Afleveringsopgave til uge 9

Noah Rahbek Bigum Hansen

4. November 2024

Opg. 9.3.38

Profit. The profit (in thousands of dollars) that Aunt Mildred's Metalworks earns from producing x tons of steel and y tons of aluminum can be approximated by

$$P(x,y) = 36xy - x^3 - 8y^3.$$

Find the amounts of steel and aluminum that maximize the profit, and find the value of the maximum profit.

For at finde et relativt maksimum skal de afledede bestemmes. Vi får at

$$f_x = 36y - 3x^2$$
$$f_y = 36x - 24y^2$$

De kritiske punkter er alle punkter (a,b) for hvilke $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Altså sættes $f_x = f_y = 0$ så vi får at

$$0 = 36y - 3x^2 \qquad\qquad 0 = 36x - 24y^2$$
$$y = \frac{x^2}{12} \qquad\qquad 0 = 36x - \frac{x^4}{6}$$

Vi løser for x som

$$-\frac{x^4}{6} + 6^2x = 0$$
$$-x^4 + 6^3x = 0$$

Af ligningen ovenfor ses det hurtigt at løsningerne er $x = 0$ og $x = 6$. Altså får vi at

$$y = \frac{0^2}{12} = 0$$
$$y = \frac{6^2}{12} = 3$$

.

Vi har derfor de to løsninger $(0,0)$ og $(6,3)$. Vi finder de dobbeltafledede.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -9x \\ f_{yy} &= -48y \\ f_{xy} &= 36 \end{aligned}$$

Vi ved at i et maksimum er diskriminanten $D > 0$ og $f_{xx}(a,b) < 0$. Den eneste af vores løsninger, hvor $f_{xx} < 0$ er $(6,3)$ og vi undersøger derfor om dette er et maksimum ved at finde diskriminanten. Denne er defineret som

$$D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2.$$

Hvis vi sætter kendte værdier ind fås at

$$D = -9 \cdot 6 \cdot -48 \cdot 3 - 36^2 > 0.$$

Bemærk at vi ikke behøver at beregne den eksakte værdi af udtrykket ovenfor da det hurtigt ses at det første led er meget større end det andet led ($-9 \cdot 6 \cdot -48 \cdot 3 \gg 36^2$) og at diskriminanten derfor er større end 0 og vi ikke er interesserede i, hvor meget større end 0 denne er.
Altså gælder at både $D > 0$ og $f_{xx} < 0$ for punktet $(6,3)$, hvorfor dette punkt er et maksimum.