Afleveringsopgave uge 5

Noah Rahbek Bigum Hansen

28. / 9. - 2024

Opg. 1

For hvilke reelle tal er den geometriske række $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ konvergent?

Først og fremmest indses at rækkens argument kan skrives som:

$$(2x)^n .$$

For en geometrisk række,

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n,$$

har vi, at rækken er konvergent for $|z| < 1$. Altså har vi

$$2x < 1 \implies x < \frac{1}{2}.$$

Altså har vi at rækken er konvergent for $x < \frac{1}{2}$.

Opg. 2

Brug kvotientkriteriet til at afgøre om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} -1^n \frac{(n+2)!n^2}{n!3^{2n}}$ konvergerer eller divergerer.

Kvotientkriteriet siger, at hvis der for leddene a_n gælder

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = R.$$

så har vi at rækken er absolut konvergent for $R < 1$, at rækken er divergent for $R > 1$ og slutteligt at hvis $R = 1$ så kan ingen konklusion drages. Altså har vi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}\,(n+3)!\,(n+1)^2\,3^{2n} n!|}{|(-1)^n\,(n+1)!(n+2)!3^{2n+2}n^2|} = R.$$

Først og fremmest indses at $(-1)^n$-leddet udgår idet denne kun kan antage værdierne +1 og -1 og disse er ækvivalente idet den numeriske værdi af udtrykket tages. Altså fås

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\,(n+3)!\,(n+1)^2\,3^{2n}n!|}{|\,(n+1)!\,(n+2)!3^{2n+2}n^2|}.$$

Dernæst kan indses at

$$\frac{(n+3)!}{(n+2)!} = (n+3)\,.$$

Og at

$$\frac{3^{2n}}{3^{2n+2}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Indsættes disse to fås:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\,(n+3)\,(n+1)^2\,n!|}{|\,(n+1)!9n^2|}.$$

For at fjerne den sidste fakultetsfunktion benyttes det at

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dermed har vi:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+3)(n+1)^2|}{|\,(n+1)\,9n^2|}.$$

Dernæst kan parenteserne ganges ud:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|n^3+5n^2+7n+3|}{|9n^3+9n^2|}.$$

Denne grænseværdi kan nu evalueres. For $n\to\infty$ har vi at $n^3 \gg n^2 \gg n$. Altså bliver n^2-, n- og konstantleddene ubetydelige for $n\to\infty$. Dermed har vi

$$R = \frac{n^3}{9n^3} = \frac{1}{9}.$$

Dette kan også vises matematisk som følgende omskrivning, hvor der divideres med n^3

$$\frac{|n^3+5n^2+7n+3|}{|9n^3+9n^2|} = \frac{|1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{3}{n^3}|}{|9+\frac{9}{n}|}.$$

Her bliver det åbenlyst at summen går mod $\frac{1}{9}$ for $n\to\infty$. Idet $\frac{1}{9}<1$ har vi derfor at rækken er absolut konvergent.