Calcolo Numerico - Esercitazione 3

Laurea Triennale in Informatica a.a. 2023-2024

1 Problema minimi quadrati

Data una matrice A di dimensioni $m \times n$ con $m \geq n$ed un vettore y di m componenti, il problema dei minimi quadrati è il seguente:

$$\alpha^* = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} ||A\alpha - y||_2^2$$

Questo problema di minimo può essere risolto in due modi:

- **Metodo delle equazioni normali.** se A ha rango massimo il problema di minimo può essere riscritto in maniera equivalente come segue:

  $$A^T A\alpha = A^T y$$

  Questo sistema si può risolvere utilizzando la fattorizzazione LU o di Cholesky (dato che la matrice $A^T A$ è simmetrica).

- **SVD.** se A non ha rango massimo il problema è sottodeterminato quindi avere più di una soluzione. In questo casoi si considera la decomposizione SVD della matrice $A = USV^T$ dove $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici ortogonali e $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonale. e da questa decomposizione si può calcolare esplicitemente la soluzione di minima norma del problema di minimi quadrati come segue:

  $$\alpha = \sum_{i=0}^{r} \frac{(u_i^T y)v_i}{s_i},$$

Exercise 1.1. Assegnata una matrice A di numeri casuali di dimensione $m \times n$ con $m > n$, generata utilizzando la funzione **np.random.rand**, scegliere un vettore α (per esempio con elementi costanti) come soluzione per creare un problema test e calcolare il termine noto $y = A\alpha$.

Definito quindi il problema di minimi quadrati con la matrice A ed il termine noto y calcolato:

- Calcolare la soluzione del problema risolvendo le equazioni normali mediante la fattorizzazione LU e Cholesky.
- Calcolare la soluzione del problema usando la SVD della matrice A.
- Calcolare l'errore relativo delle soluzioni trovate, rispetto al vettore α, soluzione esatta, utilizzata per generare il problema test.

2 Approssimazione di un set di dati tramite Minimi Quadrati

Sia $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$ un set di dati, che devono essere approssimati da un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ fissato.

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

Per calcolare i coefficienti del polinomio si deve risolvere un problema di minimi quadrati in cui la matrice A è definita come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

Mentre il termine noto è:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

Exercise 2.1. Date le seguenti funzioni:

- $f(x) = \exp(x/2) \qquad x \in [-1, 1]$
- $f(x) = \frac{1}{1+25*x^2} \qquad x \in [-1, 1]$
- $f(x) = sin(x) + cos(x) \qquad x \in [0, 2\pi]$

Si eseguano le seguenti richieste per ciascuna delle funzioni date:

1. Calcolare $m = 10$ coppie di punti $(x_i, f(x_i))$
2. Per n fissato calcolare una soluzione del problema di minimi quadrati, descritto sopra, utilizzando un metodo a scelta tra quelli utilizzati nell'esercizio precedente.
3. Per ciascun valore di $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$, creare una figura con il grafico della funzione esatta $f(x)$ insieme a quello del polinomio di approssimazione $p(x)$, evidenziando gli m punti noti.
4. Per ciascun valore di $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$, calcolare e stampare il valore del residuo in norma 2 commesso nei punti x_i.