Eksamen i: Fysik og Mekanik

Noah Rahbek Bigum Hansen

20. januar 2021 (12. December 2024)

1.

En astronaut udforsker en fjern planet, hvor tyngdeaccelerationen blot er 65,0% af hvad den er på Jorden. Han hopper af et klippefremspring 500 m over et stort plateau. Efter 5,00 s frit fald, aktiverer han en raketmotor (en "jet-pack") som han har på ryggen. Herved ændres hans acceleration til en ny, konstant værdi i den tilbageværende del af faldet mod plateauet. Astronautens fødder rammer jordoverfladen (plateauet) 26,0 s efter aktiveringen af raketmotoren. Bestem den fart hvormed han rammer jordoverfladen. (Antag at tyngdeaccelerationen på Jorden er 9,80 m/s^2.)

Tyngdeaccelerationen på den fjerne planet må være 0,65g. Altså kan den afstand han falder i de første 5,00 s findes vha. formlen for strækningen i et frit fald

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

Idet vi sætter 0-punktet til at være jorden er hans starthøjde $y_0 = 500\,\mathrm{m}$, han starter fra stilstand og derfor er hans starthastighed $v_{0y}t = 0$. Altså har vi

$$y_{5s} = 500\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}0{,}65 \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (5{,}00\,\mathrm{s})^2 = 420{,}375\,\mathrm{m}.$$

Hans hastighed til dette tidspunkt kan findes vha. formlen for hastighed ved konstant acceleration

$$v_y = v_{y0} + a_y t.$$

Heri kan kendte størrelser indsættes for at finde astronautens hastighed efter 5,00 s som

$$v_{y5s} = 0 - 0{,}65 \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5{,}00\,\mathrm{s} = -31{,}85\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Dermed er astronautens hastighed og position i det han tænder jet-packen kendt. Dermed kan formlen for position ved konstant acceleration igen benyttes idet den ukendte acceleration i 2. halvdel af faldet kan isoleres som

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ \frac{1}{2}a_y t^2 &= y - y_0 - v_{y0}t \\ a_y &= 2 \cdot \frac{y - y_0 - v_{y0}t}{t^2}. \end{aligned}$$

Idet astronautens slutposition $y = 0$, startposition $y_0 = y_{5s} = 420{,}375\,\mathrm{m}$, starthastighed $v_{y0} = v_{y5s} = -31{,}85\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og tiden før han rammer jorden $t = 26{,}0\,\mathrm{s}$ alle er kendte kan accelerationen i den sidste halvdel af faldet findes som

$$a_y = 2 \cdot \frac{-420{,}375\,\mathrm{m} + 31{,}85\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 26{,}0\,\mathrm{s}}{(26{,}0\,\mathrm{s})^2} = 1{,}206\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

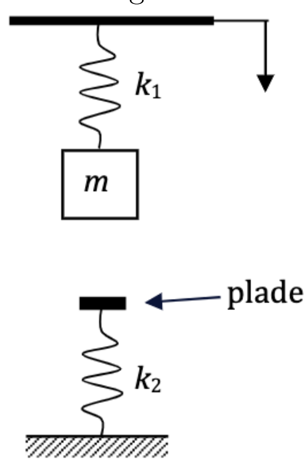
Altså er astronautens nye konstante acceleration efter han tænder jet-packen $a_y = 1{,}206\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Denne kan indsættes i formlen for hastighed ved konstant acceleration, som også blev brugt ovenfor, som

$$v_y = v_{y0} + a_y t \implies v_y = -31{,}85\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}206\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 26{,}0\,\mathrm{s} = -0{,}494\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Altså rammer astronauten jorden med en hastighed på 0,494 m/s med retning mod jorden.

2.

Figur 1:



Et legeme med massen $m = 5{,}00\,\mathrm{kg}$ hænger i en masseløs fjeder, som vist i **Figur 1**. Nedenfor er der en plade, monteret på en anden fjeder. Når massen m ikke rører pladen (se igen **Figur 1**), er den øverste fjeder strakt 490 mm (relativt til fjederens naturlige længde).

(a)

Bestem fjederkonstanten k_1 (I enheden N/m) for den øverste fjeder. (Antag at tyngdeaccelerationen $g = 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.)

Den eneste kraft der virker på den øverste fjeder er massen m's tyngde. Altså må det, idet det antages, at der er statik, gælde, at fjederkraften fra den øverste fjeder netop svarer til kassens tyngde. Altså har vi

$$\begin{aligned} w &= F \\ mg &= k_1 x \\ k_1 &= \frac{mg}{x} \\ &= \frac{5{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}49\,\mathrm{m}} \\ &= 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

.

Altså er fjederkonstanten $k_1 = 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

(b)

Massen m sænkes nu langsomt ned, sådan at den hviler på pladen, og sådan at den øverste fjeder strækkes blot 400 mm (igen, relativt til fjederens naturlige længde). Herved sammentrykkes den nederste fjeder 30,0 mm. Bestem fjederkonstanten k_2 (igen i enheden N/m) for den nederste fjeder.

For at der er statik gælder at

$$F_2 - w + F_1 = 0 \implies F_2 = w - F_1.$$

Kraften fra den øverste fjeder, F_1, kan findes vha. formlen for kraften i en fjeder, også brugt ovenfor, som

$$F_1 = k_1 \cdot x_1 = 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}400\,\mathrm{m} = 40{,}0\,\mathrm{N}.$$

Vi har dermed at

$$F_2 = 49{,}0\,\mathrm{N} - 40{,}0\,\mathrm{N} = 9{,}00\,\mathrm{N}.$$

Og dermed kan fjederkonstanten k_2 findes som

$$k_2 = \frac{F_2}{x_2} = \frac{9{,}00\,\mathrm{N}}{0{,}0300\,\mathrm{m}} = 300\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

(c)

Massen m sænkes langsomt yderligere ned. Hvor meget sammentrykkes den nederste fjeder i det øjeblik den øverste fjeder er ustrakt?

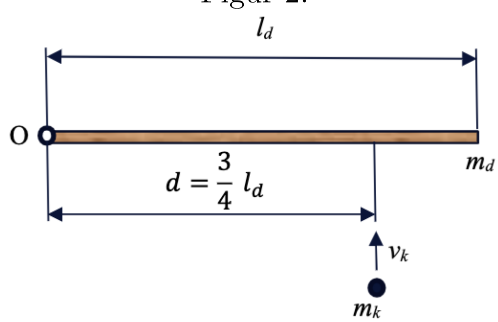
Idet den øverste fjeder er ustrakt må den nederste fjeder skulle udøve en kraft der netop modsvarer kassens tyngde. Altså

$$\begin{aligned} F_2 &= w \\ k_2 x_2 &= mg \\ x_2 &= \frac{mg}{k_2} \\ &= \frac{5{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{300\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} \\ &= 0{,}163\,\mathrm{m} = 16{,}3\,\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

Altså vil den nederste fjeder blive sammenpresset i alt 16,3 cm under de givne forhold.

3.

Figur 2:



En dør med bredden l_d og massen m_d er i hvile, hvorefter den rammes af en klump ler med massen m_k, som bevæger sig med farten v_k i det øjeblik den rammer døren (se **Figur 2**). Døren rammes i afstanden $d = \frac{3}{4} l_d$ fra rotationsaksen (d.v.s. fra hængslet). Lerklumpen rammer vinkelret på døren og bliver siddende efter anslaget.

(a)

Vis at dørens inertimoment ("moment of inertia") omkring omdrejningspunktet O er givet ved $I_0 = \frac{1}{3} m_d l_d^2$.

Inertimomentet kan generelt findes som

$$I = \int x^2 \, \mathrm{d}m.$$

Altså skal et udtryk for dm findes. For en tynd rektangulær plade med masse M, bredde l_d og højde h er massen pr. areal givet som

$$\sigma = \frac{m_d}{l_d h}.$$

Arealet af en tynd stribe med tykkelse dx og en afstand l til origo er da

$$A = h\,\mathrm{d}x.$$

Massen af denne tynde stribe bliver da

$$\mathrm{d}m = \sigma A = \frac{m_d}{l_d h} h\,\mathrm{d}x = \frac{m_d}{l_d}\,\mathrm{d}x.$$

Dette sættes ind i integralet fra før som

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{l_d} x^2 \frac{m_d}{l_d}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m_d}{l_d} \int_0^l x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m_d}{l:d} \frac{1}{3} l^3 \\ &= \frac{1}{3} m_d l_d^2. \end{aligned}$$

Altså er det vist.

(b)

Bestem dør-lerklump systemets vinkelhastighed ω umiddelbart efter lerklumpens anslag mod døren. (Bemærk at lerklumpens masse m_k *ikke* kan ignoreres. Derimod kan der ses bort fra friktion i hængslet O.)

Idet lerklumpen antages at være en punktmasse har den ikke et inertimoment omkring sin egen omdrejningsakse. Dog har den fra parallel-akse-teoremet et inertimoment på

$$I = md^2 \implies I_k = m_k \cdot \frac{9}{16} \cdot l_d^2.$$

Det samlede inertimoment for systemet bliver derfor

$$I = I_0 + I_k = \frac{1}{3} m_d l_d^2 + m_k \cdot \frac{9}{16} l_d^2 = l_d^2 \left(\frac{1}{3} m_d + \frac{9}{16} m_k \right).$$

Konservation af impulsmoment giver at

$$I \cdot \omega - m_k v_k d = 0.$$

Dette kan omskrives til

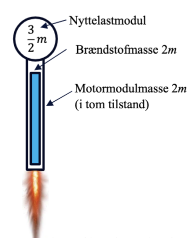
$$
\begin{aligned}
I \cdot \omega &= m_k v_k d \\
l_d^2 \left(\frac{1}{3} m_d + \frac{9}{16} m_k \right) \omega &= m_k v_k \cdot \frac{3}{4} l_d \\
\omega &= \frac{3}{4 l_d^2} \cdot \frac{m_k v_k l_d}{\frac{1}{3} m_d + \frac{9}{16} m_k} \\
&= \frac{3}{4 l_d} \cdot \frac{m_k v_k}{\frac{1}{3} m_d + \frac{9}{16} m_k} \\
&= \frac{9}{4 l_d} \cdot \frac{m_k v_k}{m_d + \frac{27}{16} m_k} \\
&= \frac{36}{l_d} \cdot \frac{m_k v_k}{16 m_d + 27 m_k}.
\end{aligned}
$$

4.

Denne opgave omhandler effektiviteten af en totrinsraket, sammenholdt med effektiviteten af en "ettrinsraket" (d.v.s. en raket med blot et enkelt raketmotor-trin).

(a)

Figur 3:



Betragt først en ettrinsraket, bestående af et nyttelastmodul ("payload module") med massen $\frac{3}{2}m$ og et motormodul, som også indeholder brændstoffet. Det tomme motormodul har massen $2m$. Det indeholdte brændstof har ligeledes massen $2m$. (Se **Figur 3**) Rakettens samlede masse, med fuld brændstoftank, er således $\frac{11}{2}m$. Til at begynde med er raketten i hvile, langt ude i "det ydre rum", fjernt fra nogen planet. Det antages at al brændstoffet (d.v.s. massen $2m$) nu antændes og udstødes, øjeblikkeligt og samtidigt, med hastigheden $\vec{v}_{\text{fuel}}$. Bestem den hastighed som nyttelastmodulet og det tomme motormodul opnår herved, udtrykt ved hastigheden $\vec{v}_{\text{fuel}}$.

Der er i opgaven givet massen af nyttelastmodulet $m_{\text{pl}} = \frac{3}{2}m$, massen af mototren $m_{\text{m-mot}} = 2m$, massen af brændstoffet $m_{\text{fuel}} = 2m$ og den totale masse af den fulde raket $m_{\text{tot-f}} = m_{pl} + m_{mot} + m_{fuel} = \frac{11}{2}m$. Desuden har vi fra impulsbevarelse at

$$\vec{p}_0 = 0; \qquad \vec{p}_1 = \vec{p}_{raket} + \vec{p}_{fuel} = \vec{p}_0 = 0.$$

Altså må det gælde at impulsen på den udstødte brændstof netop tilsvarer impulsen for raketten, dog i modsat retning, som

$$\vec{p}_{raket} = -\vec{p}_{fuel} \implies p_{raket} = p_{fuel}.$$

Hvor $p_{raket} = |\vec{p}_{raket}|$ og $p_{fuel} = |\vec{p}_{fuel}|$. Det ovenstående omskrives til

$$m_{tot-e} \cdot v_{tot-e} = m_{fuel} \cdot v_{fuel} \implies v_{tot-e} = \frac{m_{fuel} \cdot v_{fuel}}{m_{tot-e}}.$$

Vi har desuden at $m_{tot-e} = m_{tot-f} - m_{fuel} = \frac{7}{2}m$. Vi får da

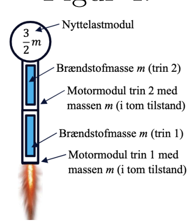
$$v_{tot-e} = \frac{2mv_{fuel}}{\frac{7}{2}m} = \frac{4}{7}v_{fuel}.$$

Og idet retningerne igen regnes ind bliver det endelige udtryk for $\vec{v}_{tot-e}$ at

$$\vec{v}_{tot-e} = -\frac{4}{7}\vec{v}_{fuel}.$$

(b)

Figur 4:



Betragt dernæst en totrinsraket, som vist i **Figur 4**. Nyttelastmodulet har igen massen $\frac{3}{2}m$, men nu der der to motormoduler, d.v.s. to trin, der hver især indeholder brændstof med massen m (se igen **Figur 4**). Rakettens samlede masse, med fyldte brændstoftanke, er således igen $\frac{11}{2}m$, præcis som før. Begge trin udstøder brændstof med hastigheden $\vec{v}_{\text{fuel}} = \vec{v}_{\text{ex}} + \vec{v}_{\text{i}}$, hvor $\vec{v}_{\text{ex}}$ er udstødningshastigheden relativt til raketten, og $\vec{v}_i$ er rakettens hastighed i det øjeblik brændstoffet er opbrugt. Igen antages det at raketten til at begynde med er i hvile. Så antændes brændstoffet i trin 1, og det hele (d.v.s. hele massen m) udstødes øjeblikkeligt. Dernæst afkobles det tomme motormodul, trin 1, fra den resterende del af raketten, og brændstoffet i trin 2 antændes og udstødes (igen, hele massen m på én gang, øjeblikkeligt). Bestem sluthastigheden for nyttelastmodulet og det tilkoblede, tomme motormodul, trin 2, og konkluder hvilket raketdesign der ultimativt giver nyttelastmodulet den største fart. (Vink: Bestem rakettens hastighed efter affyring af trin 1. Eftersom det tomme trin 1 nu afkobles, er det fordelagtigt derefter at redefinere systemet til at bestå af blot nyttelastmodulet samt trin 2.)

Vi har oplyst, at massen af nyttelastmodulet $m_{nytte} = \frac{3}{2}m$, massen af hvert brændstoftrin $m_{fuel} = m$, massen af begge motorer $m_{mot} = m$ og udstødninghastigheden $\vec{v}_{ex}$. Vi har igen impulskonservation så det gælder at

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{raket} + \vec{p}_{fuel} = \vec{p}_0 = 0.$$

Hvilket igen giver

$$\vec{p}_{raket} = -\vec{p}_{fuel} \implies p_{raket} = p_{fuel}.$$

Hvor $p_{raket} = |\vec{p}_{raket}|$ og $p_{fuel} = |\vec{p}_{fuel}|$. Det ovenstående kan omskrives til

$$(m_{nytte} + m_{fuel} + 2m_{mot}) \cdot v_1 = m_{fuel} \cdot v_{ex} \implies v_1 = \frac{m_{fuel} \cdot v_{ex}}{m_{nytte} + m_{fuel} + 2m_{mot}}.$$

Sættes de givne størrelser ind kan hastigheden af rakketten før første motor frakobles findes til

$$v_1 = \frac{mv_{ex}}{\frac{3}{2}m + m + 2m} = \frac{2}{9}v_{ex} \implies \vec{v}_1 = -\frac{2}{9}v_{ex}.$$

Herefter frakobles det ene motormodul og det andet brændstoftrin antændes. Dermed bliver impulskonservationen

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \implies (m_{nytte} + m_{mot} + m_{fuel}) \cdot v_1 = (m_{nytte} + m_{mot})v_2 + m_{fuel}v_{fuel}.$$

Heri isoleres sluthastigheden, v_2 som

$$\begin{aligned}
v_2 &= \frac{(m_{nytte} + m_{tot} + m_{fuel}) \cdot v_1 - m_{fuel} \cdot v_{fuel}}{m_{nytte} + m_{mot}} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{2}m + m + m\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) v_{ex} - m \cdot \left(v_{ex} - \frac{2}{9}v_{ex}\right)}{\frac{3}{2}m + m} \\
&= \frac{\frac{7}{2}m \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) v_{ex} - m \cdot \frac{7}{9}v_{ex}}{\frac{5}{2}m} \\
&= \frac{\frac{7}{2} \cdot -\frac{2}{9}v_{ex} - \frac{7}{9}v_{ex}}{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{9} - \frac{7}{9}\right) v_{ex} \\
&= \frac{2}{5} \cdot -\frac{14}{9}v_{ex} \\
&= -\frac{28}{45}v_{ex}.
\end{aligned}$$

Altså er $v_1 \approx 0{,}57 < v_2 \approx 0{,}62$. D.v.s. to-trins-raketten er den mest effektive.