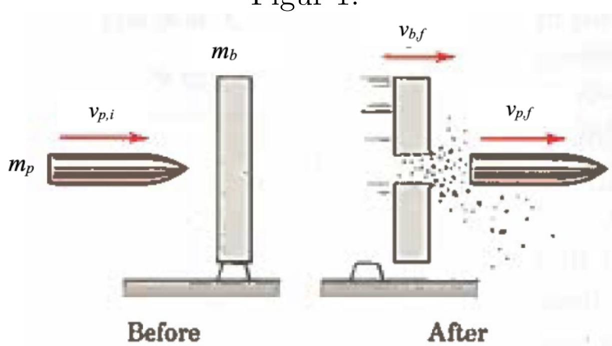
Eksamen i: Fysik og Mekanik

Noah Rahbek Bigum Hansen

21. december 2022 (14. December 2024)

1.

Figur 1:



Et projektil med massen m_p affyres vandret med farten $v_{p,i}$ ind i en stationær træblok med massen m_b . Projektilet passerer gennem træblokken og kommer ud gennem "bagsiden" med farten $v_{p,f}$. Bestem træblokkens endelige fart $v_{b,f}$, udtrykt ved de øvrige givne størrelser $(m_p, m_b, v_{p,i}, v_{p,f})$. Friktionen mellem træblokken og understøtningen/bordet (se **Figur 1**) kan antages at være forsvindende lille.

Fra impulsbevarelse har vi at

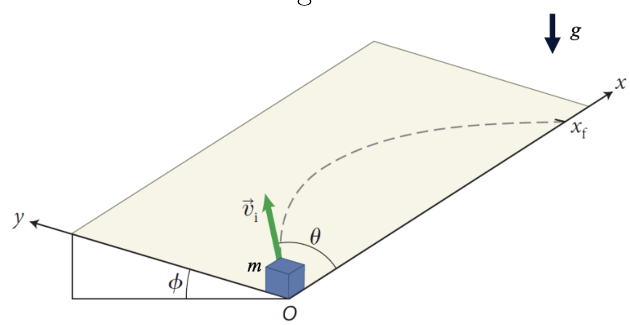
$$m_p \cdot v_{p,i} = m_p \cdot v_{p,f} + m_b \cdot v_{b,f}.$$

Heri kan træblokkens fart efter sammenstødet isoleres som

$$v_{b,f} = \frac{m_p \cdot v_{p,i} - m_p \cdot v_{p,f}}{m_b}$$
$$v_{b,f} = \frac{m_p \left(v_{p,i} - v_{p,f}\right)}{m_b}.$$

Altså er træblokkens fart efter sammenstødet $v_{b,f} = \frac{m_p\left(v_{p,i}-v_{p,f}\right)}{m_b}$

Figur 2:

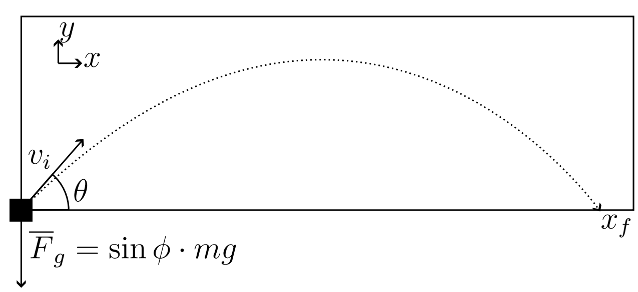


2.

Massen m er, for tider $t < 0$, i hvile i origo af et xy-koordinatsystem forbundet til et skråplan som har en hældning ϕ i forhold til vandret (**Figur 2**). Til tiden $t = 0$ "affyres" massen m nu op ad skråplanet med starthastigheden $\vec{v}_i$. Vinklen mellem $\vec{v}_i$ og x-aksen er givet ved θ, se igen **Figur 2**. Tyngdeaccelerationen betegnes med g. Friktion kan ignoreres.

(a)

Hvad er størrelsen og retningen af blokkens acceleration $\vec{a}$ i det angivne koordinatsystem? (Udtryk $\vec{a}$ ved enhedsvektorerne $\hat{\imath}$ og $\hat{\jmath}$, dvs. på formen $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$.)



Figur 3: Fritlegemediagram

Tyngdekraft-komposanten der peger 'nedad' i det angivne koordinatsystem $\overline{F}_g$ kan findes som

$$\overline{F}_g = \sin\phi \cdot F_g = \sin\phi mg.$$

Massens acceleration kan da findes vha. Newtons 2. lov idet den eneste kraft der virker på massen er tyngdekraften. Dette gøres som så

$$\begin{aligned} F &= ma \\ \implies a &= \frac{F}{m} \\ \implies a_b &= \frac{\overline{F}_g}{m} = \frac{\sin\phi mg}{m} = \sin\phi g. \end{aligned}$$

Tyngdekraften virker kun i retningen $-y$ således er $\vec{a}$ givet ved

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = -\sin\phi \cdot g\,\hat{\jmath}.$$

(b)

Udled et udtryk for massens hastighed som funktion af tiden t ($t > 0$), ligeledes udtrykt i enhedsvektorerne for det angivne koordinatsystem.

Massens hastighed til en given tid t kan findes vha. formlen for hastighed ved konstant acceleration som ser ud som følger

$$v = v_0 + at.$$

I x-retningen er der ingen kraft og dermed ingen acceleration og derfor er hastigheden i denne retning konstant

$$v_x = \cos\theta \cdot v_i.$$

I y-retningen virker der en kraft på massen og den får dermed en acceleration. Kraften der virker på massen er tyngdekraften, og denne er derfor konstant, hvilket medfører en konstant acceleration. Denne er fundet ovenfor til $a_y = -\sin\phi \cdot g$. Dermed fås altså

$$v_y = \sin\theta \cdot v_i - \sin\phi \cdot g \cdot t.$$

Altså bliver det samlede udtryk for $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (\cos\theta \cdot v_i)\,\hat{\imath} + (\sin\theta \cdot v_i - \sin\phi \cdot gt)\,\hat{\jmath}.$$

(c)

Hvad er den maksimale værdi af forskydning Δy langs y-aksen?

Idet origo sættes til det punkt hvor massen starter tilsvarer den maksimale værdi af forskydning langs y-aksen, Δy, den maksimale højde i kastet. For at finde ud af hvornår højden er maksimeret findes tiden t til $v_y = 0$. Altså har vi at

$$\begin{aligned} v_y &= 0 \\ 0 &= \sin\theta \cdot v_i - \sin\phi \cdot gt \\ \sin\phi \cdot gt &= \sin\theta \cdot v_i \\ t &= \frac{\sin\theta \cdot v_i}{\sin\phi \cdot g}. \end{aligned}$$

Denne værdi for t, hvor hastigheden er 0 kan nu indsættes i formlen for højden ved et skråt kast, som generelt ser ud som

$$y = (v_i \cdot \sin\theta)t - \frac{1}{2}at^2.$$

Sættes udtrykket for tiden t ind fås at

$$\begin{aligned} y_{maks} &= (v_i \cdot \sin\theta) \cdot \frac{\sin\theta \cdot v_i}{\sin\phi \cdot g} - \frac{1}{2} \cdot (-\sin\phi \cdot g) \cdot \left(\frac{\sin\theta \cdot v_i}{\sin\phi \cdot g}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2\theta \cdot v_i^2}{\sin\phi \cdot g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\theta \cdot v_i^2}{\sin\phi \cdot g} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\theta \cdot v_i^2}{\sin\phi \cdot g}. \end{aligned}$$

(d)

Hvad er blokkens maksimale forskydning Δx langs x-aksen?

Den maksimale forskydning Δx langs x-aksen, forstås i dette tilfælde som den maksimale afstand som blokken kommer til at bevæge sig før den glider ned af pladen (det punkt, der er betegnet x_f på fritlegemediagrammet). Altså skal findes det tidspunkt t hvor højden $y = 0$. Vi får altså

$$y = 0 \implies (v_i \cdot \sin\theta)t - \frac{1}{2}at^2 = 0.$$

Denne omskrives som

$$\begin{aligned} v_i \cdot \sin\theta \cdot t &= \frac{1}{2}at^2 \\ v_i \cdot \sin\theta &= \frac{1}{2}at \\ t &= \frac{2 \cdot v_i \cdot \sin\theta}{a}. \end{aligned}$$

Bemærk, at vi grundet division med t forkaster den løsning, hvor $t = 0$, dette er dog ikke et problem da dette er starttidspunktet og blokken ikke vil falde af blokken med det samme, medmindre enten $v_i = 0$ eller $\sin\theta = 0$, hvilket ikke vil give mening ift. opgaven. Dette udtryk for t kan nu indsættes i formlen for horisontal afstand i et skråt kast som ser ud som følger

$$x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \implies x = v_i \cdot \cos\theta \cdot \frac{2 \cdot v_i \cdot \sin\theta}{g \cdot \sin\phi}.$$

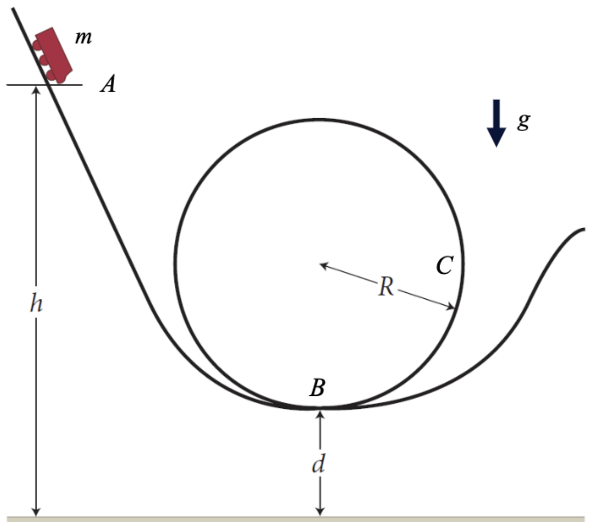
Dette omskrives til

$$\Delta x_{max} = \frac{2 \cdot v_i^2 \cos\theta \cdot \sin\theta}{g \cdot \sin\phi}.$$

3.

En rutsjebanevogn med massen m, hvis begyndelsesposition (position A) er i højden h over jorden, begynder en nedadgående tur langs et langt, stejlt skrånende sæt skinner, for derefter at gå ind i et cirkulært loop ("loop-the loop") med radius R, hvis bund er i afstanden d over jorden (**Figur 4**). Tyngdeaccelerationen betegnes med g. Friktion kan ignoreres.

Figur 4:



(a)

Hvad er vognens hastighed når den når bunden af loopet (position B)?

Idet friktionen kan ignoreres er der mekanisk energibevarelse. Vi har altså at

$$k_0 + U_0 = k_1 + U_1.$$

Derudover er $k_0 = 0$ idet vognen ikke har en hastighed i starten og $U_1 = 0$ da højdens nulpunkt sættes til højden til punktet B. Vi får altså at

$$mg(h-d) = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

Heri kan hastigheden til punktet B isoleres som

$$\frac{1}{2}v_B^2 = g(h-d)$$
$$v_B = \sqrt{2g(h-d)}.$$

Altså er vognens hastighed til punktet B $\underline{\underline{v_B = \sqrt{2g(h-d)}}}$.

(b)

Hvad er størrelsen af normalkraften virkende på vognen i det øjeblik?

De eneste to kræfter der virker på vognen i bunden af loopet udover normalkraften er centripetalkraften og tyngdekraften. Vi har altså at

$$N_B = F_{t,b} + F_{cen}.$$

Centripetalkraften er givet som

$$F_{cp} = ma_r = m \cdot \frac{v_{tan}^2}{R} = m\frac{v_B^2}{R}.$$

Og tyngdekraften kan findes med Newtons 2. lov som

$$F_{t,b} = mg.$$

Normalkraften N_B må da være

$$N_B = m\left(g + \frac{v_B^2}{R}\right).$$

Sættes udtrykker for v_B fundet i sidste opgave ind fås at normalkraften er

$$\begin{aligned} N_B &= m\left(g + \frac{2g(h-d)}{R}\right) \\ &= mg\left(1 + 2 \cdot \frac{h-d}{R}\right). \end{aligned}$$

(c)

Hvad er vognens hastighed, når dens position er en fjerdedel af vejen rundt om loopet (position C)?

I dette tilfælde har vi igen en mekanisk energibevarelse og dermed at

$$k_B + U_B = k_C + U_C \implies \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgR.$$

Heri kan vognens hastighed ved punkt C, v_C isoleres som

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_C^2 &= \frac{1}{2}mv_B^2 - mgR \\ v_C &= \sqrt{v_B^2 - 2gR} \\ v_C &= \sqrt{2g(h-d) - 2gR} \\ v_C &= \sqrt{2g(h-d-R)}. \end{aligned}$$

(d)

Hvad er størrelsen af normalkraften på vognen i position C?

Til punktet C kommer tyngdekraften ikke til at bidrage til normalkraften, da tyngdekraften er parallel med skinneren netop i dette punkt. Derfor må hele bidraget komme fra centripetalkraften. Vi har dermed at

$$N_C = m\frac{v_C^2}{R} = m \cdot \frac{2g(h-d-R)}{R}.$$

(e)

Hvad er vognens acceleration i position C?

De kræfter der virker på vognen i position C er tyngdekraften (nedad) og centripetalkraften (indad). Vi har tidligere fundet udtryk for disse to som

$$\begin{aligned} F_{g,C} &= mg \\ F_{cp} &= m\frac{v_C^2}{R} = m\frac{2g(h-d-R)}{R}. \end{aligned}$$

For at omregne disse to til accelerationer kan vi blot dividere med massen m jf. Newtons 2. lov som

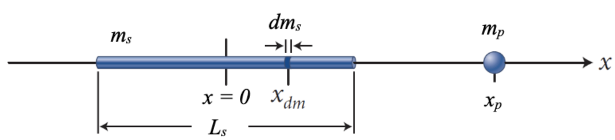
$$\begin{aligned} a_{g,C} &= g \\ a_{cp} &= 2g\frac{h-d-R}{R}. \end{aligned}$$

Den samlede acceleration er vektorsummen af disse to. Tegnes et almindeligt koordinatsystem således at både tyngdekraften og centripetalkraften virker i negativ retning bliver accelationsvektoren altså

$$\vec{a} = -g\hat{\imath} - 2g\frac{h-d-R}{R}\hat{\jmath} = -g\left(\hat{\imath} + 2\frac{h-d-R}{R}\hat{\jmath}\right).$$

4.

Figur 5:



En jævntyk stang med massen m_s og længden L_s er placeret langs aksen x, langt fra nogen stjerne eller planet, med stangens midtpunkt i $x = 0$ (**Figur 5**). En punktmasse m_p er placeret i $x = x_p$.

(a)

Opskriv et udtryk for den til massetiltrækningen hørende potentielle energi U for et system bestående af punktmassen m_p og et lille infinitesimalt element $\mathrm{d}m_s$ af stangen, placeret i $x = x_{dm}$ ($x_{dm} > 0$). Vink: Vi kan skrive $\mathrm{d}m_s = \frac{m_s}{L_s}\,\mathrm{d}x_{dm}$, hvor $\mathrm{d}x_{dm}$ er længden af elementet $\mathrm{d}m_s$.

Vi har fra opgaven at

$$\mathrm{d}m_s = \frac{m_s}{L_s}\mathrm{d}x_{dm}.$$

Den potentielle energi i et tyngdefelt er generelt givet som

$$U = -G\frac{Mm}{r}.$$

Afstanden r mellem de to masser er $x_p - x_{dm}$, de to masser er $m = m_p$ og $M = \mathrm{d}m_s$. Vi får derfor flg. udtryk for den infinitesimale potentielle energi mellem den infinitesimale del af stangen og punktmassen

$$\mathrm{d}U = -G\frac{\mathrm{d}m_s \cdot m_p}{x_p - x_{dm}} = -G\frac{m_s \cdot m_p \,\mathrm{d}x_{dm}}{L_s(x_p - x_{dm})}.$$

(b)

Integrer det i spørgsmål (a) fundne udtryk over stangens længde, og bestem således systemets potentielle energi for $x_p > \frac{L_s}{2}$.

Vi opstiller først integralet som

$$U = \int_{-\frac{L_s}{2}}^{\frac{L_s}{2}} -\frac{G \cdot m_s \cdot m_p}{L_s}\frac{\mathrm{d}x_{dm}}{x_p - x_{dm}} = -\frac{G \cdot m_s \cdot m_p}{L_s}\int_{-\frac{L_s}{2}}^{\frac{L_s}{2}} \frac{\mathrm{d}x_{dm}}{x_p - x_{dm}}.$$

Vi sætter $k = \frac{G \cdot m_s \cdot m_p}{L_s}$ i det følgende for at lette opskrivningen. Vi sætter $g(x_{dm}) = x_p - x_{dm}$ og kan derfor benytte kædereglen på $\mathrm{d}x_{dm}$ som

$$\begin{aligned}
U &= -k\int_{-\frac{L_s}{2}}^{\frac{L_s}{2}} \frac{-\mathrm{d}(x_p - x_{dm})}{x_p - x_{dm}} \\
&= k\int_{-\frac{L_s}{2}}^{\frac{L_s}{2}} \frac{1}{x_p - x_{dm}}\,\mathrm{d}(x_p - x_{dm}) \\
&= k\left[\ln(x_p - x_{dm})\right]_{-\frac{L_s}{2}}^{\frac{L_s}{2}} \\
&= k\left(\ln(x_p - \frac{L_s}{2}) - \ln(x_p + \frac{L_s}{2})\right) \\
&= k\ln\left(\frac{x_p - \frac{L_s}{2}}{x_p + \frac{L_s}{2}}\right) \\
&= \frac{Gm_sm_p}{L_s}\ln\left(\frac{x_p - \frac{L_s}{2}}{x_p + \frac{L_s}{2}}\right).
\end{aligned}$$

(c)

Det kan vises, at for et system som det her givne, er massetiltrækningskraften mellem stangen og punktmassen givet ved $F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$. Udregn (evaluer) kraften F_x for det givne system, med punktmassen placeret i et vilkårligt $x = x_p$ (dog stadig med $x_p > \frac{L_s}{2}$).

Vi kan indsætte udtrykket fundet i sidste opgave i formlen fra opgaven som

$$-F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_p} k \ln\left(\frac{x_p - \frac{L_s}{2}}{x_p + \frac{L_s}{2}}\right).$$

Vi sætter $f(x_p) = \frac{x_p - \frac{L_s}{2}}{x_p + \frac{L_s}{2}}$ og får dermed et udtryk på formen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(f(x)) = \frac{1}{f_x}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Vi får dermed at

$$\begin{aligned}
-F_x &= k \cdot \frac{x_p + \frac{L_s}{2}}{x_p - \frac{L_s}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_p} \frac{x_p - \frac{L_s}{2}}{x_p + \frac{L_s}{2}} \\
&= k \cdot \frac{x_p + \frac{L_s}{2}}{x_p - \frac{L_s}{2}} \frac{\left(x_p + \frac{L_s}{2}\right) - \left(x_p - \frac{L_s}{2}\right)}{\left(x_p + \frac{L_s}{2}\right)^2} \\
&= k \cdot \frac{x_p + \frac{L_s}{2}}{x_p - \frac{L_s}{2}} \frac{L_s}{\left(x_p + \frac{L_s}{2}\right)^2} \\
&= k \frac{L_s}{\left(x_p + \frac{L_s}{2}\right)\left(x_p - \frac{L_s}{2}\right)} \\
&.
\end{aligned}$$

Vi får dermed at

$$F_x = -\frac{G m_s m_p}{L_s} \cdot \frac{L_s}{\left(x_p + \frac{L_s}{2}\right)\left(x_p - \frac{L_s}{2}\right)} = -\frac{G m_s m_p}{\left(x_p + \frac{L_s}{2}\right)\left(x_p - \frac{L_s}{2}\right)}.$$