南京邮电大学
Nanjing University of Posts and Telecommunications

近似算法设计与分析第五章-断切

汇报人：尚元彪

引言

断切技巧是一种序贯划分方法，它在处理许多几何优化问题时有非常有趣的应用。粗略地讲，一次断切是用一条直线将给定的一个区域划分成至少两个子区域。通过一系列的断切，我们可以将给定的区域划分成若干小区域，然后求解在每一个小区域上的子问题，再将在每一个小区域上得到的解组合成给定初始区域上原问题的一个解。

在进行断切的时候，有可能会有指数多个方法将子问题的解组合成原问题的一个解。此时，我们需要使用一些技巧将子问题的组合数目减少，而同时仍然能确保得到原问题的一个很好的近似解。在这一章里，我们就来讨论断切方法及与之相关联的将子问题的解组合成原问题的解的几种技巧。

5.1 矩形划分

问题5.1（最短矩形划分）：任给一个纵横多边形R，其中存在有限多个纵横线围成的洞，将其划分为若干个长方形使得长方形的边长之和最小。

在上面的定义中，给定的纵横多边形的一个洞有可能全部或者部分地退化成一个线段或者一个点（见图5.1）。该问题是否为多项式时间可解，取决于给定的纵横多边形R是否存在洞。尽管在一般情形下，最短矩形划分问题是NP-难解的，然而在给定的纵横多变形不存在洞的情况下，该问题却可以在时间O(n^4)内求得最优解，其中n是给定的纵横多边形所含的顶点数目。

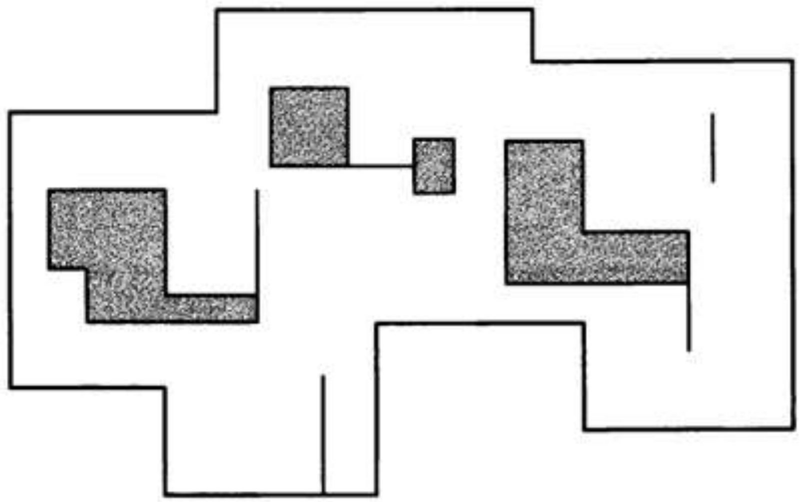

图 5.1　一个有若干个洞的纵横多边形

5.1 矩形划分

引理5.1：假设最短矩形划分问题中给定的纵横多边形R内不存在洞，则存在R的一个最优矩形划分P，其中每一个极大线段都包含边界上的一个顶点。

证明：设R存在一个最短矩形划分P。用反证法，假设P含有一个极大直线段ab，它不包含边界上的任何一个顶点。不失一般性，进一步假设ab是垂直线段。因而，它的两个端点a，b一定在两条水平线段的内部，而这两条水平线段在R的边界上或者属于划分P。假设ab的右边存在r条水平线与之接触，左边存在l条水平线与之接触。

因为无论是r≠l还是r=l，都存在使得矩形划分总线长变短的情况（见图5.2（a），5.2（b））。而我们假设划分P是最优的，这与之相悖。引理得证。

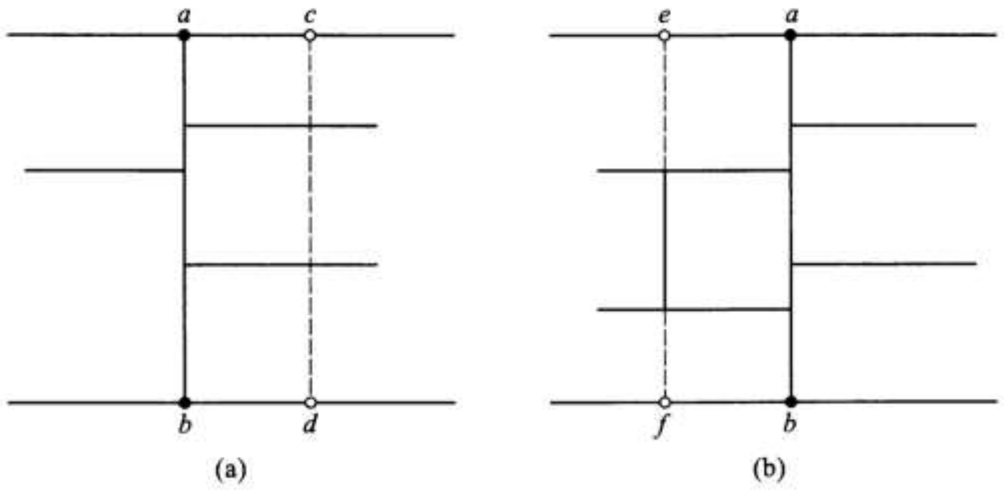

图 5.2　(a) 将线段 $\overline{ab}$ 向线段 $\overline{cd}$ 移动，可以减少划分 P 的总线长；(b) 向左移动 $\overline{ab}$，然后与线段 $\overline{ef}$ 合并，可以减少划分 P 的总线长

5.1 矩形划分

由上面的引理可以看出，在一个最优矩形划分P中，一个线段仅有 $O(n^2)$ 个可能的位置满足引理5.1中的性质。我们定义通过边界顶点的任意两条线段的交点为一个格点。由引理5.1可知，划分P中一条极大直线段的一个端点一定是边界上的一个顶点，而另外一个端点或者是边界上的一个顶点或者是一个格点（见图5.3）。因而，总共有 $O(n^2)$ 条这样的直线段。这个性质保证了在多项式时间内，用动态规划算法可以求得无洞最短矩形划分问题的一个最优解 。

当给定的纵横多边形有洞时，最短矩形划分问题就变成一个 NP-难解问题了。

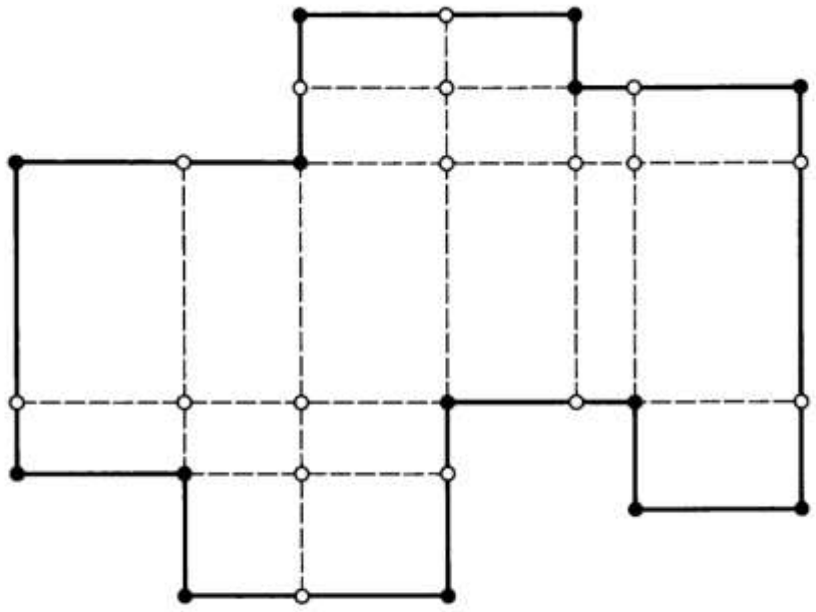

图 5.3 一个纵横多边形边界上的顶点 (暗圆点) 和格点 (白色圆点)

5.1 矩形划分

问题5.2（含点洞矩形的最短矩形划分）：任给一个包含有限多个点的长方形R，将这些点视为退化的洞，求R的最短矩形划分。该问题仍然是NP-难解的。

定理5.2：最短断切矩形划分问题的最优解是含点洞矩形的最短矩形划分问题的一个2-近似解。

证明：设R是含点洞矩形的最短矩形划分问题中给定的一个矩形，而P*是R的一个最短矩形划分。我们将以 P* 为基础构造一个断切矩形划分 P_G， 其线长最多不超过 P*线长的两倍。由此可知，最优断切矩形划分的总线长不会超过P*的总线长的两倍。

在构造P_G的过程中，我们用断切将R分割成若干个小长方形，然后递归地断切这些小长方形。我们将在这个构造过程中产生的每一个长方形称为一个窗口（对一个窗口 W，我们用 int(W) 表示W的内部区域。

在进行断切的过程中，在P_G中会产生一些不在 P*中的新边。为了估计这些新边的边长，我们用一种支付方法将 P_G\P*中的每一条新边的费用（即其边长）分摊给划分P*中的一些边。我们借助窗口W的暗点来描述这一方法。如果每一条以z为起点（但是不包括z）的垂直（或者水平）半直线段，当它向两个方向中的任一方向延展时，都会触到 P*∩int(W)中至少一个水平（或者垂直）直线段，为其所遮盖时，称窗口W中的一点z是一个关于划分 P* 和窗口W 的垂直（或者，水平）1-暗点。（特别地，窗口 W边界上的一点z不是一个1-暗点。）在进行断切的过程中，只有当一条新的水平边t的所有点都是垂直1-暗点的时候，t才会被添加进 P_G\P*，因此t 的费用都被分摊给 P*中与它平行的边。

南京邮电大学

5.1 矩形划分

更精确地说，我们针对每一个窗口W, 应用以下规则：由P*构造一个断切矩形划分 P_G, 这里最初的窗口W=R.

(1) 如果 int(W)不含有划分 P*中的任何一条边，那么不作任何操作。

(2) 如果划分 P*中存在一条贯穿整个窗口W的水平线段 s, 那么沿着线段 s 对窗口 W 实施一次断切。

(3) 如果 P*∩W 中存在一条线长至少为 h/2的垂直线段 s, 这里h是窗口 W 的高度，那么沿着线段s对窗口 W 实施一次断切。这次断切将 s延展为一个线段，其长度最多是s的长度的两倍。

(4) 如果窗口 W 至少含有划分 P*中的一条边，且不属于上面的情形 (2) 或情形(3), 那么对窗口 W 实施一次水平断切t，将 W 分割成两个相等部分。

注意，在上面的情形 (2) 中，我们并没有在 P_G\P* 中引入任何新的边，因而不会产生额外的边长。在上面的情形(3)中，在P_G\P* 中添加的新边的边长之和不会超过s的边长。我们将这条新边的边长分摊给线段 s。

5.1 矩形划分

针对情形(4)，我们首先可以断言：线段t上的每一个点都是一个垂直1-暗点。下面用反证法证明此断言。假设t上有一点z，它不是一个垂直 1-暗点，则由划分P*生成的包含z的长方形，其高度至少是h/2。这个长方形的边界或者包含P中的一条贯穿整个窗口W的水平线段，或者包含 P中一条长度不小于 h/2的垂直线段；不论出现那种情形，都与情形(4)的假定相矛盾，这就证明了我们的断言。因为线段 t 中的每一个点都是一个垂直1-暗点，所以我们可以用以下的方式将t∩(P_G\P*)中每一条新边t1的边长进行分摊：将的二分之一边长分摊给 P* 中刚刚高于t1的水平线段，而将另外的二分之一分摊给 P* 中刚刚低于t1的水平线段（见图5.4）。

在上述的支付策略中，最多分给划分P*中的每一条垂直线段一份新增边长，且其分得的边长小于或者等于其自己的边长。此外，最多分给划分 P*中的每一条水平线段两份新增边长，且其分得的每一份边长小于或者等于二分之一其自身的边长。为了说明这一点，我们注意到，如果一条水平线段s接受了其下面新线段t1的分摊，那么t1便会成为新窗口的边界，且在t1和s之间的点在含有s的新窗口中都不是1-暗点。由此可知，线段s不会再从位于其下方的任意断切中接受分摊。接受了上方新线段的分摊后同理。所以P*中的水平线段最

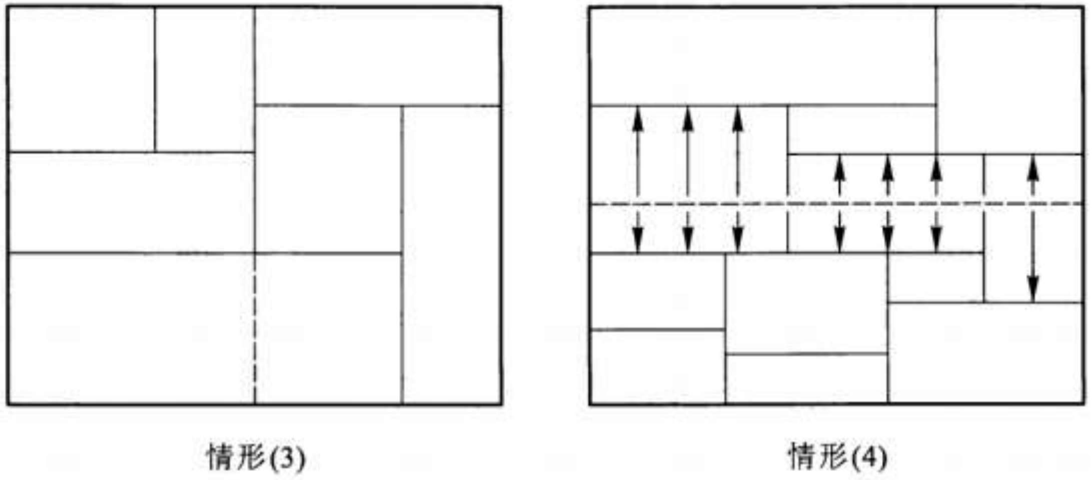

图 5.4　根据给定的划分构造一个断切划分 (“箭头” 显示新增的边长是如何分摊的)

5.1 矩形划分

上述分析表明，由断切分得的所有边长，以及在 $P_G \backslash P^*$ 中添加的边的总长度不会超过 P^* 的总边长。最后，我们注意到在有限次断切后，P_G 会包含了P^*中所有的线段。这说明了P_G的确是一个断切矩形划分，定理得证。

因为我们用动态规划求解该问题。亦即，可以通过一次断切，将纵横多边形R划分成两个或更多个小纵横多边形，然后再递归地划分这些新生成的小纵横多边形。在这样一个递归算法的每一步中，有$O(n)$ 条可选的断切线。此外，因为每一个子问题的边界都含有一个给定的多边形的顶点，所以总共只能有$O(n^4)$ 个子问题。因此，可以用动态规划方法在 $O(n^5)$时间内求出最短断切矩形划分问题的最优解。

由于最优断切矩形划分Q可以在$O(n^5)$时间内求得，且其总边长不会超过划分P_G的总边长，故我们可得下面的结论:

推论 5.3： 存在求解含点洞矩形的最短矩形划分问题的多项式时间 2-近似算法。

5.2 1-断切

定理5.2 的证明中的主要思想就是，在处理情形(4)时，选一条由 1-暗点组成的切割线。用这个思想处理含点洞矩形的特殊情况是有效的，然而它并不能直接用来处理一般情形。实际上，当一个窗口W 含有非退化的洞的时候，可能不存在这样的切割线。

在本节中，我们要改进这一想法使得它可以用来处理一般情形。新的想法就是允许使用部分切割，这些切割只采用划分中切割的部分线段。借助于一个关于1-暗点的技术性引理，我们可以证明总是存在一个恰当的部分切割使得其长度可以平均地分配给两侧最优解的线段。这样定理5.2 就可以推广到一般情形了。

5.2 1-断切

我们首先引入 1-断切的概念，它是最简单的一种部分切割。考虑最小矩形划分问题实例中的一个纵横多边形R。我们可以假定R是一个矩形，不然的话，我们可以找到一个长方形包含R，并可将这个长方形与R之间的区域视为洞。我们现用 H_0表示R中洞的集合，并记$R_0=R\backslash H_0$。在R的一个断切矩形划分P中，我们用一条直线L将一个窗口 W 切分成两个小的窗口，并将$(L\cap W)\cap R_0$ 中的线段添加进划分中。在一个1-断切矩形划分中，我们仍然用L将窗口W 划分为两个小窗口，但是我们不用划分P中的整个线段 $L\cap W$；而是选择$L\cap W$中的一部分s，并将在$s\cap R_0$中的线段添加进划分P中。我们称这样的一个切割为1-断切（更准确的表述是，称线段s为一个 1-断切。）图5.5给出了一个1-断切的例子。

经过一次 1-断切s，窗口W变成了两个小窗口，而线段 $L\cap W$ 就变成了新窗口的共同边界。这条边包含一个 1-断切线段s和在s两侧的两条（也可能退化）直线段。我们称 1-断切线段s为新窗口的一条闭边界线段、而称其他两条线段为开边界线段（见图5.5 其中实线表示闭边界线段，而虚线表示开边界线段）。在构造矩形划分的过程中，开边界线段仅是临时的边界，它们仅允许在递归的划分中使用，并不包含在最后的划分中。

因此，在每一次迭代过程中，用1-断切构造的一个划分Pw需满足以下边界条件：（1）划分Pw不包含开边界线段的任何一个内点。（2）划分Pw一定包含闭边界线段的端点，除非这个端点恰是窗口W的一个角。

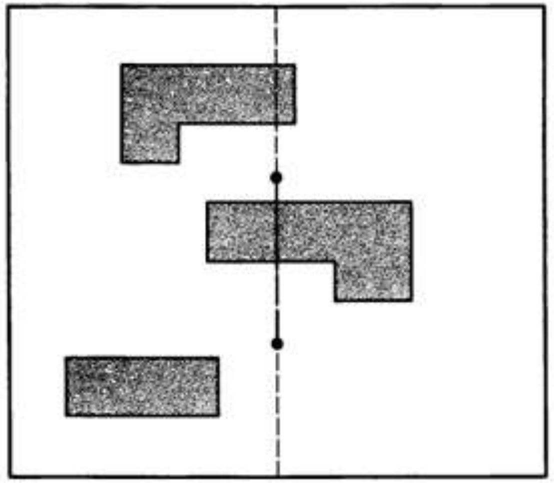

图 5.5　一次 1-断切将一个窗口划分成拥有闭和开边界线段的两部分

5.2 1-断切

引理 5.4 (米契尔引理) 假设 P 是**最短矩形划分问题**实例 R 的一个矩形划分, W 是 R 的一个窗口; 另设 H 和 V 分别是关于划分 P 和窗口 W 的所有水平和垂直 1-暗点的集合, 则或者存在一条水平切割线 L_H, 它不包含 P 的任何直线且满足

$$\mathrm{length}(L_H \cap H) \leqslant \mathrm{length}(L_H \cap V),$$

或者存在一条垂直切割线 L_V, 它不包含 P 的任何直线且满足

$$\mathrm{length}(L_V \cap V) \leqslant \mathrm{length}(L_V \cap H)。$$

5.2 1-断切

定理5.5 最短1-断切矩形划分是最短矩形划分的一个 2-近似解。

证明：假设 P^* 是实例R（可能带洞）的一个最短矩形划分。我们将以 P^*为基础，通过一系列 1-断切构造一个1-断切矩形划分P_1，使得$P_1\backslash P^*$中的线段长度之和不超过 P^* 中线段长度之和。在每一次迭代中，都存在一个满足边界条件的窗口W，我们需要找到一个1-断切将这个窗口切分成两个小的窗口。我们依据以下规则选取 1-断切:

(1) 若 $P^* \cap int(W) = \emptyset$，则不进行任何操作。

(2) 若 $P^*\cap int(W)$ 含有直线段 s，它实际上是关于 P^*的一个 1-断切 （这里L是沿着s的一条切割线），则实施一次 1-断切 s。（这样，直线 $L\cap W$ 变成了两个新窗口的一条边界，线段s是闭边界，而$(L\cap W)\backslash s$ 中的线段是开边界。）此时，我们不向划分 P_1中添加任何新的线段。

(3)若 $P^*\cap int(W) \neq \emptyset$且它不含有关于$P^*$的一个 1-断切,则集合 H 或集合 V 的面积必然大于零，此处 H（和V) 为关于划分 P^*及窗口W的水平（和垂直）1-暗点的集合。因此，如我们前面讨论的那样，我们可以依据米契尔引理选定一个1-断切S。更加具体地说，就是选取满足米契尔引理中性质的切割线L_H（或者 Lv），并令 s 为$L_H\cap int(W)$（或者 $Lv\cap int(W)$)中这样的极大线段，它的两个端点在 $P^*\cap int(W)$中的垂直（或者水平）线段上。我们实施一次 1-断切 s，并将$s\cap R_0$ 中所有的线段添加进P_1中。

我们注意到，在以上构造P_1的过程中，每实施一次 1-断切，新窗口中所含 P^*的线段数必定随之减少。因此，在有限次 1-断切后，所有窗口都满足情形(1)。也就是说，$P^*\subseteq P$。另外，一个1-断切划分的端点一定在 P^*中， $P_1\backslash P^*$中的每一条新线段的两个端点或者在 P^*中，或者在R的边界上（包括洞的边界）。因此， $P_1\backslash P^*$中的每一条线段一定会将最优划分 P^*生成的一个长方形划分为两个小的长方形。由此可知， P_1确是实例R_0的一个 1-断切矩形划分。

南京邮电大学

5.2 1-断切

下面我们估算P_1\P*中新增线段的长度之和。在上面的情形(2)中，我们并没有向P_1中添加新的线段。对于上面的情形(3)，假定我们沿着窗口W的直线Lv实施一次垂直1-断切s。从前面的分析可知，$s \cap R_0$ 中线段的长度之和不会超过length(Lv∩H)。我们将这些新线段的长度的二分之一分摊给 P*∩int(W) 中最接近Lv的右边的垂直线段，而将另外二分之一分摊给 P* ∩int(W)中最接近Lv的左边的垂直线段（见图5.6）。与定理5.2的证明相似，我们知道 P*中的每一条线段最多被分摊新增长度两次，且每一次所摊得的新增长度最多不超过其自身长度的二分之一。因此，P_1\P* 中新增加线段的长度之和不会超过 P* 中线段的长度之和。定理证毕。

推论5.6 存在求解最短矩形划分问题的多项式时间2-近似算法。

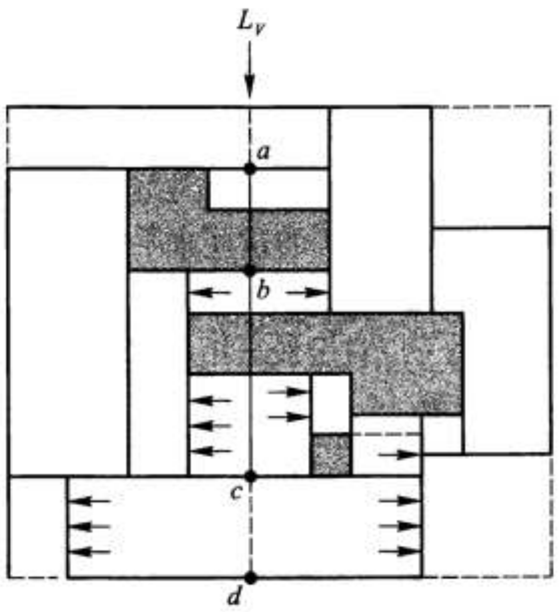

图 5.6　1-断切 $\overline{ac}$ 不含洞中的点，其新增的长度分摊给 $\overline{bd}$ (也不含洞中的点) 两侧的垂直线段上

5.3 m-断切

我们可以将 1-断切的概念拓展到m-断切，其中m 是大于1的任意正整数。对于任意一个窗口W，沿着直线L的一个m-断切是L∩int(W)中的一条直线段 s，再加上 L∩int(W) 中最多2(m-1)个点，使得s的每一侧最多有m-1个点。（注意，这也包括线段s退化为一个点的情形。因此，最多有 2m-1个点的任意一个切割都可视为一个m-断切。）在实施了一次m-断切以后，一个窗口就会被切分成两个小的新窗口。这两个新窗口的共同边界包含闭边界的一段直线，还包含在闭边界线段的每一侧至多m 个开边界的线段，它们被m-断切中的点所分隔开。与 1-断切中的情形一样，每一个新窗口都定义了最短m-断切矩形划分问题的一个子问题：

给定一个带洞的窗口W，在它的每一侧的边界上有至多m个开边界线段，用m-断切构造一个满足如下边界条件的划分 Pw:

(1) 划分 Pw 不包含开边界线段上的任何一个内点。

(2) 划分 Pw 包含开和闭边界线段的端点，除非该端点是窗口W的角点。

5.3 m-断切

我们称一个矩形划分是一个m-断切矩形划分，如果它可以由一系列的m-断切实现。最短m-断切矩形划分问题的最优解可以在时间$O(n^{10m+5})$ 内用动态规划算法求得。要验证这一点，我们注意到，在动态规划算法的每一步迭代过程中，有$O(n^{2m+1})$ 种可能的m-断切：有O(n)种可能的切割线，对每一条切割线，2m 个开和闭边界线段的端点有$O(n^{2m})$ 种可能的位置。此外，一共有$O(n^{8m+4})$ 个可能的子问题：有$O(n^4)$个可能的窗口，每一个窗口有$O(n^{8m})$ 个可能的边界条件。因此， 算法运行的总时间为 $O(n^{10m+5})$。

为了分析用m-断切作为最短矩阵划分的近似程度，我们需要将1-暗点的概念推广到m>1的m-暗点的概念。假设 R是最短矩形划分的一个实例（亦即一个带洞的长方形），P是实例R的一个划分，而W 是划分R的一个窗口。另设z是窗口W中的一个点， 如果每一条以z为起点的但是不包含z的水平（或者垂直）射线向任意一个方向延展都会碰到 P∩int(W) 中至少m个垂直（或者水平） 线段，那么我们称z是一个关于窗口W 和划分P的水平（或者垂直）m-暗点。

图5.7给出了m-断切的一个例子，其中短的水平线段表示划分Pw中与开和闭边界线段的端点相触的直线段。

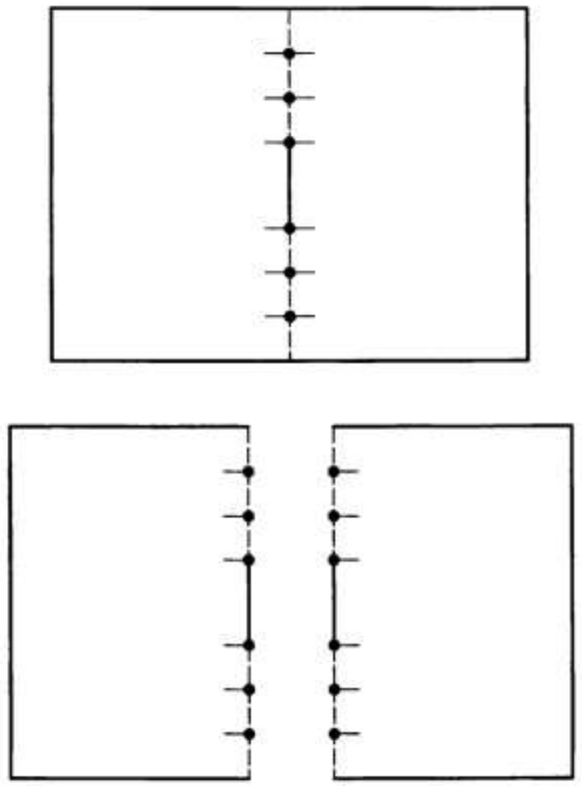

图 5.7 一次 m-断切在每一个子问题的边界上产生 $2m$ 个开线段

5.3 m-断切

对于m-断切引理5.4（米契尔引理）同样适用。因此有引理5.7。

引理 5.7 假设P是最短矩阵划分问题实例R的一个矩阵划分，W是R的一个窗口。另设m> 1, 且 Hm（和V）是关于划分P和窗口W的水平（和垂直）m-暗点的集合，则或者存在一条水平切割线L_H，它不含有P的任何线段，且满足length(L_H∩Hm) ≤ length(L_H∩Vm)，或者存在一条垂直切割线Lv，它不含有P的任何线段，且满足length(Lv∩Vm)≤length(Lv∩Hm)。

定理5.8 对于任意正整数m>1, 最短m-断切矩形划分是最短矩形划分问题的一个(1+1/m)-近似解。

证明：假设R是最短矩形划分问题的一个实例，P是它的一个矩形划分。另设 H_0是R 中洞里的点的集合，且记 R_0= R\H_0。我们下面构造这样一个 m-断切矩形划分Pm，它的长度不超过(1+1/m)length(P)。

构造方法与证明定理 5.5 中所使用过的构造方法类似：在每一次与窗口 W 相关的迭代中，如果 P∩int(W)含有一个m-断切，那么我们就采用这个切割；否则，我们根据引理 5.7选择一条切割线。也就是说，L 中有一些线段，它们的总长度至少是length(s∩R_0)，且满足以下性质：在这些线段的每一侧，至少存在m层P中的垂直线段。因此，我们可以将s∩R_0的长度分摊给这些P中的垂直线段，使得每一条线段分得的长度最多不超过其自身长度的1/(2m)。另外，P中的一条边最多被分摊两次：当一条边t被线段s 通过切割线L分摊一次长度以后，线段 L∩W 就变成了两个新窗口的一条边界边。在含有 t 的那个新窗口中，在t和L之间最多存在m-1层P的垂直边，由此可知，L和t 之间的所有点在新窗口中均非水平m-暗点，且t不会再被t与L之间的切割分摊线长了。因而，m-断切的总线长不会超过 (1+1/m)length(P)。定理证毕。

推论5.9 对任意实数ε>0，存在求解最短矩形划分问题的一个(1+ε)-近似算法，其时间复杂度为$n^{O(1/ε)}$。

南京邮电大学

5.3 m-断切

作为另外一个应用断切技巧的例子，我们考虑如何用m-断切技巧设计纵横斯坦纳树问题的近似解。假设Q 是覆盖纵横平面上所有给定n个点的最小的长方形。我们将给出m-断切纵横斯坦纳树的概念，并证明最短的m-断切纵横斯坦纳树是纵横斯坦纳树问题的(1+1/m)-近似解。

首先，我们定义切割线的位置。对于给定端点的一个集合A，哈纳网格是所有通过A中的某个点的水平线和垂直线的集合。根据哈纳定理，对于任意一个给定的结点集合 A，存在一棵最短的纵横斯坦纳树 T*，其中所有的边都在哈纳网格上。由此可知，我们可以选择不在哈纳网格上的切割线，从而避免出现断切线与树T*上的边重合的情形。另外，为了限制可能的切割线的数目，我们用$\mathcal{L}$表示哈纳网格中所有相邻的两条线的中线的集合 （见图5.8）， 并要求每一个m-断切必须用$\mathcal{L}$ 中的一条线L作为切割线。

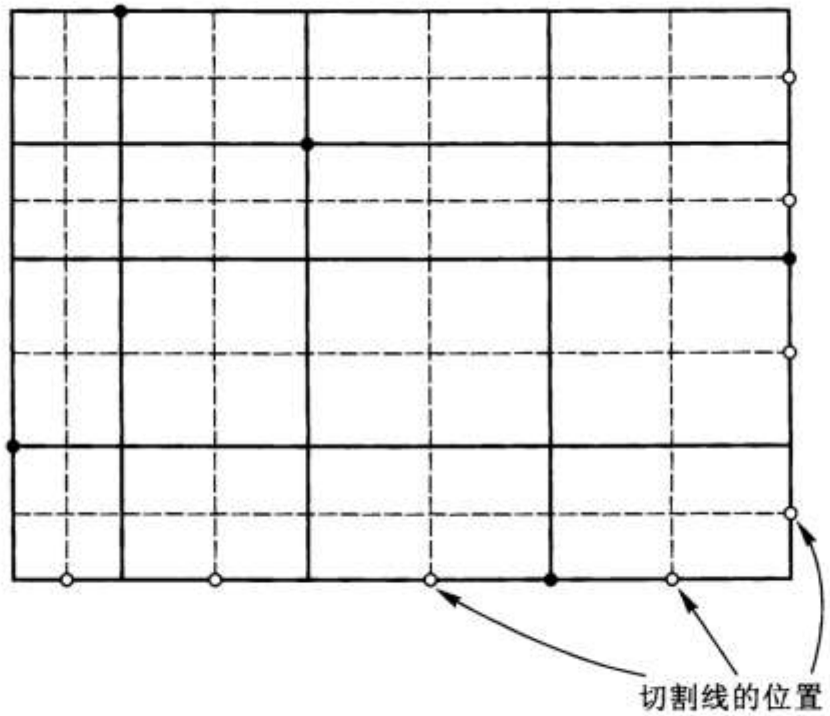

图 5.8　哈纳网格 (实线) 和 $\mathcal{L}$ 中的切割线 (虚线)

5.3 m-断切

假定W是Q的一个窗口，则W的一个m-断切就是沿着直线L∈ $\mathcal{L}$的一个断切，它由一条线段s和其每一侧至多m-1个点构成。此外，所有的切割点和切割线段的端点都要求在哈纳网格上。在每一次断切之后，窗口W 被分割成两个小窗口，切割线段s是斯坦纳树的一部分，且L∩W 成为了两个新的小窗口的一条共有边界线。在最短矩形划分问题中，新窗口的边界条件是关于最多2m-2个切割点和切割线s的。而在这里，边界条件是关于最多 2m-2个切割点和线段s的某一个端点的条件。（我们称这些切割点为交叉点。）

更准确地说，每一个m-断切生成两个子窗口，且对每一个子窗口，我们需要求解如下形式的一个子问题：

(1) 给定一个窗口W，及最多4条闭边界线段和W的边界上最多8m-4个交叉点的集合 S。窗口W中的所有结点都在W的内部，而所有的交叉点都在哈纳网格上。

(2) 给定集合S的一个划分。

(3)问题的目标是求一片纵横斯坦纳森林 F，使其包含 W 的闭边界线段，且满足以下性质：

(a) S的每一部分中的所有交叉点都通过 F相连；

(b)位于S中不同部分的两个点不能通过 F相连；

(c) F中的任意两条线段都不相交（除非是在一个斯坦纳点处）；

(d) 斯坦纳森林 F不包含W的边界上的任何点除非它在集合 S中；

(e) 如果集合 S是非空的，那么窗口W中的每一个结点通过F与至少一个交叉点相连；否则，所有给定的结点都通过F彼此相连。

注意，如果不存在直线 L∈ $\mathcal{L}$穿过窗口 W的内部，那么我们无法在 W 中实施m-断切。我们称这样的窗口为极小窗口。每一个极小窗口 W 最多含有一个给定结点，且W的每一侧最多含有一个交叉点，这些点都在哈纳网格上。

5.3 m-断切

米契尔引理在此依旧适用，有引理5.10。

引理 5.10 设 A 为给定结点的集合, T 是 A 的一棵, 纵横斯坦纳树。另设 Q 是覆盖 A 中所有点的最小长方形, 而 W 是 Q 中的一个窗口, 则或者存在满足下面不等式的一条水平切割线 $L_H \in \mathcal{L}$,

$$\text{length}(L_H \cap H_m) \leqslant \text{length}(L_H \cap V_m),$$

或者存在满足下面不等式的一条垂直切割线 $L_V \in \mathcal{L}$,

$$\text{length}(L_V \cap V_m) \leqslant \text{length}(L_V \cap H_m),$$

其中 $H_m(V_m)$ 是关于 T 和 W 的所有水平 (垂直) m-暗点的集合。

5.3 m-断切

我们下面通过一系列m-断切来构造树Tm。在构造的每一步迭代过程中，我们有一个带若干边界条件的窗口 W （亦即在W的每一侧最多含有 2m-1个交叉点的集合 S,所有的交叉点都在哈纳网格上；及S的一个划分）和一棵正在构造中的树Tm∩W（它含有最多四个闭边界线段），该树满足以下条件：

(i)在S的同一部分内的所有交叉点通过 (T∪Tm)∩W 相连（注意，它包含了W 的闭边界线段）；

(ii) 位于 S中不同部分的两个交叉点无法通过(T∪Tm)∩W 相连；

(iii) W中所有给定的结点通过(T∪Tm)∩W 相连，并且如果 S 是一个非空集合，那么它们至少与一个交叉点相连。

在构造初始时，我们令 Tm = Ø。因为窗口Q没有边界条件，Tm 显然满足上述条件(i)~(iii)。对于给定的一个窗口 W，我们依据以下原则确定一个m-断切:

(1) 若W 是极小窗口，则不做任何操作。

(2)若 W 不是极小窗口，而且存在一条与T的交点不多于2m-1个的切割线L则我们沿着L切割W，并将这些交点作为交叉点。（此时，不向 Tm 中添加任何线段。）我们再根据 $(T\cup Tm)\cap W_1$ 将每一个新生的小窗口W_1的交叉点划分到不同部分中，亦即如果两个交叉点通过$(T\cup Tm)\cap W_1$的边相连，那么将它们放到同一个部分中。注意，因为T∪Tm的相连关系在 W_1内有可能会改变，所以我们可能需要在小窗口W_1的其他三个边界上重复这一划分步骤。图5.9描述了这种可能性：在最初的窗口W中，交叉点x和y在同一部分。在沿着切割线L进行了一次m-断切以后，它们分属右边小窗口的两个不同部分（右边小窗口的新的划分现在是{(x,u), (y, v)}）。尽管u和v属于右边小窗口的两个不同部分中，但是当我们考虑左边小窗口时，它们却是属于同一部分中的。

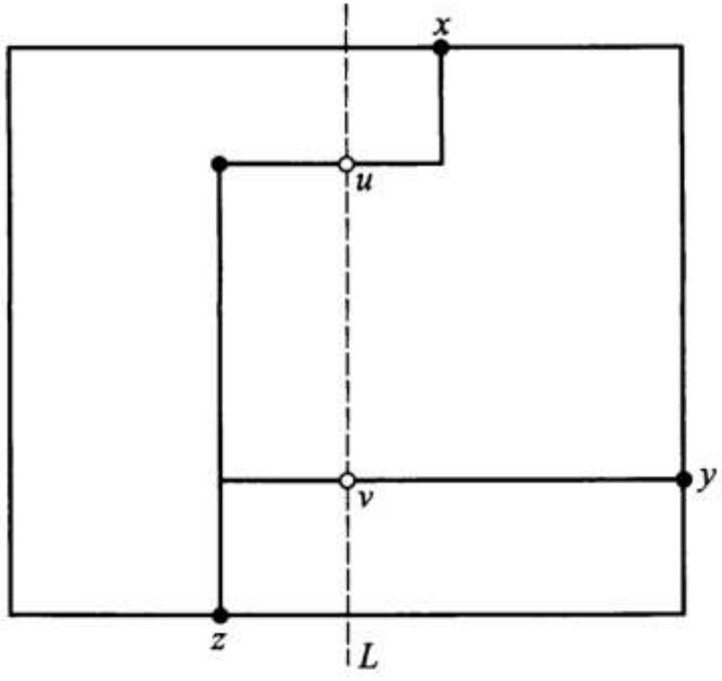

图 5.9 交叉点的划分的改变

5.3 m-断切

(3) 否则集合 Hm或Vm的面积必定大于零，此处， Hm（或 Vm) 指在W 中的水平（或垂直）m-暗点组成的集合。之后我们选取一条满足引理5.10 中性质的切割线L。不失一般性，可以假定L是一条垂直线。我们沿着切割线L对窗口 W 做一次m-断切。这次断切包括了含有L∩int(W) 上全部垂直m-暗点的线段 s和 s 每一侧的T中的m-1个点。随后我们将切割线段s添加进Tm 中。对于由此断切产生的每一个子窗口，我们将该断切的2m-2个点增添为交叉点，并选取s的一个端点作为一个附加的交叉点（见图5.10）。针对每一个新的子窗口W_1，我们再一次根据 (T∪Tm)∩W_1，将它的交叉点划分为若干部分，使得两个交叉点在同一部分当且仅当它们由(T∪Tm)∩W_1中的边或刚刚添加进 Tm 的新边s相连。

最后，我们来验证 Tm的线段总长度不超过T的线段总长度的(1+1/m)倍。在情形(3) 中，我们选取的每一条切割线工都满足引理 5.10中的性质。不失一般性，还是假定 L是一条垂直线段，则 L∩W 中水平 m-暗点构成的线段的长度之和至少是线段s的长度length(s)。因此，切割线段s的长度可以均匀地分摊给 T∩W 中L两侧最接近的 2m 层垂直线段。采用定理5.8证明中的同样论证方法，我们可以知道，T中的每一条边被分摊了最多两次长度，而每一次摊得的长度最多是其自身长度的 1/(2m) 倍。因此， Tm\T 中所有线段长度之和不超过T的长度的1/m倍。

这样我们就证明了以下结果：

定理 5.11 对于任意一个自然数m>0, 最小m-断切纵横斯坦纳树是纵横斯坦纳最小树的一个(1+1/m)-近似解。

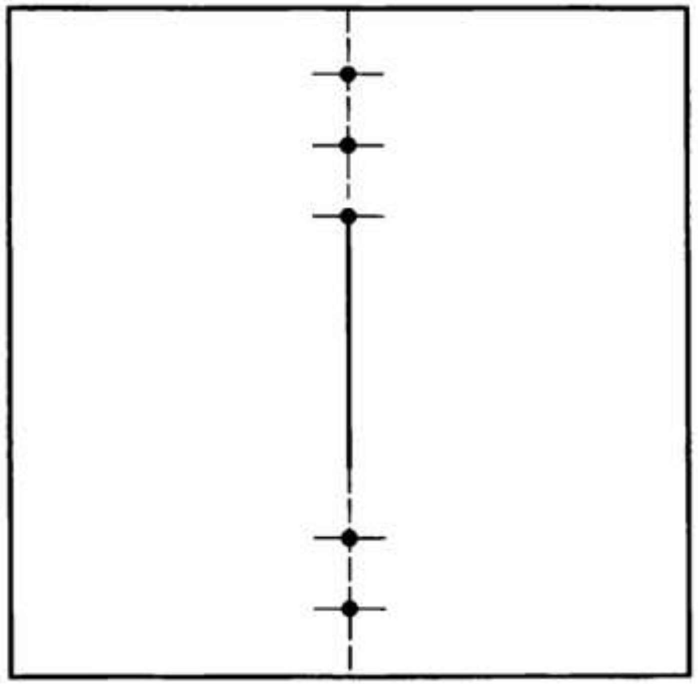

图 5.10 新产生的交叉点

5.3 m-断切

其次，我们估算一下，在动态规划算法运行中一共会产生多少个子窗口?如前面定义的那样，每一个子问题是由一个有四条边界线的窗口、最多8m-4个边界上的交叉点以及这些交叉点的划分所确定的。因为一个窗口的所有边界都在$\mathcal{L}$ 中的线段上，且所有的交叉点都在哈纳网格上，所以有$O(n^4)$ 个可能的窗口，而对每一个窗口，都有$0(n^{8m-4})$ 个可能的交叉点集合 S。对每一个含有 8m-4个交叉点的集合S，有$2^{O(m)}$ 种不同的方式划分 S中的交叉点。我们将在引理 5.12 中证明，能够生成满足边界条件(a)~(d)的可行解的S 的划分数目为$2^{O(m)}$。因此，在动态规划算法运行中所产生的子问题的数目是$O(n^4 \times n^{8m-4} \times 2^{O(m)})= n^{O(m)}$。而且，引理5.12 还说明我们实际上可以在时间$2^{O(m)}$内生成S的所有可行划分。由此可知，动态规划算法的运行时间为$n^{O(m)} \times 2^{O(m)}= n^{O(m)}$。

南京邮电大学

5.3 m-断切

引理 5.12 设W 是一个窗口，S是W的边界上交叉点的集合，则能够生成满足边界条件(a)~(d)的S的划分的个数为$2^{O(m)}$。

证明：首先，我们将W 的边界在一个点断开，并将其展开为一条直线。这样问题就转化为如下问题：设S为含有k≤8m-4个位于同一水平线上的点的集合；又称一个 S的划分是可行的如果存在此水平线上方满足条件(a)~(d) 的森林，依此划分将这些点相连；计算S的可行划分的个数 N_k。将这条线上的k个点从左至右记为p_l, p_2 ,…,p_k。当点p_1不与其他任何点相连时，所需要考虑的划分个数为 N_{k-1}。当点p_1与其他至少一个点相连时，令p_i为p_2至 p_k中与p_1相连的最左面的点，则所需要考虑的划分个数为 $N_{i-2}N_{k-i+1}$ （我们定义 N_0=1)。由此可知：

$$N_k = N_{k-1} + \sum_{i=2}^{k} N_{i-2}N_{k-i+1} = \sum_{i=0}^{k-1} N_i N_{k-1-i}。 \tag{5.1}$$

设 $f(x)$ 为 N_k 的生成函数, 亦即 $f(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} N_k x^k$, 则可得

$$f(x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} N_i N_{k-i} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} N_{k+1} x^k,$$

由此可得 $xf(x)^2 = f(x) - 1$, 因而有

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}。$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad 且 \quad \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty,$$

所以有

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = -\sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} \frac{(-4x)^k}{2x},$$

亦即 $f(x)$ 是著名的卡特兰数的生成函数, 即有

$$\begin{aligned} N_k &= -\binom{1/2}{k+1}\frac{(-4)^{k+1}}{2} \\ &= \frac{(1/2)(1-1/2)(2-1/2)\cdots(k-1/2)}{(k+1)!} \cdot 2^{2k+1} = 2^{O(k)}。\end{aligned}$$

此外, 我们在上面通过一个简单的论证方法, 得到了递归关系式 (5.1), 它可以用来设计一个生成 S 的所有可行划分的递归算法。引理证毕。 □

5.3 m-断切

推论 5.13 对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个求解**纵横斯坦纳树问题**的 $(1+\varepsilon)$-近似算法, 其运行时间为 $n^{O(1/\varepsilon)}$。

南京邮电大学先进网络与经济实验室