

Thermodynamics and Energy systems

Noah Rahbek Bigum Hansen

6. maj 2025

Indhold

1 Forord	6
2 Introduction to thermodynamics	6
2.1 General heat engines	7
2.2 The laws of thermodynamics	8
2.3 Types of thermodynamical systems	8
2.4 Termodynamiske processer	10
2.5 Idealgasligningen	10
3 Energi	11
3.1 Mikroskopiske energier for et stof	11
3.2 Makroskopiske energier	11
3.3 Energiudveksling for et system	12
3.4 Entalpi	12
4 Arbejde	12
4.1 Virkningsgrad	13
5 Fasesr for kemisk homogene stoffer	13
5.1 Faseskifte	14
5.2 Tilstandsdiagrammer	14

INDHOLD

6 Specifik varmekapacitet og energiberegninger	15
7 Energianalyse af lukkede systemer	16
7.1 Volumenændringsarbejdet	16
7.2 Forskellige procesforløb for lukkede systemer	16
7.2.1 Isokorisk tilstandsændring	17
7.2.2 Isobarisk tilstandsændring	17
7.2.3 Isotermisk tilstandsændring	17
7.2.4 Polytropisk tilstandsændring	18
8 Masse- og energianalyse af åbne systemer	18
8.1 Teknisk arbejde	18
8.2 Forskellige procesforløb for åbne systemer	19
8.2.1 Isokorisk tilstandsændring	19
8.2.2 Isobarisk tilstandsændring	20
8.2.3 Isotermisk tilstandsændring	20
8.2.4 Polytropisk tilstandsændring	20
8.3 Masse- og energibalance for et knudepunkt	21
8.4 Åbne komponenter og maskiner	21
8.4.1 Dyser og diffusere	22
8.4.2 Pumper	22
8.4.3 Turbiner og kompressorer	22
8.4.4 Varmevekslere	23
8.4.5 Drøvleorganer	24
9 Ideelle og ikke-ideelle processer	24
9.1 Introduktion til entropi	25
9.2 Isentropiske processer	26

INDHOLD

9.3 Entropiændring for processer	27
9.3.1 Entropiændring for en isobar proces	27
9.3.2 Entropiændring for en isotermisk proces	27
9.3.3 Entropiændring for en isokorisk proces	28
9.3.4 Entropiændring for en polytropisk proces	28
9.4 Entropiændring for kredsprocesser	29
9.4.1 Carnot kredsproces	29
9.4.2 Carnots arbejdsproducerende maskine	30
9.4.3 Carnots arbejdskonsumerende maskine	30
9.5 Isentropisk virkningsgrad	31
9.5.1 Turbine	31
9.5.2 Kompressor	31
9.5.3 Pumpe	32
9.5.4 Dyse	32
9.6 Entropi balance	33
10 Kraftværker	34
10.1 Rankine kredsprocessen	34
10.2 Kraftværket	37
10.2.1 Kraftværkets basiskredsproces	37
10.2.2 Fødevandsforvarming	38
10.2.3 Turbinekondenser	39
10.3 Kraftvarmeværket	40
10.4 Optimering af Rankine kredsprocessen	41
10.5 Organic Rankine Cycle (ORC)	41
10.6 Samlet Brayton og Rankine kredsprocess – Kombineret proces	42
11 Motorer og gasturbiner	44

INDHOLD

11.1 Beregningsforudsætninger	45
11.1.1 Arbejdsmediet i anlægget	45
11.1.2 Stempelmaskiner	45
11.2 Otto-motoren	47
11.2.1 Otto-motorens virkemåde	47
11.2.2 Idealiseret beregningsprocedure – volumenændringsarbejdet, akselarbejde	49
11.2.3 Idealiseret beregningsprocedure, virkningsgrad	49
11.3 Diesel motoren	49
11.3.1 Dieselmotorens virkemåde	49
11.3.2 Idealiseret beregningsprocedure – varmebalancemetoden, akselarbejde	50
11.3.3 Idealiseret beregningsprocedure – volumenændringsarbejds metoden, akselarbejde	50
11.3.4 Idealiseret beregningsprocedure, virkningsgrad	51
11.4 Gasturbinen	51
11.4.1 Gasturbinens opbygning og virkemåde	51
11.4.2 Idealiseret beregningsprocedure - varmebalance metoden, akselarbejde	52
11.4.3 Idealiseret beregningsprocedure - volumenændringsarbejds metoden, akselarbejde	52
11.4.4 Idealiseret beregningsprocedure, virkningsgrad	53
12 Kølemaskiner og varmepumper	53
12.1 Kølekredsprocessen	53
12.2 Kølemidler	55
12.3 Optimering af kredsprocessen	56
12.3.1 Ét-trins anlæg	56
12.3.2 To-trins anlæg med mellemkøling	57
13 Gasblandinger	57
13.1 Formler for angivelse af sammensætning af en gasblanding	58
13.2 Dalton's lov og partialtryk	59

INDHOLD

13.3 Tilstandsstørrelser og stofværdier for gasblandinger	59
13.3.1 Gaskonstant	59
13.3.2 Specifikt volumen	59
13.3.3 Densitet	60
13.3.4 Molmasse	60
13.3.5 Specifik varmekapacitet	60
13.3.6 Viskositet og varmeledningsevne	61
13.4 Gasblandinger angivet på tør og våd basis	61
14 Fugtig luft	61
14.1 Tørt og fugtigt flow af luft	61
14.2 Relativ og absolut fugtighed	62
14.3 Energiindhold i fugtig luft og densitet	62
14.3.1 Entalpi baseret på vægt af den fugtige luft	62
14.3.2 Entalpi baseret på vægt af den tørre luft andel af den fugtige luft	62
14.3.3 Densitet for fugtig luft som funktion af den absolute fugtighed	62
14.4 Masse- og energibevarelse i knudepunkter	63
14.5 Molliere diagram	63
14.6 Opvarmning og afkøling af fugtig luft – sensibel energiændring alene	63
14.7 Beffugtning og affugtning af fugtig luft	64
14.7.1 Affugtning af fugtig luft	64
14.7.2 Beffugtning af fugtig luft	65
14.8 Tørt og vådt termometer	66
15 Mekanismer for varmetransmission	66
15.1 Definition af varmetransmission	66
15.2 Sammensat varmeoverføring	66
15.2.1 Isolans	67

2 INTRODUCTION TO THERMODYNAMICS

15.2.2 Overgangsisolanser	67
15.2.3 Varmeoverføringskoefficient	68
15.2.4 Varmetransmissionskoefficient	69
16 Endimensional varmeledning gennem homogene lag	69
17 Endimensional varmeledning gennem inhomogene lag	71
18 Konvektion	71
18.1 Laminar strømning	72
18.2 Turbulent strømning	72
18.3 Beregningsmetode	72

1 Forord

De følgende noter er alle produceret i forbindelse med at jeg har fulgt 10 ECTS-point kurset “Termodynamik og energisystemer” (STADS UVA-kode: 290201U045) ved Aarhus Universitet i foråret 2025. Kurset har været afholdt af lektor Jens Møller Andersen. I kurset er følgende litteratur blevet benyttet:

- Bækkel Larsen, J., Christensen, P., & Elmegaard, B. (2020). Maskinteknisk Termodynamik: Grundlæggende teori og praksisnær anvendelse: 4. udgave. (4 udg.) DTU Diplom og DTU Mekanik.
- Vej-Hansen, C., & Rode, C. (Eds.) (2010). Varmetransmission ved ledning, konvektion og stråling.

Lecture 1-1: Introduction and the Laws of thermodynamics

28. Januar 2025

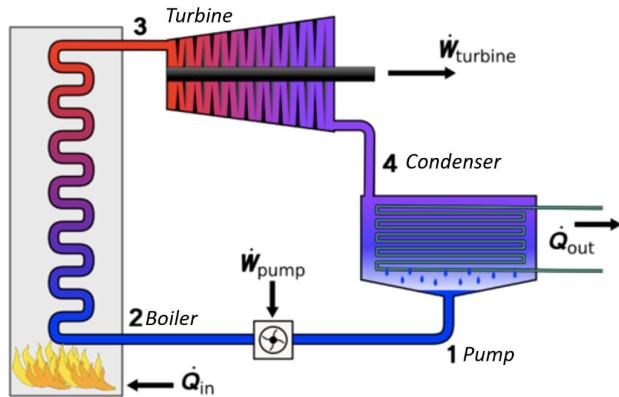
2 Introduction to thermodynamics

Definition 1: Thermodynamics

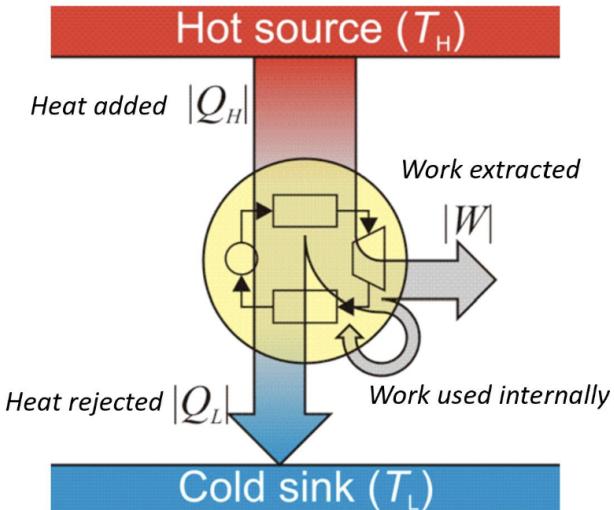
Thermodynamics comes from greek *thermos* meaning *heat* and *dynamics* meaning *in motion*. All in all *thermodynamics* is the study of *heat in motion*.

An example of a simple thermodynamic cycle is the Rankine cycle in Figur 1. The Rankine cycle is often mentioned as the simplest thermodynamic cycle.

Figur 1: A Rankine cycle



Figur 2: A general heat engine



2.1 General heat engines

A heat engine is an engine that extracts heat from a hot source and converts (some of) this heat into work and rejects the rest into a cold sink. This is shown in Figur 2. The physicist *Sadi Carnot* has shown that the ideal efficiency (called the *Carnot-efficiency*) of a heat engine is given by

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

Where T_c is the temperature of the cold sink and T_h is the temperature of the hot source. The Carnot-efficiency is the *theoretical* maximal efficiency of any heat engine. Common heat engines have an efficiency about half as big as the Carnot efficiency.

Eksempel 2.1: Carnot-efficiency of a heat engine

We want to calculate the Carnot-efficiency of a heat engine working between the temperatures of $T_h = 1000^\circ\text{C}$ and $T_c = 0^\circ\text{C}$.

The formulation of Carnots law is

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{27,153 \text{ K}}{1273,15 \text{ K}} = 0,786.$$

2.2 The laws of thermodynamics

Three main rules have been made for the field of thermodynamics. These are

Sætning 2.1: 1st law of thermodynamics

The 1st law of thermodynamics states that energy is always conserved and can be formulated as: *All energy is conserved, only its form can be changed.* Related to the 1st law of thermodynamics is the fact that mass is also conserved.

Sætning 2.2: 2nd law of thermodynamics

The second law of thermodynamics states that energy only moves spontaneously from a hot area to a cold area.

Sætning 2.3: 3rd law of thermodynamics

The third law of thermodynamics states that the entropy of a pure crystalline solid with a temperature of 0 K has an entropy of 0.

2.3 Types of thermodynamical systems

Definition 2: Solid boundary

A solid system boundary is any boundary of a system that cannot change size or shape.

Definition 3: Displaceable boundary

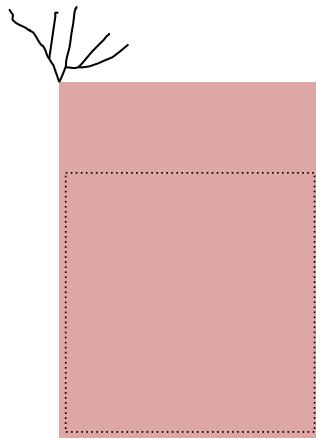
A displaceable system boundary is any boundary of a system that is not fixed and thus is free to expand, shrink or change its shape in another way.

Definition 4: Closed system

A closed system is any system that does not allow transfer of mass over its boundary. Energy is however able to move over the boundary of a closed system.

Definition 5: Open system

An open system is any system that allows transfer of mass and energy across its boundary.



Figur 3: Drawing showing the system boundaries of a kettle (the kettle, heating element and air above water is not included in the system.)

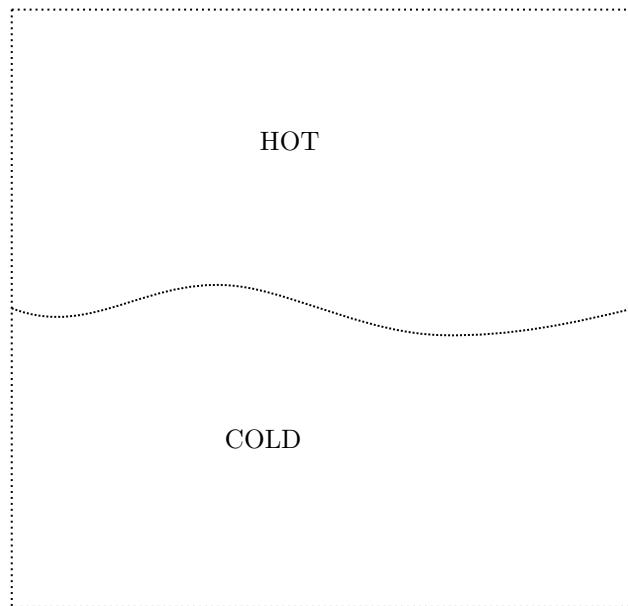
Eksempel 2.2: The system boundary and energy balance for an electric kettle

On Figur 3 a simplified drawing of a kettle can be seen. It is evident, that the kettle is able to let mass (steam) pass through its opening and therefore it seems obvious it should be an open system. However as long as the temperature does not reach 100 °C then it is a reasonable approximation to see the system as closed. We now the specific heat formula to be

$$E = m \cdot c_p \cdot \Delta T.$$

Definition 6: Adiabatic system

An adiabatic system is any system that does not allow transfer of heat over the system boundaries.



Figur 4: Drawing of the mixing problem described underneath.

Eksempel 2.3: Temperature of water after mixing

1 L of water with a temperature of 20 °C is mixed with an equal amount of water with a temperature of 40 °C. We want to determine the temperature at the end.

On Figur 4 a drawing of the system is shown. We can remember the formulation of the formula for specific heat to be

$$E = m \cdot c_p \cdot \Delta T.$$

If we assume that no energy is lost during the mixing then it must be true that the total amount of energy is the same before mixing and after mixing (1st law of thermodynamics). That is

$$\begin{aligned} E_{20} + E_{40} &= E_{\text{tot}} \\ m_1 \cdot c_p \cdot T_1 + m_2 \cdot c_p \cdot T_2 &= (m_1 + m_2) \cdot c_p \cdot T_{\text{tot}} \\ T_{\text{tot}} &= \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2} \\ &= 30 \text{ }^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

Lecture 1-2: Introduktion of termodynamikkens love

30. Januar 2025

2.4 Termodynamiske processer

En termodynamisk proces er enhver proces, hvor der flyttes varme. Der findes mange forskellige termodynamiske processer, hvoraf nogle af dem er

- Isotermisk proces – Proces med konstant temperatur
- Isobar proces – Proces med konstant tryk
- Isokor proces – Proces med konstant volumen
- Adiabatisk proces – Proces uden varmeudveksling med omgivelserne
- Isentalp proces – Proces med konstant entalpi
- Isentrop proces – Proces med konstant entropi

2.5 Idealgasligningen

Idealgasligningen er en tilstandsrelation, der angiver en relation mellem tryk, temperatur og specifikt volumen for et specifikt materiale. Denne findes på et par forskellige former hvoraf 3 af dem er

$$pV = nR_uT$$

$$pv = R_iT$$

$$pV = mR_iT.$$

Hvor p er trykket, V er volumenet, v er det specifikke volumen, n er stofmængden, R_u er den universelle gaskonstant ($R_u = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$), R_i er den individuelle gaskonstant (stofspecifik), m er massen og T er temperaturen.

Det kan bemærkes, at R_i kan findes som

$$R_i = \frac{R_u}{M}$$

hvor M er molarmassen af gassen.

Lecture 2: Energi og proces

4. Februar 2025

3 Energi

3.1 Mikroskopiske energier for et stof

Et stofs mikroskopiske energier er en løs betegnelse, der dækker over, ja, de mikroskopiske og dermed “usynlige” energier i et stof. Disse er bl.a:

- **Sensibel energi:** Også kendt som temperatur. Den sensible energi relaterer sig til den (gennemsnitlige) kinetiske energi af molekylerne (som er proportionel med den absolute temperatur)
- **Latent energi:** Energi “bundet” i en bestemt fase af et stof. Denne energi frigives / skal tilføres for at et materiale kan undergå en fasetransformation. Det er denne energitype, der relaterer sig til smelte- og fordampningsvarmen m.v. for et stof
- **Kemisk energi:** Energi i atombindinger. Frigives / skal tilføres for at kemiske processer kan foregå.
- **Nuklear energi:** Energi bundet i atomkernen. Frigives ved spaltning af store kerner (uran) eller fusion af små kerner (hydrogen).

3.2 Makroskopiske energier

De makroskopiske energier er mere intuitive end de mikroskopiske da disse “kan ses”. Makroskopisk energi dækker bl.a. over:

- **Kinetisk energi:** Energi i bevægelse – Relaterer sig til bevægelsen og hastigheden af et system ift. et referencesystem
- **Potentiel energi:** Energi der (potentielt, haha) kan udløses. Tænk bl.a. på et objekt placeret højt vertikalt i et tyngdefelt.
- **Energi fra energifelter:** Energi der kommer fra kraftpåvirkninger fra et magnetisk eller elektrisk felt.
- **Energi fra overfladespændinger:** Energi der er lagret i spændinger og tøjninger i et materiales overflade – opstår bl.a. ifbm. hurtig afkøling.

3.3 Energiudveksling for et system

Den indre energi, eller nærmere bestemt forskellen i indre energi ΔU , for et system er defineret som summen af den tilførte varmeenergi, arbejdet og masseenergien som

$$\Delta U = Q_{\text{net}} + W_{\text{net}} + E_{m,\text{net}}.$$

3.4 Entalpi

Entalpi er et mål for mængden af (kemisk) energi til rådighed i et system når man ikke udnytter trykrumfangsarbejde. På mange måder er entalpien derfor mere interessant end den indre energi for åbne systemer – hvorimod den indre energi er mere interessant for lukkede systemer. Entalpi H er defineret som

$$H = U + pV.$$

Hvor U er systemets indre energi, p er systemets tryk og V er dets volumen. Den specifikke version heraf er

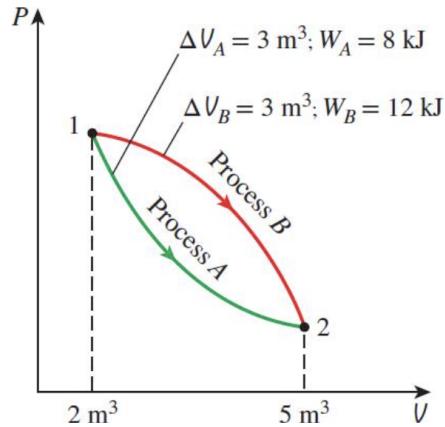
$$h = u + p \cdot v.$$

Hvor alle “små” bogstaver der før var store angiver en specifik størrelse.

Energioverførsel ved arbejde

En tilstand for et system er en stedfunktion – to ens tilstande har også fuldkommen ens parametre (dvs. tryk, temperatur, osv. er ens). Arbejdet og varmen der bringer et system fra en tilstand til en anden kan derimod være udformet på mange måder. Som et eksempel ses de to forskellige processer A og B at bringe systemet fra tilstand 1 til tilstand 2 på 2 forskellige måder i **Figur 5**.

Figur 5: To forskellige processer bringer et system til samme tilstand



4 Arbejde

Arbejde er et mål for energioverførslen fra et system til et andet. Typisk defineres arbejdet som integralet af produktet af en kraft og den strækning denne kraft tager. Eksempelvis er arbejdet for en aksel med

kraftmoment T , radius r og omdrejningshastighed n_{omdr} givet ved

$$W_a = \text{kraft} \cdot \text{vej} = \frac{T}{r} (2 \cdot \pi \cdot r \cdot n_{\text{omdr}}) = 2\pi \cdot T \cdot n_{\text{omdr}}.$$

På samme vis kan arbejdet af en fjeder med der er strukket fra x_1 til x_2 og leverer en kraft på $F(x)$ overalt findes som

$$W_f = \int \text{kraft} \cdot \text{vej} = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2).$$

4.1 Virkningsgrad

Virkningsgraden η for et system er defineret som forholdet mellem det opnåede output og det input der kommes ind i et system eller en maskine. Altså

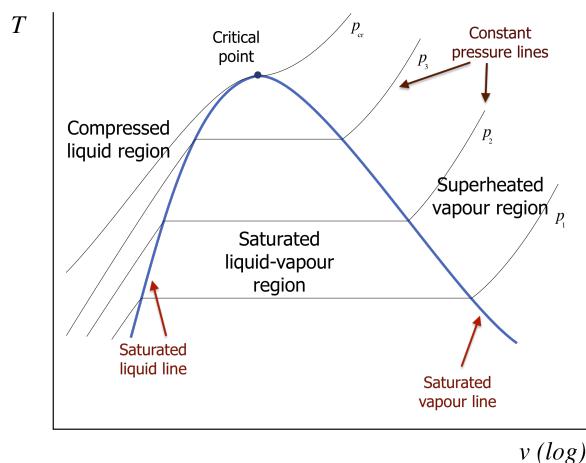
$$\eta = \frac{\text{Faktisk output}}{\text{Input}}.$$

Lecture 3: Stoffer og Tilstandsstørrelser

11. Februar 2025

5 Fasesr for kemisk homogene stoffer

Figur 6: p-V diagram for vand



På **Figur 6** ses et pV-diagram for vand. Dette angiver hvorledes vand opfører sig ved hhv. en tryk eller volumenændring. Fra et sådan pV-diagram kan en anden spændende konklusion også drages. Netop i toppen af den klokkeformede kurve findes det kritiske punkt. Indeni klokken optræder stoffet (vandet) både på væske og gasform, til venstre for klokken optræder stoffet (vandet) på væskeform og fast form (afhængigt af hvor langt oppe af p -aksen vi har bevæget os), til højre som en overheded gas og under klokken som fast og gasformigt. Nederst i klokkeformen er den såkaldte tre-faselinje hvor stoffet kan optræde på alle de tre almindelige faser.

5.1 Faseskifte

For kemisk stabile (dvs. kemisk inaktive) og kemisk homogene (dvs. bestående af blot et stof) stoffer sker et faseskift ved *konstant* temperatur og under udveksling af energi med omgivelserne. Når et stof går fra fast form til væske eller fra væske til gas er processen endoterm og vice versa. Alt dette er vist på **Figur 7**.

Figur 7: Karakteristika og almindelige termer ved faseskifte for et stof

Faseskifte	Temperatur	Temperaturbenævnelse	Energiludveksling	Faseændringsbenævnelse
Fast form → væske	konstant	smeltetemperatur	endoterm	smeltring
Væske → gas	konstant	trykafhængig temperatur kogetemperatur fordampningstemperatur	endoterm	kogning, fordampning
Gas → væske	konstant	trykafhængig temperatur kogetemperatur kondenseringstemperatur	exoterm	fortætning, kondensering
Væske → fast form	konstant	frysetemperatur	exoterm	frysning

For en kredsproces, hvor der sker faseskift fra f.eks. væske- til gasform og tilbage igen fra gas- til væskeform, vil dette ske ved *konstant* temperatur, såfremt trykket forbliver konstant under hele kredsprocessen (isobarisk proces). At temperaturen forbliver konstant under et faseskift bevirker også at temperaturen ikke kan benyttes som et mål for hvor meget energi, der er optaget. For at imødekomme dette indføres begrebet *gasandel*.

Definition 7: Gasandel

Gasandelen, x , defineres som den masse stof, der befinner sig på gasform for en betragtet stofmængde på 1 kg. Gasandelen er således en specifik størrelse, der ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Definition 8: Mættet væske

En væske, der er tilført en energimængde således, at den ved yderligere tilførsel af energi vil begynde at danne gas, benævnes en *mættet væske*. Her er $x = 0$.

Ligeledes har vi, at en stofmængde, som er tilført en energimængde således, at den netop er gå i gasform og ved afgivelse af energi vil begynde at danne væskedråber, benævnes en *mættet gas*. Her er $x = 1$.

Definition 9: Fordampningsvarmen

Den energimængde, som skal benyttes for at fordampe et kilogram stofmængde, dvs. skifte fase fra mættet væske til mættet gas kaldes *fordampningsvarmen* og betegnes med symbolet r_f . Denne kan findes som $h_{\text{mættet gas}} - h_{\text{mættet væske}}$.

Noget tilsvarende gælder for smeltring, hvilket benævnes *smeltningsvarmen* og betenes med symbolet r_s .

Så længe trykket er konstant har vi at

$$Q_{\text{fordampning}} = Q_{\text{kondensering}} = m \cdot r_f \quad \text{og} \quad Q_{\text{smeltring}} = Q_{\text{frysning}} = m \cdot r_s.$$

5.2 Tilstandsdiagrammer

Et tilstandsdiagram er et koordinatsystem, hvor på hver akse er en tilstandsstørrelse – således kan der produceres mange forskellige tilstandsdiagrammer omend kun en håndfuld af disse har reel anvendelse. De mest almindelige tilstandsdiagrammer er:

- $p-h$ diagram (tryk-entalpi)
- $T-s$ diagram (temperatur-entropi)
- $p-v$ diagram (tryk-volumen)
- $h-s$ diagram (entalpi-entropi)

6 Specifik varmekapacitet og energiberegninger

Definition 10: Specifik varmekapacitet

Den specifikke varmekapacitet defineres som den varmemængde, der skal bruges for at opvarme 1 kg af et givet stof 1 K. Denne har symbolet c og enheden $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$ eller $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right]$

For *faste stoffer* er den specifikke varmekapacitet ikke nævneværdigt trykafhængig – Her er den nærmest udelukkende temperaturafhængig. For *væsker* er den specifikke varmekapacitet i mindre grad afhængig af både tryk og temperatur. For *gasser* er den specifikke varmekapacitet i højere grad afhængig af både tryk og temperatur. Dette medfører også at den specifikke varmekapacitet for en gas ikke er den samme hvis der bliver udført en isokor process på gassen som hvis man udførte en isobar proces på selvsamme gas. Derfor indføres den specifikke varmekapacitet ved konstant volumen c_v og den specifikke varmekapacitet ved konstant tryk c_p defineret som

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p.$$

Idet væsker og faste stoffer er inkompressible vil disse i praksis opleve meget lille forskel mellem c_v og c_p og i stedet benyttes derfor ofte blot en generel varmekapacitet c .

Med afsæt i ovenstående kan den absolutte energimængde Q for hhv. et isobarisk og isokorisk procesforløb bestemmes som

$$Q_{\text{isok}} = m \cdot c_{v,m} \cdot (T_2 - T_1)$$

$$Q_{\text{isob}} = m \cdot c_{p,m} \cdot (T_2 - T_1).$$

Faktisk kan det også vises at differensen mellem den specifikke varmekapacitet ved konstant tryk c_p og den specifikke varmekapacitet ved konstant volumen c_v (for en idealgas) netop er den individuelle gaskonstant R_i som

$$c_p - c_v = R_i.$$

Forholdet mellem den specifikke varmekapacitet ved hhv. konstant tryk of volumen benævnes *isentropeksponenten* κ :

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R_i}{c_v}.$$

Lecture 4: Energianalyse af lukkede systemer

18. Februar 2025

7 Energianalyse af lukkede systemer

De følgende betragtninger vil alle relatere sig til lukkede systemer. Desuden betragtes kun reversible (og dermed ideelle) processer.

7.1 Volumenændringsarbejdet

Volumenændringsarbejdet for et lukket system defineres som det arbejde, som et system udveksler med dets omgivelser, når systemets volumen ændrer sig under et procesforløb. Heri ligger også at volumenændringsarbejdet kan være både positivt og negativt. Eksempelvis vil man, hvis man varmer på en ballon, få gassen i ballonen til at udvide sig. Man har på den måde tilført en arbejdsmængde til omgivelserne som, set fra systemet, vil være negativt da det er afgivet fra systemet. Man kan vha. mekanikken vise at voluenændringsarbejdet må tilsvare arealet under en proces på et p - V diagram. Dermed har vi altså at volumenændringsarbejdet W_v kan findes som

$$W_v = - \int_1^2 p \, dV.$$

Hvor 1 og 2 angiver hhv. starten og slutningen af processen. I nogle sammenhænge kan det være en fordel i stedet at finde det specifikke arbejde w_v istedet for det absolute arbejde W_v . Dette findes som

$$w_v = \frac{W_v}{m} = - \int_1^2 p \, dv.$$

Systemet må dog også tilføres et volumenfortrængningsarbejde idet der under processen flyttes et volumen på $V_1 - V_2$ fra tilstand 1 til tilstand 2 ved et (teoretisk) konstant omgivelstetryk p_o . Dette volumenfortrængningsarbejde W_o kan bestemmes som

$$W_o = -p_o \cdot (V_2 - V_1).$$

For at finde nettoarbejdet W_n udført på gassen må det ovenstående volumenfortrængningsarbejde W_o frastrækkes volumenændringsarbejdet W_v som

$$W_n = W_v - W_o = - \int_1^2 p \cdot dV + p_o \cdot (V_2 - V_1) = - \int_1^2 p \cdot dV + \int_1^2 p_o \cdot dV = - \int_1^2 (p - p_o) \cdot dV.$$

Her er det værd at bemærke at dV er negativt, hvorfor nyttearbejdet W_n er positivt for kompressionsprocesser. Det bør også bemærkes, at det ovenstående kun er gældende for ideelle processer. I virkeligheden vil friktion og andre forhold tilføre et arbejde til systemet kaldet *dissipationsarbejde* W_{diss} . Dissipationsarbejdet bliver typisk tilført som varme til systemet. Det samlede arbejde W_g består af summen af volumenændringsarbejdet W_v og dissipationarbejdet W_{diss} som

$$W_g = W_v + W_{\text{diss}} = - \int_1^2 p \cdot dV + W_{\text{diss}}.$$

7.2 Forskellige procesforløb for lukkede systemer

Det følgende vil udelukkende omhandle reversible og dermed ideelle processer uden dissipationarbejde, desuden anses alle gasser for ideale. For lukkede system gælder energibevarelse og vi har derfor generelt at

$$W_{\text{net}} = [U_2 - U_1] - Q_{\text{net}} \tag{1}$$

Dette udtrykker, at udvekslet arbejde med omgivelserne må, hvis det ikke udveksles som varme med omgivelserne, resultere i en ændring i den indre energi for systemet.

7.2.1 Isokorisk tilstandsændring

Et lukket system, hvor procesforløbet er isokorisk (konstant volumen) bliver afbilledet som en lodret streg på et p - V diagram. Fra idealgasligningen kan vises at der for isokoriske processer gælder at

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{konstant.}$$

Idet der ikke sker en volumenændring under en isokor process gælder at arbejdet er 0 som

$$W_{v,\text{isok}} = - \int_1^2 p \cdot dV = 0.$$

Fra **Ligning 1** og eftersom der ikke udveksles arbejde med omgivelserne, kan den udvekslede energimængde under procesforløbet Q_{isok} bestemmes som

$$Q_{\text{isok}} = \int dU = \int m \cdot du = m \cdot \int c_v \cdot dT = m \cdot \frac{(c_v(T_2) + c_v(T_1))}{2} \cdot (T_2 - T_1) \approx m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1).$$

7.2.2 Isobarisk tilstandsændring

Et lukket system, hvor procesforløbet er isobarisk (konstant tryk) bliver afbilledet som en vandret streg på et p - V diagram. Fra idealgasligningen kan vises at der for isobariske processer gælder at

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \text{konstant.}$$

Idet der ikke sker en trykændring under en isobarisk process gælder at volumenfortrængningsarbejdet kan bestemmes som

$$W_{v,\text{isob}} = - \int_1^2 p \cdot dV = -p \cdot \int_1^2 dV = p \cdot (V_1 - V_2) = m \cdot R_i \cdot (T_1 - T_2).$$

Til bestemmelse af ændring af den indre energi for gassen kan **Ligning 1** for et lukket system for et isobarisk procesforløb omskrives til

$$\Delta U = Q_{\text{isob}} + W_{v,\text{isob}}.$$

Den udvekslede energimængde kan bestemmes som

$$Q_{\text{isob}} = \int m \cdot dh = m \cdot c_{p,m} \cdot \int dT = m \cdot \frac{c_p(T_2) + c_p(T_1)}{2} \cdot (T_2 - T_1) \approx m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1).$$

7.2.3 Isotermisk tilstandsændring

Et lukket system, hvor procesforløbet er isotermisk (konstant temperatur) bliver afbilledet som en hyperbel på et p - V diagram. Fra idealgasligningen kan vises at der for isotermiske processer gælder at

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{konstant.}$$

Idet der ikke sker en temperaturændring under en isotermisk process gælder at volumenfortrængningsarbejdet kan bestemmes som

$$W_{v,\text{isot}} = m \cdot R_i \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Ved et isotermisk procesforløb må den indre energi i systemet ΔU være uforandret, og energiligningen fra **Ligning 1** kan for et lukket system for et isotermisk procesforløb omskrives til

$$Q_{\text{isot}} = -W_{v,\text{isot}}.$$

7.2.4 Polytropisk tilstandsændring

En polytropisk tilstandsændring for et lukket system er kendtegnet ved følgende formel, hvor n benævnes *polytropesponenten*

$$p \cdot V^n = \text{konstant}.$$

Den isokoriske, isobariske og isotermiske tilstandsændring for et lukket system er alle specialtilfælde af en polytropisk tilstandsændring. Polytropesponenten er hhv. 0 for den isobariske process, 1 for den isotermiske og ∞ for den isokoriske. Ofte er den polytropiske tilstandsændring den mest "korrekte" for virkelige systemer.

Idet $p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n$ kan volumenændringsarbejdet bestemmes som

$$W_{v,\text{pol}} = - \int_1^2 p \cdot dV = - \int_1^2 C \cdot V^{-n} \cdot dV = -C \cdot \frac{V_2^{-n+1} - V_1^{-n+1}}{-n+1} = \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{n-1}.$$

Denne kan vha. idealgasligningen omskrives til

$$W_{v,\text{pol}} = \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{n-1}.$$

Vi kan for en polytropisk process omskrive **Ligning 1** til

$$Q_{\text{pol}} = \Delta U - W_{v,\text{pol}}.$$

Dette kan også skrives som

$$Q_{\text{pol}} = \frac{m \cdot c_v \cdot (n - \kappa) \cdot (T_2 - T_1)}{n-1}.$$

Idet vi husker at $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R_i}{c_v}$.

Lecture 5: Masse- og energianalyse af åbne systemer

25. Februar 2025

8 Masse- og energianalyse af åbne systemer

Dette kapitel vil behandle åbne systemer dvs. systemer som foruden udveksling af varme og arbejde tillige har masetransport over systemgrænsen. Der vil stadig kun blive behandler reversible (ideelle) processer.

8.1 Teknisk arbejde

For et åbent system er der ligeledes energibevarelse. Generelt gælder for åbne systemer at

$$W_{\text{net}} = \left((H_2 - H_1) + m \cdot \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + gm \cdot (z_2 - z_1) \right) - Q_{\text{net}}.$$

Eller på specifik form, hvor den udvekslede varme er flyttet til venstresiden

$$w_{\text{net}} + q_{\text{net}} = (h_2 - h_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1).$$

Den første af disse kan også skrives som

$$W_{\text{net}} = \int_1^2 V \cdot dp + W_{\text{diss}} + m \cdot \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + mg(z_2 - z_1).$$

Det ovenstående arbejde W_{net} for et åbent system benævnes det indre arbejde W_i og er sammensat af det tekniske arbejde $W_t = \int_1^2 V \cdot dp$ og dissipationsarbejdet W_{diss} samt bidrag fra forskel i kinetisk og potentiel energi for den strømmende fluid. Det tekniske arbejde W_t beskriver det ideelle og reversible arbejde, som er nødvendigt for at opnå den ønskede funktion med det betragtede system. Antages bidrag fra forskel i kinetisk og potentiel energi for den strømmende fluid for negligerbare kan det ovenstående omskrives til

$$W_i = W_t + W_{\text{diss}}.$$

Hvor det tekniske arbejde W_t er givet ved

$$W_t = \int_1^2 V \cdot dp \quad (2)$$

Dermed er det tekniske arbejde for et åbent system arealet mellem processen og p -aksen (y -aksen) i et p - V diagram. Ses bort fra kinetisk og potentiel energi i den strømmende fluid og antages systemet for adiabatisk reduceres formlen for den specifikke indre energi til

$$w_i = h_2 - h_1.$$

8.2 Forskellige procesforløb for åbne systemer

8.2.1 Isokorisk tilstandsændring

For et isokorisk procesforløb (konstant volumen) for et åbent system vil det tekniske arbejde i **Ligning 2** kunne findes som

$$W_{t,\text{isok}} = \int_1^2 V \cdot dp = V \int_1^2 dp = V \cdot (p_2 - p_1) = mv(p_2 - p_1).$$

Eller udtrykt som en effekt som

$$\dot{w}_{t,\text{isok}} = \dot{m} \cdot v (p_2 - p_1).$$

De to ovenstående formler er specielt vigtige for væskepumper og væsketurbiner, idet en væske er (tilnærmelsesvis) inkompresibel og derfor er disse processer (tilnærmelsesvis) isokoriske. Med afsæt i idealgasligningen kan det ovenstående udtryk for det tekniske arbejde omskrives til

$$W_{t,\text{isok}} = \int_1^2 V \cdot dp = V \cdot \int_1^2 dp = V(p_2 - p_1) = m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1).$$

Eller som en effekt

$$\dot{W}_{t,\text{isok}} = \dot{m} \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1).$$

Energiligningen for et isokorisk åbent system uden bidrag fra kinetisk og potentiel energi kan skrives som

$$Q_{\text{isok}} = \Delta H - W_{t,\text{isok}} = m \cdot c_v (T_2 - T_1).$$

Eller som en effekt

$$\dot{Q}_{\text{isok}} = mc_v (T_2 - T_1).$$

8.2.2 Isobarisk tilstandsændring

For et isobarisk procesforløb (konstant tryk) for et åbent system kan det tekniske arbejde i **Ligning 2** findes som

$$W_{t,\text{isob}} = \int_1^2 V \cdot dp = 0.$$

Energiligningen for et isobarisk og åbent system vil uden bidrag fra kinetisk og potentiel energi kunne skrives som

$$Q_{\text{isob}} = \Delta H = mc_p \cdot (T_2 - T_1).$$

Eller som en effekt

$$\dot{Q}_{\text{isob}} = \dot{m} \cdot \Delta h = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1).$$

8.2.3 Isotermisk tilstandsændring

For et isotermisk og åbent system kan det tekniske arbejde i **Ligning 2** findes som

$$W_{t,\text{isot}} = \int_1^2 V \cdot dp = \int_1^2 \frac{m \cdot R_i \cdot T}{p} dp = m \cdot R_i \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Eller som en effekt

$$\dot{W}_{t,\text{isot}} = \dot{m} \cdot R_i \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Energiligningen for et isotermisk åbent system uden bidrag fra kinetisk og potentiel energi, da $\Delta H = 0$, kan skrives som

$$Q_{\text{isot}} = -W_{t,\text{isot}} = -m \cdot R_i \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Eller som en effekt

$$\dot{Q}_{\text{isot}} = -\dot{W}_{t,\text{isot}} = -\dot{m} \cdot R_i \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

8.2.4 Polytropisk tilstandsændring

På lignende vis som for et lukket system, vil en polytropisk tilstandsændring for et åbent system kendetegnes ved formlen

$$p \cdot V^n = \text{konstant}$$

hvor n er polytropesponenten. På samme vis, som gjaldt for de lukkede systemer, er den isokoriske, isobariske og isotermiske tilstandsændring specialtilfælde af den polytropiske. For en polytropisk tilstandsændring kan det tekniske arbejde fra **Ligning 2** findes som

$$W_{t,\text{pol}} = n \cdot \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{n - 1} = n \cdot \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{n - 1}.$$

Idet vi har at $R_i = c_v \cdot (\kappa - 1)$ kan ovenstående omskrives til

$$W_{t,\text{pol}} = n \cdot \frac{m \cdot c_v \cdot (\kappa - 1) \cdot (T_2 - T_1)}{n - 1}.$$

Således må der gælde følgende sammenhæng mellem volumenændringsarbejdet $W_{v,\text{pol}}$ for et lukket system og det tekniske arbejde for et åbent system $W_{t,\text{pol}}$:

$$W_{t,\text{pol}} = n \cdot W_{v,\text{pol}}.$$

Energilingen for et polytropisk åbent system kan skrives som

$$Q_{\text{pol}} = \Delta H - W_{t,\text{pol}} = \frac{m \cdot c_v \cdot (n - \kappa) \cdot (T_2 - T_1)}{n - 1}.$$

Dermed er formlen for den udvekslede varmeenergi den samme for et åbent og et lukket system. Desuden gælder følgende tre formler for polytropiske (og dermed alle(?)) processer

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n \\ \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

8.3 Masse- og energibalance for et knudepunkt

Et knudepunkt er kendtegnet ved ikke at have masse eller sagt på en anden måde, så indeholder systemet ikke en masse og derfor kan systemets indre energiniveau ikke kan ændres ved et procesforløb. Et simpelt knudepunkt er kendtegnet ved

- At knudepunktet kan anses for masseløst, hvorved knudepunktets indre energiniveau ikke kan ændres
- At knudepunktet er stationært, hvorfor knudepunktets makroskopiske kinetiske og potentielle energiniveau ikke ændres
- At knudepunktet er et punktformigt system, hvorved der kan ses bort fra kinetiske og potentielle energibidrag fra mediestrømmene ud af systemet
- At knudepunktet ikke udveksler varme og arbejde med omgivelserne

Fra energibevarelse i et knudepunkt har vi at

$$\sum_{i=0}^m (m \cdot h)_{\text{ind}} = \sum_{i=0}^n (m \cdot h)_{\text{ud}}.$$

Hvor m og n angiver antallet af massestrømme ind og ud af systemet. Ligeledes har vi fra massebevarelse at

$$\sum_{i=0}^m m_{\text{ind}} = \sum_{i=0}^n m_{\text{ud}}.$$

Her har vi to formler og vi kan derfor bestemme to ubekendte.

8.4 Åbne komponenter og maskiner

I det følgende afsnit gennemgås en række relevante formler for de mest almindelige komponenter i industrielle energianlæg som gennemstrømmes af en fluid.

8.4.1 Dyser og diffusere

En konvergent dyse kan betragtes som et åbent system, hvor der kan ses bort fra potentiel energi, hvis og kun hvis dysen er vandret. Energiligningen for en dyse, hvor der ikke udveksles arbejde, men eventuelt varme, med omgivelserne kan skrives som

$$\dot{Q}_{ud} = \left(\dot{m} \cdot h_{2,rev} + \dot{m} \cdot \frac{c_{s,rev}^2}{2} \right) - \left(\dot{m} \cdot h_1 + \dot{m} \cdot \frac{c_1^2}{2} \right).$$

I denne formel vil energitabet \dot{Q}_{ud} være negativt.

8.4.2 Pumper

En pumpe benyttes til at løfte en væskestrøm fra et trykniveau til et andet. Under den antagelse af det specifikke volumen v af en væske er konstant under procesforløbet i pumpen kan det tekniske arbejdes effekt findes som

$$-\dot{W}_t = \int_1^2 \dot{V} \cdot dp = \dot{m} \cdot v \cdot (p_2 - p_1).$$

Det bør bemærkes, at der her bliver set bort fra kinetisk og potentiel energibidrag fra den strømmende væske. For adiabatiske og reversible åbne systemer kan ovenstående omskrives til

$$\dot{W}_{ind} = \dot{m} \cdot (h_{2,rev} - h_1).$$

Idet det gælder at $\dot{W}_t = \dot{W}_{ind}$ må det gælde at

$$h_{2,rev} - h_1 = v \cdot (p_2 - p_1).$$

8.4.3 Turbiner og kompressorer

En turbine producerer akselarbejde, som i praksis ofte driver en generator for produktion af elektrisk energi til elnettet. Energien til akselarbejdet kommer fra en gas, som eksanderer fra et højt tryk til et lavt tryk. Her kan størrelsen af det udnyttede arbejdes effekt findes som

$$|\dot{W}_{ud}| = \dot{m} \cdot (h_1 - h_{2,rev}) + \dot{m} \cdot \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \dot{m} \cdot g \cdot (z_1 - z_2) - |\dot{Q}_{ud}|.$$

I praksis er størrelsen af $|\dot{Q}_{ud}|$ meget lille og det ovenstående kan derfor approksimativt omskrives til

$$|\dot{W}_{ud}| = |\dot{W}_t| = \dot{m} \cdot (h_1 - h_{2,rev}) + \dot{m} \cdot \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \dot{m} \cdot g \cdot (z_1 - z_2).$$

Hvis turbinen arbejder med en idealgas får vi at

$$\begin{aligned} \dot{W}_{t,pol} &= n \cdot \frac{\dot{m} \cdot R_i \cdot (T_{2,rev} - T_1)}{n - 1} \\ \dot{Q}_{pol} &= \frac{\dot{m} \cdot c_v \cdot (n - \kappa) \cdot (T_{2,rev} - T_1)}{n - 1}. \end{aligned}$$

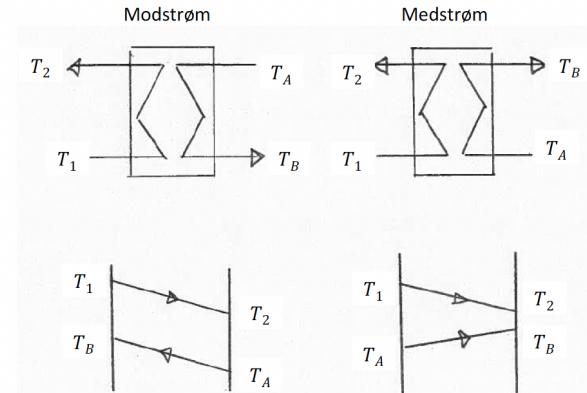
8.4.4 Varmevekslere

Varmevekslere benyttes mange steder i procesanlæg til at udveksle energi i form af varme mellem to medier. Der findes mange typer af disse men i det følgende behandles varmevekslere, hvor der ikke sker en opblanding af de to mediestrømme – Der er således kun tale om overførsel af varme. En modstrømsvarmeveksler er mere effektiv end en medstrømsvarmeveksler (se **Figur 8**). For en modstrøms-varmeveksler med uendeligt stort areal vil temperaturen T_B gå imod temperaturen T_1 eller temperaturen T_2 gå imod temperaturen T_A . Udløbstemperaturerne T_B og T_2 vil være afhængige af forholdet

$$\frac{\dot{m}_{12} \cdot c_{p,12,m}}{\dot{m}_{AB} \cdot c_{p,AB,m}}.$$

Det ovenstående forhold benævnes *kapacitetstrømsforholdet*. For en medstrømsvarmeveksler vil temperaturen T_B få imod temperaturen T_2 som er lavere end temperaturen T_1 .

Figur 8: Medstrøms- og modstrøms varmeveksler



Hvis vi indfører θ som et symbol for temperaturen i hver ende af varmeveksleren kan den logaritmiske middeltemperaturdifferens for varmeveksleren findes som

$$\Delta T_m = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ln\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}.$$

For en varmeveksler gælder i øvrigt følgende tre formler (bemærk effekter regnes positive uanset om der tilføres eller afgives energi til varmeveksleren):

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{12} &= \dot{m}_{12} \cdot (h_1 - h_2) = \dot{m}_{12} \cdot c_{p,12,m} \cdot (T_1 - T_2) \\ \dot{Q}_{AB} &= \dot{m}_{AB} \cdot (h_B - h_A) = \dot{m}_{AB} \cdot c_{p,AB,m} \cdot (T_B - T_A) \\ \dot{Q} &= k \cdot A \cdot \Delta T_m.\end{aligned}$$

I den sidste formel repræsenterer A det varmeoverførende areal af varmeveksleren og k er varmetransmissionskoefficienten. Hvis det varmeoverførende areal for medie "12" er lige så stort som for medie "AB" (som i en pladevarmeveksler) kan varmetransmissionskoefficienten findes som

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{AB}}}.$$

Her er s tykkelsen af det varmeoverførende areal, λ er varmeledningsevnen for det varmeoverførende areals materiale og α er varmeovergangstallet som er et mål for hvor godt varmen ledes igennem grænselaget

mellem det strømmende medie og en fast overflade. Omtrent 95 % af arbejdet i en varmeveksler ligger i varmeovergangstallet. Hvis det varmeoverførende areal for medie "12" ikke er lige så stort som for medie "AB" (som i en rørvarmeveksler) bestemmes $k \cdot A$ efter formlen

$$\frac{1}{k \cdot A} = \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} + \frac{\ln\left(\frac{d_u}{d_i}\right)}{2\pi \cdot L \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha_u \cdot A_u}.$$

Hvor $A_i = \pi \cdot d_i \cdot L$ og $A_u = \pi \cdot d_u \cdot l$ er hhv. det indre og ydre overflade af at rør med indre diameter d_i , ydre diameter d_u og længde L . Såfremt man ønsker at adskille størrelsen $k \cdot A$ i to faktorer kan man enten finde en k -værdi med reference i det indre- eller ydre areal som

$$k_i = \frac{k \cdot A}{A_i}$$

$$k_u = \frac{k \cdot A}{A_u}.$$

Det er vigtigt at bemærke at $k_i \neq k_u$.

8.4.5 Drøvleorganer

En drøvling er en trykreduktion. Det simpleste drøvleorgan kunne være at erstatte en del af en rørstrækning med et rørstykke, hvor den invendige diameter er reduceret. Den reducerede diameter ville afstedkome et øget tryktab og derved en trykreduktion. Et drøvleorgan kan betragtes som et åbent system, hvor der ikke sker nogen udveksling af varme og arbejde med omgivelserne. Den strømmende fluid bevarer energien igennem drøvleorganet. Antager man ligeledes, at ændringen af potentiel og kinetisk energi er negligerbare vil entalpien før og efter drøvleorganet være tilnærmelsesvis ens som

$$h_{ud} \approx h_{ind}.$$

Lecture 6: Ideelle og ikke-ideelle processer

4. Marts 2025

9 Ideelle og ikke-ideelle processer

For både lukkede og åbne systemer er tidligere introduceret et dissipationsarbejde W_{diss} , dette dissipationsarbejde betyder at virkelige termodynamiske processer ikke er helt reversible.

For *lukkede* systemer er det tidligere forklaret, at det samlede arbejde W_g består af summen af volumenændringsarbejdet W_v og dissipationsarbejdet W_{diss} som

$$W_g = W_v + W_{diss} = - \int_1^2 p \cdot dV + W_{diss}.$$

For *åbne* systemer gælder noget tilsvarende. Her er det indre arbejde W_i sammensat af det tekniske arbejde W_t og dissipationsarbejdet W_{diss} som

$$W_i = W_t + W_{diss} = \int_1^2 V \cdot dp + W_{diss}.$$

Volumenændringsarbejdet W_v og det tekniske arbejde W_t ovenfor beskriver den ideelle og reversible del af procession. Dissipationsarbejdet (som kommer af friktion o.lign.) kan være 0 (for en ideel process) eller

positiv (for en reel process) – den kan aldrig være negativ, da dette ville medføre at friktion tilfører energi til systemet og ikke omvendt.

Dissipative effekter kan opdeles i

- **Dissipationsprocesser** som f.eks. friktionsbehæftede strømninger, plastisk deformering af materialer og forbrændingsprocesser. Eksempelvis er varme afgivet fra en elradiatør (en elektrisk modstand) ren dissipativt.
- **Udligningsprocesser** som eksempelvis tryk-, temperatur- eller koncentrationsudligning. F.eks. sker der en trykudligning, når et medie under tryk ledes til en ekspansionsbeholder med lavere tryk.

Kendetegn for den dissipative del af en irreversibel arbejdsproces er:

- Processen forløber kun af sig selv i den ene retning
- Der sker henfald af højværdige energiformer til en lav-værdig energiform (varme)
- Processen lader sig kun reversere, hvis der sker indgreb fra omgivelserne.

9.1 Introduktion til entropi

Vi ved at vi kan skrive den tilførte varmeenergi til et system som

$$Q_{\text{net}} = [H_2 - H_1] - W_{\text{net}}.$$

Dette kan (se evt. bogens side 115) omskrives til

$$dQ_{\text{net}} + dW_{\text{diss}} = dU + p \cdot dV.$$

Her er venstresiden summen af den med omgivelserne udvekslede varme og varme opstået som følge af dissipative effekter i systemet. Hvis venstresiden divideres med temperatur opstår en parameter, som viser sig at være en ny uafhængig termodynamisk parameter kaldet *entropi*.

Definition 11: Entropi

Entropien S for et system er defineret som

$$S = \int_0^T \frac{dQ_{\text{net}+dW_{\text{diss}}}}{T} + \text{konstant.}$$

Her er det vigtigt at benytte den absolute temperaturskala (Kelvin). Det kan være bøvlet at bestemme den absolute entropi for et system, da integrationskonstanten skal vælges således, at nulpunktet for entropiskalaen er ved 0 K. Dog kan integrationskonstanten elimineres, såfremt man blot er interesseret i en entropidifferens som

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{net}} + dW_{\text{diss}}}{T}.$$

Hvis temperaturen er konstant simplificeres det ovenstående til

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_{\text{net}} + W_{\text{diss}}}{T} \quad (\text{konstant } T) \tag{3}$$

Hvis processen ligeledes er reversibel ($dW_{\text{diss}} = 0$) bliver det ovenstående blot

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_{\text{net}}}{T} \quad (\text{konstant } T \text{ og reversibel process } dW_{\text{diss}} = 0).$$

Entropien henføres til massen i systemet og kan derfor udtrykkes som en specifik størrelse s med enheden [J/kg K]. På samme måde kan man regne den anden vej fra en specifik entropi s til en generel entropi S som

$$S = m \cdot s.$$

Vha. entropi som en uafhængig termodynamisk parameter opnås mulighed for at udvide antallet af tilstandsdiagrammer og et T - s eller et h - s diagram har vist sig at være hænsigtsmæssige i mange tekniske anvendelser.

9.2 Isentropiske processer

En isentropisk proces er en proces, hvor der ikke sker nogen ændring i entropien dvs. $dS = 0$. En isentropisk process er altid både reversibel og adiabatisk. For både lukkede og åbne systemer indeholdende en idealgas er det tidligere forklaret at såvel isokoriske, isobariske og isotermiske tilstandsændringer er specialtilfælde af en polytropisk tilstandsændring. Hvis en isobar, isokorisk eller polytropisk proces er irreversibel men stadig adiabatisk, så vil varmeudvekslingen Q være lig dissipationens arbejdet. Altså

$$W_i = W_{t,\text{pol}} + W_{\text{diss}} = W_{t,\text{pol}} + Q_{\text{pol}}.$$

For en polytropisk tilstandsændring gælder generelt

$$p \cdot V^n = \text{konstant} = C.$$

En isentropisk tilstandsændring er ligeledes et specialtilfælde af en polytropisk tilstandsændring, hvor polytropesponenten n er lig isentropesponenten κ som tidligere er defineret som

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R_i}{c_v}.$$

Isentropiske tilstandsændringer har altid en varmeduveksling $Q_{\text{isen}} = 0$. Det indre arbejde for en isentropisk process i et *lukket* system kan findes som

$$\begin{aligned} W_{v,\text{isen}} &= \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \\ W_{v,\text{isen}} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{\kappa - 1} \\ W_{v,\text{isen}} &= m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

For en isentropisk process i et åbent system kan det tekniske arbejde findes som

$$\begin{aligned} W_{t,\text{isen}} &= \kappa \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \\ W_{t,\text{isen}} &= \kappa \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{\kappa - 1} \\ W_{t,\text{isen}} &= m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

For isentropiske processer gælder i øvrigt følgende tre sammenhænge (som også gælder for polytrophe, dog med n istedet for κ)

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa \\ \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}.\end{aligned}$$

Det ovenstående gælder kun for idealgasser (og isentropiske processer men det giver vidst sig selv).

9.3 Entropiændring for processer

I det følgende vil entropiændringsformler for hhv. isobariske, isotermiske, isokoriske og polytropiske tilstandsændringer udledes. Hertil benyttes følgende formel for entropiændringen i et simpelt og reversibelt system

$$dS = \frac{dH - V \cdot dp}{T} \quad (4)$$

9.3.1 Entropiændring for en isobar proces

Ved en isobar proces sker ingen ændring af trykket ($dp = 0$), hvorfor **Ligning 4** kan reduceres til

$$dS = \frac{dH - V \cdot dp}{T} = \frac{dH}{T}.$$

Dette kan vha. definitionen af entalpi omskrives til

$$dS = \frac{dH}{T} = \frac{m \cdot c_{p,m} \cdot dT}{T}.$$

Ved integration bliver dette til

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{m \cdot c_{p,m}}{T} dT = m \cdot c_{p,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Denne kan også skrives ved specifikke størrelser som

$$s_2 - s_1 = c_{p,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

9.3.2 Entropiændring for en isotermisk proces

Ved en isotermisk proces sker ingen ændring i temperaturen ($dT = 0 \implies dH = 0$) dermed reduceres **Ligning 4** til

$$dS = \frac{dH - V \cdot dp}{T} = -\frac{V \cdot dp}{T}.$$

Hvis vi antager at stoffet er en idealgas kan vi vha. idealgasligningen omskrive det ovenstående til

$$dS = \frac{V \cdot dp}{T} = -m \cdot R_i \cdot \frac{dp}{p}.$$

Ved integration fås følgende

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 -m \cdot R_i \cdot \frac{dp}{p} = m \cdot R_i \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

På specifik form bliver denne

$$s_2 - s_1 = R_i \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

9.3.3 Entropiændring for en isokorisk proces

Ved en isokor proces sker ingen ændring af volumenet ($dV = 0$) og dermed reduceres **Ligning 4** til

$$dS = \frac{dU + p \cdot dV}{T} = \frac{dU}{T}.$$

Vha. idealgasloven kan dette omskrives til

$$dS = \frac{dU}{T} = \frac{m \cdot c_{v,m}}{T} dT.$$

Ved integration fås følgende

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{m \cdot c_{v,m}}{T} dT = m \cdot c_{v,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

På specifik form bliver denne

$$s_2 - s_1 = c_{v,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

9.3.4 Entropiændring for en polytropisk proces

Ved en polytropisk proces er ingen tilstandsparameter konstant hvorfor vi blot har **Ligning 4** og en lignende tilsvarende formel (udledd i bogen)

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dH - V \cdot dp}{T} \\ dS &= \frac{dU + p \cdot dV}{T}. \end{aligned}$$

Disse kan disse omskrives til

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dH - V \cdot dp}{T} = \frac{dH}{T} - \frac{V \cdot dp}{T} = \frac{m \cdot c_{p,m} \cdot dT}{T} - \frac{V \cdot dp}{T} \\ dS &= \frac{dU + p \cdot dV}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{p \cdot dV}{T} = \frac{m \cdot c_{v,m} \cdot dT}{T} + \frac{p \cdot dV}{T}. \end{aligned}$$

Vha. idealgasligningen kan de to omskrives til

$$\begin{aligned} dS &= \frac{m \cdot c_{p,m} \cdot dT}{T} - \frac{V \cdot dp}{T} = \frac{m \cdot c_{p,m} \cdot dT}{T} - \frac{m \cdot R_i \cdot dp}{p} = m \cdot c_{p,m} \cdot \frac{dT}{T} - m \cdot R_i \cdot \frac{dp}{p} \\ dS &= \frac{m \cdot c_{v,m} \cdot dT}{T} + \frac{p \cdot dV}{T} = \frac{m \cdot c_{v,m} \cdot dT}{T} + \frac{m \cdot R_i \cdot dV}{V} = m \cdot c_{v,m} \cdot \frac{dT}{T} + m \cdot R_i \cdot \frac{dV}{V}. \end{aligned}$$

Ved integration fås følgende to ligninger

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 m \cdot c_{p,m} \cdot \frac{dT}{T} - \int_1^2 m \cdot R_i \cdot \frac{dp}{p} = m \cdot \left(c_{p,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R_i \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \right)$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 m \cdot c_{v,m} \cdot \frac{dT}{T} + \int_1^2 m \cdot R_i \cdot \frac{dV}{V} = m \cdot \left(c_{v,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R_i \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \right).$$

Eller på specifik form (for idealgasser) som

$$s_2 - s_1 = c_{p,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R_i \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$s_2 - s_1 = c_{v,m} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R_i \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

9.4 Entropiændring for kredsprocesser

En kredsproces er kendtegnet ved, at sluttilstanden er lig starttilstanden, hvilket muliggør en kontinuert virkende maskine. Vi kan omskrive **Ligning 3** til

$$T \cdot dS = dQ_{\text{net}} + dW_{\text{diss}}.$$

Eller integreret op som

$$\int_1^2 T \cdot dS = Q_{\text{net}} + W_{\text{diss}}.$$

Ledet på venstresiden kan hurtigt ses at være arealet under procesvejen i et T - s diagram. Dette areal er således summen af den udvekslede varmemængde og dissipationsarbejdet. For en kredsproces gælder, at der ikke sker en ændring af den indre energi og derfor må størrelsen af den med omgivelserne udvekslede varmemængde for systemet. Altså er nettoarealet for en kredsproces i et T - s diagram lig med det for kredsprocessen udvekslede arbejde.

9.4.1 Carnot kredsproces

En formulering af termodynamikkens 2. lov (Kelvin-Plancks version) lyder: “*Det er ikke muligt for et anlæg, som udfører en kredsproces, at modtage varme fra et enkelt reservoir og producere en tilsvarende mængde arbejde*”. Denne lov fortæller hvad man ikke kan, men hvad hvis man i stedet ønsker at finde ud af hvad man kan?

Carnot påpegede at man i stedet kan opnå en vis mængde arbejde W ud fra en mængde varme Q fra et højtemperaturreservoir. Resten af energien $Q - W$ må afgives til et andet reservoir ved en lavere temperatur.

En anden formulering af termodynamikkens 2. lov (Clausius version) lyder: “*Det er ikke muligt at konstruere et anlæg, som udfører en kredsproces og udfører ingen anden opgave end at overføre varme fra et lavtemperatur reservoir til et højtemperatur reservoir*”. Ingen fortæller loven hvad man ikke kan og ikke hvad man rent faktisk kan.

Carnot påpegede her, at der skal tilføres en vis mængde arbejde W hvis man skal flytte en varmemængde Q fra et lavtemperatur reservoir til et højtemperaturreservoir. Herved får højtemperaturreservoaret tilført en energimængde på $Q + W$.

På baggrund af dette forslog Carnot to kredsprocesser. Disse er

- En **arbejdsproducerende maskine** som bruger varme Q_{ind} fra et højtemperaturreservoir og leverer restvarme Q_{ud} til et lavtemperaturreservoir. Her har vi
 - *Tilstand 1-2: Isentropisk kompression*
 - *Tilstand 2-3: Isotermisk varmetilførsel*
 - *Tilstand 3-4: Isentropisk ekspansion*
 - *Tilstand 4-1: Isotermisk varmeafgivelse*
- En **arbejdskonsumerende maskine** som optager varme Q_{ind} fra et lavtemperaturreservoir og afgiver varme Q_{ud} til et højtemperaturreservoir. Her har vi
 - *Tilstand 1-2: Isotermisk varmetilførsel*
 - *Tilstand 2-3: Isentropisk kompression*
 - *Tilstand 3-4: Isotermisk varmeafgivelse*
 - *Tilstand 4-1: Isentropisk ekspansion*

Dette svarer i begge tilfælde til en rektangulær kredsproces i et $T-s$ diagram, idet alle processer er enten horisontale eller vertikale da alle processer enten er isotermiske eller isentropiske.

9.4.2 Carnots arbejdsproducerende maskine

Den termiske virkningsgrad $\eta_{th,C} = \frac{|\text{Ønsket output}|}{|\text{Nødvendigt input}|}$ for Carnots arbejdsproducerende maskine kan vises at være givet ved

$$\eta_{th,C} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Hvor T_L er temperaturen af lavtemperaturreservoirtet og T_H er temperaturen af højtemperaturreservoirtet.

9.4.3 Carnots arbejdskonsumerende maskine

Carnots arbejdskonsumerende maskine kan benyttes til to formål

1. Som **kølemaskine** (indeks R), hvor formålet er at aftage energi fra lavtemperaturreservoirtet.
2. Som **varmepumpe** (indeks HP), hvor formålet er at levere varme til højtemperaturreservoirtet.

Hertil er virkningsgraden ikke hensigtsmæssig at benytte. I stedet defineres en “Coefficient Of Performance” (COP, i daglig tale COP-faktoren) som for en kølemaskine og en varmepumpe hhv. defineres som

$$\begin{aligned}\text{COP}_{R,C} &= \frac{|\text{Ønsket energimængde}|}{|\text{Nødvendigt input}|} = \frac{|Q_{\text{ind}}|}{|W_{\text{net}}|} \\ \text{COP}_{HP,C} &= \frac{|\text{Ønsket energimængde}|}{|\text{Nødvendigt input}|} = \frac{|Q_{\text{ud}}|}{|W_{\text{net}}|}.\end{aligned}$$

Det kan vises at disse kan findes som

$$\begin{aligned}\text{COP}_{R,C} &= \frac{1}{\frac{T_H}{T_L} - 1} = \frac{T_L}{T_H - T_L} \\ \text{COP}_{HP,C} &= \frac{1}{1 - \frac{T_L}{T_H}} = \frac{T_H}{T_H - T_L}.\end{aligned}$$

Disse er forbundet matematisk som

$$\text{COP}_{\text{HP},C} = \text{COP}_{\text{R},C} + 1.$$

9.5 Isentropisk virkningsgrad

Den isentropiske virkningsgrad η_{is} er defineret som forholdet mellem det isentropiske (dvs. reversible og adiabatiske) arbejde $\dot{W}_{t,isen}$ og det virkelige arbejde \dot{W}_i for en maskine:

$$\eta_{is} = \frac{\dot{W}_{t,isen}}{\dot{W}_i}.$$

Denne ligger altid i intervallet $0 \leq \eta_{is} \leq 1$.

Formlen for at regne den isentropiske virkningsgrad afhænger af maskingtypen og derfor er de mest anvendte maskintyper gennemgået nedenfor. Teoretisk beregning af den isentropiske virkningsgrad er ofte svært og derfor findes den ofte empirisk og ved målinger i stedet.

9.5.1 Turbine

En turbine er en maskine, som gennemstrømmes af et ekspanderende medie, hvorved der produceres en akseffekt. Her omdannes trykket fra det ekspanderende gennemstrømmende medie til en kinetisk energi i turbinens aksel. For en turbine gælder følgende sammenhæng mellem akseffekten i dampturbinen \dot{W}_i og effekt \dot{P}_{el} til elnettet:

$$\dot{P}_{el} = |\dot{W}_i| \cdot \eta_{mek} \cdot \eta_{gear} \cdot \eta_{gen} = \sqrt{3} \cdot I \cdot V \cdot \cos \phi.$$

Hvor η_{mek} er den mekaniske virkningsgrad for turbinen (typisk 0,97–0,99), η_{gear} er virkningsgraden for gearet (typisk 0,96–0,98), η_{gen} er virkningsgraden for generatoren (typisk mellem 0,98–0,99), $\sqrt{3}$ er en korrektionsfaktor for 3-faset vekselstrøm, I er strømstyrken i hver fase, V er spændingen og ϕ er faseforskydning mellem strøm og spænding.

Generelt antager man at mekaniske tab i turbinen såsom lejetab, tab i gearet og tab i generatoren ikke tilflyder dampstrømmen men overføres direkte til omgivelserne. Den isentropiske virkningsgrad for en turbine defineres som forholdet mellem den producerede akseffekt \dot{W}_i og akseffekten, hvis turbinen havde været isentropisk $\dot{W}_{t,isen}$. Den isentropiske virkningsgrad for turbiner (set over hele ekspansionsforløbet) afhænger af mange ting men ligger typisk i området omkring 0,80–0,90.

$$\eta_{is} = \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}_{t,isen}} = \frac{\dot{m} \cdot (h_2 - h_1)}{\dot{m} \cdot (h_{2,s} - h_1)} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2,s} - h_1} = \frac{\Delta h}{\Delta h_{is}}.$$

Denne formel giver en mulighed for at bestemme h_2 dvs. den reelle tilstand efter turbinen, hvis man kender den isentropiske virkningsgrad for den valgte turbine. Dog kræver dette at man kender dampens tilgangsdata (f.eks. ved at kende p_1 og T_1) samt én tilstandsparameter for dampens afgang (typisk trykket p_2 som bestemmes af den efterfølgende kondenser). Bemærk i øvrigt, at alle interne dissipative effekter i turbinen vil indgå i forskellen mellem \dot{W}_i og $\dot{W}_{t,isen}$.

9.5.2 Kompressor

Vi betragter her en kompressor der gennemstrømmes af en reel gas og lader

$$\eta_{is} = \frac{\dot{W}_{t,isen}}{\dot{W}_i}.$$

En kompressor fungerer grundlæggende ved at en gas ved et givet tryk ledes til en kompressor som komprimerer denne gas til et højere tryk. Kompressoren optager akseleffekt \dot{W}_i for at udføre denne funktion. Den isentropiske virkningsgrad for en kompressor er typisk i størrelsesordenen 0,40–0,75 og kan findes som

$$\eta_{is} = \frac{\dot{W}_{t,isen}}{\dot{W}_i} = \frac{\dot{m} \cdot (h_{2,s} - h_1)}{\dot{m} \cdot (h_2 - h_1)} = \frac{h_{2,s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\Delta h_{is}}{\Delta h}.$$

Hvis man antager at c_p ikke er en funktion af temperaturen dvs. er konstant kan formlen ovenfor forenkles til

$$\eta_{is} \approx \frac{T_{2,s} - T_1}{T_2 - T_1}.$$

Specielt ved store temperaturforskelle giver dette dog anledning til unøjagtighed. Sammenhængen mellem akseleffekten til kompressoren \dot{W}_i og effekt \dot{P}_{el} til elnettet kan formuleres som

$$\dot{P}_{el} = \frac{\dot{W}_i}{\eta_{mek} \cdot \eta_{gear} \cdot \eta_m} = \sqrt{3} \cdot I \cdot V \cdot \cos \phi.$$

Hvor η_{mek} er virkningsgraden for kompressoren (typisk 0,90–0,95), η_{gear} er virkningsgraden for gearet (typisk 0,96–0,98) og η_m er virkningsgraden for elmotoren (typisk 0,90–0,96).

9.5.3 Pumpe

Teorien for en pumpe og en kompressor minder meget om hinanden, men beregningerne for en pumpe er simplere da denne antages at gennemstrømmes af en inkompresibel væske. Den isentropiske virkningsgrad for pumper ligger typisk i området 0,50–0,85 og kan findes som

$$\eta_{is} = \frac{\dot{W}_{t,isen}}{\dot{W}_i} = \frac{\dot{m} \cdot (h_{2,s} - h_1)}{\dot{m} \cdot (h_2 - h_1)} = \frac{h_{2,s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\Delta h_{is}}{\Delta h}.$$

Denne kan omskrives for at finde den reelle akseleffekt \dot{W}_i som

$$\dot{W}_i = \frac{\dot{W}_{t,isen}}{\eta_{is}} = \frac{\dot{m} \cdot v_1 \cdot (p_2 - p_1)}{\eta_{is}}.$$

Den reelt optagne akseleffekt \dot{W}_i kan også vises at være lig

$$\dot{W}_i = \dot{m}(h_2 - h_1).$$

Dvs. med kendskab til den isentropiske virkningsgrad η_{is} for pumpen er der mulighed for at bestemme h_2 og sammenholdt med kendskab til p_2 er den reelle tilstand efter pumpen således kendt.

Sammenhængen mellem akseleffekt til pumpen \dot{W}_i og effekt \dot{P}_{el} fra elnettet kan formuleres som

$$\dot{P}_{el} = \frac{\dot{W}_i}{\eta_{mek} \cdot \eta_{gear} \cdot \eta_m}.$$

9.5.4 Dyse

For en dyse kan ligeledes opstilles en formel for den isentropiske virkningsgrad som i praksis typisk er i området 0,85–0,99. Denne formel er

$$\eta_{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2,s}} = \frac{\Delta h}{\Delta h_{is}}.$$

Hvis der ses bort fra potentielle energibidrag i den strømmende fluid, varmetab fra overfladen og antager at alle interne dissipative effekter i dysen reducerer udløbshastigheden kan det ovenstående omskrives til

$$\eta_{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2,s}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c_2^2 - \frac{1}{2} c_1^2}{\frac{1}{2} c_{2,s}^2 - \frac{1}{2} c_1^2} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_{2,s}^2 - c_1^2}.$$

Hvor c_1 og c_2 er de specifikke hastigheder af fluiden hhv. ved indgangen og ved udgangen af dysen.

9.6 Entropi balance

For ethvert system kan opstilles en balance for entropien. Dette ser typisk ud som

$$\Delta S_{sys} = S_2 - S_1 = \sum \frac{Q}{T} + \sum m_{ind} \cdot s_{ind} - \sum m_{ud} \cdot s_{ud} + S_{gen} \quad (5)$$

Eller differentieret med tiden som

$$\frac{dS_{sys}}{dt} = \dot{S}_2 - \dot{S}_1 = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \sum \dot{m}_{ind} \cdot s_{ind} - \sum \dot{m}_{ud} \cdot s_{ud} + \dot{S}_{gen}.$$

I **Ligning 5** har de enkelte led følgende karakteristika:

- ΔS_{sys} : Beskriver entropiændringen for systemet, som både kan være positiv og negativ
- $\sum \frac{Q}{T}$: Beskriver summen af alle varmemængder udvekslet med omgivelserne divideret med den (konstante) temperatur hvorved varmen er udvekslet. Idet Q kan være positiv og negativ men T kun kan være positiv kan det enkelte led i summationen være både positivt og negativt
- $\sum m_{ind} \cdot s_{ind}$: Beskriver summen af entropigevinsterne fra alle masser i systemet. Hvert led i denne summation er positivt
- $\sum m_{ud} \cdot s_{ud}$: Beskriver summen af entropitabene fra alle masser ud af systemet. Hvert led i summationen er negativt
- S_{gen} : Beskriver den i systemet genererede eller opståede entropi, som er en følge af dissipationsarbejde hidrørende fra varme udviklet som følge af friktion, kemiske reaktioner mv. samt varme udviklet som følge af arbejde tilført fra omgivelserne og el overført fra omgivelserne. Denne er altid positiv

Arbejde tilført over systemgrænsen bidrager således ikke direkte i entropibalancen, men skaber større uorden i systemet og bidrager til den genererede entropi i systemet. Arbejde udtaget fra et system indgår ikke i entropibalancen, da betingelsen om at S_{gen} skal være positiv da ikke vil kunne opretholdes i alle tilfælde.

I øvrigt bør bemærkes at den generelle formel fra ovenfor altid gælder. For lukkede systemer udgår leddene der omhandler entropi og massetransport (de to summer med m_{ind} og m_{ud}). For reversible systemer er $S_{gen} = 0$ og udgår derfor. For adiabatiske systemer er $\sum \frac{Q}{T} = 0$ og dette led udgår derfor. For isentropiske systemer er $\sum \frac{Q}{T} = S_{gen} = 0$ og disse led udgår derfor. Specielt for kontinuert (steady) flow gælder

$$\dot{S}_2 - \dot{S}_1 = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \sum \dot{m}_{ind} \cdot s_{ind} - \sum \dot{m}_{ud} \cdot s_{ud} + \dot{S}_{gen} = 0.$$

Lecture 7: Kraftværker

11. Marts 2025

10 Kraftværker

Dette kapitel omhandler kraftværker.

Definition 12: Kraftværk

I ethvert kraftværk serer en arbejdsproducerende kredsproces, hvor der sket faseskift for mediet i kredsprocessen.

For at en kredsproces kan producere og eksportere en arbejdsmængde til omgivelserne, må der naturligvis tilføres energi fra omgivelserne. Den tilførte energi er (typisk) varme, som traditionelt overføres til kredsprocessen fra en ekstern forbrænding af et brændsel. I senere år, grundet stigende klimabevisthed, er man dog begyndt at søge mod at benytte eksempelvis solfangere og geotermiske kilder til at levere varme til kredsprocessen. Kort fortalt konverterer kredsprocessen varme om til arbejde, som er en mere højværdi energiform og derfor kan udnyttes til flere formål. Mediet i kredsprocesserne vil typisk være vand eller organiske medier.

I dette kapitel ses nærmere på:

- Dampkraftværket (Rankine-princippet)
- Organic Rankine Cycle (Rankine-princippet, men ikke med vand)
- Dampkraftværk efter en gasturbine

Alle de nævnt kredsprocesser er funderet på Rankine-princippet, som vil blive beskrevet nærmere i det følgende.

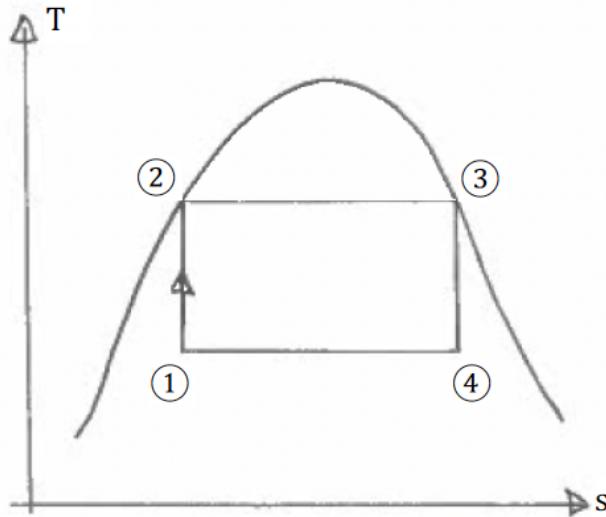
10.1 Rankine kredsprocessen

Som konkluderet i **under-under-sektion 9.4.1** vil Carnot virkningsgraden være den højest mulige virkningsgrad for en arbejdsproducerende kredsproces. Dermed er det også målet for virkelige kredsprocesser så tæt som muligt at ligne Carnot-kredsprocessen (afbildet i et $T-s$ diagram på **Figur 9**). Carnots kredsproces er dog i sin grundessens en teoretisk model. Hvis denne skulle realiseres i virkeligheden vil et par teoretiske udfordringer (som vi endnu ikke har løst) skulle løses. Disse er i hovedtræk:

- Tilstand 1-2: Isentropisk trykøgning (f.eks. i en pumpe): Det vil være en udfordring at lave en holdbar pumpe som kan håndtere en to-fase strømning uden at få kaviation i indløbet til pumpen.
- Tilstand 3-4: Isentropisk ekspansion (f.eks. i en turbine): Det vil være en udfordring at lave en turbine, som kan håndtere så lave x -værdier i bagenden uden, at der ville ske ødelæggende slitage af væskedråber ved de høje strømningshastigheder som der forefindes i bagenden af en turbine.

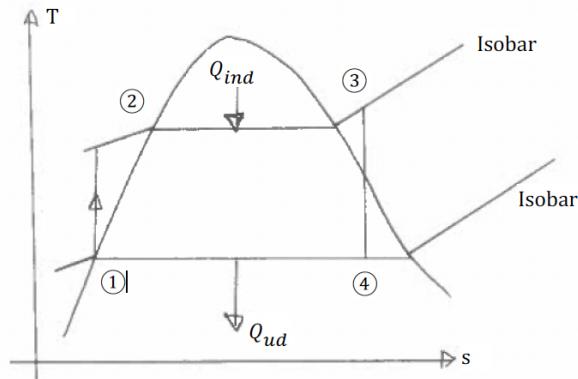
Definition 13: Kaviation

Kaviation er et begreb for den ødelæggende virkning, der sker ved implosion af gasbobler, som dannes i en væske (som er tæt ved kogepunktet) ved en uundgåelig trykreduktion i indløbet af en pumpe. Når

Figur 9: Carnots kredsproces i et T - s diagram

der igen trykopbygges i pumpen, imploderer gasboblerne. Implosion af gasbobler kan føre til pitting (kraterdannelse) i overfladen af pumpehuset og løbehjulet.

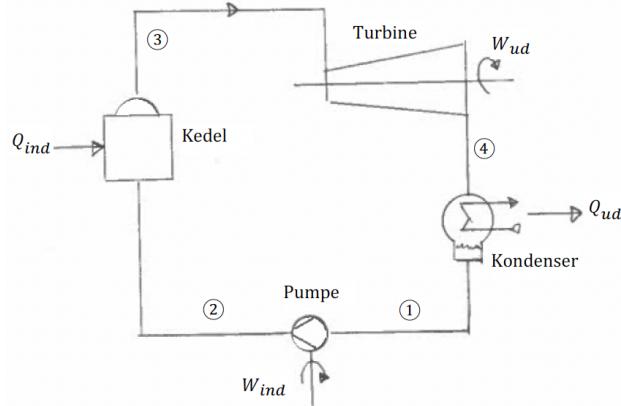
For at imødekommende ovenstående problemer foreslog Rankine en modificeret Carnot-proces, som er grafisk afbildet i et T - s diagram på **Figur 10** og vist i et eksemplificeret procesdiagram på **Figur 11**. Rankines

Figur 10: Rankines kredsproces i et T - s diagram

kredsproces består af følgende delprocesser:

- Tilstand 1-2: Isentropisk kompression (pumpe)
- Tilstand 2-3: Isobarisk varmetilførsel (kedel)
- Tilstand 3-4: Isentropisk ekspansion (turbine)
- Tilstand 4-1: Isobarisk varmeafgivelse (kondenser)

Figur 11: Procesdiagram for Rankines kredsproces



Det skal selvfølgelig bemærkes at selvom Rankines kredsproces er et forsøg på at ”afidealiser” Carnots proces så er Rankine processen stadigt grundlæggende idealiseret idet der ses bort fra tryktab i diverse komponenter og rørforbindelser.

I dette kursus behandles Rankine kredsprocessen ed de to isentropiske delprocesser 1-2 og 3-4, og det forudsættes:

- At delprocesserne er reversible, hvilket indebærer at der ikke er friktion og dermed tryktab internt i anlægget
- At alle komponenter er adiabatiske – på nær der, hvor der skal ske varmeverksling – dvs. at der ikke varmeverksles mellem komponenterne internt eller er utilsigtet varmetab til omgivelserne.

Da delprocesserne 1-2 og 3-4 er forudsat isentropiske, vil de også være adiabatiske, hvorfor:

$$Q_{12} = Q_{34} = 0.$$

Delprocesserne 2-3 og 4-1 er hhv. isobarisk varmetilførsel og -afgivelse for et åbent system og derfor har vi her

$$\begin{aligned} Q_{23} &= m \cdot (h_3 - h_2) \\ Q_{41} &= m \cdot (h_1 - h_4). \end{aligned}$$

Derudover er nettoarbejdet for Rankine processen givet ved

$$W_{net} = W_{34} + W_{12} = -Q_{net} = -(Q_{23} + Q_{41}).$$

Den termiske virkningsgrad for den ideelle Rankine-proces kan dernæst defineres som

$$\eta_{th, \text{Rankine}} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|W_{net}|}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2}.$$

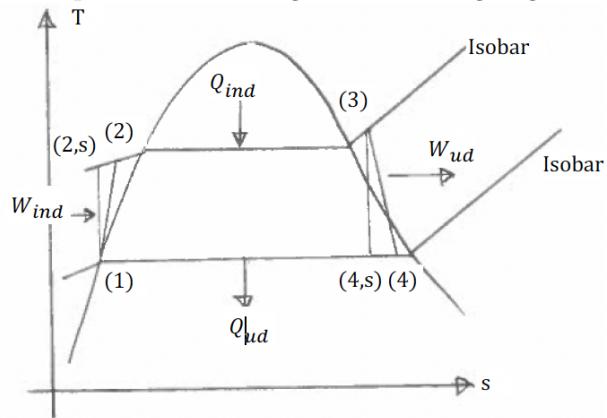
10.2 Kraftværket

10.2.1 Kraftværkets basiskredsproces

For at gøre Rankine-kredsprocessen mere virkelighedsnær, indføres den isentropiske virkningsgrad for både pumpe og turbine. Rankine-processen er den mest benyttede på de termiske kraftværker, der benytter vandt som det cirkulerende medie, da det er billigt, tilgængeligt i store mængder og ikke miljøskadeligt. Et typisk kraftværk består således af følgende delprocesser (afbildet på **Figur 12**):

- Tilsand 1-2: Kompression (pumpe)
- Tilstand 2-3: Isobarisk varmetilførsel (kedel)
- Tilstand 3-4: Ekspansion (turbine)
- Tilstand 4-1: Isobarisk varmeafgivelse (kondenser)

Figur 12: Rankines kredsproces i et $T-s$ diagram med uundgåelige tab i pumpe og turbine



Der fokuseres nu på effekt i stedet for varme, hvilket nemt gøres, idet massen m udskiftes med massestrømmen \dot{m} . Bestemmelsen af effekterne i kredsprocessen, idet alle med overlæg beregnes positive, bestemmes ved formlerne:

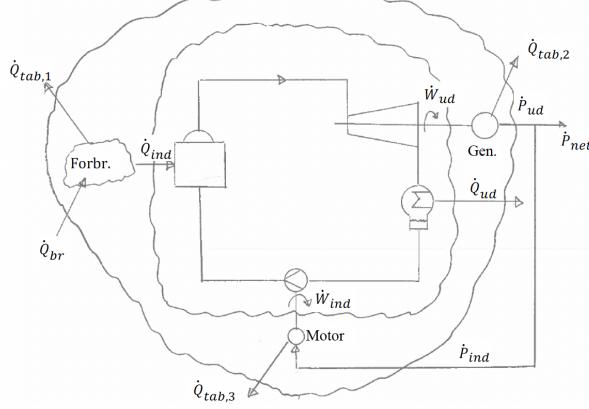
$$\begin{aligned}\dot{W}_{12} &= \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \\ \dot{Q}_{23} &= \dot{m} \cdot (h_3 - h_2) \\ |\dot{W}_{34}| &= \dot{m} \cdot (h_3 - h_4) \\ |\dot{Q}_{41}| &= \dot{m} \cdot (h_4 - h_1).\end{aligned}$$

Massestrømmen af vand som cirkulerer vil være konstant. Det skal i øvrigt bemærkes at arbejdet \dot{W} er det samme som det indre arbejde \dot{W}_i som er summen af det tekniske arbejde \dot{W}_t og dissipationsarbejdet \dot{W}_{diss} . Den termiske virkningsgrad for et kraftværk vil være uforandret:

$$\eta_{th, \text{Rankine}} = 1 - \frac{|\dot{Q}_{41}|}{\dot{Q}_{23}} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2} \quad (6)$$

På **Figur 13** er tegnet et procesdiagram for et kraftværk efter Rankine-princippet vist med to forskellige systemgrænser. Den underste systemgrænse er konsistent med beregningen af den termiske virkningsgrad vist

Figur 13: Prosesdiagram for et kraftværk med forskellige systemgrænser



i **Ligning 6.** Imidlertid benyttes den termiske virkningsgrad sjældent i praksis, idet den ikke umiddelbart lader sig benytte i en kommerciel situation.

I praksis benyttes den virkningsgrad som knytter sig til den yderste systemgrænse i **Figur 13** som benævnes den *elektriske virkningsgrad* η_{el} også kaldet den økonomiske virkningsgrad. Forskellen mellem den termiske virkningsgrad $\eta_{th,Rankine}$ og den elektriske virkningsgrad η_{el} , er at den elektriske virkningsgrad medtager de uundgåelige tab, som forefindes i dampkedel, generator/gear og motorer. Afhængigt af om man fokuserer på et generatoroutput \dot{P}_{ud} eller eksporteret eleeffekt til elnettet \dot{P}_{net} kan defineres en *brutto elektrisk virkningsgrad* $\eta_{el,b}$ eller en *netto elektrisk virkningsgrad* $\eta_{el,n}$. Disse kan findes som:

$$\eta_{el,b} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|\dot{P}_{ud}|}{\dot{Q}_{br}} = \frac{|\dot{P}_{ud}|}{\dot{m}_{br} \cdot \text{LHV}}$$

$$\eta_{el,n} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|\dot{P}_{net}|}{\dot{Q}_{br}} = \frac{|\dot{P}_{ud}| - \dot{P}_{ind}}{\dot{m}_{br} \cdot \text{LHV}}.$$

Disse er mere anvendelige i praksis, da både tæller og nævner direkte kan relateres til økonomiske parametre i et regnskab.

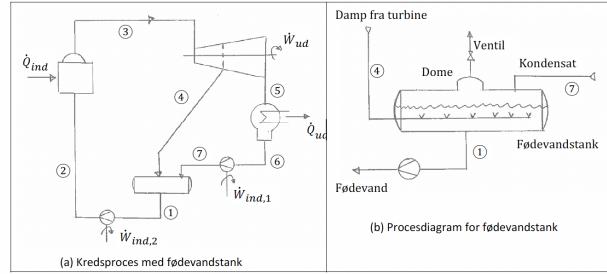
10.2.2 Fødevandsforvarming

Kraftværkets basiskredsprocess som vist på **Figur 13** ville kunne fungere i praksis, men for at undgå ophobning af gasser herunder ilt og kuldioxid stammende fra spædevand eller lækager i kredsløbet, er man nødt til at aflufte det cirkulerende vand. Til dette benyttes en fødevandstank med aflufterfunktion. Fødevandstanken tjener i praksis som fødevandsbuffer for dampkedlen. På **Figur 14.a** er basisprocessen med fødevandstank vist, og på **Figur 14.b** er vist et procesdiagram for en fødevandstank med aflufterfunktion.

Fødevandstanken er i bund og grund en varmeveksler, hvor der sker opblanding af medier. Damp udtaget fra turbinen til opvarme vandet i fødevandstanken til mætningstemperaturen for det tryk dampen har. Ved opvarmning uddrives gasser, som samles i domen og lukkes ud til atmosfæren igennem en mindre ventil på toppen af domen. Princippet kaldes *termisk afluftning*, og det kendes fra køkkenet, hvor den syngende lyd, som kommer fra en vandkedel under opvarmning i temperaturområdet 60 °C–90 °C, netop stammer fra uddrivning af gasser fra postevandet.

Vandet i fødevandstanken vil være på kogepunktet, dvs. $x = 0$. Trykket i fødevandstanken er bestemt af tryk-

Figur 14: Prosesdiagram for et kraftværk med en fødevandstank



ket på dampen fra dampturbinen. Dette tryk kan man selv bestemme ved at utablere et udtag når man bygger dampturbinen. Der hvor udtaget er etableret, kan man aflæse dampens tilstand på turbineekspansionskurven. I et *h-s* diagram er det skæringspunktet mellem isobaren ved udtaget og turbineekspansionskurven.

Som det ses i **Figur 14.b** vil der være brug for to pumper. Mediet (vandet) mellem kondenseren og fødevandstanken benævnes turbinekondensat, hvorfor pumpen der benævnes *kondensatpumppen*. Mediet (vandet) efter fødevandstanken kaldes *kedelfødevand*, hvorfor pumpen der benævnes *kedelfødevandspumpen*.

Populært siger man, at man stjæler lidt varme fra turbinen og benytter det til at forvarme kedelfødevandet. Den dampmængde man optager fra turbinen har allerede bidraget til akseleffekt i turbinen og restvarmen i dampen, som overføres til kedelfødevandet, vil resultere i et reduceret brændstofferbrug i kedlen. Dette benævnes *regenerativ fødevandsforvarmning*, og har en positiv effekt på virkningsgraden for den samlede proces.

Fødevandstanken kan beregnes som et knudepunkt (se evt. **under-sektion 8.3**). Idet man ser bort fra negligerbare forhold ved ventilen på toppen af domen kan opstilles følgende:

$$\begin{aligned} \dot{m}_7 \cdot h_7 + \dot{m}_4 \cdot h_4 &= \dot{m}_1 h_1 \\ \dot{m}_7 + \dot{m}_4 &= \dot{m}_1. \end{aligned}$$

Som kan kombineres til

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_7 \cdot \frac{h_1 - h_7}{h_4 - h_1}.$$

Herved kendes den dampmængde, som skal udtages af dampturbinen. Akseleffekten fra turbinen kan derefter bestemmes ved formel:

$$|\dot{W}_{ud}| = |\dot{W}_i| = \dot{m}_3 \cdot (h_3 - h_4) + (\dot{m}_3 - \dot{m}_4) \cdot (h_4 - h_5).$$

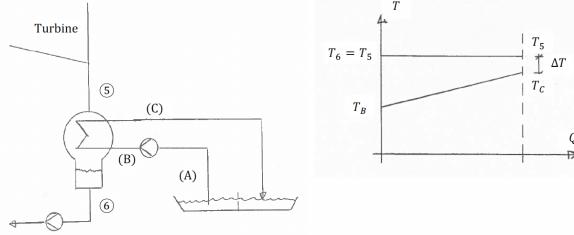
10.2.3 Turbinekondenser

Kondenseren ved dampturbinen er et centralt komponent i kraftværket. Kondenseren er en varmeveksler, hvor der ikke sker opblanding af medierne. Et prosesdiagram for dette er vist på **Figur 15**. Damp fra dampturbinen ledes til kondenseren i pkt. 5, hvor det kondenserer til vand (kondensat) i pkt. 6. Effekten overført fra den kondenserede damp bestemmes ved formlen:

$$|\dot{Q}_{41}| = \dot{m} \cdot (h_4 - h_1).$$

Kondensatet opsamles i en tank kaldet *hotwell* under kondenseren. Kondenseren kan køles af en række medier, som f.eks. havvand, fjernvarmevand eller luft. Antages her, at køling sker med vand, kan effektbalance for

Figur 15: Prosesdiagram for en turbinekondenser



kølevandet bestemmes af formlen:

$$|\dot{Q}_{56}| = |\dot{Q}_{BC}| = \dot{m}_{\text{kølevand}} \cdot (h_C - h_B) = \dot{m}_{\text{kølevand}} \cdot c_{p,m} \cdot (T_C - T_B).$$

For vand kan man tilnærmelsesvis sætte den specifikke varmekapacitet til $c_{p,m} = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$. Kølevandsmængden kan således, hvis det antages, at der ikke er varmetab bestemmes som:

$$\dot{m}_{\text{kølevand}} = \frac{|\dot{Q}_{BC}|}{h_C - h_B} = \frac{|\dot{Q}_{56}|}{h_C - h_B}.$$

Det er kondenseren som bestemmer trykket efter turbinen. Med reference til **Figur 15** vil det være T_C som sætter temperaturen i kondenseren eller udtrykt som en formel som

$$T_5 = T_C + \Delta T.$$

ΔT er i praksis 2°C – 4°C . Ved $\Delta T = 0^{\circ}\text{C}$ skulle kondenserens areal være uendeligt stort. I damprummet kendes nu temperaturen T_5 , og da der er entydig sammenhæng mellem temperatur og tryk ved kondensation, kan man slå damptrykket op i bogens Appendix D5 under mættet tilstand.

10.3 Kraftvarmeværket

Kraftvarmeværket er ligeledes baseret på Rankine-princippet. Eneste forskel er at man foruden nettoeleffekten \dot{W}_{net} ligeledes anser varmeeffekten fra kondenseren \dot{Q}_{41} for nyttig. Varmeeffekten fra kondenseren kan være nyttig, hvis den f.eks. sælges som fjernvarme.

For kraftvarmeværket (KKV) kan defineres en termisk virkningsgrad som:

$$\eta_{th,\text{Rankine},\text{KKV}} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|\dot{W}_{\text{net}}| + |\dot{Q}_{41}|}{\dot{Q}_{23}} = \frac{\dot{Q}_{23}}{\dot{Q}_{23}} = 1.$$

Den termiske virkningsgrad for et KKV er altså i princippet 1 eller 100%. Dette gælder dog ikke den elektriske virkningsgrad. For et KKV benævnes denne dog som den totale virkningsgrad og denne kan findes som:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{total},b} &= \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|\dot{P}_{\text{ud}}| + |\dot{Q}_{41}|}{\dot{Q}_{br}} = \frac{|\dot{P}_{\text{ud}}| + |\dot{Q}_{41}|}{\dot{m}_{br} \cdot \text{LHV}} \\ \eta_{\text{total},n} &= \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|\dot{P}_{\text{net}}| + |\dot{Q}_{41}|}{\dot{Q}_{br}} = \frac{|\dot{P}_{\text{ud}}| - |\dot{P}_{\text{ind}}| + |\dot{Q}_{41}|}{\dot{m}_{br} \cdot \text{LHV}}. \end{aligned}$$

Tabene i dampkedlen, generator/gear og motorer vil afstedkomme, at totalvirkningsgraden ikke bliver 1 men derimod i praksis ligger i intervallet 0,85–0,95.

10.4 Optimering af Rankine kredsprocessen

Med udgangspunkt i den termiske virkningsgrad for Rankine principippet kan der uddrages en række interessante konklusioner. Generelt har vi at:

$$\eta_{th, \text{Rankine}} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2}.$$

1. Hvis entalpien af dampen før turbinen h_3 stiger, vil den termiske virkningsgrad for Rankineprocessen $\eta_{th, \text{Rankine}}$ stige. Dette kan udføres, hvis damptryk og/eller temperatur sættes op.
2. Hvis entalpien af dampen efter turbinen h_4 falder, vil den termiske virkningsgrad $\eta_{th, \text{Rankine}}$ stige. Dette kan udføres, hvis trykket i kondenseren sænkes.

Derudover kan det vises at følgende tiltag også øger den termiske virkningsgrad:

- Øge fødevandstemperaturen før dampkedlen vha. regenerativ fødevandsforvarmning
- Ved fastsat fødevandstemperatur før dampkedlen at udføre regenerativ fødevandsforvarmning i så mange trin som muligt, dvs. så mange fødevandsforvarmtere som muligt
- Dele turbinen i to sektioner, og genoverhede (også kaldet mellemoverhede) dampen i dampkedelen mellem de to turbinesektioner

10.5 Organic Rankine Cycle (ORC)

Rankine-processen benyttes til at konvertere varme til arbejde. Traditionelt har man brugt fossile brændsler som kul, olie og naturgas som energikilde. Ved forbrænding af disse materialer kan man nemt opnår forbrændingstemperaturer $> 1200^\circ\text{C}$, som er rigeligt for en højeffektiv Rankine-proces. Det er ikke forbrændingstemperaturen, som sætter begrænsningerne for en høj virkningsgrad på et kraftværk, men derimod tilgængelige materialer til overhederør i dampkedlen, hoveddampedningen og dampturbinens første trin. Grænsen er i dag ca. 300 bara og 600°C .

Man kan dog også benytte Rankine-processen til at udnytte visse lav-temperatur varmekilder, såsom solenergi, geotermisk energi og spildvarme fra procesindustrien. For energikilder med en temperatur på $< 100^\circ\text{C}$ ville man få et teknisk problem med Rankine-processen baseret på vand. Trykket overalt i anlægget ville her skulle være under atmosfæretrykket, hvorfor der ved lækager vil trænge luft og dermed ilt ind i systemet – derfor benytter man typisk et andet medie i denne situation.

Et anlæg, der baserer sig på Rankine-principippet og indeholder et organisk medie benævnes et *Organic Rankine Cycle anlæg* eller forkortet til ORC-anlæg. Disse benyttes typisk i praksis for anlæg med temperaturer mellem 50°C og 350°C . Man skal dog i denne sammenhæng ikke regne med et særligt effektivt procesforløb eftersom man med en lav temperatur får en dårlig Carnot-virkningsgrad.

$$\eta_{th,C} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

I et ORC-anlæg benyttes typisk:

- Organiske kølemidler

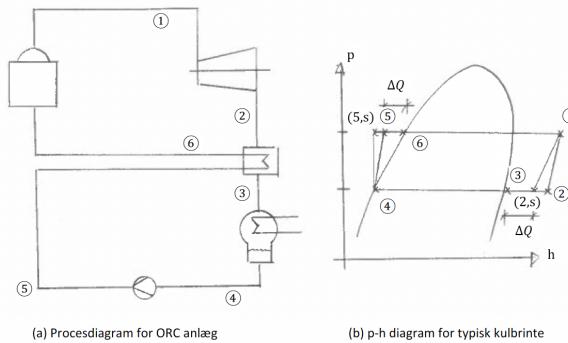
- Organiske brændbare gasser
- Ammoniak

Ammoniak er egentlig ikke organisk, men det er intet desto mindre brugbart på lige fod med de egentligt organiske materialer. Når man designer et ORC-anlæg og vælger sit medie kan man inddrage følgende prioriterede kriterier:

1. Den termiske virkningsgrad skal være så høj som muligt
2. Tryk i kondenseren bør være så lavt som muligt, og helst højere end atmosfæretrykket
3. Tryk i kedlen bør være så lavt som muligt

ORC-anlæg har en afgørende forskel ift. vandbaserede KVV'er. Som det ses på **Figur 16.a** benyttes restvarmen i det cirkulerende medie efter turbinen til at forvarme væsken som ledes til kedlen. Dette skyldes den form på "osteklokken" som er typisk for et organisk stof. På **Figur 16.b** er vist et typisk procesforløb i et $p-h$ diagram. Efter ekspansion af den overhedede gas i turbinen, vil gassen efter turbinen stadig være overhededet i en sådan grad, at det vil være opportunt at genanvende overhedeningsvarmen i kedlen – for derved at spare på varmetilførslen til kedlen. Alterneativt ville være en simpel bortkøling af overhedeningsvarmen i kondenseren og en ringere termisk virkningsgrad.

Figur 16: Processdiagram og tilstandsdiagram for et typisk ORC-anlæg

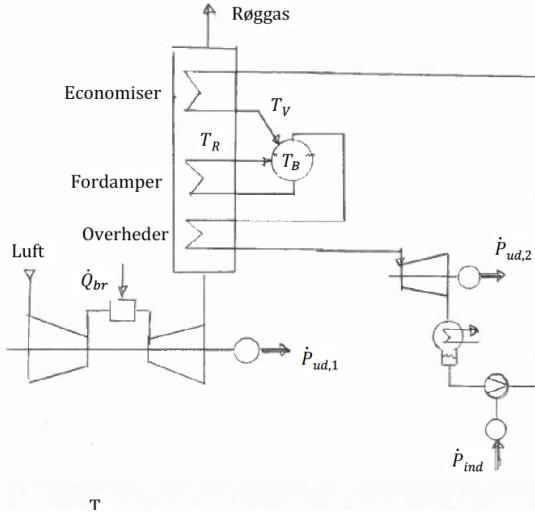


10.6 Samlet Brayton og Rankine kredsprocess – Kombineret proces

Gasturbiner er kendtegnet ved at frembringe en stor akseleffekt i forhold til deres vægt. Typisk trækker en landbaseret gasturbine en generator som producerer strøm. Røggas-afgangstemperaturen fra en gasturbine er typisk $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ – $600\text{ }^{\circ}\text{C}$, hvilket giver typiske virkningsgrader for en gasturbine på 35–50%. Kobles en dampkedel efter en gasturbine vil man kunne køle røggassen ned til $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ – $200\text{ }^{\circ}\text{C}$, og dampen kunne ekspanderes i en dampeturbine med henblik på at producere yderligere elektrisk energi. Et procesdiagram for et kombineret gasturbine- og dampkraftværk eller med andre ord et kombineret Brayton og Rankine anlæg er vist på **Figur 17**.

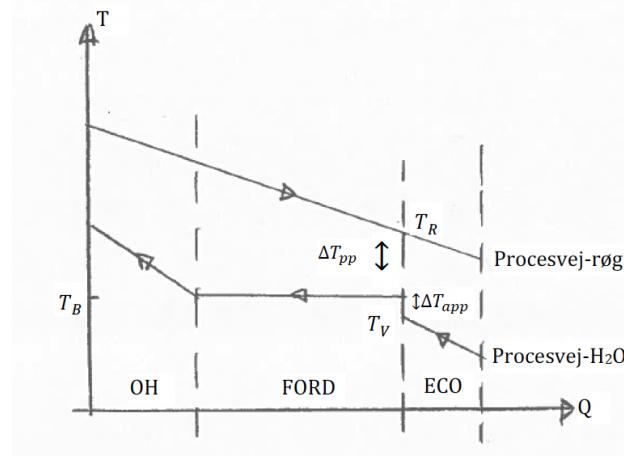
Dampkedlen, som i fagsprog kaldes en *udstødskedel* eller en *afgaskedel*, er opbygget traditionelt med en fordamper, overheder og economiser. Til beregninger på denne kan de tidligere introducerede formler for dampkedler benyttes. Både economiser og overheder er arrangeret på en sådan måde, at hhv. vandet eller dampen strømmer i modstrøm til røggassen, hvilket giver den bedste mulighed for effektiv afkøling af røggassen. Strømningsretningen af det kogende vand i fordamperen er dog i medstrøm med røggassen, hvilket

Figur 17: Procesdiagram for et kombineret Brayton og Rankine anlæg



skyldes, at man ønsker, at strømningsretningen af en kogende væske er opad.. De dannede dampbobler kan strømme modstrøms op i dampbeholderen. Opadstigende dampbobler i en nedadstrømmende kogende væske kan give anledning til voldsomme vibrationer i anlægget. De opadstigende bobler vil også medfører et termisk løft, hvorfor man kan opnå naturcirkulation af vandet i fordamperen og derved spare en cirkulationspumpe.

Røggassens strømning igennem dampkedlen vil naturligvis afstedkomme et tryktab, som gasturbinen skal overvinde, hvilket vil påvirke gasturbinens ydelse – dog oplyser mange gasturbineleverandører data for gasturbinens drift med den forudsætning, at der tillades et trykfald efter gasturbinen på op til 30 mbar eller 3000 Pa, hvilket normalt er rigeligt til at kunne designe en egnet udstødskedel.

 Figur 18: $Q-T$ diagram for et kombineret Brayton og Rankine anlæg


På **Figur 18** ses et $Q-T$ diagram for et kombineret Brayton og Rankine anlæg. Med afsæt i dette fremhæves en række karakteristiske ved en afgaskedel:

- I **under-sektion 10.4** konkluderedes, at temperaturen på dampen før en dampturbine skal være så høj som muligt for at maksimere virkningsgraden for en Rankine proces. Dampafgangstemperatu-

ren for en afgaskedel kan ikke overstige temperaturen på røggassen, som leveres af gasturbinen. Er røggastemperaturen leveret af gasturbinen 550°C , vil en kommersielt afbalanceret dampafgangstemperatur være ca. 520°C . En temperaturdifferent mellem røggastilgangstemperatur og dampafgangstemperatur for en overheder arrangeret i modstrøm på 25°C – 35°C , vil resultere i en overheder med et varmeoverførende areal som er fornuftigt, når både anlægspris og driftsindtægter tages i betragtning.

2. I under-sektion 10.4 konkluderedes ligeledes, at tryk på dampen før en dampturbine skal være så høj som muligt for at maksimere virkningsgraden på en Rankine-proces. Røggastemperaturen efter fordamperen (T_R på **Figur 18**) er dog direkte afhængig af det valgte damptryk, idet der i fordamperen sker kogning, hvorfor tryk og temperatur er entydigt sammenhængende. Vælges damptrykket til f.eks. 10 bara vil temperaturen i fodamperen (T_B på **Figur 18**) være konstant 180°C . Temperaturdifferensen ΔT_{pp} mellem røggasttemperaturen efter fordamperen T_R og temperatur i fordamperen T_B benævnes i international litteratur for *pinch point* og er i praksis 10°C – 15°C , og størrelsen har signifikant indflydelse på prisen på afgaskedlen. Jo lavere damptryk desto lavere røggasttemperatur efter fordamperen, hvilket er ønskeligt ud fra en betragtning af at skulle køle røggassen mest muligt, men er i modstrid med at damptrykket skal være så højt som muligt for at få den højeste virkningsgrad på Rankine-processen alene.
3. Man kunne hævde at den energi, som ikke kan optages i overhederen og fordamperen, kunne optages i economiseren. Men kølekapaciteten af economiseren er begrænset af to faktorer. For det første vil vandmængden igennem economiseren være begrænset til dampmængden. For det andet ønskes ikke kogning i vandet i eller efter economiseren. Dette er et gammeldags princip indenfor kedelbygning og grundes i at dampdannelse vil skabe vibrationer. I praksis begrænses man temperaturen på vandet efter economiseren (T_V på **Figur 18**) til 5°C under temperaturen i fordamperen T_B . Temperaturdifferensen ΔT_{app} mellem temperaturen i fordamperen T_B og temperaturen på vandet efter economiseren T_V benævnes i international litteratur for *approach point*.

Hvis man ønsker at få røggasttemperaturen efter anlægget længere ned end ca. 150°C – 200°C (afhængigt af T_B) kan man sætte to eller tre (eller flere) kedler ovenpå hinanden. Ved tre dampkedler kunne de producere damp ved hhv. 80, 10 og 2 bara. Dampen kunne tilflyde den samme dempturbine, en forskellige steder ift. turbineekspansionskurven. Damp genereret ved de 10 og 2 bara kunne tilstættes igennem huller i turbinehuset, hvor dampen i turbinen har samme tryk jf. turbineekspansionskurven. Et damptryk på 2 bara i den sidste fordamer, ville muliggøre en røggasttemperatur efter selvsamme på $120^{\circ}\text{C} + \Delta T_{pp} = 130$ – 135°C . Yderligere afkøling af røggassen i den sidste economiser på 10°C – 15°C ville give en røggasttemperatur på ca. 120°C – 125°C .

En praktisk fremgangsmåde for bestemmelse af en masse- og energibalance for kedeldelen vil være at lægge en imaginær systemgrænse rundt om dampbeholderen, fordamperen og overhederen. Røggasttemperaturen efter fordamperen vil være mætningsstemperatur i dampbeholderen T_B plus ΔT_{pp} og effekten afgivet til systemet kan bestemmes, da røggasttemperaturen efter gasturbinen bør være kendt. På vand/dampsiden kendes entalpidifferensen mellem fødevand før dampbeholderen (Temperaturen her er $T_B - \Delta T_{app}$) og damp efter overhederen. Herved kan dampmassestrømmen bestemmes, og de resterende beregninger på vand/dampkredsen kan færdiggøres ved bla. at lægge yderligere imaginære systemgrænser.

Lecture 10: Motorer og gasturbiner

1. April 2025

11 Motorer og gasturbiner

Dette kapitel vil omhandle de gas-baserede kredsprocesser med intern forbrænding i modsætning til de faseskift-baserede kredsprocesser med ekstern forbrænding præsenteret i sektion 10: Kraftværker. Dette kan

grundlæggende opdeles i de tre principper:

- Benzinmotoren (Otto-princippet)
- Dieselmotoren (Diesel-princippet)
- Gasturbinen (Brayton-princippet)

11.1 Beregningsforudsætninger

En række forudsætninger vil nu blive præsenteret for at lette arbejdsgangen (undgå mange iterationer). De overordnede principper kan dog i teorien godt overføres til et mere virkelighedsnært scenario, såfremt man husker at tage højde for de øvrige variable.

11.1.1 Arbejdsmediet i anlægget

Dette kapitel vil se nærmere på tre typer anlæg, som kan karakteriseres på følgende principper:

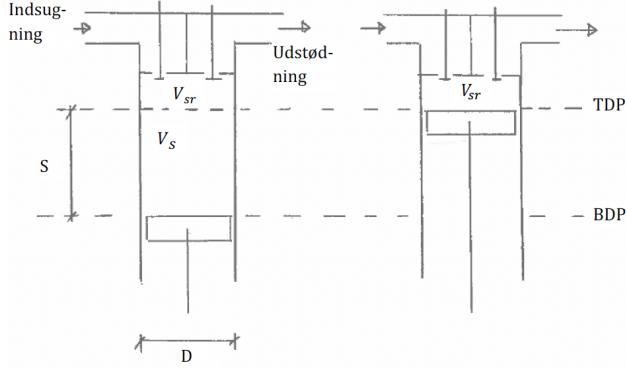
1. De er arbejdsproducerende, hvilket vil sige, at formålet med at bygge anlæggene er at producere akseleffekt, som efterfølgende kan udnyttes til eksempelvis at drive en generator eller anden arbejds-konsumérende maskineri
2. Energiinputtet stammer fra en intern forbrænding, hvilket vil sige, at et brændstof forbrændes direkte i mediet i anlægget, hvoraf der kan bære både luft og røggas tilstede i maskinen
3. Mediet eller medierne i anlægget er overalt på gasform

For at lette beregningerne på anlæggene kan opstilles følgende forudsætninger:

1. Arbejdsmediet overalt i anlægget kan antages at være tør atmosfærisk luft, som cirkulerer i kredsprocessen
2. Alle delprocesser er reversible
3. Den interne forbrændingsproces erstattes af en ekstern forbrænding, og varmen fra forbrændingen overføres til arbejdsmediet i anlægget ved varmeveksling
4. Udstødningsprocessen erstattes af en varmeafgivelsesproces, og varmen afgives fra arbejdsmediet i anlægget til omgivelserne ved varmeveksling
5. De specifikke varmekapaciteter c_p og c_v antages uafhængige af temperaturen og derved anses for konstante. Isentropeksponenten κ vil således være konstant

11.1.2 Stempelmaskiner

Benzinmotoren (Otto-princippet) og Dieselmotoren (Diesel-princippet) er i de fleste tilfælde cylinder-stempel maskiner eller forkortet til stempelmaskiner (Wankelmotorer er eksempelvis ikke), hvor der er behov for at definere en række geometridata.



Figur 19: Snit af et cylinder-stempel system

På **Figur 19** er vist et snitbillede af et cylinder-stempel system. Stemplet i systemet bevæger sig mellem *bunddødpunktet* (BDP) og *topdødpunktet* (TDP). I en virkelig motor er indsugnings- og udstødningsventilens opgave hhv. at tilføre forbrændingsluft fra omgivelserne til cylinderen og bortlede forbraændingsgasser eller røggasser fra cylinderen til omgivelserne.

Når stemplet er i TDP forefindes et volumen i cylinderen som benævnes *det skadelige rum* V_{sr} eller det døde rum. Det skadelige rum har dette lidt negative navn, idet det ikke bidrager positivt til kredsprocessen. Størrelsen af det skadelige rum defineres af konstruktøren af motoren.

Volumenet mellem BDP og TDP kaldes for slagvolumenet V_s . Slagvolumenet kan bestemmes idet D er den indvendige diameter af cylinderen og S er slaglængden, som:

$$V_s = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot S.$$

Kompressionsforholdet r som man skal bemærke sig, er et volumenforhold og ikke et trykforhold defineres som:

$$r = \frac{\text{Største volumen i cylinderen}}{\text{Mindste volumen i cylinderen}} = \frac{V_s + V_{sr}}{V_{sr}}.$$

Akseleffekten fra motoren \dot{W}_a bestemmes som:

$$\dot{W}_a = \eta_{\text{mek}} \cdot N_c \cdot W_{v,\text{kreds}} \cdot \frac{\text{rpm}}{60} \cdot \left(\frac{2}{N_{\text{takt}}} \right) \quad (\text{reversible kredsprocesser})$$

$$\dot{W}_a = \eta_{\text{mek}} \cdot N_c \cdot W_{g,\text{kreds}} \cdot \frac{\text{rpm}}{60} \cdot \left(\frac{2}{N_{\text{takt}}} \right) \quad (\text{generelt}).$$

Hvor η_{mek} er den mekaniske virkningsgrad for motoren (typisk 0,75–0,90), N_c er antallet af cylindere, $W_{v,\text{kreds}}$ er det for gassen på stemplet udøvede kredsarbejde for en reversibel proces uden dissipationsarbejde. $W_{g,\text{kreds}}$ er dittoen men for reelle processer med dissipationsarbejde. rpm er omdrejningstallet og N_{takt} er antallet af takter i kredsprocessen (2- eller 4-takts motor).

Den mekaniske virkningsgrad repræsenterer tabene mellem det for gassen på stemplet udøvede netto kredsarbejde og akselarbejdet på krumtapakslen W_a . Antages delprocesserne for gassen i cylinderen, som er et lukket system, for reversibel kan det samlede arbejde for kredsprocessen $W_{g,\text{kreds}}$ forenkles til volumenændringsarbejdet for kredsprocessen $W_{v,\text{kreds}}$.

Faktoren $\frac{2}{N_{\text{takt}}}$ er et "formeltrick" som korrigerer for hvor mange omdrejninger krumtakakslen tager for en

kredsproces. En 2-takt motor tager en omdrejning på krumtapakslen for hver kredsproces, mens en 4-takts motor tager 2.

Massen af den indespærrede luftmængde i cylinderen kan findes vha. idealgasligningen, hvis sammenhængende værdier af p , T , V kendes. I mange tilfælde kender man dette efter indsugning, hvor det kan antages at tilstanden i cylinderen er $p = p_0$, $T = T_0$, $V = V_{sr} + V_s$. Derefter kan idealgasligningen bruges til at finde massen af luften som:

$$m = \frac{p \cdot V}{R_i \cdot T}.$$

11.2 Otto-motoren

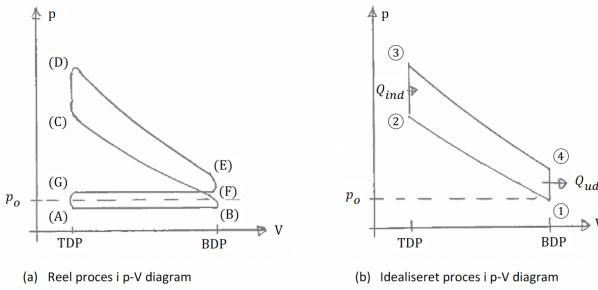
11.2.1 Otto-motorens virkemåde

Benzinmotoren arbejder efter det såkaldte *Otto-princip* eller *gnisttændingsprincippet*. En blanding af forstøvet benzin og luft suges via indsugningsventilen ind i cylinderen, og komprimeres før det antændes af et tændrør. Derfor omtaler man Otto-motoren som en *gnisttændingsmotor*. Betragtes et cylinder-stempel system i en 4-taks benzинmotor er det grundlæggende princip at:

- Halv rotation af krumtapakslen: Stemplet bevæges opad fra BDP til TDP og der sker en kompression af luft og benzinblanding i cylinderen
- Yderligere en halv rotation: Forbrænding sker efter gnisttænding og trykket stiger i cylinderen. Stemplet bevæges nedad fra TDP til BDP og der sker en ekspansion af røggassen i cylinderen
- Yderligere en halv rotation: Stemplet bevæger sig opad fra BDP til TDP og idet udstødningsventilen åbner, vil røggassen blive trykket ud til omgivelserne. Udstødningsventilen lukkes igen
- Yderligere en halv rotation: Stemplet bevæger sig nedad fra TDP til BDP og idet indsugningsventilen åbnes, vil frisk luft- og benzinblanding blive suget ind i motoren fra karburatoren, hvor blandingen af luft og benzin sker i det rigtige forhold. Indsugningsventilen lukkes igen

For en 2-taks benzинmotor er princippet:

- omrent 120° rotation: Stemplet bevæger sig nedad fra TDP mod BDP efter en forbrænding og der sker en ekspansion af røggassen i cylinderen
- Yderligere 90° rotation: Stemplet vender bevægelsesretning ved BDP, og idet udstødningsventilen åbnes vil røggassen blive trykket ud til omgivelserne. Lukning af udstødningsventilen påbegyndes, så indsugningsventilen kan åbnes. Herfra vil luft og forstøvet benzin blive suget ind i motoren fra krumtaphuset. Denne indstrømningsluft hjælper også med at tømme cylinderen for røggas, hvorved en vis opblanding af luft- og benzinblanding og den producerede røggas vil forekomme. Derefter lukkes indsugningen igen
- Yderligere 90° rotation: Stemplet bevæger sig opad mod TDP og der sker en kompression af luft og benzinblanding i cylinderen
- yderligere ca. 60° rotation: Stemplet bevæger sig fortsat opad til TDP og der sker en forbrænding efter gnisttænding og trykket stiger i cylinderen


 Figur 20: p - V diagrammer for benzинmotorer efter 4-taktprincippet

På **Figur 20** er vist et p - V diagram både for en virkelig benzинmotor og efter en idealiseret benzинmotor. Begge er efter 4-taktprincippet. På V -aksen er TDP og BDP angivet, mens omgivelsestrykket p_0 er angivet på p -aksen. Her kan et par karakteristika for den virkelige proces observeres:

- Pkt. A til B: Den vandrette kurve under omgivelsestrykket p_0 , hvor procesvejen går fra TDP mod BDP, repræsenterer indsugningen. Trykket er lavere end omgivelsestrykket, da der på en virkelig motor vil være tryktab over karburator og indsugningsventil
- Pkt. B til C/D: Procesvejen går fra BDP mod TDP, og repræsenterer komprimering, hvor trykket stiger og specielt ved afslutningen af komprimeringen, hvor der sker forbrænding fra C til D
- Pkt. D til E/F: Procesvejen går fra TDP mod BDP, og repræsenterer ekspansion, hvor trykket falder og specielt ved afslutningen af ekspansionen, hvor der sker udstødning fra E til F
- Pkt. F til G: Den vandrette kurve over omgivelsestrykket p_0 , hvor procesvejen går fra BDP mod TDP, repræsenterer udstøgning. Trykket er højere end omgivelsestrykket, da der på en virkelig motor vil være tryktab over udstødningsventil og det øvrige udstødningssystem.

Arealet $BCDEF$ i **Figur 20** repræsenterer et positivt bidrag til arbejdet udført af kredsprocessen, mens arealet $ABFG$ repræsenterer et negativt bidrag til arbejdet udført af kredsprocessen, idet dette areal er en konsekvens ved indsugning og udstødning.

På **Figur 20** er der som tidligere nævnt også præsenteret et p - V diagram for en idealiseret 4-takts proces efter Otto-princippwt. Arealet $ABFG$ er udeladt, idet det antages, at der ikke er tryktab i motoren. Den idealiserede kredsproces består af de fire delprocesser:

- Pkt. 1 til 2: Isentropisk kompression
- Pkt. 2 til 3: Isokorisk varmetilførsel
- Pkt. 3 til 4: Isentropisk ekspansion
- Pkt. 4 til 1: Isokorisk varmeafgivelse

Det antages videre at tætningen mellem cylinder og stempel er perfekt således, at der ikke sker lækage af gas internt i motoren. At alle delprocesserne er reversible, hvilket indebærer, at der ikke er friktion og derved tryktab internt i motoren. At kompressionen og ekspansionen sker som en quasi-stationær tilstandsændring, dvs. tilpas langsomt, så der kan nå at ske perfekt trukudligning i cylinderen. Slutteligt antages at alle

komponenter er adiabatiske – på nær dem for hvilke, der skal ske varmeveksling. Man kan generelt finde volumenarbejdet i kredsprocessen som:

$$W_{v,\text{kreds}} = -(Q_{23} + Q_{41}) = m \cdot c_v,_{23} \cdot (T_2 - T_3) + m \cdot c_v,_{41} \cdot (T_4 - T_1).$$

Hvis man antager en konstant specifik varmekapacitet kan det ovenstående reduceres til:

$$W_{v,\text{kreds}} = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_3 + T_4 - T_1).$$

11.2.2 Idealiseret beregningsprocedure – volumenændringsarbejdet, akselarbejde

Nettoarbejdet af kredsprocesen kan findes som summen af arbejdet ved hver delproces. For et lukket reversibelt system må der således være tale om volumenændringsarbejdet og følgende formel kan opstilles:

$$W_{\text{net}} = W_{v,\text{kreds}} = \sum W_v.$$

Volumenændringsarbejdet for hver delproces er:

$$\begin{aligned} W_{v,12} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{\kappa - 1} \\ W_{v,34} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_4 - T_3)}{\kappa - 1} \\ W_{v,23} &= W_{v,41} = 0. \end{aligned}$$

Med ovenstående procedure bliver $W_{v,12}$ positivt og v.v. for $W_{v,34}$. Da $W_{v,34}$ er større end $W_{v,12}$ vil $W_{v,\text{kreds}}$ per konvention være negativ.

11.2.3 Idealiseret beregningsprocedure, virkningsgrad

Den termiske virkningsgrad for benzинmotoren kan defineres som:

$$\eta_{th,\text{Otto}} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|W_{\text{net}}|}{Q_{23}} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = 1 - \frac{1}{r^{\kappa-1}}.$$

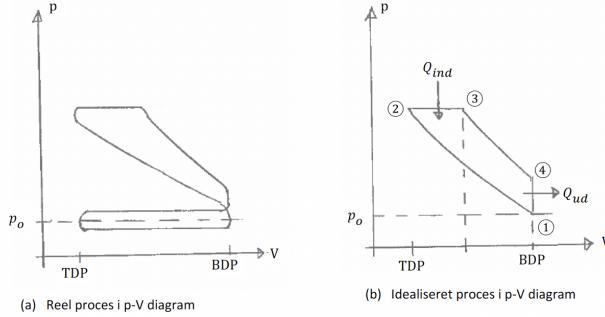
Hvor r er kompressionsforholdet.

Benzinmotorer bygges normalt med et kompressionsforhold i intervallet [8; 11]. Dette skyldes at virkningsgraden forøges for større kompressionsforhold. Man kan ikke normalt have kompressionsforhold over omtrent 11, da blandingen så vil blive så varm at den kan selvantændende, hvilket kaldes *tændingsbankning*.

11.3 Diesel motoren

11.3.1 Dieselmotorens virkemåde

Dieselmotorer arbejder efter *Diesel-princippet* eller *kompressionstændingsprincippet*. Det er alene luft, som suges ind i cylinderen via indsugningsventilen, og dieselolie sprøjtes ind i cylinderen via en dyse umiddelbart før der er behov for en forbrænding. Antænding af den forstørvede dieselolie i luften sker udelukkende som følge af den forhøjede temperatur ved komprimering af luften. Disse kan også arbejde efter både 2-taktprincippet og 4-taktprincippet.


 Figur 21: p - V diagrammer for dieselmotorer efter 4-taktprincippet

På **Figur 21**. Her er BDP og TDP igen indtegnet på V -aksen og omgivelsestrykket p_0 er anført på p -aksen. Det ses hurtigt at dieselmotoren adskiller sig fra benzinmotoren ved at forbrændingen sker således, at st stemplets nedadgående bevægelse resulterer i, at tryk holdes tilnærmelsesvis konstant, og en del af kredsprocessen kan beskrives som en isobar proces.

11.3.2 Idealiseret beregningsprocedure – varmebalancemetoden, akselarbejde

Den idealiserede kredsproces på **Figur 21** består af følgende 4 delprocesser

- Pkt. 1 til 2: Isentropisk kompression
- Pkt. 2 til 3: Isobarisk varmetilførsel
- Pkt. 3 til 4: Isentropisk ekspansion
- Pkt 4 til 1: Isokorisk varmeafgivelse

For pkt. 3 benævnes volumenet for *cut-off volumenet* V_c . Med afsæt i dette har man, for dieselmotorer, defineret det såkaldte *cut-off forhold* som:

$$r_c = \frac{V_c}{C_{sr}}.$$

Volumenarbejdet kan her findes som:

$$W_{v,kreds} = -(Q_{23} + Q_{41}) = m \cdot c_p,23 \cdot (T_2 - T_3) + m \cdot c_v,41 \cdot (T_4 - T_1).$$

Eller for en specifik varmekapacitet som:

$$W_{v,kreds} = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_3) + m \cdot c_v \cdot (T_4 - T_1).$$

11.3.3 Idealiseret beregningsprocedure – volumenændringsarbejds metoden, akselarbejde

Også for dieselmotorer er det samlede volumenændringsarbejde W_{net} blot summen af arbejdet for hver delproces som:

$$W_{net} = W_{v,kreds} = \sum W_v.$$

Og for hver delproces har vi:

$$\begin{aligned} W_{v,12} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{\kappa - 1} \\ W_{v,23} &= p_2 \cdot (V_2 - V_3) \\ W_{v,34} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_4 - T_3)}{\kappa - 1} \\ W_{v,41} &= 0. \end{aligned}$$

Her vil $W_{v,kreds}$ også blive negativ per konvention som var tilfældet for Ottoprocessen.

11.3.4 Idealiseret beregningsprocedure, virkningsgrad

Den termiske virkningsgrad for dieselmotoren er defineret som:

$$\eta_{t,Diesel} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|W_{net}|}{Q_{23}}.$$

Hvilket kan vises at være givet ved:

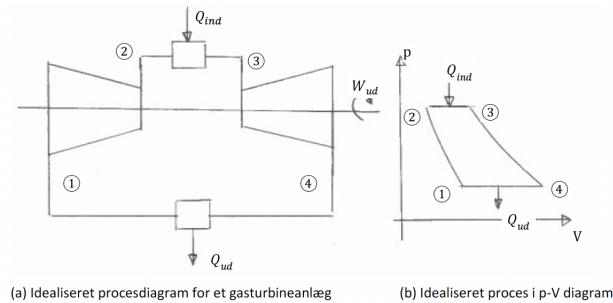
$$\eta_{th,Diesel} = 1 - \frac{1}{r^{\kappa-1}} \cdot \left(\frac{r_c^\kappa - 1}{\kappa(r_c - 1)} \right).$$

Det kan i øvrigt vises, at for cut-off ratio gælende mod 0 $r_c \rightarrow 0$ vil den termiske virkningsgrad for dieselmotorer gå mod den for en tilsvarende benzinmotor. Idet tændingsbankning ikke er et problem for dieselmotorer sættes deres kompressionsforhold dog typisk i intervallet [13; 24].

11.4 Gasturbinen

11.4.1 Gasturbinens opbygning og virkemåde

En gasturbine adskiller sig opbygningsmæssigt væsentligt fra en benzin- og dieselmotor. Gasturbinen består i stedet af en kompressor og turbine koblet på samme aksel. Mellem disse to er et brændkammer, hvor brændslet forbrændes. Dette er vist på **Figur 22**.



Figur 22: Prosesdiagram for en gasturbine

Det er naturligvis ikke alle brændsler, som kan benyttes i et gasturbinanlæg, og det må kræves, at andelen af partikler eller aske i brændslet er lille. Typiske brændsler i et gasturbinanlæg er naturgas, propan eller

lette fossile olie. Kul har med et askeindhold på omrent 3-20% for højt et askeindhold til at være nyttigt i en gasturbine.

På **Figur 22** er vist et idealiseret og teoretisk procesdiagram for et gasturbineanlæg, som vil lette beregningerne på anlægget. Det antages at gasturbineanlgget kører mellem to tryknifeauer og at tør atmofsfærisk luft cirkulerer i en lukket kreds. Ved det høje tryk er forbrændingen erstattet af en isobarisk varmetilførselsproces. Ved det lave tryk er udstødningen erstattet af en isobarisk varmeafgivelsesproces. Denne samlede proces benævnes til tider *Brayton-princippet*.

11.4.2 Idealiseret beregningsprocedure - varmebalance metoden, akselarbejde

Kredsprocessen kan deles op i følgende 4 delprocesser:

- Pkt. 1 til 2: Isentropisk kompression
- Pkt. 2 til 3: Isobarisk varmetilførsel
- Pkt. 3 til 4: Isentropisk ekspansion
- Pkt. 4 til 1: Isobarisk varmeafgivelse

For gasturbiner har man i øvrigt defineret det såkaldte *trykforhold* r_p givet ved:

$$r_p = \frac{p_2}{p_1}.$$

Her fås det tekniske arbejde til:

$$W_{t,\text{kreds}} = -(Q_{23} + Q_{41}) = m \cdot c_{p,23} \cdot (T_2 - T_3) + m \cdot c_{p,41} \cdot (T_4 - T_1).$$

Hvis der antages en konstant specifik varmekapacitet reduceres dette til:

$$W_{t,\text{kreds}} = m \cdot c_p \cdot ((T_2 - T_3) + (T_4 - T_1)).$$

11.4.3 Idealiseret beregningsprocedure - volumenændringsarbejds metoden, akselarbejde

Også her er kredsprocessens samlede nettoarbejde summen af de indågende delprocesser som:

$$W_{\text{net}} = W_{t,\text{kreds}} = W_{v,\text{kreds}} = \sum W_v.$$

Og arbejdet for hver af de 4 delprocesser er:

$$\begin{aligned} W_{v,12} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_2 - T_1)}{\kappa - 1} \\ W_{v,23} &= p_2 \cdot (V_3 - V_2) \\ W_{v,34} &= \frac{m \cdot R_i \cdot (T_4 - T_3)}{\kappa - 1} \\ W_{v,41} &= p_4 \cdot (V_1 - V_4). \end{aligned}$$

Igen her er resultatet per konvention negativt.

11.4.4 Idealiseret beregningsprocedure, virkningsgrad

Den termiske virkningsgrad for en gasturbine er defineret som:

$$\eta_{th, \text{Brayton}} = \frac{\text{Ønsket output}}{\text{Nødvendigt input}} = \frac{|W_{\text{net}}|}{Q_{23}}.$$

Hvilket kan vises at svare til:

$$\eta_{th, \text{Brayton}} = 1 - \frac{1}{r_p^{\kappa-1}}.$$

Dette er den maksimalt opnåelige virkningsgrad under de givne forhold. I England og USA har man tradition for at udtrykke "godheden" af specielt en gasturbine ved at danne forholdet mellem forbrugt brændstofsenergi og produceret akselenergi – dette benævnes *heat rate* $HR \frac{\text{kJ}}{\text{kWh}}$. Denne er defineret som:

$$HR = \frac{\dot{Q}_{\text{brændstof}} \frac{\text{kW} \cdot \frac{\text{J}}{\text{W}\cdot\text{s}}}{\dot{W}_a \left| \frac{\text{kW} \cdot \frac{\text{h}}{3600\text{s}}}{\dot{W}_{\text{net}}} \right|}} = \frac{\dot{Q}_{\text{brændstof}}}{\left| \dot{W}_{\text{net}} \right|}.$$

Man bør være opmærksom på om producenten har brugt akselarbejdet \dot{W}_a eller kredsarbejdet W_{net} til at beregne deres heat rate, idet forskellen på disse er tab i maskinen.

Lecture 11: Varmepumper og Kølemaskiner

8. april 2025

12 Kølemaskiner og varmepumper

Kølemaskiner og varmepumper er grundlæggende baseret på samme kredsprocess. Fokusset for de to maskiner er dog forskellige idet den ene søger mod at køle, medens den anden forsøger at varme.

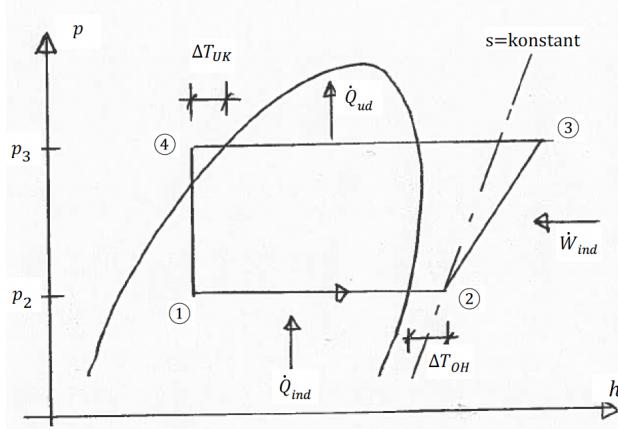
12.1 Kølekredsprocessen

Carnots arbejdskonsumerende kredsproces er egentlig blot en idealiseret kølekredsproces. Carnots kredsproces er teoretisk og der ville blandt andet være problemer i den isentropiske kompression mellem tilstand 2 og 3 da en kompressor ikke kan arbejde effektivt i tofaseområdet, da væskedelen vil lave "væskeslag" hvilket både forringør kompressorens effektivitet og ydeevne. I virkeligheden er processen derfor istedet:

- **Tilstand 1-2:** Delvis isotermisk varmetilførsel (fordamper)
- **Tilstand 2-3:** Isentropisk kompression (kompressor)
- **Tilstand 3-4:** Delvis isotermisk varmeafgivelse (kondenser)
- **Tilstand 4-1:** Isentalpisk ekspansion (drøvleorgan)

Det bør dog nævnes at dette også er en idealisering. I virkeligheden vil den isentropiske virkningsgrad af kompressoren forårsage at den egentlige processvej mellem tilstand 2 og 3 stiger hurtigere i entalpi end den tilvarende isentroplinje, hvilket også kan ses på **Figur 23**.

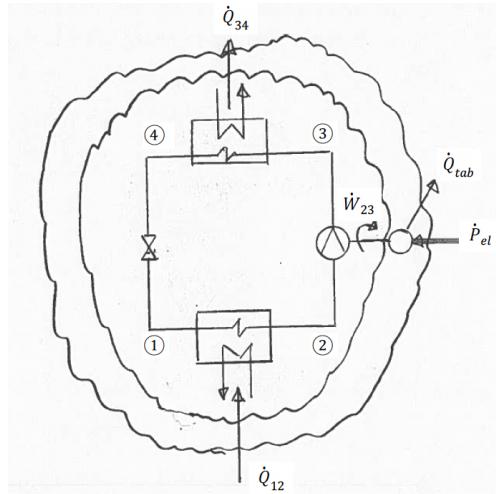
Af **Figur 23** ses også at kølekredsprocessen opererer mellem to trykniveauer. Ved det lave trykviveau ($p_2 = p_1$) fordamper kølemidlet ved en lav temperatur, hvorved et andet medie (eksempelvis indeluft) kan

Figur 23: Kølekredprocessen i et p - h diagram

køles. Ved det høje trykniveau ($p_4 = p_3$) kondenserer kølemidlet ved en temperatur, som muliggør, at varmen kan overføres til et andet medie (eksempelvis udeluft).

På **Figur 23** er også anført en størrelse kaldet ΔT_{OH} der angiver temperaturforskellen mellem mætningstemperaturen ved fordampningstrykket og den reelle gastemperatur idet den kommer ind i kompressoren. Denne størrelse kaldes overhedningen og sikrer mod at der kommer væskedråber i kompressoren.

Ligeledes kaldes størrelsen, ΔT_{UK} for underkølingen. Denne angiver forskellen mellem mætningstemperaturen og den reelle gastemperatur ved afgang fra kondenseren. Denne sikrer at ingen gasbobler ledes videre til drøvleorganet. Dannelse af gasbobler efter kondenseren kaldes i fagsprog "flashgas".



Figur 24: Prosesdiagram for kølekredsproces

På **Figur 24** er indtegnet et procesdiagram for en kølekredsproces. Med afsæt i denne kan følgende to formål opstilles:

- **Kølemaskine (indeks R):** Formålet er at aftage energi fra lavtemperaturreservoiet og "ønsket energimængde" er derfor $\dot{Q}_{ind} = \dot{Q}_{12}$.

- **Varmepumpe (indeks HP):** Formålet er at levere energi til højtemperaturreservoaret og “ønsket energimængde” er derfor $\dot{Q}_{ud} = \dot{Q}_{34}$.

På **Figur 24** er også indtegnet to systemgrænser. Hvis det antages at tab i gear, motor og mekaniske tab tilflyder omgivelserne benyttes den indre af de to og hvis det antages at de førnævnte tab tilflyder kølemidlet benyttes den ydre af de to. For hver systemgrænse kan opstilles en formel for COP-faktorerne af hhv. køleaskiner og varmepumper:

Indre systemgrænse :

$$\begin{aligned}\text{COP}_R &= \frac{|\dot{Q}_{ind}|}{|\dot{W}_{net}|} = \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{W}_{23}} \\ \text{COP}_{HP} &= \frac{|\dot{Q}_{ud}|}{\dot{W}_{net}} = \frac{|\dot{Q}_{34}|}{\dot{W}_{23}}.\end{aligned}$$

Ydre systemgrænse :

$$\begin{aligned}\text{COP}_{R,ydre} &= \frac{|\dot{Q}_{ind}|}{|\dot{P}_{el}|} = \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{P}_{el}} \\ \text{COP}_{HP,ydre} &= \frac{|\dot{Q}_{ind}|}{|\dot{P}_{el}|} = \frac{|\dot{Q}_{34}|}{\dot{P}_{el}}.\end{aligned}$$

De indre COP-faktorer er mest anvendt i den klassiske termodynamik mens de ydre er mere anvendelige i virkeligheden idet de angiver en direkte sammenhæng imellem leveret varmemængde og elforbrug. Værd at bemærke er også at de ydre COP-faktorer vil være mindre end de indre, da effekten \dot{P}_{el} er større end akseeffekten \dot{W}_{23} .

Desuden gælder følgende sammenhæng mellem COP-faktorerne for den indre systemgrænse:

$$\text{COP}_{HP} = \text{COP}_R + 1.$$

12.2 Kølemidler

Midlet der cirkulerer i en kølekreds kaldes *kølemidlet* eller en *refrigerant* i engelsksproget litteratur. Kølemidler grupperes overordnet set i syntetiske, organiske og naturlige kølemidler.

Kølemidler vurderes på deres miljøpåvirkning, herunder ODP som står for *Ozone Depletion Potential* dvs. bidrag til reduktion af ozonlaget samt GWP som står for *Global Warming Potential*, dvs. bidrag til global opvarmning.

Anvendelsen af de forskellige kølemidler indebærer forskellige fordele og ulemper, og af ulemper skal specielt fremhæves giftigvirkning på flora og fauna, brandfare, eksplosionsfare og arbejdsmiljø-relaterede aspekter. Generelt bør an stille følgende krav til det ideelle kølemiddel:

1. Prisvenlig
2. Lav ODP og GWP
3. Ikke-skadeligt for flora og fauna
4. Lav arbejdsmiljøbelastning
5. Ikke brændbart
6. Kemisk stabilt
7. Ikke at reagere med smøreolie og anlægsmaterialer
8. Resultere i høj COP-faktor
9. Give anledning til et moderat kondenseringstryk
10. Give anledning til et fordampningstryk ≤ 1 bara ved drift

På **Figur 25** er anført en række kølemidler og deres ODP og GWP.

Kølemiddel	ODP faktor	GWP faktor
1. Syntetiske kølemidler		
1.1 CFC kølemidler		
• R12 (dichlorodifluoromethane, CCl_2F_2)	1 (definition)	8100
• R501 (blanding af R22/12, 75/25%)	0,29	4083
1.2 HCFC kølemidler		
• R22 (chlorodifluoromethane, $CHClF_2$)	0,06	1500
• R141b (1,1-dichloro-1-fluorethane, CH_2ClF)	0,12	725
1.3 HFC kølemidler		
• R32 (difluoromethane, CH_2F_2)	0	675
• R134a (1,1,1,2-tetrafluoroethane, CH_3FCF_3)	0	1300
2. Organiske kølemidler		
• R290 (Propan, $CH_3CH_2CH_3$)	0	3
• R600 (Butan, C_4H_{10})	0	3
• R600a (Isobutan, $-C(CH_3)_2$) (se Appendix D7)	0	3
3. Uorganiske kølemidler		
• R717 (Ammoniak, NH_3)	0	0
• R718 (Vand, H_2O)	0	0
• R744 (Kuldioxid, CO_2)	0	1 (definition)

Figur 25: Gruppeinddeling af kølemidler og miljøfaktorer

Vand ($H_2O/R718$) er i mange situationer et godt valg, men man skal huske at det ikke er velegnet til temperaturer under $0^\circ C$ da det her går på fast form. Ammoniak ($NH_3/R717$) er også hyppigt brugt. Dog er ammoniak giftigt, brændbart, eksplosivt og arbejdsmiljøskadeligt. I de senere år er man også begyndt at bruge kuldioxid ($CO_2/R744$) som kølemiddel.

12.3 Optimering af kredsprocessen

12.3.1 Ét-trins anlæg

Trykforskel mellem lav- og højtrykssiden har stor indflydelse på effektforbruget på kompressoren (se evt. definitionen af teknisk arbejde: $\dot{W}_t = \dot{m} \cdot \int_1^2 v \cdot dp$). Trykforskellen indgår direkte i formlen og det er klart at en indre trykforskel giver et mindre effektforbrug til kompression af kølemidlet.

Trykforskellen mellem lav- og højtrykssiden kan reduceres enten ved at forhøje fordampningstrykket eller ved at mindske kondenseringstrykket. Disse er imidlertid ofte bestemt af funktionskrav såsom ønsket temperatur i et fryserum og brug af udeluft til køling af kondensereren.

Et større varmeoverførende areal i en varmeveksler giver en bedre varmeoverføresel, hvorfor en temperaturforskelt i så fald kan mindskes. Dette giver en marginal øgning af fordampningstrykket hvilket giver en bedre COP-faktor og et lavere effektforbrug til kompressoren. Her skal man altså afveje øgede anlægsomkostninger mod lavere driftsomkostninger.

Som tomelfingerregel benytter man det eksterne kølemedium i kondenseren der har den laveste temperatur. Dette giver et lavere kondenseringstryk og dermed en bedre COP-faktor. Derved opstår et dilemma når man skal vælge mellem eksempelvis luft og havvand, da havvand ofte er koldere om sommeren mens luften typisk er koldere om vinteren.

Derudover kan det vises at en større underkøling også giver en bedre COP-faktor.

12.3.2 To-trins anlæg med mellemkøling

I visse situationer kan det være en fordel at udføre kompressionen i to trin. For anlæg med en stor trykforskelt kan det ligefrem være nødvendigt da temperaturen på kølemidlet ellers ville blive for høj under kompressionen.

En af fordelene der opnås ved at gøre det på denne måde er at man får mulighed for at køle kølemiddelgassen mellem de to kompressorer. Dette kaldes mellemkøling.

Med reference til definitionen på det tekniske arbejde $\dot{W}_t = \dot{m} \int_1^2 v dp$ ses også at en underkøling giver et mindre specifikt volumen hvilket giver et mindre arbejde end for den tilsvarende ikke-mellemkølede process.

Mellemkøling kan opnås i forskellige anlægstyper. Eksempelvis kan mellemkølingen opnås ved at lade den overhedede kølemiddelgas fra kompressor 1 boble op gennem kølemiddelvæsken i mellemkøleren. Herved køles kølemiddelgassen ned til mætningsstemperaturen ved trykket i mellemkøleren eller til tilstand $h''(x = 1)$. Kølemiddelgassen før kompressor 2 er således uden overhedning.

Lecture 12: Gasblanding og fugtig luft

15. April 2025

13 Gasblanding

I dette kapitel behandles gasblanding, dvs. en blanding af to eller flere gasarter. Det antages i alle tilfælde at der ikke sker en kemisk reaktion mellem de indgående gasarter i gasblandingen.

Det skal understreges at der udelukkende arbejdes med gasblanding. Der kan blot trækkes få paralleller til væskeblanding.

13.1 Formler for angivelse af sammensætning af en gasblanding

For en blanding af to eller flere gasarter, hvor n angiver antallet af gasarter i gasblandingen, kan følgende regler opstilles for gasblandingens samlede masse, stofmængde og volumen:

$$\begin{aligned} m_{\text{mix}} &= \sum_{i=1}^n m_i \\ N_{\text{mix}} &= \sum_{i=1}^n N_i \\ V_{\text{mix}} &= \sum_{i=1}^n V_i(T_{\text{mix}}, p_{\text{mix}}). \end{aligned}$$

Forudsat at der ikke sker en kemisk reaktion gælder de første to af de ovenstående formler både for idealgasser og realgasser. Den nederste kaldes også Amagat's lov og gælder eksakt for idealgasser, men kun tilnærmet for realgasser. Derudover gælder denne kun ved fastholdt tryk og temperatur.

I mange sammenhænge kan det være hensigtsmæssigt at angive den enkelte gasarts andel af den samlede gasblanding. Her opstilles normalt formler for hhv. masseandel, molandel og volumenandel som:

$$\begin{aligned} M_{a_i} &= \frac{m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ N_{a_i} &= \frac{N_i}{\sum_{i=1}^n N_i} \\ V_{a_i} &= \frac{V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}. \end{aligned}$$

Enheden for f.eks. masseandel er i enheden kg-gasart / kg-blanding. For en blanding af idealgasser er molandelen og volumenandelen identisk.

Desuden præsenteres her også 6 formler for omregning mellem de fornævnte andelsstørrelser:

$$\begin{aligned} M_{a_i} &= \frac{N_{a_i} \cdot M_i}{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i} \\ M_{a_i} &= \frac{\frac{V_{a_i}}{R_{i,i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{V_{a_i}}{R_{i,i}}} \\ N_{a_i} &= \frac{\frac{M_{a_i}}{M_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{M_{a_i}}{M_i}} \\ N_{a_i} &= \frac{\frac{V_{a_i}}{R_{i,i} \cdot M_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{V_{a_i}}{R_{i,i} \cdot M_i}} \\ V_{a_i} &= \frac{M_{a_i} \cdot R_{i,i}}{\sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot R_{i,i}} \\ V_{a_i} &= \frac{N_{a_i} \cdot M_i \cdot R_{i,i}}{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i \cdot R_{i,i}}. \end{aligned}$$

13.2 Daltons lov og partialtryk

Daltons lov udtrykker at det samlede tryk for en gasblanding p_{mix} er lig summen af partialtrykkene p_i for de indgående gasarter:

$$p_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n p_i(T_{\text{mix}}, V_{\text{mix}}).$$

Denne gælder kun eksakt for idalgasser, men tilnærmet for realgasser. Endvidere er den kun gældende for fastholdt temperatur. Derudover skal alle gasarter antages at have det samme volumen til rådighed.

Partialtrykket p_i for den enkelte gasart i gasblandingen defineres som:

$$p_i = p_{\text{mix}} \cdot \frac{N_i}{\sum_{i=1}^n N_i}.$$

Specielt for idealgasser gælder:

$$p_i = p_{\text{mix}} \cdot N_{a_i} = p_{\text{mix}} \cdot V_{a_i}.$$

Ønskes stofværdier eller andre karakteristiske for en gasart i en gasblanding til beregninger gøres dette ud fra partialtrykket for den pågældende gasart. Eksempelvis ville man benytte partialtrykket p_i i idealgasaligningen til et omregne mellem stofmængde N_i og volumen V_i .

13.3 Tilstandsstørrelser og stofværdier for gasblandinger

I visse sammenhænge vil man have brug for at kende tilstandsstørrelser og stofværdier for gasblandinger. Her anføres en række formler for dette.

13.3.1 Gaskonstant

Gaskonstanten R_i for en gasblanding kan findes som:

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot R_{i,i} \\ R_i &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{V_{a_i}}{R_{i,i}}} \\ R_i &= \frac{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i \cdot R_{i,i}}{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i}. \end{aligned}$$

13.3.2 Specifikt volumen

Det specifikke volumen v for en gasblanding kan findes som:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot v_i \\ v_i &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{V_{a_i}}{v_i}} \\ v &= \frac{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i}. \end{aligned}$$

13.3.3 Densitet

Densiteten ρ for en gasblanding kan findes som:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{M_{a_i}}{\rho_i}} \\ \rho &= \sum_{i=1}^n V_{a_i} \cdot \rho_i \\ \rho &= \frac{\sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i}{\sum_{i=1}^n \frac{N_{a_i} \cdot M_i}{\rho_i}}.\end{aligned}$$

13.3.4 Molmasse

Molmassen M for en gasblanding kan findes som:

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{M_{a_i}}{M_i}} \\ M &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{V_{a_i}}{r_{i,i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{V_{a_i}}{M_i \cdot R_{i,i}}} \\ M &= \sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot M_i.\end{aligned}$$

13.3.5 Specifik varmekapacitet

Den specifikke varmekapacitet, både den gældende ved en enkelt temperatur og den integrale kan findes som:

$$\begin{aligned}c_v &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot c_{v,i} \\ c_p &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot c_{p,i}.\end{aligned}$$

Heraf følger logisk, men betinget af at der er benyttet samme referencetemperatur for de indgående gasser at:

$$\begin{aligned}u &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot u_i \\ h &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot h_i \\ s &= \sum_{i=1}^n M_{a_i} \cdot s_i \\ &\dots\end{aligned}$$

Disse må under ingen omstændigheder benyttes under faseskift.

13.3.6 Viskositet og varmeledningsevne

Hvis en usikkerhed på 5–10% kan accepteres kan viskositeten μ og varmeledningsevnen λ estimeres som:

$$\mu \approx \sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot \mu_i$$

$$\lambda \approx \sum_{i=1}^n N_{a_i} \cdot \lambda_i.$$

13.4 Gasblandinger angivet på tør og våd basis

I visse sammenhænge er der brug for at beregne på en gasblanding på både tør og våd basis når en af de ingående gasser er vanddamp. Angivelse af en gasblanding på tør basis indebærer blot at man sætter vandindholdet lig nul og tilpasser de resterende gassers andel således at summen af disse bliver 100%.

14 Fugtig luft

På **Figur 26** ses sammensætningen af tør atmosfærisk luft.

Gasart	Massebasis [%]	Volumenbasis [%]	Molbasis [%]
Nitrogen (N_2)	75,51	78,08	78,08
ilt (O_2)	23,15	20,95	20,95
Argon (Ar) m. fl. (regnet som Ar)	1,34	0,97	0,97
Sum	100,00	100,00	100,00

Figur 26: Sammensætningen af tør atmosfærisk luft

I naturen vil atmosfærisk luft indeholde vant på dampform til en vis grad. Mængden af vanddamp er afhængig af tilstedsvarerelsen af vand og temperaturen. Eksempelvis finder man store mængder vand i luften i troperne og i kystnære områder.

14.1 Tørt og fugtigt flow af luft

Det vil typisk være smart at dele et flow af fugtigt luft op i et flow af atmosfærisk luft og et flow af vanddamp, idet det i så fald bliver en gasblanding som er blevet behandlet i sektion 13. Vi introducerer følgende størrelser:

$$\dot{m}_{\text{våd}} = \text{Masstrøm af den faktiske og fugtige luftmængde}$$

$$\dot{m}_{\text{tør}} = \text{Masstrøm af den tørre del af } \dot{m}_{\text{våd}}$$

$$\dot{m}_{H_2O} = \text{Masstrøm af den våde vanddamp.}$$

Heraf følger følgende sammenhæng:

$$\dot{m}_{\text{våd}} = \dot{m}_{\text{tør}} + \dot{m}_{H_2O}.$$

Kendes masseandelen af vanddamp i den fugtige luft kan følgende opstilles:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\text{tør}} &= \dot{m}_{\text{våd}} \cdot (1 - M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}) \\ \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} &= \dot{m}_{\text{våd}} - \dot{m}_{\text{tør}} = \dot{m}_{\text{våd}} \cdot M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}.\end{aligned}$$

14.2 Relativ og absolut fugtighed

Til brug i tekniske beregninger er defineret to måder at angive vandindholdet i luft. Disse er absolut vandindhold X og relativt vandindhold φ . Disse er defineret som:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\text{masse af vand (damp)}}{\text{masse af tør luft}} = \frac{M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}}{1 - M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}} \\ \varphi &= \frac{\text{Masste af vand (damp)} \cdot 100}{\text{Masste af maksimalt indhold af vand (damp)}}.\end{aligned}$$

Heraf fås følgende omskrivning:

$$\dot{m}_{\text{våd}} = \dot{m}_{\text{tør}} + \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} = \dot{m}_{\text{tør}} \cdot (1 + X).$$

Det relative vandindhold φ kan bestemmes som forholdet mellem vanddampens partialtryk for den aktuelle luft og vanddampens partialtryk ved mættet tilstand som:

$$\varphi = \frac{p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot 100}{p_{\text{H}_2\text{O},\text{mæt}}}.$$

Vanddampens partialtryk ved mættet tilstand er afhængig af temperaturen og kan findes i et opslagsværk.

14.3 Energiindhold i fugtig luft og densitet

14.3.1 Entalpi baseret på vægt af den fugtige luft

Entalpien for fugtig luft $h_{l,\text{våd}}$ kan beregnes som entalpien af tør luft $h_{l,\text{tør}}$ plus entalpien af vanddamp $h_{\text{H}_2\text{O}}$ som:

$$h_{l,\text{våd}} = (1 - M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}) \cdot h_{l,\text{tør}} + M_{a_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot h_{\text{H}_2\text{O}}.$$

14.3.2 Entalpi baseret på vægt af den tørre luft andel af den fugtige luft

Entalpi for fugtig luft $h_{l,1+X}$ men med basis for den tørre luftandel kan beregnes som entalpi af tør luft plus entalpi af vanddamp som:

$$h_{l,1+X} = c_{p,l,\text{tør}}(p, T) \cdot T + X \cdot [c_{p,\text{damp}}(p, T) \cdot T + r_0].$$

14.3.3 Densitet for fugtig luft som funktion af den absolutte fugtighed

Kendes den absolute fugtighed X kan densitet for den fugtige luft ved normaltilstanden bestemmes af:

$$\rho(0^\circ\text{C}, 101\,325 \text{ Pa}, X) = \rho(0^\circ\text{C}, 101\,325 \text{ Pa, tør}) \cdot \frac{1 + x}{1 + 1,609 \cdot X}.$$

Ønskes densiteten bestemt ved en anden tilstand, f.eks. 10 °C og 200 Pa kan benyttes:

$$\rho_{(10 \text{ } ^\circ\text{C}, 200 \text{ Pa})} = \rho_{(0 \text{ } ^\circ\text{C}, 101325 \text{ Pa}, X)} \cdot \frac{273}{273 + 10} \cdot \frac{200}{101325}.$$

14.4 Masse- og energibevarelse i knudepunkter

Formlerne på **Figur 27** kan opstilles for masse- og energibevarelse for fugtig luft i knudepunkter.

Knudepunkt	Varme i [J]	Effekt i [W]
III. Massebevarelse (tør masse)	$\sum_{i=0}^m (m_{ter,i})_{ind} = \sum_{i=0}^n (m_{ter,i})_{ud}$	$\sum_{i=0}^m (\dot{m}_{ter,i})_{ind} = \sum_{i=0}^n (\dot{m}_{ter,i})_{ud}$
II. Massebevarelse (vand/damp)	$\sum_{i=0}^m (m_{H2O,i})_{ind} = \sum_{i=0}^n (m_{H2O,i})_{ud}$	$\sum_{i=0}^m (\dot{m}_{H2O,i})_{ind} = \sum_{i=0}^n (\dot{m}_{H2O,i})_{ud}$
III. Energibevarelse	$\sum_{i=0}^m (m_{vbd,i} \cdot h_{l,vbd,i})_{ind} = \sum_{i=0}^n (m_{vbd,i} \cdot h_{l,vbd,i})_{ud}$	$\sum_{i=0}^m (\dot{m}_{vbd,i} \cdot h_{l,vbd,i})_{ind} = \sum_{i=0}^n (\dot{m}_{vbd,i} \cdot h_{l,vbd,i})_{ud}$

Figur 27: Formler til knudepunktsberegninger på fugtig luft

De tre formler under f.eks. "effekt" i **Figur 27** giver mulighed for at bestemme tre ubekendte.

14.5 Molliere diagram

Det er generelt meget omfangsrigt at foretage beregninger på fugtig luft. Nogle af beregningerne kanlettes vha. et diagram benævnt et "Molliere diagram" eller et "T-X diagram" dvs. med temperaturen T på y -aksen og den absolute fugtighed X på x -aksen same kurve for entalpi og relativ fugtighed. Derudover kan mætningstrykket for en given temperatur aflæses. Det skal fremhæves at et Molliere diagram er lavet for et bestemt tryk. Ændres trykket skal et nyt diagram fremstilles.

I visse sammenhænge ser man også Molliere diagrammer lavet som et $h-x$ diagram.

For mere information om konstruktion og aflæsning af Molliere diagrammer se den fremragende vejledning på s. 244 & 247 i bogen (s. 245 % 248 i PDF'en).

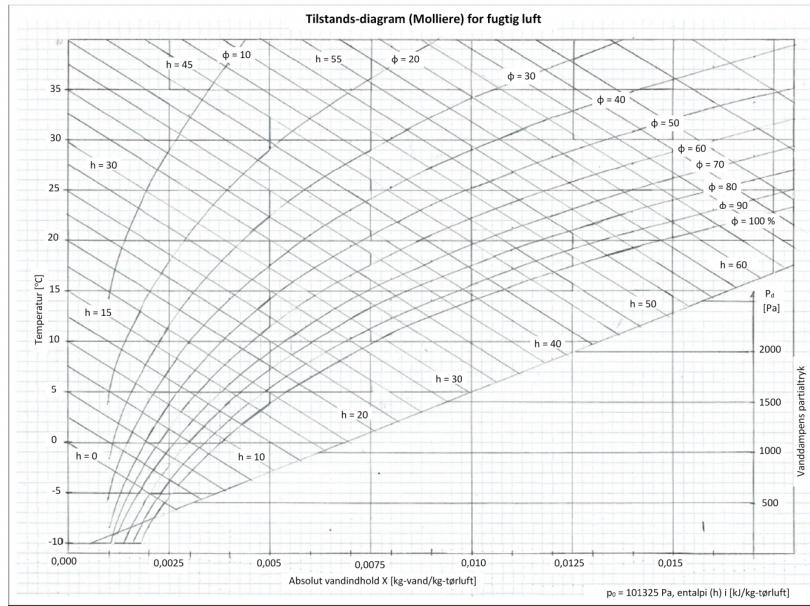
14.6 Opvarmning og afkøling af fugtig luft – sensibel energiændring alene

Når et flow af fugtig luft opvarmes eller afkøles kan det betragtes som en procesændring for et åbent system, hvor der hhv. tilføres og afgives en varmeeffekt. Da trykket er konstant er det en isobarisk proces. Derfor kan følgende formel benyttes:

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) = \dot{m} \cdot c_{p,m} \cdot (T_2 - T_1).$$

Der er her indsat en middelværdi for det specifikke varmefylde for det generelle tilfælde, hvor den specifikke varmefylde ikke antages at være konstant.

Under forudsætning af at der ikke sker et faseskift af vanddampen i den fugtige luft, dvs. kondensering til flydende vand, vil der ved en opvarmning eller en afkøling af et flow af fugtigt luft være én parameter, som forbliver konstant, og det er den absolute fugtighed X . Dette betyder, at processforløbet ved en opvarmning eller en afkøling af et flow af fugtigt luft er en vertikal linje i $T-X$ diagrammet på Molliere diagrammer



Figur 28: Eksempel på Molliere diagram for atmosfæretrykket $p = 101\ 325\ \text{Pa}$

som **Figur 28**. Da der ikke sker et faseskift for vanddampen vil der alene være tale om en ændring af temperaturen proportionalt med tilførsel eller fjernelse af energi.

Under samme forudsætning, og ved en opvarmning eller afkøling af et flow af fugtigt luft vil masseandel af vanddamp i den fugtige luftstrøm $M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}$ og partialtrykket for vanddampen $p_{\text{H}_2\text{O}}$ ligeledes være konstante.

Vi har generelt også følgende formel for den nødvendige effekt ved en temperaturændring af et flow af fugtigt luft:

$$\dot{Q} = \dot{m}_{l,\text{våd}} \cdot ((1 - M_{a_{\text{H}_2\text{O}}}) \cdot (c_{p,l,\text{tør},2}(p_2, T_2) \cdot T_2 - c_{p,l,\text{tør},1}(p_1, T_1) \cdot T_1) + M_{a_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot (h(p_{\text{H}_2\text{O}}, T_2) - h(p_{\text{H}_2\text{O}}, T_1))).$$

Man burde egentlig benytte den integrale specifikke varmekapacitet $c_{p,\text{int}}$ i stedet for den specifikke varmekapacitet c_p men er man tæt på referencepunktet for beregning af entalpi ($T = 0^\circ\text{C}$) er forskellen ikke stor.

Vi har også formlen:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{m}_{t,\text{tør}} \cdot (h_{l,1+X,2} - h_{l,1+X,1}) \\ &= \dot{m}_{l,\text{tør}} \cdot (1,006 + X \cdot 1,86) \cdot (T_2 - T_1).\end{aligned}$$

14.7 Beffugtning og affugtning af fugtig luft

14.7.1 Affugtning af fugtig luft

Generelt affugter man enten fugtig luft kemisk vha. adsorption eller ved afkøling.

Affugtning ved adsorption sker ved at bringe den fugtige luft i kontakt med f.eks. calciumklorid eller silica

gel. Disse stoffer er hygroskopiske, dvs. de tiltrækker og optager vand indtil en vis grænse ved en given temperatur. Processen kan reverseres ved at opvarme materialet hvorved det vil afgive vandet igen. Dette kendes fra de små hvide poser i bl.a. skotøjsæsker.

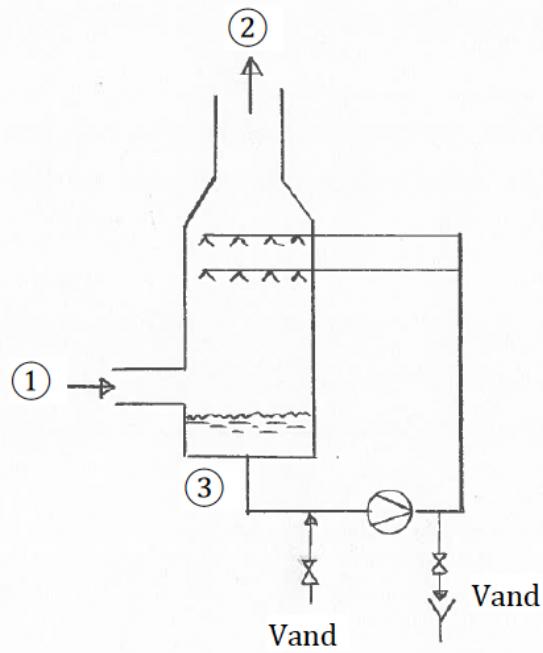
Affugtning kan også ske ved afkøling af den fugtige luftstrøm. Antag eksempelvis at man på Molliere diagrammet på **Figur 28** forsøger at køle ned til et punkt under $\phi = 100\%$ -kurven. Man kan ikke køle igennem denne kurve da vanddamp i så fald begynder at kondensere. Derfor vil man langsomt bevæge sig langs $\phi = 100\%$ -kurven videre nedad, hvis nedkølingen fortsættes.

14.7.2 Beffugtning af fugtig luft

Befugtning kan ske på flere måder, herunder:

- Direkte blanding/mixning af en luftstrøm med recirkuleret vand
- Fortøvning af koldt eller varmt vand via dyser direkte i luftstrømmen
- Injektion af damp via dyser direkte i luftstrømmen

Her behandles udelukkende pkt. 1, dvs. direkte blanding af en luftstrøm med recirkuleret vand. Dette er vist i procesdiagrammet på **Figur 29**. Foruden at opnå en befugtning af luften vil der også ske en afkøling således, at temperaturen falder for den behandlede luftstrøm. Dette er behandlet nærmere i **under-sektion 14.8**.



Figur 29: Procesdiagram for befugtning af luft ved direkte blanding med recirkuleret vand

For at kompensere for forbrugt vand i processen må der spædes nyt vand til. Det fordampede vand vil være rent, og eventuelle salte og mineraler i det tilspædte vand vil blive ophobet i det recirkulerede vand.

Derfor må man aflede en vis mængde vand til kloakken for at opretholde en maksimal saltkoncentration i det recirkulerede vand. Efter processen (pkt. 2) installeres et dråbefang der sørger for at ingen vanddråber fortsætter med luftstrømmen rundt.

14.8 Tørt og vådt termometer

To ens termometre i den samme luftstrøm vil vise forskellige resultater, hvis den ene er pakket ind i vådt vat og den anden ikke er. Dette skyldes at for termometeret pakket ind i vat, vil vandet fordamppe isentalpisk og derved afkøle vattet.

Det tørre termometer viser omgivelsestemperaturen og det våde termometer vil vise en lavere temperatur end omgivelsestemperaturen.

Lecture 13: Varmetransmission

22. April 2025

15 Mekanismer for varmetransmission

15.1 Definition af varmetransmission

For at kunne arbejde med varmetransmission er det vigtigt at have nogle grundlæggende begreber på plads

Definition 14: Varmetransmission

Varmetransmission er en løbende, irreversibel varmetransport mellem legemer af forskellig temperatur.

Overordnet kan dette inddeltes i tre forskellige transmissionsmåder:

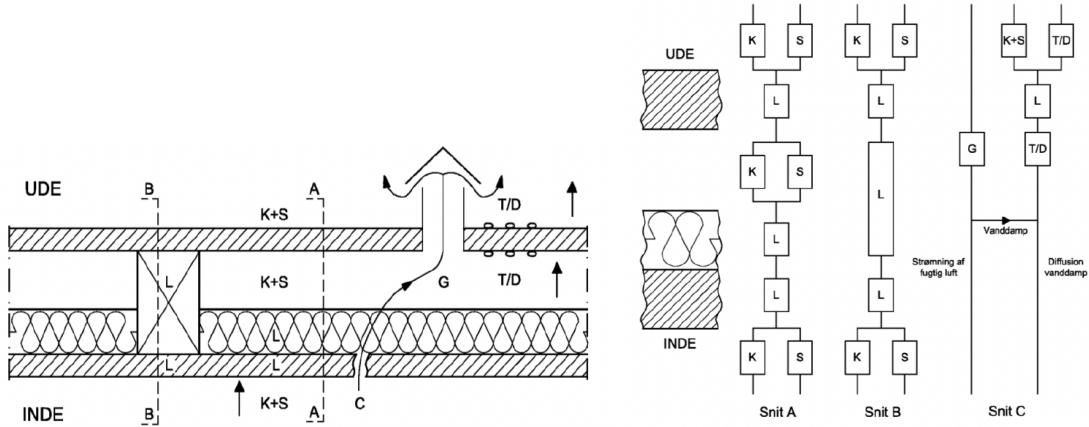
- **Varmeledning:** Varmeledning er overførsel af energi ved tilfældige stød mellem atomare partikler uden at der sker stoftransport
- **Konvektion:** Ved konvektion overføres energi gennem bevægelsen af en fluid mellem et varmt og et koldt legeme, også en stoftransport af væske eller gas
- **Varmestråling:** Ved varmestråling overføres energi i form af elektromagnetisk stråling mellem flader

15.2 Sammensat varmeoverføring

For at illustrerer kompleksiteten af mange varmeoverfører betragtes på **Figur 30** en tagkonstruktion. På snittet er brugt følgende forkortelser:

L : Ledning
S : Stråling
K : Konvektion

G : Strømning
D : Fordampning
T : Fortætning.



Figur 30: Snit gennem en tagkonstruktion

15.2.1 Isolans

På højresiden af **Figur 30** er de enkelte snit i tagkonstruktionen illustreret med et blokdiagram for at give et bedre overblik. Varmetransmissionsvejene kan illustreres med modstande, eller isolanser, der indikeres med symbolet R [$\text{m}^2\text{K}/\text{W}$]. Begrebet er analogt til modstande i el-læren. Her yder modstandene blot en modstand mod strøm af varme. Dette er vist på **Figur 31**.

I en bygningskonstruktion er isolanserne for to på hinanden følgende lag seriekoblede. I dette tilfælde, se **Figur 31**, er isolans R_6 og R_7 koblet i serie og den samlede isolans af de to R_{6-7} findes som:

$$R_{6-7} = R_6 + R_7.$$

Hvis de to isolanser i stedet var parallelkoblede, sådan som f.eks. isolanserne for konvektion og stråling ved luftlag (f.eks. isolans R_4 og R_5 i **Figur 31**), findes den samlede isolans R_{4-5} som:

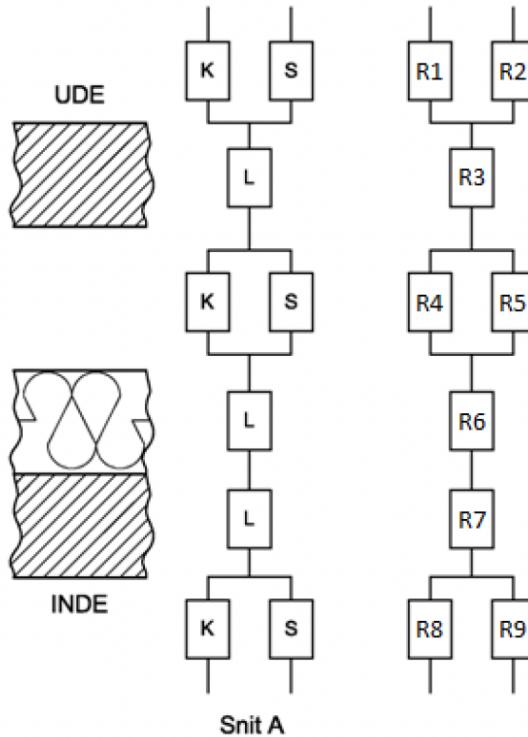
$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{4-5}} &= \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \\ \implies R_{4-5} &= \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}. \end{aligned}$$

Idet isolanser enten er serie- eller parallelkoblede kan isolansen af enhver konstruktion findes vha. disse to formler.

15.2.2 Overgangsisolanser

På samme måde som der er isolanser for de enkelte lag, er der også en isolans mellem den fri luft og overfladerne af konstruktionen. Overgangsisolanserne, R_{se} og R_{si} , er sammensat af konvektion og stråling og kan beregnes ud fra formler for konvektion og stråling. De samlede overgangsisolanser findes da til:

$$\begin{aligned} R_{se} &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \\ R_{si} &= \frac{1}{\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}}. \end{aligned}$$



Figur 31: Isolanser fra snit A som modstande

Typisk vil disse være så små at en standardværdi kan benyttes uden stor fejlmargin. På **Figur 32** er en række standardværdier for overgangsisolanser vist.

Varmestrømsretning	Opad	Vandret	Nedad
R_{si}	0,10	0,13	0,17
R_{se}	0,04	0,04	0,04

 Figur 32: Standardværdier for indvendig og udvendig overgangsisolans i $\text{m}^2\text{K}/\text{W}$

15.2.3 Varmeoverføringskoefficient

I visse sammenhænge benyttes også varmeoverføringskoefficienten $h \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ i stedet for isolansen. Varmeoverføringskoefficienten er blot isolansens reciproke, som:

$$h = \frac{1}{R}.$$

Dette gælder for hvert enkelt lag af isolanserne. Varmeoverføringskoefficienterne bruges kun om de enkelte lag i konstruktionen og ikke om hele konstruktionen, hvor varmetransmissionskoefficienten U benyttes.

Der findes også en varmeovergangskoefficient på samme måde som der findes en overgangsisolans.

15.2.4 Varmetransmissionskoefficient

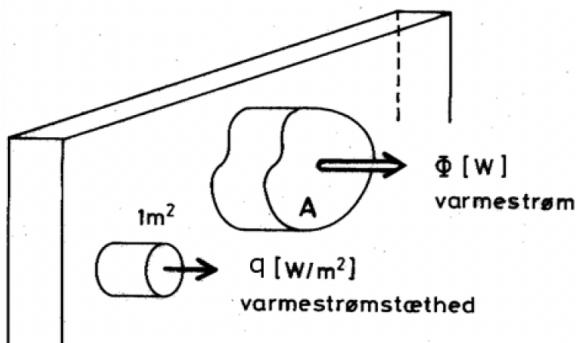
Varmetransmissionen, eller varmetabet, gennem en arealenhed af en konstruktion pr. grad K temperaturforskæl over konstruktionen kaldes varmetransmissionskoefficienten eller U -værdien. U -værdien er den reciproke værdi af konstruktionens totale isolans, inklusive overgangisolanser:

$$U = \frac{1}{R_{\text{total}}}.$$

En lille varmetransmissionskoefficient udtrykker en godt isolerende væk. Ydervægge og tage i nybyggeri har typisk $U = 0,15 - 0,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$.

16 Endimensional varmeledning gennem homogene lag

På **Figur 33** angiver Φ varmestrømmen gennem et fladeareal A , mens størrelsen q angiver varmestrømstætheden, der er varmestrømmen pr. enhedsareal af fladen.



Figur 33: Definition af varmestrøm og varmestrømstæthed

Mellem de to størrelser gælder:

$$\Phi = q_m \cdot A.$$

En generel to- eller tredimensional betragtning af q sker ud fra Fouriers lov kombineret med en kontinuitetsberegning for varmen. For endimensional strømning parallelt med x -aksen lyder Fouriers lov:

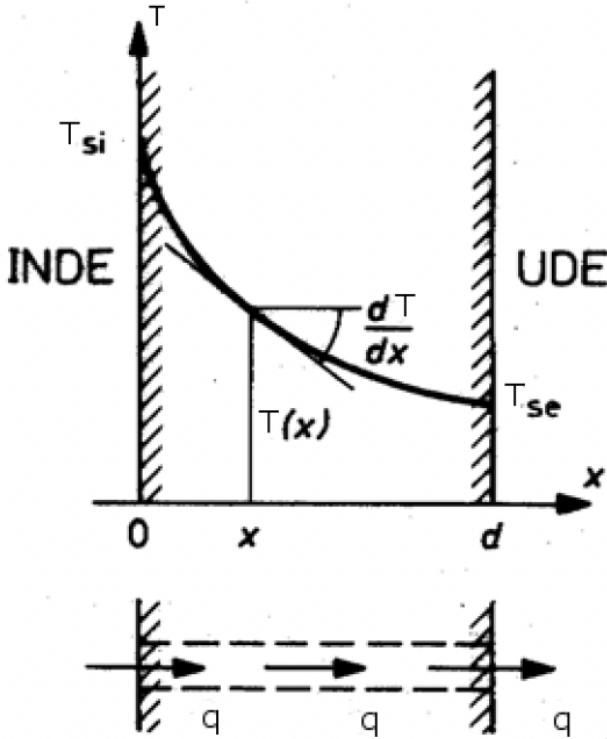
$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Varmestrømstætheden, q , i den givne retning x er ifølge Fouriers lov proportional med temperaturens fald pr. længdeenhed i samme retning. Proportionalitetsfaktoren λ afhænger af det betragtede materiales termiske egenskaber.

I en homogen væk med ensartet tykkelse og stor udtrækning forløber varmestrømmen endimensionalt gennem væggen. Dette er vist på **Figur 34**

Vi kan omskrive Fouriers lov fra før til:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda}$$



Figur 34: Temperaturgradient ved endimensional strømning gennem homogen væg

hvor q er konstant (uafhængig af x). Integration af dette giver:

$$T = -\frac{q}{\lambda}x + T_{si}$$

idet $T = T_{si}$ er indsat som randbetingelsen for $x = 0$. Temperaturen varierer altså retlinet gennem væggen. Den anden randbetingelse $T = T_{se}$ for $x = d$ kan nu indsættes som:

$$T_{se} = -\frac{q}{\lambda}d + T_{si}.$$

Hermes kan varmestrømstætheden isoleres som:

$$q = \lambda \frac{T_{si} - T_{se}}{d} = \frac{T_{si} - T_{se}}{R_m}$$

hvor R_m er den homogene vægs isolans:

$$R_m = \frac{d}{\lambda} \quad (7)$$

I formlen ovenfor er T_{si} og T_{se} overfladetemperaturer og ikke lufttemperaturer.

Ved at benytte varmeovergangskoefficienterne h kan effektoverførslene skrives på formen:

$$\begin{aligned} q &= h_i (T_i - T_{si}) = \frac{T_i - T_{si}}{R_{si}} \\ q &= h_e (T_{se} - T_e) = \frac{T_{se} - T_e}{R_{se}}. \end{aligned}$$

Ved at kombinere dette med udtrykket for effektoverførslen fra før fås:

$$\begin{aligned} T_i - T_e &= q \cdot (R_m + R_{si} + R_{se}) \\ \Rightarrow q &= \frac{T_i - T_e}{R_{si} + R_m + R_{se}}. \end{aligned}$$

Denne formel kan løses for hvert lag i en samlet konstruktion hvorved den samlede varmestrøm gennem hele væggen kan findes som:

$$\Phi = q \cdot A = U \cdot A \cdot (T_i - T_e).$$

Isolansen at et luftlag kan ikke bestemmes ved den simple formel i **Ligning 7** som gælder for faste materialer. Dette skyldes, at luftens stråling og eventuelle konvektion kan være langt væsentligere end varmeledningen.

17 Endimensional varmeledning gennem inhomogene lag

Inhomogene lag er lag, der består af forskellige materialer, når et tværsnit vinkelret på varmestrømmens retning betragtes. Beregning af varmeledning igennem disse lag kan tilnærmedesvis foretages på samme måde som gennem homogene lag, når forskellen mellem varmeledningsevnerne for de forskellige materialer ikke er for stor (højest ca. en faktor 4 forskel i λ). For at forenkle beregninger ved inhomogene lag benyttes et vægtet gennemsnit af materialernes varmeledningsevne ud fra deres udbredelse målt vinkelret på varmestrømmens retning.

18 Konvektion

Konvektion er medføringen af varme ved strømningen af en fluid. I alle fluider, der bevæger sig, finder der samtidig varmeledning sted i selve fluidet. Denne varmeledning er som regel så lille at den også blot betragtes som en del af "konvektion".

Typisk finder konvektiv varmeoverføring sted i følgende tilfælde:

1. Ved luftens strømning hen over en plan flade. Som f.eks. vind langs en ydervæg. Varmen overføres fra selve overfladen til "et sted", der er tilstrækkeligt langt ude i den omgivende luft til at være upåvirket af fladen.
2. Ved strømning indvendigt i rør (som regel væske) eller kanaler (som regel luft). Den konvektive varmetransport overfører her varmen mellem kanal/rør-væggen og fluidet.
3. Ved strømning mellem to parallelle flader, der adskilles af et luftlag eller evt. en væske. Her vil der dannes en hvirvlende strøm mellem de to overflader.
4. Et særligt tilfælde af 1 er et fluids strømning hen over ydersiden af et rør eller en kanal. Dette finder man typisk i varmtvandsbeholdere.

Der skelnes typisk mellem to former for konvektion, hvor styrken til at overføre varme igen afhænger af hvilken af de to strømningstyper, der er gældende. De to former for konvektion er:

- **Tvungen konvektion**, hvor fluidets bevægelse skyldes udefrakommende kræfter som f.eks. en ventilator, en pumpe eller vinden.

- **Naturlig konvektion**, hvor fluidets bevægelse skyldes temperaturforskelle, der forårsager forskelle i massefylde.

Generalt inddeltes konvektion også i hhv. laminar strømning og turbulent strømning.

18.1 Laminar strømning

Helt inde ved den bestrøgede overflade står fluidet stille. Herover flyder fluidets molekyler roligt som molekylelag, hvis bevægelser er parallelle med den bestrøgede overflade. Molekylelagenes hastighed udvikler sig i et krumt forløb med afstanden fra overfladen, indtil hastigheden et stykke ude når den fri strømningshastighed.

Hastighedsprofilen udvikles fra væggen som en såkaldt Blasius-profil, hvis eksakte løsning ikke kan skrives med en simpel formel. Området fra den bestrøgede overflade indtil fluidet når den fri strømningshastighed kaldes grænselaget. Strømningsprofilen i grænselaget er uafhængigt af den bestrøgede overflades karakter. Temperaturen følger en lignende profil, dog af og til med en anden tykkelse.

Da strømningen er rolig og overvejende parallel med overfladen, er den konvektive varmeoverførsel kun lidt større end ren varmeledning i fluidet mellem overfladen og det fri strømningsfelt.

18.2 Turbulent strømning

Ved store hastigheder bliver strømningen urolig. Her finder der talrige små fluktuationer sted, som går på tværs af den bestrøgne overflade. I ethvert punkt og i alle retninger ændres hastigheden løbende. Hastigheden er stadig nul helt inde ved den bestrøgne overflade, men den udvikles hurtigt væk fra overfladen. Helt inde ved overfladen findes dog et laminart sublag, hvor hastighed og temperatur udvikles lineært. Udenfor det laminare sublag udvikles hastigheden tilnærmelsesvis med logaritmen til afstanden til væggen.

Tilsvarende har temperaturprofilen en hurtig udvikling væk fra overfladen, hvor fluidet har overfladens temperatur ud til den afstand, hvor det fri strømningsfelts temperatur opnås. Ved turbulent strømning spiller overfladekarakteren ind i langt højere grad end for laminar strømning.

18.3 Beregningsmetode

Uanset konvektionsform, strømningstype og anvendelse ønsker man at nå frem til at kunne beskrive varmeoverføring med den simple ligning:

$$\Phi = A \cdot h_k \cdot \Delta T.$$

I stedet for den konvektive varmeovergangskoefficient h_k kan den kollektive overgangisolans R_k benyttes:

$$R_k = \frac{1}{h_k}.$$

Desværre kan den konvektive varmeovergangskoefficient ofte ikke bestemmes teoretisk med stor nøjagtighed.