Opg. 4.1

Brug formlerne i (4.2) til at simplificere udregningen for at finde tallet:

$$\left| \frac{(1-i)\left(\overline{2+2i}\right)}{3i(4-2i)} \right|.$$

For to komplekse tal, z_1, og z_2 har vi:

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Og

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Altså:

$$\left| \frac{(1-i)\left(\overline{2+2i}\right)}{3i(4-2i)} \right| = \frac{|1-i||\overline{2+2i}|}{|3i||4-2i|}.$$

Og der gælder at:

$$|\overline{z_1}| = |z_1|.$$

Altså:

$$\frac{|1-i||2-2i|}{|3i|\ |4-2i|}.$$

Normerne kan dernæst findes vha. Pythagoras:

$$\frac{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+2^2}}{\sqrt{6^2+12^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{180}} = \frac{2\sqrt{45}}{45} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Opg. 4.6

For $a > 0$ hvad er løsningerne til $z^2 = -a$. Det vil sige, hvad er kvadratrødderne for et negativt tal?

For:

$$z^n = a.$$

Er løsningerne givet ved:

$$z_0 e^{\frac{2\pi m}{n} i}.$$

For $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Hvor $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ Altså er løsningerne:

$$-z_0 e^{0i} \qquad \text{og} \qquad -z_0 e^{\pi i}$$

Opg. 4.9

Gør rede for at $e^{ix}e^{-ix} = 1$ for $x \in \mathbb{R}$. Hvad er den polære form for $z^{-1} = \frac{1}{z}$, hvis z har polær form:

$$z = re^{i\theta}.$$

For $e^{ix}e^{-ix}$ har vi:

$$e^{ix}e^{-ix} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = 1.$$

Altså er det vist. Dermed har vi også:

$$z^{-1}z^{1} = 1 \implies z^{-1} = \frac{1}{z}.$$

Altså har vi:

$$z^{-1} = \frac{1}{re^{i\theta}}.$$

For den komplekst konjugerede spejles der omkring 1.-aksen og derfor må det gælde at den polære form for z og for $\overline{z}$ kun adskiller sig ift. fortegnet til argumentet (som givetvis skal være modsat for z som for $\overline{z}$.

Opg. 4.12

Løs andengradsligningen:

$$z^2 - (3 + 2i)\, z + (1 + 3i) = 0.$$

Først regnes diskriminanten:

$$D = b^2 - 4ac = (3 + 2i)^2 - 4\,(1 + 3i) = (5 + 12i) - (4 + 12i) = 1.$$

Altså har vi:

$$\frac{(3 + 2i) \pm \sqrt{1^2}}{2} = 1,5 \pm 0,5 - i.$$

Opg. 4.18

Find begge komplekse løsninger til ligningen:

$$2z^2 + 4z + 8 = 0.$$

og bestem absolut værdi og argument (i radianer) for begge tal.

Først findes diskriminanten, D:

$$D = b^2 - 4ac \implies D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = -48.$$

Dernæst huskes:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Altså har vi:

$$\frac{-4 \pm \sqrt{48}i}{2 \cdot 2} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

Prøveeksamens spg. 5

Skriv følgende brøk på standard form:

$$\frac{8-6i}{1+i}.$$

For at dividere to komplekse tal bruges at:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Altså:

$$\begin{aligned} &= \frac{(8-6i)\cdot(1-i)}{|1+i|^2} \\ &= \frac{2-14i}{2} = 1-7i \end{aligned}$$

Prøveeksmanes spg. 6

Ligningen:

$$z^2 - 4z + 20 = 0.$$

Har to løsninger z_1 og z_2. Hvad er produktet af deres imaginærdele?

Først findes diskriminanten til andengradsligningen:

$$D = b^2 - 4ac \implies D = -64.$$

Altså har vi:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \implies \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i.$$

Altså er imaginærdelene:

$$\begin{aligned} \Im_1 &= -4i \\ \Im_2 &= 4i \end{aligned}$$

Og produktet af imaginærdelene bliver da:

$$\Im_1 \cdot \Im_2 = -4i \cdot 4i = 16.$$