Eksamen i: Fysik og Mekanik

Noah Rahbek Bigum Hansen

20. december 2021 (13. December 2024)

1.

To venner, A og B, arrangerer et 1000 m løb. A får lov at få et forspring ved at starte tidligere end B. Hvor mange sekunder tidligere skal A starte, for at kunne vinde løbet, hvis han blot kan løbe med farten $v_A = 6{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, medens B kan løbe med farten $v_B = 7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

For at finde ud af hvor stort forspringet som A skal have over B skal være ønskes det at finde ud af hvor lang tid det tager hver person at gennemføre et løb med distancen $x = 1000\,\mathrm{m}$ og hastighederne $v_A = 6{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og $v_B = 7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Formlen for distancen x til tiden t med konstant hastighed v omskrives så tiden t er isoleret

$$x = vt \implies t = \frac{x}{v}.$$

Og dermed kan tiderne t_A og t_B som det tager hhv. A og B at gennemføre løbet findes som

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{x}{v_A} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{6{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 147{,}06\,\mathrm{s} \\ t_B &= \frac{x}{v_B} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 142{,}86\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Og dermed er tidsforskellen mellem de to idet de starter samtidigt

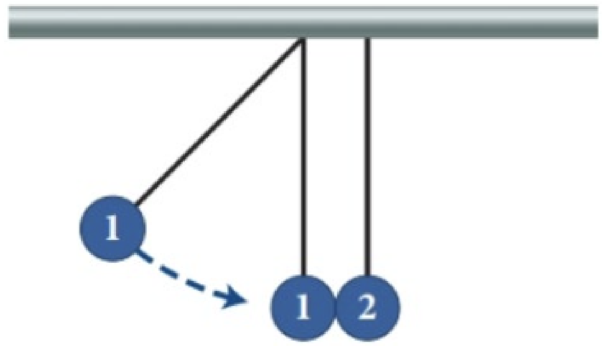
$$\Delta t = t_A - t_B = 4{,}2\,\mathrm{s}.$$

Altså skal A starte minimum 4,2 s før B for at finde løbet.

2.

To metalkugler, ophængt i tynde tråde fra en vandret stang, er til at begynde med i kontakt med hinanden, se **Figur 1**. Kugle 1 har massen $m_1 = 0{,}05\,\mathrm{kg}$, medens kugle 2 har massen $m_2 = 0{,}10\,\mathrm{kg}$. Nu trækkes m_1 (kugle 1) mod venstre, som vist i **Figur 1**, og frigives, hvorefter den støder rent elastisk sammen med m_2 (kugle 2). I øjeblikket umiddelbart før stødet, har m_1 den kinetiske energi $K_1 = 0{,}098\,\mathrm{J}$.

Figur 1:



(a)

Hvad er hastigheden af m_1 umiddelbart før stødet?

Formlen for kinetisk energi K er

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Hvor $m = 0{,}05\,\mathrm{kg}$ er massen og v er hastigheden. Heri kan hastigheden v isoleres og kendte størrelser kan derefter indsættes som

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2K}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}098\,\mathrm{J}}{0{,}05\,\mathrm{kg}}} \\ &= 1{,}98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Altså har bolden med massen m_1 en hastighed $v_1 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ umiddelbart før stødet.

(b)

Bestem hastigheden af m_1 og hastigheden af m_2 umiddelbart efter stødet.

Idet der er impulskonservation under stødet har vi at

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f} \implies m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

Restitutionskoefficienten for et komplet elastisk stød er $e = 1$ og er givet ved

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} = 1 \implies v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} \implies v_{2f} = v_{1i} + v_{1f}.$$

Dette kan indsættes i udtrykket for impulskonservation som

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2(v_{1i} + v_{1f}).$$

Heri kan v_{1f} isoleres som

$$\begin{aligned} m_2 v_{1i} + v_{1f}(m_1 + m_2) &= m_1 v_{1i} \\ v_{1f} &= \frac{(m_1 - m_2)v_{1i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{0{,}05\,\mathrm{kg} - 0{,}10\,\mathrm{kg}}{0{,}05\,\mathrm{kg} + 0{,}10\,\mathrm{kg}} \cdot 1{,}98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &= -0{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Idet hastigheden v_{1f} nu er kendt kan formlen $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f}$ nu benyttes som

$$v_{2f} = 1{,}98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Altså er hastighederne af m_1 og m_2 umiddelbart efter stødet hhv. $v_{1f} = -0{,}66\,\mathrm{m/s}$ og $v_{2f} = 1{,}32\,\mathrm{m/s}$.

(c)

Bestem restitutionskoefficienten e for stødet.

Idet stødet er komplet elastisk er restitutionskoefficienten, per definition, $e = 1$. Dette bekræftes imidlertid også ved brug af formlen idet

$$e = -\frac{1{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0 - 1{,}98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.$$

(d)

Forsøget gentages nu med to lerkugler. Det antages, at stødet er rent plastisk (rent uealstisk), således at de to kugler hænger sammen efter stødet. Bestem hastigheden af m_1 og m_2 umiddelbart efter stødet for dette tilfælde.

For et komplet inelastisk stød sidder de to objekter sammen til sidst og de får derfor en fælleshastighed $\vec{v}_2$. Impulskonservation giver os da at

$$m_1 \cdot \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_2.$$

Idet $\vec{v}_{2i} = 0$ kan $\vec{v}_2$ isoleres og findes som

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \frac{m_1 \cdot \vec{v}_{1i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}05\,\mathrm{kg} + 0{,}10\,\mathrm{kg}} \\ &= 0{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

.

Altså vil de to lerkugler efter det komplet inealstiske sammenstød have en fælleshastighed $\vec{v}_2 = 0{,}66\,\mathrm{m/s}$

(e)

Bestem restitutionskoefficienten e for det plastiske/uelastiske stød.

For et komplet uelastisk stød er restitutionskoefficienten $e = 0$, per definition. Igen bekræftes dette af formlen for restitutionskoefficienten idet denne, idet de to objekter har samme hastighed efter stødet, får en tæller på 0 og dermed en samlet størrelse på 0.

3.

Et "puf" af komprimeret luft (trykluft) skubber et hagl ud af løbet af en luftpistol. Kraften, hvormed trykluften påvirker haglet, er givet ved $F(t) = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, hvor t er tiden ($t \geq 0$), og τ (også med enheden tid) kaldes for en tidskonstant. (Der gælder også at $\tau > 0$).

(a)

Hvad repræsenterer konstanten F_0?

F_0 angiver størrelsen på $F(t)$ til tiden $t = 0$. Dette kan bekræftes ved at sætte $t = 0$ i eksponenten til e hvorved eksponenten bliver 0 og højresiden af formlen derfor blot bliver F_0.

(b)

Skuddet (haglet) affyres til tiden $t = 0$. Hvad er haglets bevægelsesmængde (el. impuls) til tiden $t = \tau$?

Det gælder generelt at impulsen kan findes som

$$P = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dette integral kan løses som

$$\begin{aligned} P &= F_0 \int_0^{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{d}t \\ &= F_0 \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\tau} \\ &= F_0 \cdot \left(\left(-\tau \cdot e^{-1}\right) - (-\tau)\right) \\ &= F_0 \left(\tau - \tau e^{-1}\right) \\ &= F_0 \tau \left(1 - e^{-1}\right). \end{aligned}$$

(c)

Hvad er haglets bevægelsesmængde til tiden $t = 5\tau$?

Her kan samme integral som før benyttes, dog med en ny øvre integrationsgrænse på $t = 5\tau$. Altså fås

$$\begin{aligned} P &= F_0 \int_0^{5\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \, \mathrm{d}t \\ &= F_0 \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{5\tau} \\ &= F_0 \cdot \left(\tau - \tau \cdot e^{-5} \right) \\ &= F_0 \tau (1 - e^{-5}). \end{aligned}$$

(d)

Hvad er haglets bevægelsesmængde efter meget lang tid ($t \to \infty$).

Her kan samme integral som før igen benyttes men med en ny øvre integrationsgrænse på ∞. Altså fås, at

$$\begin{aligned} P &= F_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \, \mathrm{d}t \\ &= F_0 \tau \left(1 - e^{-\infty} \right) \\ &= F_0 \tau \cdot (1 - 0) \\ &= F_0 \tau. \end{aligned}$$

(e)

Lad τ være lig med $0{,}5\,\mathrm{ms}$ (ms = milisekunder). Bestem tiden t, hvor haglets bevægelsesmængde har nået 95% af sin slutværdi.

Eftersom $\tau = 0{,}5\,\mathrm{ms} \ll \infty$ har vi at $P_{max} = F_0 \cdot 0{,}5\,\mathrm{ms}$. Dermed ønskes, at finde ud af, til hvilken tid $P = 0{,}95 F_0 \tau \cdot 0{,}5\,\mathrm{ms} = F_0 \cdot 0{,}475\,\mathrm{ms}$. Vi kan benytte integralet fra før men denne gang med en variabel integrationsgrænse t som

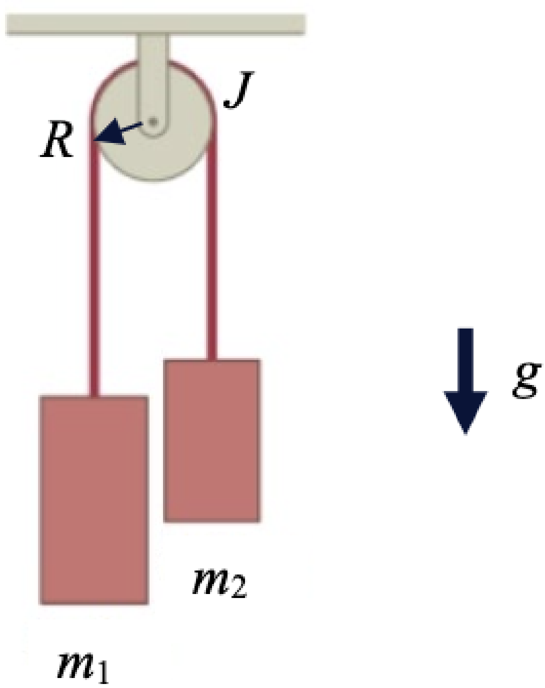
$$\begin{aligned} P(t) &= F_0 \int_0^{t} e^{-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}}} \, \mathrm{d}t \\ &= F_0 \cdot \left[-0{,}5\,\mathrm{ms} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}}} \right]_0^{t} \\ &= F_0 \cdot 0{,}5\,\mathrm{ms} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}}} \right). \end{aligned}$$

Dette udtryk for bevægelsesmængden som funktion af tiden $P(t)$ kan nu sættes lig den ønskede bevægelsesmængde $P = F_0 \cdot 0{,}475\,\mathrm{ms}$ som

$$\begin{aligned}
F_0 \cdot 0{,}475\,\mathrm{ms} &= F_0 \cdot 0{,}5\,\mathrm{ms} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}}}\right) \\
\frac{0{,}475\,\mathrm{ms}}{0{,}5\,\mathrm{ms}} &= 1 - e^{-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}}} \\
e^{-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}}} &= 1 - 0{,}95 \\
-\frac{t}{0{,}5\,\mathrm{ms}} &= \ln 0{,}05 \\
t &= -\ln 0{,}05 \cdot 0{,}5\,\mathrm{ms} \\
t &= 1{,}498\,\mathrm{ms} \approx 1{,}5\,\mathrm{ms} \\
&.
\end{aligned}$$

4.

Figur 2:



En snor er lagt omkring en trisse med radius $R = 0{,}30\,\mathrm{m}$ og masseinertimoment $J = 0{,}80\,\mathrm{kg\,m^2}$, se **Figur 2**. I snorens ene ende er påsat massen $m_1 = 3{,}0\,\mathrm{kg}$, i snorens anden ende massen $m_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$. Der kan ses bort fra snorens masse. Ligeledes kan det antages, at snoren ikke glider omkring trissen, og at snoren er ustrækkelig. De to masser understøttes først, for derefter at blive frigivet, til tiden $t = 0$. Tyngdeaccelerationen g kan antages at være $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$.

(a)

Bestem accelerationen af hver af de to masser.

Vi kan opskrive en kraftligevægt for begge de to masser som

$$\sum F_t = 0; \qquad m_1 \cdot g + (-m_1 a) - T_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_1 = m_1(g - a) \tag{1}$$

og

$$\sum F_t = 0; \qquad -m_2 g + (-m_2 a) + T_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -T_2 = -m_2(a + g) \tag{2}$$

Derudover har vi fra Newtons 2. lov for et roterende rigidt legeme at

$$I\alpha = (T_1 - T_2)R \tag{3}$$

Derudover har vi at den tangtielle acceleration for trissen, må tilsvare accelerationen af snoren, idet der ikke er et glid mellem de to. Altså

$$a = \alpha R \implies \alpha = \frac{a}{R} \tag{4}$$

Sættes **Ligning 4** ind i **Ligning 3** fås at

$$I\frac{a}{R} = (T_1 - T_2)R \implies T_1 - T_2 = I\frac{a}{R^2}.$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
m_1(g - a) - m_2(a + g) &= I\frac{a}{R^2} \\
m_1 g - m_1 a - m_2 a - m_2 g &= I\frac{a}{R^2} \\
I\frac{a}{R^2} + m_1 a + m_2 a &= m_1 g - m_2 g \\
a(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2) &= g(m_1 - m_2) \\
a &= \frac{m_1 - m_2}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2} g \\
&= \frac{3{,}0\,\mathrm{kg} - 2{,}0\,\mathrm{kg}}{\frac{0{,}80\,\mathrm{kg\,m^2}}{(0{,}30\,\mathrm{m})^2} + 3{,}0\,\mathrm{kg} + 2{,}0\,\mathrm{kg}} \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
&= 0{,}706\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.
\end{aligned}$$

(b)

Bestem trissens vinkelhastighed ω til det tidspunkt, hvor den tungeste masse m_1 har bevæget sig distancen $s = 1{,}5\,\mathrm{m}$ nedad.

Idet kræfterne alle er konstante, må det gælde at accelerationen fundet ovenfor ligeledes er konstant. Altså skal vi blot finde tidspunktet til $s = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Dette gøres med formlen for strækning ved konstant acceleration på kassen med $a = 0{,}706\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Dette gøres som

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2 \\
x &= \frac{1}{2}at^2 \\
t &= \sqrt{\frac{2x}{a}} \\
t &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{0{,}706\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \\
t &= 2{,}06\,\mathrm{s}.
\end{aligned}$$

Vi kan beregne trissens vinkelacceleration α som

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0{,}706\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}30\,\mathrm{m}} = 2{,}35\,\mathrm{s}^{-2}.$$

Idet det antages at trissen ikke har nogen hastighed inden de to masser bliver frigivet må det gælde at vinkelhastigheden ω til tiden t kan findes som

$$\omega = \alpha t = 2{,}35\,\mathrm{s}^{-2} \cdot 2{,}06\,\mathrm{s} = 4{,}84\,\mathrm{s}^{-1}.$$

(c)

Bestem snorkræfterne (i begge ender af snoren), til samme tidspunkt.

Snorkræften er konstant, for den gældende bevægelse, så snorkraften til $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ er lig snorkraften til alle andre tidspunkter. Vi har allerede fundet et udtryk for snorkraften over m_1; T_1 og for snorkraften over m_2; T_2 og vi sætter derfor bare kendte størrelser ind i denne som

$$\begin{aligned}
T_1 &= m_1(g - a) = 3{,}0\,\mathrm{kg}\left(9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 0{,}706\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 27{,}3\,\mathrm{N} \\
T_2 &= m_2(a + g) = 2{,}0\,\mathrm{kg}\left(9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 0{,}706\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 21{,}0\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

(d)

Bestem den øjeblikkelige effekt som de to masser tilfører trissen via snoren, til samme tidspunkt.

Vi har at effekten P kan findes som

$$P = \omega\tau = (T_1 - T_2)R\omega.$$

Sættes kendte størrelser ind fås at

$$P = (27{,}3\,\mathrm{N} - 21{,}0\,\mathrm{N}) \cdot 0{,}30\,\mathrm{m} \cdot 4{,}84\,\mathrm{s}^{-1} = 9{,}15\,\mathrm{W}.$$