TØ-opgaver uge 13

Noah Rahbek Bigum Hansen

25. November 2024

Prøveeksamensopgave 23

Lad X betegne en stokastisk variabel der er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 7$. Angiv

$$\mathrm{Var}(4 + 2X) = k.$$

Hvor k er et helt tal mellem 0 og 99.

Vi kan benytte at $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ så vi får

$$\mathrm{Var}(4 + 2X) = 4\mathrm{Var}(X).$$

For en Poissonfordeling er variansen givet som

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Vi får dermed

$$\mathrm{Var}(4 + 2X) = 4\lambda = 4 \cdot 7 = 28.$$

Altså er $k = 28$.

Opg. A

Et olieselskab gennemfører en geologisk undersøgelse, der viser, at olieboringer har 20% chance for at finde olie.

1.

Hvad er sandsynligheden for at selskabet har fundet olie ved præcis 3 af deres 7 boringer?

I dette tilfælde må den stokastiske variabel være bindomialfordelt, da denne angiver antallet af successer ud af n forsøg. Her gælder generelt følgende sandsynlighedsfunktion

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}.$$

Hvis vi sætter tallene fra opgaven ind fås

$$P(X = 3) = \binom{7}{3} (0{,}2)^3 (1 - 0{,}2)^{7-3} = 0{,}1147.$$

2.

Hvor mange boringer skal man i middel foretage for at have fundet olie 3 gange?

Her ønsker vi at finde ud af hvor mange forsøg det tager at få et antal successer. Derfor må den ovenstående stokastiske variabel være negativt binomialfordelt, med sandsynlighedsparameter $p = 0{,}2$ og antalsparameter $r = 3$. Vi har altså

$$E[X] = \frac{r}{p} = \frac{3}{0{,}2} = 15.$$

Opg. B

Lad X være en Poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λ. Udregn middelværdien af $X(7X - 2)$.

Vi ønsker at finde

$$E[X(7X - 2)] = E[7X^2 - 2X] = 7E[X^2] - 2E[X].$$

2.-momentet kan findes fra formlen for varians som

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ \implies E[X^2] &= \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2. \end{aligned}$$

For en Poisson-fordeling har vi $E[X] = \lambda$ og $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. Vi får da

$$E[X^2] = \lambda + \lambda^2.$$

Dette sættes ind i udtrykket fra starten så vi får

$$\begin{aligned} E[X(7x - 2)] &= 7\left(\lambda + \lambda^2\right) - 2\lambda \\ &= 7\lambda^2 + 5\lambda. \end{aligned}$$

Opg. C

Lad X være binomialfordelt $(5, \frac{3}{4})$ og Y være binomialfordelt $(7, \frac{1}{2})$. Udregn middelværdien for $X - Y$ og bestem om den er positiv eller negativ.

Idet middelværdien af en sum er lig summen af middelværdierne kan udtrykket fra opgaven skrives som

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y].$$

Vi finder først $E[X]$ som

$$E[X] = np = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

Og dernæst kan vi finde $E[Y]$ som

$$E[Y] = np = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Vi har da

$$E[X - Y] = \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{1}{4}.$$

Denne er positiv.

Opg. D

Lad X være binomialfordelt $(3, \frac{1}{2})$ og sæt $Z = (X - 1)^2$.

1.

Udregn sandsynlighedsfunktionen for Z.

2.

Udregn fordelingsfunktionen for Z.

Opg. 2.1

Prøveeksamensopgave 24

Lad X være antallet af kast, der kræves for at få krone, når man kaster en fair mønt indtil den viser krone. Find middelværdien af X:

$$E[X] = k.$$

Hvor k er et helt tal mellem 0 og 99.

Opg. G

Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor a og b er konstanter. Det oplyses at $E[X] = \frac{3}{5}$. Bestem konstanterne a og b

Opg. E

Lad X betegne en kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Udregn $E\left[X^3\right]$

Opg. F

Lad X betegne en kontinuert stokastisk variabel. Find det til α som minimerer udtrykket

$$E\left[(X-\alpha)^2\right].$$

Fortolk på dit resultat.