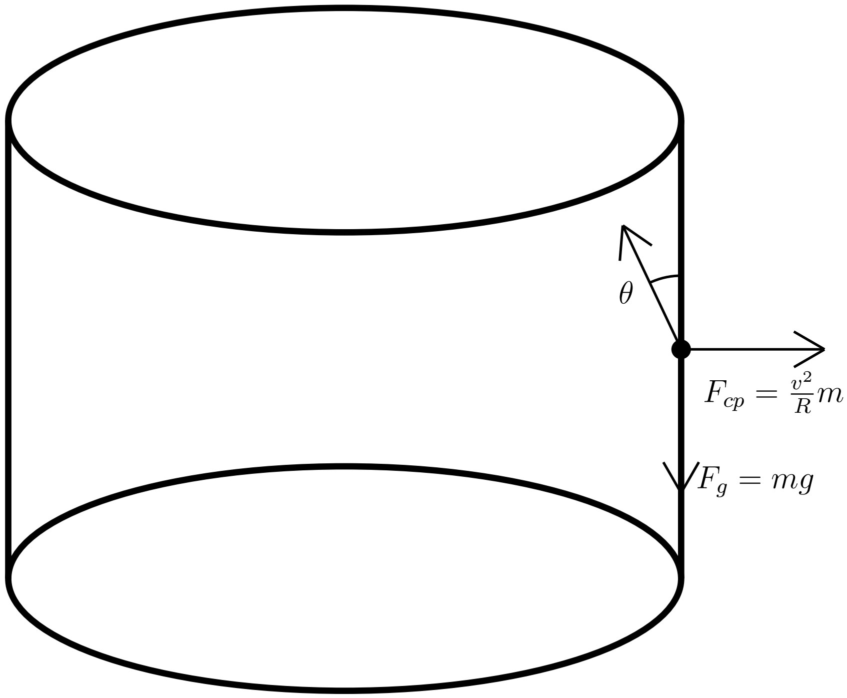
(a)

Vis, at denne bevægelse er mulig?

Se **Figur 3**

(b)

Hvilken hældning har cyklen med lodret?



Figur 3: Skitse over situationen, der viser at bevægelsen er mulig.

Først findes cyklens centripetalacceleration, for at kunne bruge trigonometri til at finde vinklen til lodret θ. Dette gøres som

$$\begin{aligned} a_{cp} &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{\left(40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2}{4\,\mathrm{m}} \\ &= 30{,}86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \end{aligned}$$

Vha. trigonometri kan vinklen til lodret da findes som

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{-a_{cp}}{-g}\right) \\ &= \tan^{-1}\frac{30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\ &= 0{,}307 \cong 17{,}62^\circ. \end{aligned}$$

(c)

Hvilket effektivt tyngdefelt føler cyklisten?

Det effektive tyngdefelt er blot den effektive acceleration. Altså har vi

$$g_{eff} = \sqrt{a^2 + g^2} = \sqrt{\left(30{,}86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2 + \left(9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2} = 32{,}38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(d)

Beskriv, hvordan det må føles at køre i dødsdrom. (G)

Vi finder forholdet mellem det effektive tyngdefelt og det normale tyngdefelt som

$$G = \frac{g_{eff}}{g} = \frac{32{,}38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 3{,}3G.$$