Opgaver til forelæsning uge 22

Noah Rahbek Bigum Hansen

26. November 2024

Opg. 11.29

A metal rod that is 4,00 m long and 0,50 cm^2 in cross-sectional area is found to stretch 0,20 cm under a tension of 5000 N . What is Young's modulus for this metal?

Youngs modul for et materiale er givet som

$$Y = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

Vi finder spændingen i materialet σ som

$$\sigma = \frac{F_\perp}{A} = \frac{5000\,\mathrm{N}}{0{,}50\,\mathrm{cm}^2} = 1 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa}.$$

Og tøjningen som

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0{,}20\,\mathrm{cm}}{4{,}00\,\mathrm{m}} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Vi kan derfor finde Youngs modul som

$$Y = \frac{1 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa}}{5 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

Opg. 11.43

In a materials testing laboratory, a metal wire made from a new alloy is found to break when a tensile force of 90,8 N is applied perpendicular to each end. If the diameter of the wire is 1,84 mm, what is the breaking stress of the alloy?

Vi har generelt spændingen som

$$\sigma = \frac{F_\perp}{A}.$$

Vi mangler derfor blot at beregne tværsnitsarealet af ledningen som

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1{,}84\,\mathrm{mm}}{2}\right)^2 = 2{,}659 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2.$$

Vi kan derfor finde brudspændingen som

$$\sigma_{max} = \frac{90{,}8\,\mathrm{N}}{2{,}659 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 3{,}41 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa}.$$

Opg. 11.44

A steel cable with cross-sectional area $3{,}00\,\mathrm{cm}^2$ has an elastic limit of $2{,}4 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa}$. Find the maximum upward acceleration that can be given a $1200\,\mathrm{kg}$ elevator supported by the cable if the stress is not to exceed one-third of the elastic limit.

Først findes den maksimalt tilladte spænding som

$$\sigma_{max} = \frac{1}{3}\sigma = 8{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa}.$$

Vi finder dernæst den maksimalt tilladte kraft på næsten samme måde som i Opg. 11.43

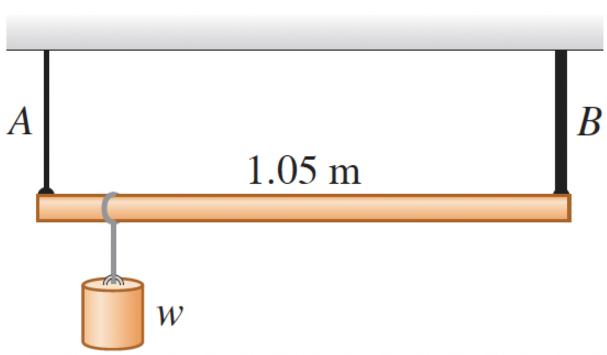
$$F_\perp = A\sigma_{max} = 3{,}00\,\mathrm{cm}^2 \cdot 8{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa} = 24{,}0\,\mathrm{kN}.$$

Newtons 2. lov kan nu bruges til at finde den maksimale acceleration af elevatoren som idet vi husker at den samlede kraft på snoren er summen af et bidrag fra kraften opad og et bidrag fra tyngdekraften. Altså har vi

$$\begin{aligned} F &= m(a+g) \\ a &= \frac{F}{m} - g \\ &= \frac{24{,}0\,\mathrm{kN}}{1200\,\mathrm{kg}} - 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 10{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \end{aligned}$$

Opg. 11.83

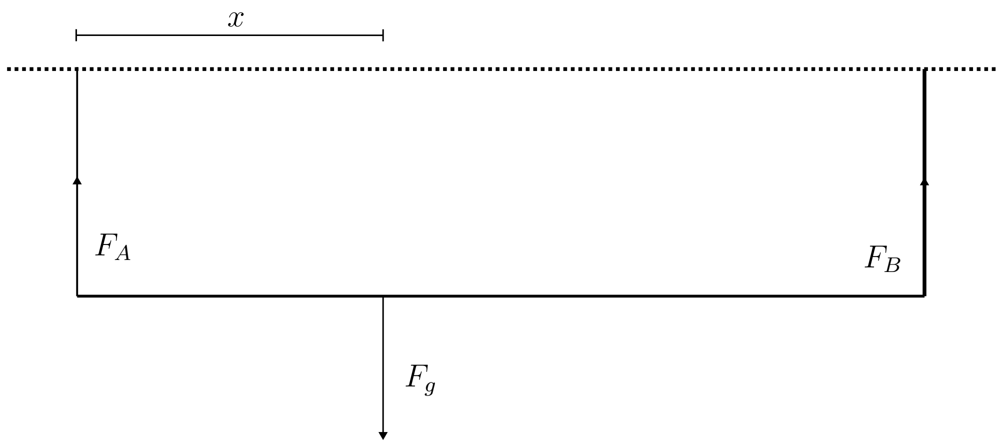
Figur 1:



A $1{,}05\,\mathrm{m}$-long rod of negligible weight is supported at its ends by wires A and B of equal length (**Figur 1**). The cross-sectional area of A is $2{,}00\,\mathrm{mm}^2$ and that of B is $4{,}00\,\mathrm{mm}^2$. Young's modulus for wire A is $1{,}80 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$; that for B is $1{,}20 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$. At what point along the rod should a weight w be suspended to produce

(a)

Equal stresses in A and B?



Figur 2: Fritlegemediagram

Først findes et udtryk for kraften i hhv. A og B som funktion af placeringen af vægten w. Vi lader x betegne afstanden fra A's fæstningspunkt på stangen til punktet på stangen, hvor w hænger fra. Se evt. **Figur 2**. Vi sætter $x = 0$ til vores 0-punkt og kan derfor finde et udtryk for F_A og F_B med betingelserne for statik som

$$\sum F_y = F_A + F_B - w = 0$$

og

$$\sum \tau = -w \cdot x + F_B \cdot l = 0.$$

Vha. betingelsen for momenter kan vi skrive

$$F_B = \frac{w \cdot x}{l}.$$

Og dermed har vi at

$$F_A = w - F_B = w - \frac{w \cdot x}{l} = w \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Dernæst kan vi fortsætte til at finde ud af hvornår de to spændinger produceret er ens. Spændingen er generelt givet som

$$\sigma = \frac{F_\perp}{A}.$$

Vi har altså at

$$
\begin{aligned}
\frac{w \cdot x}{l \cdot A_B} &= \frac{w}{A_A}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\
\frac{x}{l \cdot A_B} &= \frac{1}{A_A}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\
\frac{A_A \cdot x}{l} &= A_B\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\
A_A \frac{x}{l} &= A_B - A_B \cdot \frac{x}{l} \\
A_B &= (A_A + A_B)\frac{x}{l} \\
x &= \frac{A_B \cdot l}{A_A + A_B} \\
&= \frac{4{,}00\,\mathrm{mm}^2 \cdot 1{,}05\,\mathrm{m}}{2{,}00\,\mathrm{mm}^2 + 4{,}00\,\mathrm{mm}^2} \\
&= 0{,}700\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Altså skal vægten w placeres ved $x = 0{,}700\,\mathrm{m}$ for at opnå ens spænding i de to reb.

(b)

Equal strains in A and B?

Vi har tidligere fundet spændingen i begge reb som funktion af placeringen af vægten w. Idet vi har at

$$Y = \frac{\sigma}{\epsilon} \implies \epsilon = \frac{\sigma}{Y}.$$

Kan vi omregne disse to udtryk for spændingen i hhv. A og B til tøjninger i hhv. A og B. Vi får altså

$$\epsilon_A = \frac{\sigma_A}{Y_A} = \frac{w}{A_A \cdot Y_A}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

og

$$\epsilon_B = \frac{w \cdot x}{l \cdot Y_B}.$$

Disse to sættes lig hinanden så vi får at

$$
\begin{aligned}
\epsilon_A &= \epsilon_B \\
\frac{w}{A_A \cdot Y_A}\left(1 - \frac{x}{l}\right) &= \frac{w \cdot x}{l \cdot Y_B}.
\end{aligned}
$$

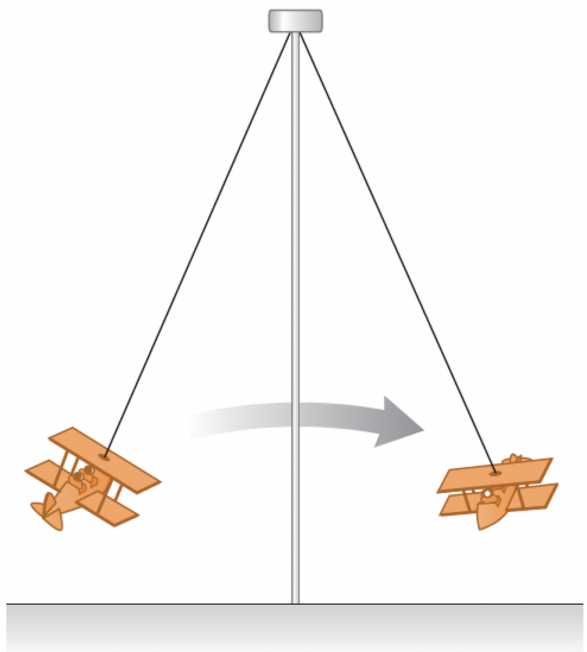
Vi ser altså, at dette tilsvarer tilfældet fra (a), dog med A byttet ud med AY. Vi får altså at løsningen bliver

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{A_B Y_B \cdot l}{A_A E_A + A_B E_B} \\
&= \frac{4{,}00\,\mathrm{mm}^2 \cdot 1{,}20 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa} \cdot 1{,}05\,\mathrm{m}}{4{,}00\,\mathrm{mm}^2 \cdot 1{,}20 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa} + 2{,}00\,\mathrm{mm}^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}} \\
&= 0{,}600\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Altså skal vægten w placeres ved $x = 0{,}600\,\mathrm{m}$ for at A og B får samme tøjning.

Opg. 11.84

Figur 3: d



An amusement park ride consists of airplane-shaped cars attached to steel rods (**Figur 3**). Each rod has a length of $15{,}0\,\mathrm{m}$ and a cross-sectional area of $8{,}00\,\mathrm{cm}^2$. The rods are attached to a frictionless hinge at the top, so that the cars can swing outward when the ride rotates.

(a)

How much is each rod stretched when it is vertical and the ride is at rest? (Assume that each car plus two people seated in it has a total weight of $1900\,\mathrm{N}$.)

Først findes spændingen σ som

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1900\,\mathrm{N}}{8{,}00\,\mathrm{cm}^2} = 2{,}375 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}.$$

Youngs modul for stål er ifølge bogen $Y_{steel} = 20 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa}$. Vi kan altså nu finde tøjningen i stangen som

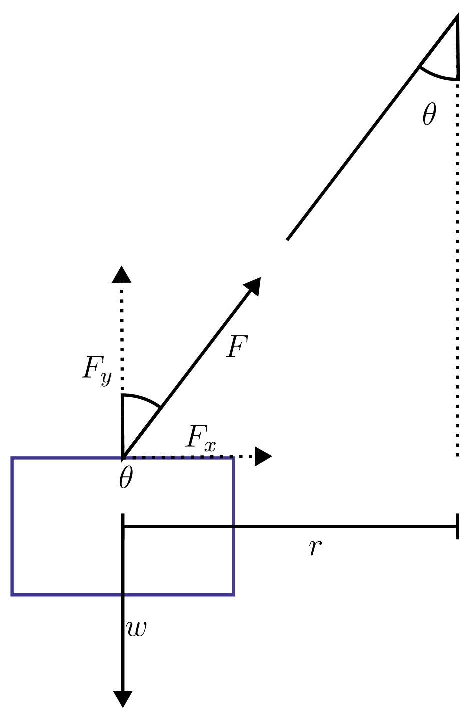
$$\epsilon = \frac{\sigma}{Y} = \frac{2{,}375 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}}{20 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa}} = 1{,}1785 \cdot 10^{-5}.$$

Strækket i stangen Δl kan da findes vha. definitionen af tøjningen som

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta l}{l_0} &= \epsilon \\
\Delta l &= \epsilon \cdot l_0 \\
&= 1{,}1785 \cdot 10^{-5} \cdot 15{,}0\,\mathrm{m} \\
&= 0{,}177\,\mathrm{mm}.
\end{aligned}$$

(b)

When operating, the ride has a maximum angular speed of 12,0 rev/min. How much is the rod stretched then?



Figur 4: Fritlegemediagram

Med udgangspunkt i **Figur 4** placeres et koordinatsystem således at z-aksen går ind i papiret. Vi har da statisk ligevægt i xy-planet og kan derfor benytte at

$$\sum F_x = F_x - F_{cp} = 0.$$

F_x må være givet som

$$F_x = F \cdot \sin(\theta).$$

Og centripetalkraften kan findes som produktet af vognens masse og centripetalaccelerationen som

$$F_{cp} = mr \cdot \omega^2 = m \cdot l \cdot \sin(\theta) \cdot \omega^2.$$

Først omregnes vinkelhastigheden fra rev/min til rad/s som

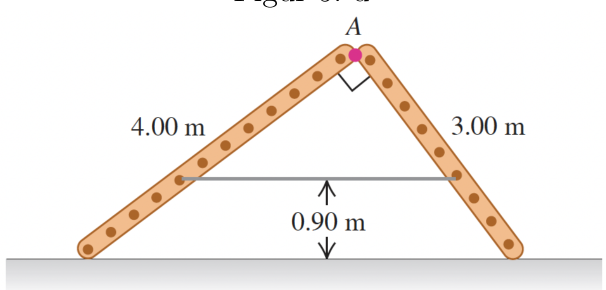
$$12{,}0\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \cdot \frac{1}{60}\frac{\text{min}}{\text{s}} = 1{,}257\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vi har derfor at

$$\begin{aligned} F \cdot \sin(\theta) &= ml\omega^2 \cdot \sin(\theta) \\ F &= ml\omega^2 \\ &= \frac{1900\,\text{N}}{9{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 15{,}0\,\text{m} \cdot 12{,}0\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}. \end{aligned}$$

Opg. 11.89

Figur 5: d



Two ladders, 4,00 m and 3,00 m long, are hinged at point A and tied together by a horizontal rope 0,90 m above the floor (**Figur 5**). The ladders weigh 480 N and 360 N, respectively, and the center of gravity of each is at its center. Assume that the floor is freshly waxed and frictionless.

(a)

Fund the upward force at the bottom of each ladder.

(b)

Find the tension in the rope.

(c)

Find the magnitude of the one ladder exerts on the other at point A.

(d)

If an 800 N painter stands at point A, find the tension in the horizontal rope.