# TØ-opgaver til uge 9

Noah Rahbek Bigum Hansen

4. November 2024

## Opg. 9.2.23

Find all second-order partial derivatives for the following.

$$R(x, y) = 4x^5 - 8x^4y^8 + 6x^5y^6.$$

For at finde de 2. ordens afledede må vi først finde de to 1. ordens afledede som

$$\begin{aligned} R_x &= 20x^4 - 32x^3y^8 + 30x^4y^6 \\ R_y &= -64x^4y^7 + 36x^5y^5 \end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} R_{xx} &= 80x^3 - 96x^2y^8 + 120x^3y^6 \\ R_{yy} &= -448x^4y^6 + 180x^5y^4 \\ R_{xy} = R_{yx} &= -256x^3y^7 + 180x^4y^5 \end{aligned}$$

## Prøveeksamensopgave 15

Betragt funktionen

$$f(x, y) = 6y^3 - 8x^2y + 16x^2 + 35.$$

Beregn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -kx.$$

Hvor $k$ er et helt tal mellem 0 og 99.

Vi har at

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -16xy + 32x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -16x \end{aligned}$$

Altså er $k = 16$

## Opg. 9.2.63

The reaction to $x$ units of a drug $t$ hours after it was administered is given by

$$R(x,t) = x^2(a-x)t^2e^{-t},$$

for $0 \leq x \leq a$ (where $a$ is a constant). Find the following.

Først udvider vi parentesen så vi får at

$$R(x,t) = x^2at^2e^{-t} - x^3t^2e^{-t}.$$

### (a)

$$\frac{\partial R}{\partial x}.$$

Vi får at

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2xat^2e^{-t} - 3x^2t^2e^{-t} = x(2a-3x)t^2e^{-t}.$$

### (b)

$$\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Vi får at

$$\frac{\partial R}{\partial t} = x^2(a-x)(2te^{-t} - t^2e^{-t}).$$

### (c)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 x}.$$

Vi får at

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 x} = 2at^2e^{-t} - 6xt^2e^{-t}.$$

### (d)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t}.$$

Vi får at

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} = x(2a-3x)(2t-t^2)e^{-t}.$$

## Opg. 9.2.69

The gravitational attraction $F$ on a body a distance $r$ from the center of the Earth, where $r$ is greater than the radius of Earth, is a function of its mass $m$ and the distance $r$ as follows:

$$F = \frac{mgR^2}{r^2},$$

where $R$ is the radius of Earth and $g$ is the force of gravity.

### (a)

Find and interpret $F_m$ and $F_r$.

$$F_m = \frac{\partial F}{\partial m} = \frac{gR^2}{r^2}.$$

Dette fortolkes som, at hvis afstanden, $r$, holdes konstant så vil kraften stige med ovenstående konstant.

$$F_r = \frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{2mgR^2}{r^3}.$$

Hvis afstanden $r$ øges, men massen $m$ holdes konstant så vil kraften falde

### (b)

Show that $F_m > 0$ and $F_r < 0$. Why is this reasonable?

Fordi vi ved at kraften stiger ved øget masse og falder ved øget afstand.

## Opg. 9.3.2

Find all points where the functions have any relative extrema. Identify any saddle points.

$$f(x, y) = 3xy + 6y - 5x.$$

Først findes $f_x$ og $f_y$ som

$$\begin{aligned} f_x &= 3y - 5 \\ f_y &= 3x + 6 \end{aligned}$$

Altså har vi et kritisk punkt for

$$\begin{aligned} 0 &= 3y - 5 & \qquad 0 &= 3x + 6 \\ y &= \frac{5}{3} & \qquad x &= -2 \end{aligned}$$

Altså er vores eneste kritiske punkt $(-2, \frac{5}{3})$. Vi tjekker om dette er et saddelpunkt ved at finde diskriminanten $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Altså findes de dobbeltafledede

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 0 \\ f_{yy} &= 0 \\ f_{xy} &= 3 \\ D &= -3^2 = -9 < 0. \end{aligned}$$

Altså er der ingen minima eller maksima men dog et saddelpunkt i $(-2, \frac{5}{3})$.

# Prøveeksamensopgave 16

Betragt funktionen

$$f(x, y) = 5x^2 + 10y^2 - 5xy - 9x.$$

Det oplyses at $f$ har et globalt minimum i $(x_0, y_0)$. Bestem $y_0$ når

$$y_0 = \frac{9}{k}.$$

Hvor $k$ er et helt tal mellem 0 og 99.

Først finder vi $f_x$ og $f_y$ som

$$\begin{aligned} f_x &= 10x - 5y - 9 \\ f_y &= 20y - 5x \end{aligned}$$

Altså har vi minimum i

$$\begin{aligned} 0 &= 10x - 5y - 9 & \qquad 0 &= 20y - 5x \\ x &= \frac{1}{2}y + \frac{9}{10} & \qquad 0 &= 20y - \frac{5}{2}y - \frac{9}{2} = \frac{35}{2}y - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{9}{35}.$$

Altså er $k = 35$.

# Opg. 9.3.31

Consider the function $f(x, y) = x^2(y + 1)^2 + k(x + 1)^2 y^2$.

---

### (a)

For what values of $k$ is the point $(x, y) = (0, 0)$ a critical point?

Vi finder først $f_x$ og $f_y$ som

$$f_x = 2x(y+1)^2 + 2k(x+1)y^2$$

og

$$f_y = 2x^2(y+1) + 2k(x+1)^2y.$$

Et kritisk punkt er hvor $f_x = 0$ og $f_y = 0$. Altså sættes punktet ind og ser for hvilke $k$-værdier det går op. Altså har vi at

$$0 = 2 \cdot 0(0+1)^2 + 2k(0+1)0^2$$
$$0 = 2 \cdot 0^2(0+1) + 2k(0+1)^2 \cdot 0$$

Det gælder altså for alle værdier af $k$.

### (b)

For what values of $k$ is the point $(x, y) = (0, 0)$ a relative minimum of the function? *Hint: Betragt $k = 0$ som et specialtilfælde.*

## Opg. 9.3.36

**Cost.** The total cost (in dollars) to produce $x$ units of electrical tape and $y$ units of packing tape is given by

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x - 94y + 4200.$$

Find the number of units of each kind of tape that should be produced so that the total cost is a minimum. Find the minimum total cost.