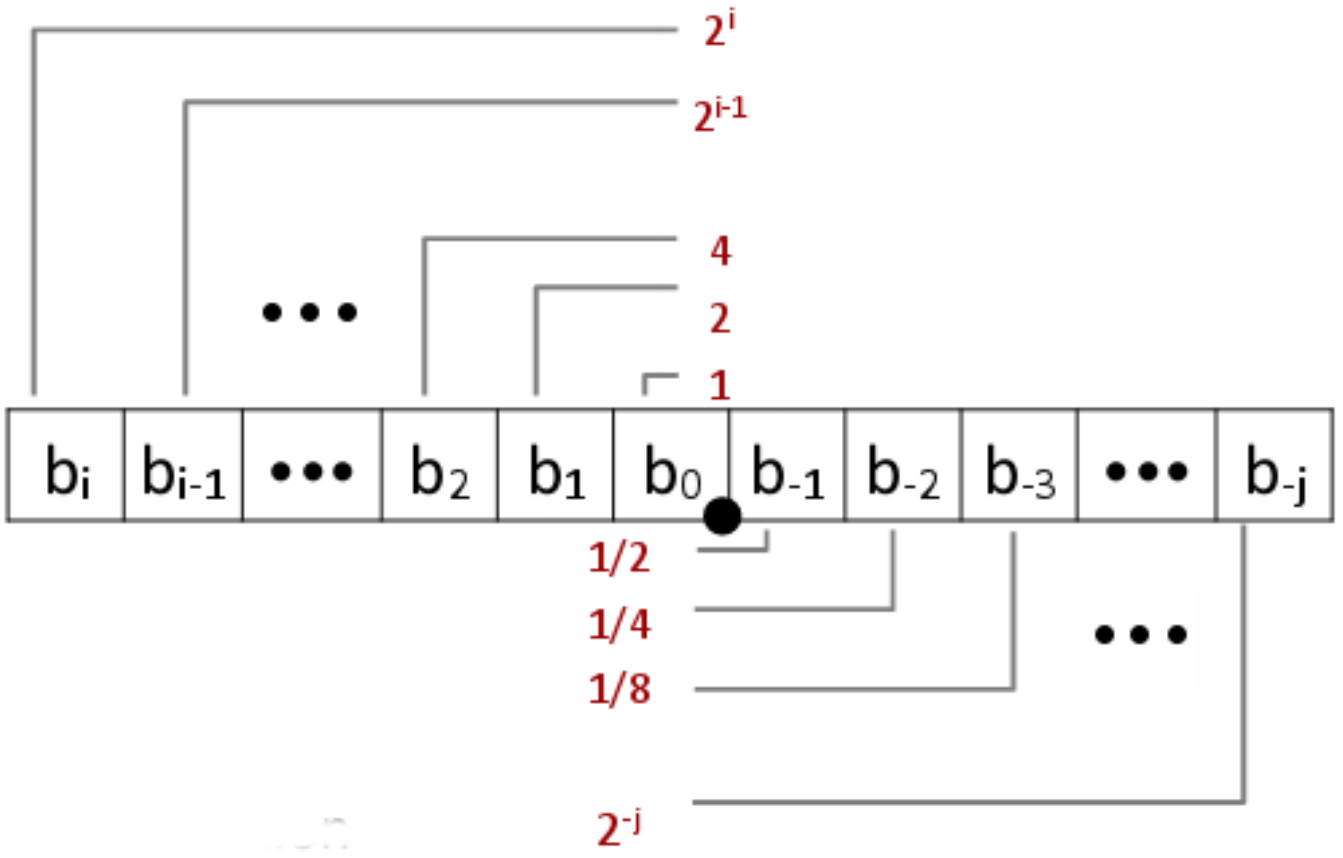
Лекция 3
Floating point

Floating Point

- Fixed point
- IEEE 754
- Операции с плавающей точкой
- Decimal
-
- http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15213-f15/www/lectures/04-float.pdf
-

Фиксированная точка (fixed point)

- Представление дробных чисел



Представление fixed point

- Фиксированное число бит для целой и дробной части
- Рассмотрим пример: 4 бита – целая часть, 4 бита – дробная часть
  - $1 \rightarrow 00010000_2$ (первые 4 бита (старшие) – целая часть, младшие 4 бита - дробная)
  - $2.5 \rightarrow 00101000_2$
  - $5.6875 \rightarrow 01011011_2$

Преобразование из десятичной записи

- Не всегда преобразование может быть выполнено точно
  - 10 = 2 * 5
  - 1/5 (0.2) – бесконечная периодичная двоичная дробь: 0.00110011[0011]..
  - $00000011_2 \rightarrow 0.1875$: ошибка = 0.0125
  - 0.1_{10} = 0.00110011[0011]..
  - $00000010_2 \rightarrow 0.125$: ошибка 0.025
  - $00000001_2 \rightarrow 0.0625$: ошибка 0.0375 – хуже чем 0.025
  - $00000001_2 \rightarrow 0.0625$ – вес младшего разряда, ошибка преобразования не превышает половины веса младшего разряда (0.03125)

Операции с фиксированной точкой

- Сложение, вычитание – как целые числа
- Умножение:
  - Умножаем как целые числа, получаем 16-битный результат
  - 0010.0110 * 0100.0010 = 1001.11001100 округляем до 1001.1101
  - Точный результат: 9.796875, округленный: 9.8125, ошибка: .015625

Деление с фиксированой точкой

- 0100.0010 / 0010.0110
  - Деление как целые даст только целую часть
  - Дополняем справа 8 нулями, получаем 16-битное число 0100001000000000_2 (16896)
  - Делим как целое: 16896 / 38 = 444 = 110111100_2
  - Ставим точку на свое место и округляем 110111100_2 → 1.10111100_2 → 1.1100_2 = 1.75
  - Точные вычисления: 4.125 / 2.375 = 1.73684210…
  - Ошибка: 0.01315789...

Округление (rounding)

Значение	1.40	1.60	1.50	2.50	-1.50
К нулю (towards 0)	1	1	1	2	-1
Вниз (−∞)	1	1	1	2	-2
Вверх (+∞)	2	2	2	3	-1
К ближайшему целому вверх	1	2	2	3	-1
Ближайшее четное (умолчанию)	1	2	2	2	-2

Округление к ближайшему четному

- Статистически несмещенное (прочие способы округления статистически смещены)
  - При суммировании накапливается систематическая ошибка
- При применении к другим десятичным/битовым позициям:
  - Когда ровно между двумя возможными значениями округляем к четной последней цифре:

7.8949999 7.89(Less than half way)
7.8950001 7.90(Greater than half way)
7.8950000 7.90(Half way—round up)
7.8850000 7.88(Half way—round down)

Округление в fixed point

- Четное – младший значащий бит = 0
- “Half-Way” - биты справа от позиции округления равны 100000…
- Примеры (два знака после “.”):
  - $2.09375 = 10.00011_2 \rightarrow 10.00 = 2$ - down
  - $2.1875 = 10.00110_2 \rightarrow 10.01 = 2.25$ – up
  - $2.875 = 10.11100_2 \rightarrow 11.00 = 3$ – up
  - $2.625 = 10.10100_2 \rightarrow 10.10 = 2.5$ - down

IEEE Floating Point

- Стандарт IEEE 754
  - 1985 год, до этого – форматы производителей обрудования
  - Поддерживается в основных ЦП
- Появление обусловлено требованиями числовых расчетов
  - Стандарт для переполнений, антипереполнений, округления
  - Трудно реализуется аппаратно
    - Gcc поддерживает -ffast-math и прочие флаги

Представление чисел

- Числовая форма:

$$(-1)^s \; M \;\; 2^E$$

  - Sign bit s определяет положительное или отрицательное число
  - Significand M мантисса определяет значение числа [1.0,2.0).
  - Exponent E порядок умножает мантиссу на степень 2

- Encoding
  - MSB s бит знака s
  - exp поле кодирует E (но не равно E)
  - frac поле кодирует M (но не равно M)

Точность

- Single precision (одиночная): 32 bits – тип float

s	exp	frac
1	8-bits	23-bits

- Double precision (двойная): 64 bits – тип double

s	exp	frac
1	11-bits	52-bits

- Extended precision (расширенная): 80 bits (Intel only)

s	exp	frac
1	15-bits	63 or 64-bits

Нормализованные значения

- exp != 0...0 && exp != 1...1 (не все нулевые и не все единичные биты)
- Порядок кодируется со смещением: E = exp – bias
  - Exp – беззнаковое значение
  - Bias = 2^{k-1}, k – число бит порядка:
    - Float: 127 (exp: 1..254, E: -126..127)
    - Double: 1023 (exp: 1..2046, E: -1022..1023)
- Мантисса кодируется со “скрытой” ведущей 1: M = $1.xxxxxx_2$
  - Xxxxxx: биты мантиссы
  - Минимальное значение: frac = 0..0 (M = 1.0)
  - Максимальное значение: frac = 1..1 (M = 2 – eps)

Пример

$v = (-1)^s M 2^E$
$E = Exp - Bias$

- Значение: float F = 15213.0
  - $15213_{10} = 11101101101101_2 = 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$
- Мантисса:
  $M = 1.1101101101101_2$

$Frac = 11011011011010000000000_2$

- Порядок:
  $E = 13$
  $Bias = 127$
  $Exp = 140 = 10001100_2$
- Результат

```
0 10001100 11011011011010000000000
```

Денормализованные значения

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = Exp - Bias$$

- Условие: exp = 0..0 (все нулевые биты)
- Порядок: E = 1 – Bias
- Мантисса кодируется со “скрытым” 0: $M = 0.xxxxx_2$
  - Xxxxx – биты мантиссы
- Случаи:
  - Exp = 0..0, frac = 0.0
    - Представление 0
    - Поддерживается знак нуля (0.0 и -0.0)
    - Значение 0.0 – все нулевые биты
  - Exp = 0..0, frac != 0..0 (ненулевые биты мантиссы)
    - Самые близкие к 0 числа
    - На равном расстоянии друг от друга

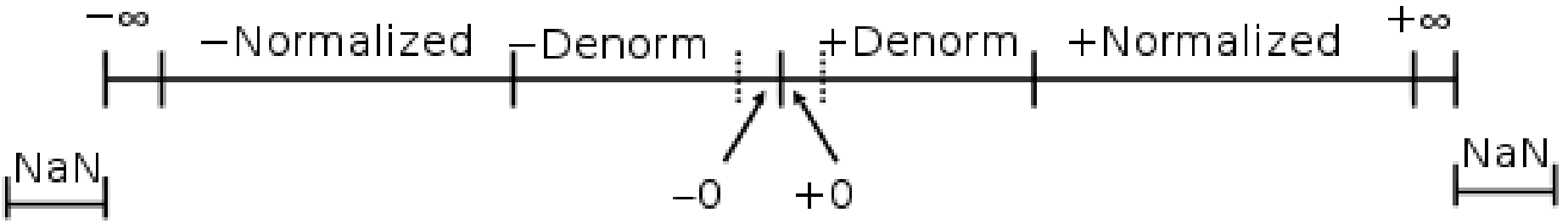
Специальные значения

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = Exp - Bias$$

- Exp = 1..1 (все единичные биты)
- Exp = 1..1, frac = 0..0 (все нулевые биты)
  - Представляет бесконечное значение
  - Для операций, результат которых переполняется
  - Сохраняет знак
  - Примеры: $1.0/0.0 = -1.0/-0.0 = +\infty$, $1.0/-0.0 = -\infty$
- Exp = 1..1, frac != 0..0 (ненулевые биты)
  - Нечисло (Not-a-number – NaN)
  - Для случаев, когда числовой результат не существует
  - Примеры: $sqrt(-1)$, $\infty - \infty$, $\infty \times 0$

Визуализация значний

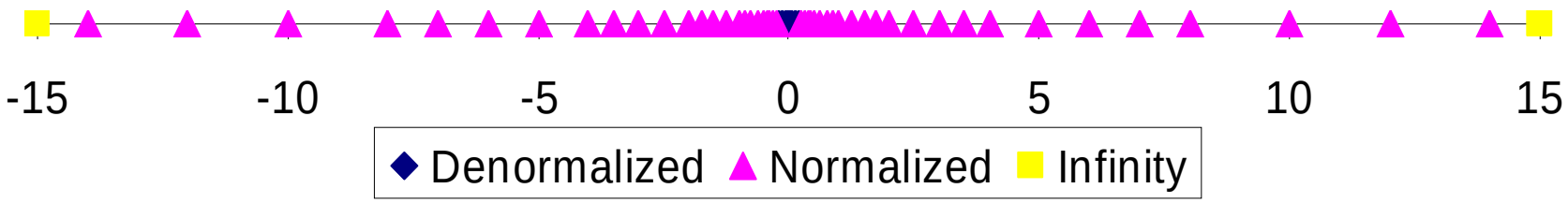
- Визуализация на числовой прямой

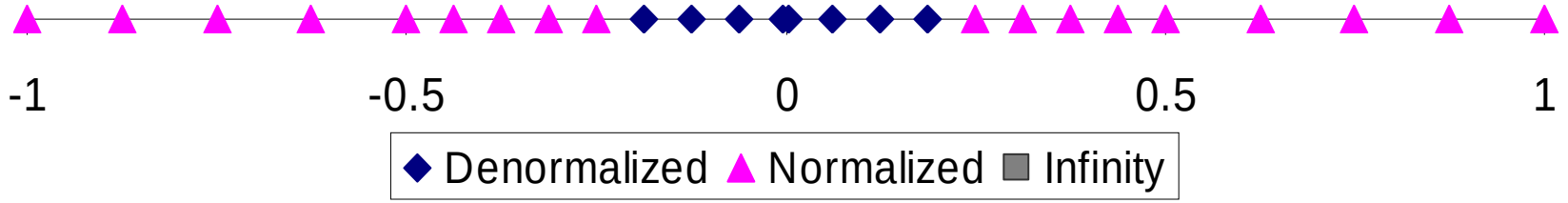


Распределение значений

- 6-битовый формат типа IEEE
-
-
- Значения “уплотняются” к нулю

s	exp	frac
1	3-bits	2-bits





Операции с плавающей точкой

- Сначала вычисляется точный результат
- Потом помещается в требуемую точность
  - Возможное переполнение (+INF или -INF) если порядок слишком велик
  - Округление чтобы поместить в мантиссу

FP Multiplication

- $(-1)^{s1}$ M1 2^{E1} x $(-1)^{s2}$ M2 2^{E2}
- Exact Result: $(-1)^{s}$ M 2^{E}
  - Sign s: s1 ^ s2
  - Significand M: M1 x M2
  - Exponent E: E1 + E2

- Fixing
  - If M ≥ 2, shift M right, increment E
  - If E out of range, overflow
  - Round M to fit frac precision

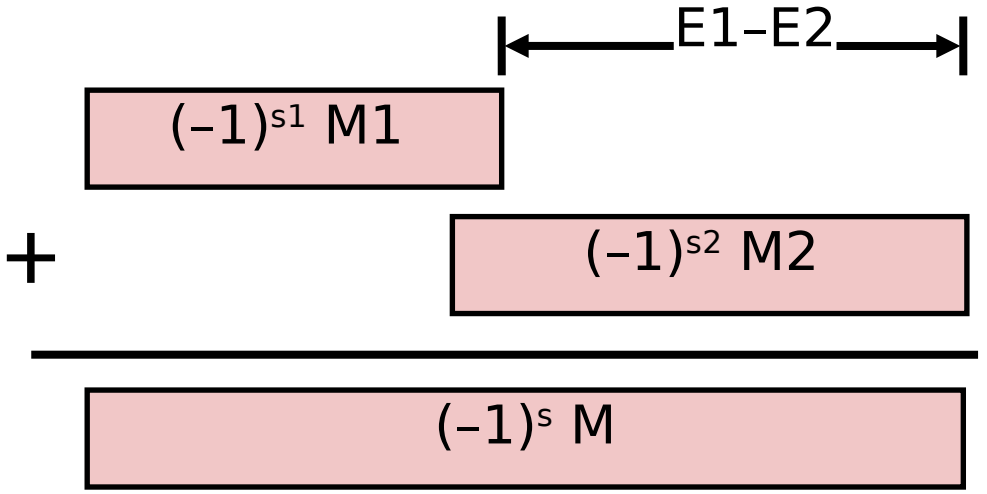
- Implementation
  - Biggest chore is multiplying significands

Floating Point Addition

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ +\ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
  - Assume E1 > E2

- Exact Result: $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - Sign s, significand M:
    - Result of signed align & add
  - Exponent E: E1

Get binary points lined up



- Fixing
  - If M ≥ 2, shift M right, increment E
  - if M < 1, shift M left k positions, decrement E by k
  - Overflow if E out of range
  - Round M to fit frac precision

Свойства операций

- Сложение неассоциативно: (a+b)+c != a+(b+c):

```
(3.14+1e10)-1e10 = 0, 3.14+(1e10-1e10) = 3.14
```

- Умножение неассоциативно:

```
(1e20*1e20)*1e-20= inf, 1e20*(1e20*1e-20)= 1e20
```

- Умножение недистрибутивно: a*(b+c) != a*b+a*c

```
1e20*(1e20-1e20)= 0.0, 1e20*1e20 – 1e20*1e20 = NaN
```

ULP

- ULP (unit in the last place) – единица на младшей позиции, если a, b – ближайшие друг к другу представимые числа, a < b, то ULP = b – a
- Если a == 1.0, то ULP – machine epsilon
- #include <float.h>
  FLT_EPSILON / DBL_EPSILON / LDBL_EPSILON

IEEE 754 Precision

- Все операции (включая алгебраические и трансцедентные: sqrt, sin/cos, atan2, exp, ln) должны давать ошибку не более ULP/2
- Известно, что x86 sin/cos дает намного большую ошибку, пользоваться процессорными инструкциями нельзя
- Glibc реализует вычисления, не используя инструкции процессора

Накопление ошибки

- Ошибка одной операции – ULP/2
- Предположим, что ошибка E – равномерно распределенная случайная величина [-ULP/2;ULP/2]
- Мат. Ожидание M[E] = 0.0
- Дисперсия: D[E] = ?

Накопление ошибки

- Дисперсия: $D[E] = 1/12$, $\sigma = 1/(2\sqrt{3}) \approx 0.289$ ULP
- Какова будет ошибка при сложении 100 чисел?

Центральная предельная теорема

- N – норм. Распр. (0, 1)

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

- То есть СКО растет пропорционально корню из числа чисел
- В случае 100 чисел, σ ≈ 2.89 ULP
- “правило 3-х сигм”: с вероятность 99.8% результат лежит на отрезке [-8.66ULP;8.66ULP]

Cancellation (потеря точности)

- При сложении двух близких чисел разных знаков в результате сложения останется мало значащих цифр:
- 123457.1*467* - 123456.65*9*
  e=5; s=1.234571
  − e=5; s=1.234567
  ---
  e=5; s=0.000004
  e=−1; s=4.000000
- e = −1; s = 4.877000 – ошибка 20%

Сложение чисел

- Чтобы минимизировать эффекты от потери точность последовательность вещественных чисел следует складывать следующим образом:
  - Положительные числа в порядке возрастания
  - Отрицательные числа в порядке убывания
  - Сложить два результата сложения, полученных выше

Математические библиотеки

- GMP (libgmp: https://gmplib.org/) – целые и рациональные числа произвольной точности
- MPFR (libmpfr: http://www.mpfr.org/) – floating-point числа произвольной точности

Финансовые вычисления

- Важно точное представление десятичных знаков после точки:
  EUR/USD: 1.10685
- Для каждой операции четко определены правила выполнения промежуточных вычислений и округлений:
  ОФЗ 26207: цена 111,4650, 8.15%, НКД 19.20
- **Обычный floating-point нельзя использовать из-за ошибки преобразования и накопления ошибки при сложении/вычитании**

Финансовые вычисления

- Использование decimal fixed point
  - Хранение в целых числах (например, int64_t) с десятичным масштабным коэф. (например, 10000)
  - Использование “длинной арифметики” (BigDecimal в Java)
- Типы decimal floating point – порядок – десятичный!
  - IEEE 754-2008
  - Тип decimal (C#)
  - Ожидается поддержка в C/C++ (<decimal/decimal>)