Opgaver til forelæsning 27

Noah Rahbek Bigum Hansen

11. December 2024

Opg. 15.9

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

Which of the following wave functions satisfies the wave equation, **Ligning 1**?

(a)

$$y(x,t) = A\cos(kx + \omega t);$$

Den givne bølgefunktion indsættes i bølgeligningen som

$$\frac{\partial^2 A\cos(kx+\omega t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A\cos(kx+\omega t)}{\partial t^2}.$$

Den anden partielt afledede kan nu findes på begge sider som

$$-A \cdot k^2 \cdot \cos(kx+\omega t) = -\frac{1}{v^2} \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \cos(kx+\omega t).$$

Det ovenstående reducerer til

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \implies v = \frac{\omega}{k} \implies v = \frac{\omega\lambda}{2\pi} \implies v = f\lambda.$$

Altså er det vist.

(b)

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t);$$

Benyttes samme fremgangsmåde som ovenfor fås

$$-Ak^2 \sin(tw + kx) = -\frac{1}{v^2}Aw^2\sin(tw+kx).$$

Hvilket reducerer til

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

Altså er det vist

(c)

$$y(x,t) = A(\cos kx + \cos \omega t).$$

Igen benyttes samme fremgangsmåde så

$$-Ak^2 \cos(kx) = -\frac{1}{v^2} Aw^2 \cos(tw).$$

Hvilket reducerer til

$$v^2 \cos(kx) = \frac{\omega^2}{k^2} \cos(\omega t).$$

Altså er de to sider ikke ækvivalente og derfor opfylder bølgefunktionen ikke bølgeligningen.

(d)

For the wave of part (b), write the equation for the transverse velocity and transverse acceleration of a particle at point x.

Først findes hastigheden som den første partielt afledede mht. tid t af bølgefunktionen $y(x,t)$ som

$$v_y(x,t) = -Aw \sin(tw + kx).$$

Og den anden partielt afledede mht. tid t giver accelerationen. Altså

$$a_y(x,t) = -Aw^2 \cos(tw + kx).$$

Opg. 15.12

$$y(x,t) = A \cos\left(\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right) \tag{2}$$

Speed of Propagation vs. Particle speed.

(a)

Show that **Ligning 2** may be written as

$$y(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right).$$

I det følgende vises hvordan der omskrives fra **Ligning 2** til funktionen i opgaven.

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= A \cos\left(\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right) \\
&= A \cos\left(\frac{\omega}{v}(x - vt)\right) \\
&= A \cos(k(x - vt)) \\
&= A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right).
\end{aligned}$$

(b)

Use $y(x,t)$ to find an expression for the transverse velocity v_y of a particle in the string on which the wave travels.

Den tidsafledte til positionen $y(x,t)$ er lig hastigheden $v_y(x,t)$ så altså findes den tidsafledte af $y(x,t)$ som

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right)}{\partial t}\\ v_y(x,t) &= \frac{2\pi \cdot A \cdot v \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right)}{\lambda}.\end{aligned}$$

(c)

Find the maximum speed of a particle of the string. Under what circumstances is this equal to the propagation speed v? Less than v? Greater than v?

Den maksimale hastighed må forekomme for $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right) = 1$. Altså

$$v_{y_{\max}} = \frac{2\pi \cdot A \cdot v}{\lambda}.$$

Denne størrelse $v_{y_{\max}} = v$ for

$$\frac{2\pi \cdot A \cdot v}{\lambda} = v \implies \frac{2\pi A}{\lambda} = 1.$$

Altså at

$$\begin{aligned}2\pi A &= \lambda\\ A &= \frac{\lambda}{2\pi}.\end{aligned}$$

Dermed gælder at $v_{y_{\max}} = v$ for $A = \frac{\lambda}{2\pi}$; $v_{y_{\max}} < v$ for $A < \frac{\lambda}{2\pi}$ og $v_{y_{\max}} > v$ for $A > \frac{\lambda}{2\pi}$.

Opg. 15.23

A horizontal wire is stretched with a tension of 94,0 N, and the speed of transverse waves for the wire is 406 m/s. What must the amplitude of a traveling wave of frequency 69,0 Hz be for the average power carried by the wave to be 0,365 W?

Først kan massen pr. længdeenhed findes vha. formlen

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Massen pr. længdeenhed μ kan isoleres som

$$v^2 = \frac{F}{\mu}$$
$$\mu = \frac{F}{v^2}.$$

Formen for den gennemsnitlige effekt af en sinusoidal bølge på en snor er

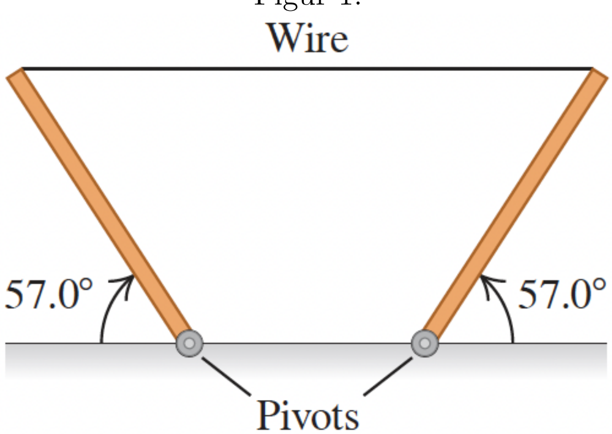
$$P_{av} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2 \implies P_{av} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F^2}{v^2}}\omega^2 A^2.$$

I det ovenstående kan amplituden A nu isoleres som

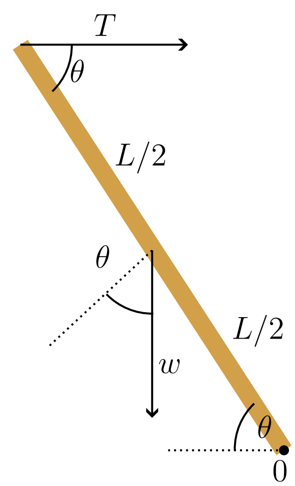
$$\begin{aligned} 2P_{av} &= \frac{F}{v}\omega^2 A^2 \\ A^2 &= 2P_{av}\frac{v}{F \cdot \omega^2} \\ A &= \sqrt{\frac{2P_{av} \cdot v}{F \cdot \omega^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}365\,\mathrm{W} \cdot 406\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{94{,}0\,\mathrm{N} \cdot (2\pi \cdot 69{,}0\,\mathrm{Hz})^2}} \\ &= 0{,}004\,10\,\mathrm{m} \approx 4{,}10\,\mathrm{mm}. \end{aligned}$$

Opg. 15.53

Figur 1:



A 5,00 m, 0,732 kg wire is used to support two uniform 235 N posts of equal length (**Figur 1**). Assume that the wire is essentially horizontal and that the speed of sound is 344 m/s. A strong wind is blowing, causing the wire to vibrate in its 5th overtone. What are the frequency and wavelength of the sound this wire produces?



Figur 2: Fritlegemediagram

For at der kan være statisk ligevægt gælder det at

$$\sum \tau_0 = 0.$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned}
0 &= w \cdot \cos\theta \left(\frac{L}{2}\right) - T\sin\theta L \\
T\sin\theta L &= w\cos\theta \frac{L}{2} \\
T &= \frac{1}{2} w \cot\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot 235\,\mathrm{N} \cot 57{,}0^\circ \\
&= 76{,}3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

For at finde den 5. overtone (6. harmonic) benyttes formlen

$$f_6 = \frac{6}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Massen pr. længdeenhed findes ved simpel division som

$$\mu = \frac{0{,}732\,\mathrm{kg}}{5{,}00\,\mathrm{m}} = 0{,}1464\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

Og spændingen i snoren $F = T$. Altså kan kendte størrelser sættes ind i formlen som

$$\begin{aligned}
f_6 &= \frac{6}{2 \cdot 5{,}00\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{76{,}3\,\mathrm{N}}{0{,}1464\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}}} \\
&= 13{,}69\,\mathrm{Hz}.
\end{aligned}$$

Denne frekvens tilsvarer frekvensen af den producerede lyd. Bølgelængden af lyden kan derfor findes som

$$\lambda = \frac{v}{f} \implies \lambda = \frac{344\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{13{,}69\,\mathrm{Hz}} = 25{,}1\,\mathrm{m}.$$

Opg. 15.61

A sinusoidal transverse wave travels on a string. The string has length 8,00 m and mass 6,00 g. The wave speed is 30,0 m/s, and the wavelength is 0,200 m.

(a)

If the wave is to have an average power of 50,0 W, what must be the amplitude of the wave?

Vi har den generelle formel for den gennemsnitlige effekt for en sinusoidal bølge på en snor som

$$P_{av} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2.$$

I denne kan amplituden isoleres som

$$\begin{aligned} 2P_{av} &= \sqrt{\mu F}\omega^2 A^2 \\ A &= \sqrt{\frac{2P_{av}}{\sqrt{\mu F}\omega^2}}. \end{aligned}$$

Kraften kan isoleres i formlen

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

som

$$F = \mu v^2.$$

Sættes dette ind bliver det samlede udtryk for amplituden

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{2P_{av}}{\sqrt{\mu^2 v^2}\omega^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2P_{av}}{\mu v \omega^2}}. \end{aligned}$$

Vinkelfrekvensen er relateret til frekvens som

$$\omega = 2\pi f.$$

Og frekvensen kan findes vha. bølgelænden λ og bølgehastigheden v som

$$f = \frac{v}{\lambda}.$$

Altså bliver vinkelfrekvensen

$$\omega = 2\pi\frac{v}{\lambda} \implies \omega^2 = 4\pi^2\frac{v^2}{\lambda^2}.$$

Det samlede udtryk for amplituden bliver altså

$$A = \sqrt{\frac{P_{av}\lambda^2}{2\pi^2 \cdot \mu \cdot v^3}}.$$

Sættes kendte størrelser ind fås

$$A = \sqrt{\frac{50{,}0\,\mathrm{W} \cdot (0{,}200\,\mathrm{m})^2}{2\pi^2 \cdot \frac{0{,}006\,00\,\mathrm{kg}}{8{,}00\,\mathrm{m}} \cdot \left(30{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3}} = 0{,}0707\,\mathrm{m} = 7{,}07\,\mathrm{cm}.$$

(b)

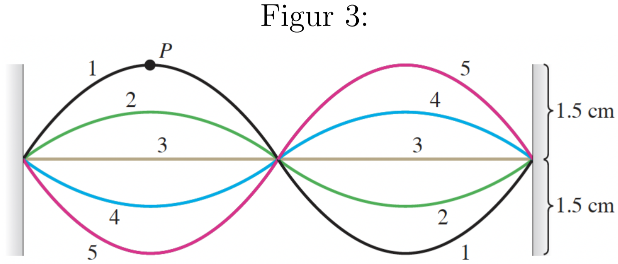
For this same string, if the amplitude and wavelength are the same as in part (a), what is the average power for the wave if the tension is increased such that the wave speed is doubled?

Vi har at $P_{av} \sim v^3$. Altså gælder at hvis v fordobles så bliver P_{av} 8 gange størrere. Altså bliver den gennemsnitlige effekt

$$P_{av} = 8 \cdot 50{,}0\,\mathrm{W} = 400\,\mathrm{W}.$$

Opg. 15.62

Figur 3:



A vibrating string 50,0 cm long is under a tension of 1,00 N. The results from five successive stroboscopic pictures are shown in **Figur 3**. The strobe rate is set at 5000 flashes per minute, and observations reveal that the maximum displacement occurred at flashes 1 and 5 with no other maxima in between.

(a)

Find the period, frequency, and wavelength for the traveling waves on this string.

Der bliver taget 5000 billeder i minuttet og fra billede 1 til billede 5 ($\frac{1}{2}$ svingning) er der 4 billeder. Altså er der 8 billeder på en hel svingning. Derfor må frekvensen være

$$f = \frac{5000\,\mathrm{min}^{-1}}{8 \cdot 60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}} = 10{,}42\,\mathrm{Hz}.$$

Dette giver en periode på

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10{,}42\,\mathrm{Hz}} = 0{,}096\,\mathrm{s}.$$

Der er netop 1 bælgelængde over hele strengen og dermed har vi at $\lambda = 50{,}0\,\mathrm{cm}$.

(b)

In what normal mode (harmonic) is the string vibrating?

Strengen vibrerer i sin 1. overtone og altså sin 2. *harmonic* idet der netop er en hel bølgelængde på strengen (fundamentalfrekvensen ville tilsvare en halv bølgelængde over strengens længde).

(c)

What is the speed of the traveling waves on the string?

Bølgehastigheden v er produktet af bølgelængden λ og frekvensen f. Så

$$v = \lambda f = 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 10{,}42\,\mathrm{Hz} = 5{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(d)

How fast is point P moving when the string is in

(i)

position 1 and

I position 1 oplever snoren sin maksimale forskydning og derfor må hastigheden her være $v_y = 0$.

(ii)

position 3?

Her oplever snoren sin maksimale hastighed $v_y = v_{y_{\max}} = A\omega$. Altså er hastigheden her

$$v_{y_{\max}} = A\omega = A2\pi f = 1{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 2\pi \cdot 10{,}42\,\mathrm{Hz} = 0{,}982\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(e)

What is the mass of this string?

Det vides at

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies \mu = \frac{F}{v^2}.$$

Vi har tidligere fundet bølgehastigheden v og spændingen i snoren $F = 1{,}00\,\mathrm{N}$ er givet i opgaven. Altså kan massen pr. længde μ findes som

$$\mu = \frac{1{,}00\,\mathrm{N}}{\left(5{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 0{,}0369\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

Og snorens masse m kan da findes som

$$m = \mu \cdot l = 0{,}0369\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot 50{,}0\,\mathrm{cm} = 0{,}0185\,\mathrm{kg} = 18{,}5\,\mathrm{g}.$$

Opg. 15.69

A large rock that weighs 164,0 N is suspended from the lower end of a thin wire that is 3,00 m long. The density of the rock is $3200\,\mathrm{kg/m^3}$. The mass of the wire is small enough that its effect on the tension in the wire can be ignored. The upper end of the wire is held fixed. When the rock is in air, the fundamental frequency for transverse standing waves on the wire is 42,0 Hz. When the rock is totally submerged in a liquid, with the top of the rock just below the surface, the fundamental frequency for the wire is 28,0 Hz. What is the density of the liquid?

Idet bølgen er "fastspændt" i begge ender må det i begge tilfælde gælde at bølgelænden $\lambda = 2L = 6{,}00\,\mathrm{m}$. Bølgehastigheden for bølgen i luft kan nu findes som

$$v_{air} = f_{air}\lambda = 42{,}0\,\mathrm{Hz} \cdot 6{,}00\,\mathrm{m} = 252\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Vi har også at

$$v_{air} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies \mu = \frac{F}{v_{air}^2}.$$

Sættes værdier ind kan massen pr. længde μ findes som

$$\mu = \frac{164{,}0\,\mathrm{N}}{\left(252\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 0{,}002\,58\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} = 2{,}58 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

Bølgehastigheden i væsken kan findes som ovenfor

$$v_l = f_l\lambda = 28{,}0\,\mathrm{Hz} \cdot 6{,}00\,\mathrm{m} = 168\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Og denne må være lig

$$v_l = \sqrt{\frac{F - B}{\mu}} \implies B = F - v_l^2 \cdot \mu.$$

Sættes kendte størrelser ind kan størrelsen af opdriften findes som

$$B = 164{,}0\,\mathrm{N} - \left(168\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 2{,}58 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} = 91{,}2\,\mathrm{N}.$$

Størrelsen af opdriftskraften er også givet ved følgende formel

$$B = \rho V g \implies \rho = \frac{B}{Vg}.$$

Stenens volumen kan findes som

$$m = \frac{F}{g} = \frac{164{,}0\,\mathrm{N}}{9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 16{,}7\,\mathrm{kg}$$
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{16{,}7\,\mathrm{kg}}{3200\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 0{,}005\,22\,\mathrm{m}^3.$$

Og altså kan densiteten af væsken findes som

$$\rho = \frac{91{,}2\,\mathrm{N}}{0{,}005\,22\,\mathrm{m}^3 \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1782{,}78\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1{,}78 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$