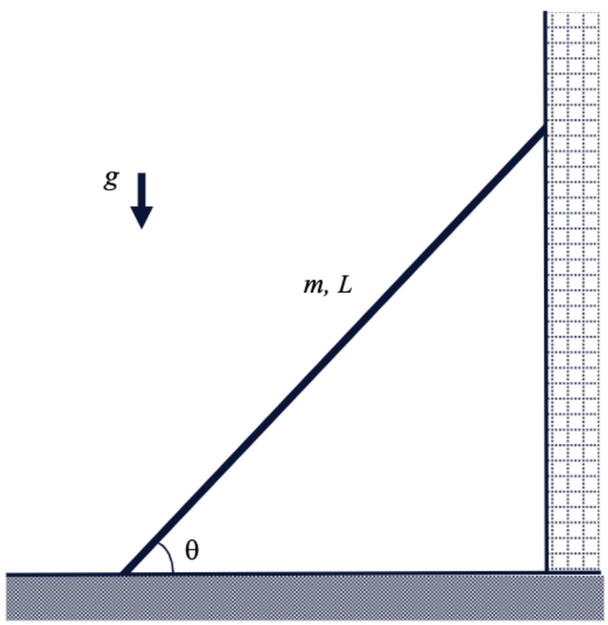
Eksamen i: Fysik og Mekanik

Noah Rahbek Bigum Hansen

20. december 2023 (15. December 2024)

1.

Figur 1:

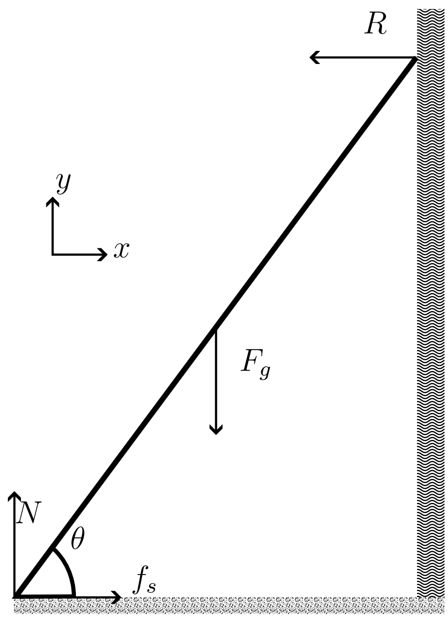


Toppen af en stige med længden L og massen m hviler op ad en fuldstændig glat væg, medens foden af stigen hviler på en vandret asfalteret flade (**Figur 1**). Lad μ_s være den statiske friktionskoefficient mellem asfalt og stige, og lad g være tyngdeaccelerationen. Bestem den mindste mulige vinkel θ mellem stigen og vandret hvorved stigen ikke glider.

Idet vi ønsker at finde den mindst mulige vinkel netop hvor der er statik, må det gælde at der er statik i scenariet. Vi har derfor at

$$\sum F_x = 0; \qquad \sum F_y = 0; \qquad \sum \tau = 0.$$

Dermed kan flg. sammenhænge opstilles



Figur 2: Fritlegemediagram

$$
\begin{aligned}
f_s - R &= 0 &&\implies && f_s = R \\
N - F_g &= 0 &&\implies && N = mg \\
RL\sin\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta &= 0 &&\implies && R\sin\theta = mg\frac{1}{2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

.

Vi får da at

$$R\tan\theta = \frac{1}{2}mg \implies R = \frac{1}{2}mg\frac{1}{\tan\theta}.$$

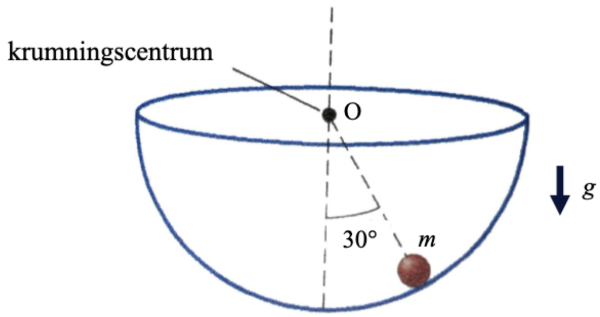
Dette kan vi nu indsætte i udtrykket for friktionskraften som

$$
\begin{aligned}
f_s &\geq R \\
mg\mu &\geq \frac{1}{2}mg\frac{1}{\tan\theta} \\
\tan\theta &\geq \frac{1}{2\mu} \\
\theta &\geq \tan^{-1}\frac{1}{2\mu}.
\end{aligned}
$$

2.

En sfærisk perle med massen m ligger i en skål med form af en hemisfære (dvs. en halvkugleformet skal), som vist i **Figur 3**. Perlen rulles lidt op ad skålens inderside, hvorefter den frigøres. Perlen ruller uden at glide. Perlens begyndelsesposition er således, at en imaginær

Figur 3:



linje tegnet fra dens centrum til skålens centrum O (krumningscentrum; eng: center of curvature) danner en vinkel på 30° med lodret; se igen **Figur 3**. Perlens radius $r = 10\,\mathrm{mm}$, medens skålens radius $R = 100\,\mathrm{mm}$. Det kan antages at tyngdeaccelerationen $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. Bestem perlens vinkelhastighed ω omkring dens egen massemidtpunkt i det øjeblik den er i skålens bund.

Idet det antages at der kan ses bort fra friktion er der mekanisk energibevarelse. Altså har vi at

$$k_0 + U_0 = k_1 + U_1.$$

Idet perlen antages at have en hastighed $v_0 = 0$ idet den slippes og nulpunktet for højden $y = 0$ sættes til skålens bund reduceres det ovenstående til

$$0 + U_0 = k_1 + 0 \implies U_0 = k_1 \tag{1}$$

Perlens starthøjde y_0 kan findes vha. trigonometri som

$$y_0 = R - \cos\theta \cdot R = 100\,\mathrm{mm} - \cos 30^\circ \cdot 100\,\mathrm{mm} = 13{,}4\,\mathrm{mm}.$$

Jf. Ligning 1 er perlens kinetiske energi på bunden af skålen

$$k_1 = mgy_0 = m \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 13{,}4\,\mathrm{mm} = 0{,}131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} m \tag{2}$$

Den samlede kinetiske energi k_1 for perlen består både af et bidrag fra dens rotationelle kinetiske og fra dens translatoriske kinetiske energi. Altså

$$k_1 = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2.$$

Hastigheden af massemidtpunktet v_{cm} for et objekt der ruller uden glidning er givet som

$$v_{cm} = r\omega.$$

Hvis udtrykket for hastigheden af massemidtpunktet v_{cm} sættes ind i udtrykket for den samlede kinetiske energi k_1 fås at

$$k_1 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2.$$

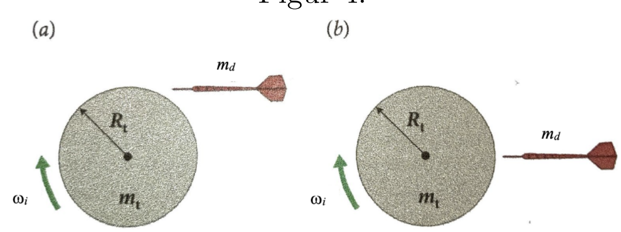
Inertimomentet for perlen omkring dens massemidtpunkt $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$, idet denne kan modelleres som en solid kugle. Indsættes i det ovenstående fås at

$$\begin{aligned}
0{,}131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}m &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \\
0{,}131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}m &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2 \\
0{,}131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} &= \frac{7}{10}r^2\omega^2 \\
\omega^2 &= \frac{10}{7}\cdot 0{,}131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{r^2} \\
\omega &= \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 0{,}131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{1}{(10\,\mathrm{mm})^2}} \\
\omega &= 43{,}3\,\mathrm{s}^{-1}.
\end{aligned}$$

Altså er perlens vinkelhastighed om sit eget massemidtpunkt i det den når bunden af skålen $\underline{\underline{\omega = 43{,}3\,\mathrm{s}^{-1}}}$

3.

Figur 4:



En jævntyk skive (eng.: disk) med radius R_t og masse m_t roterer med uret, med vinkelhastigheden ω_i omkring en akse som går gennem skivens centrum og som er vinkelret på skivens plan. En dartpil med massen m_d kastes ind mod skiven fra højre, som vist i **Figur 4 (a,b)**. Dartpilen rammer skiven med hastigheden v_d (mod venstre). Det kan antages at hele dartpilens masse er koncentreret i dens spids. Der kan ses bort fra tyngdeaccelerationen.

(a)

Bestem den resulterende vinkelhastighed ω_f hvis dartpilen rammer tangentielt til skivens periferi, således at dartpilens spids borer sig ind i skivens yderkant, som indikeret i **Figur 4 (a)**.

Grundet konservation af impulsmoment har vi at

$$L_0 = L_1 \implies -I_t \cdot \omega_i + R_t \cdot m_d \cdot v_d = (I_t + m_d \cdot R_t^2)\omega_f.$$

Den resulterende vinkelhastighed ω_f kan da isoleres som

$$\begin{aligned}\omega_f &= \frac{-I_t \cdot \omega_i + R_t \cdot m_d \cdot v_d}{I_t + m_d \cdot R_t^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}m_t R_t^2 \cdot \omega_i + R_t \cdot m_d \cdot v_d}{\frac{1}{2}m_t R_t^2 + m_d \cdot R_t^2} \\ &= \frac{m_d \cdot v_d \cdot \frac{1}{R_t} - \frac{1}{2}m_t \cdot \omega_i}{\frac{1}{2}m_t + m_d}.\end{aligned}$$

Altså er den resulterende vinkelhastighed, hvis dartpilen rammer som vist på **Figur 4 (a)** $\underline{\underline{\omega_f = \frac{m_d v_d \frac{1}{R_t} - \frac{1}{2}m_t\omega_i}{\frac{1}{2}m_t + m_d}}}$.

(b)

Bestem den resulterende vinkelhastighed ω_f hvis dartpilens spids i stedet rammer skiven – og borer sig ind i denne – langs en normal, dvs. langs en linje som går gennem skivens centrum som indikeret i **Figur 4 (b)**.

I dette tilfælde har dartpilen ikke nogen "kraftarm" og den har derfor intet impulsmoment. Vi får derfor fra impulsmomentkonservation at

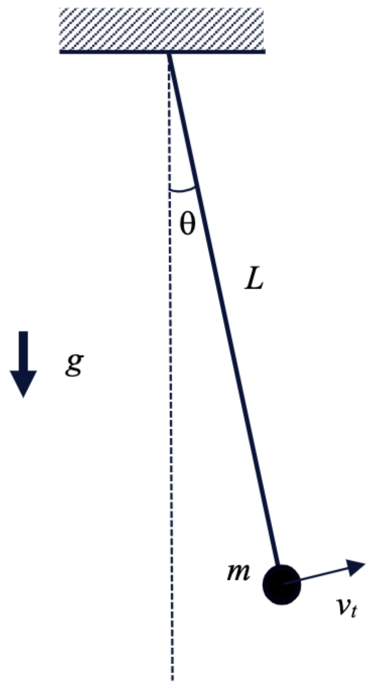
$$L_0 = L_1 \implies -I_t \cdot \omega_i = \left(I_t + m_d \cdot R_t^2\right)\omega_f.$$

I dette udtryk kan vi igen isolere den resulterende vinkelhastighed ω_f som

$$\begin{aligned}\omega_f &= \frac{-\frac{1}{2}m_t R_t^2 \cdot \omega_i}{\frac{1}{2}m_t R_t^2 + m_d R_t^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}m_t \omega_i}{\frac{1}{2}m_t + m_d}.\end{aligned}$$

Dermed har vi for tilfældet, hvor dartpilen rammer skiven langs en normal (**Figur 4 (b)**) at den resulterende vinkelhastighed $\underline{\underline{\omega_f = -\omega_i \frac{\frac{1}{2}m_t}{\frac{1}{2}m_t + m_d}}}$

Figur 5:



4.

Et simpelt (matematisk) pendul, bestående af en tynd snor med længden $L = 0{,}30\,\mathrm{m}$ og en kugle med massen $m = 0{,}30\,\mathrm{kg}$, udfører harmoniske svingninger omkring ligevægtspositionen $\theta = 0$, se **Figur 5**. Når massen m passerer det laveste punkt (ligevægtspositionen $\theta = 0$) har m den tangentielle (og horisontale) hastighed $|v_t| = 0{,}25\,\mathrm{m/s}$. Lad g betegne tyngdeaccelerationen ($g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$).

(a)

Bestem den maksimale vinkeldrejning (vinkelforskydning) θ_{max}, bort fra den vertikale ligevægtsposition, som pendulet opnår.

Idet det antages at pendulet er perfekt og derfor ikke har nogen friktion må der være energibevarelse. Altså gælder at den kinetiske energi idet pendulet passerer bunden k_0 må blive omdannet fuldstændig til en potentiel energi U_1 før pendulet stopper med at bevæge sig opad. Altså kan højden y til pendulets maksimalforskydning findes som

$$\begin{aligned} mgy_{maks} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ y_{maks} &= \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(0{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\ &= 0{,}003\,188\,775\,5\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

(*Bemærk:* Årsagen til at der er medtaget så mange decimaler som der er i udregningen ovenfor er for at undgå afrundingsfejl senere – dette er specielt vigtigt her fordi vinklen bliver relativt lille).
Ved pendulets maksimale udstrækning vil den lodrette afstand til det punkt, hvor pendulet er fastgjort altså være $L - y_{maks}$. Vi kan dernæst finde den maksimale vinkeldrejning θ_{max} vha. trigonometri som

$$\theta_{maks} = \cos^{-1}\frac{L - y_{maks}}{L} = \cos^{-1}\frac{0{,}30\,\mathrm{m} - 0{,}003\,188\,775\,5\,\mathrm{m}}{0{,}30\,\mathrm{m}} = 8{,}4°.$$

Altså er den maksimale vinkeldrejning $\underline{\underline{\theta_{maks} = 8{,}4°}}$

(b)

Bestem den tangentielle hastighed v_t når vinkeldrejningen $\theta = \theta_{max}/2$

Når vinkeldrejningen $\theta = \theta_{maks}/2 = 4{,}2°$ har pendulet en højde på

$$h = L - \cos\theta \cdot L = 0{,}30\,\mathrm{m} - \cos 4{,}2° \cdot 0{,}30\,\mathrm{m} = 0{,}000\,805\,656\,832\,662\,982\,\mathrm{m}.$$

Vi kan nu igen benytte konservation af mekanisk energi som

$$k_0 + U_0 = k_1 + U_1.$$

Her sættes nulpunktet til pendulets bund, således at leddet for den initiale potentielle energi udgår og slutpunktet sættes til punktet, hvor vinkeldrejningen $\theta = \theta_{max}/2$. Således fås

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\cdot v_i^2 &= \frac{1}{2}m\cdot v_f^2 + mgh \\ v_f^2 &= v_i^2 - gh \\ v_f &= \sqrt{v_i^2 - gh} \\ &= \sqrt{\left(0{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}000\,805\,656\,832\,662\,982\,\mathrm{m}} \\ &= 0{,}234\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Altså er hastigheden af pendulet $\underline{\underline{0{,}234\,\mathrm{m/s}}}$til vinklen $\theta = \theta_{max}/2$.