

## 1 Image deblur

Il problema di deblur consiste nella ricostruzione di un'immagine a partire da un dato acquisito mediante il seguente modello:

$$y = Ax + \eta \quad (1)$$

dove :

- $y$  rappresenta l'immagine corrotta,
- $x$  rappresenta l'immagine originale che vogliamo ricostruire
- $A$  rappresenta l'operatore che applica il blur Gaussiano
- $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  rappresenta una realizzazione di rumore additivo con distribuzione Gaussiana di media  $\mu = 0$  e deviazione standard  $\sigma$

### Exercise 1.1. Problema test

- Caricare l'immagine camera dal modulo `skimage.data` rinormalizzandola nel range  $[0, 1]$ .
- Applicare un blur di tipo gaussiano con deviazione standard 3 il cui kernel ha dimensioni  $24 \times 24$ . utilizzando la funzione. Utilizzare prima `cv2` (`open-cv`) e poi la trasformata di Fourier.
- Aggiungere rumore di tipo gaussiano, con  $\sigma = 0.02$ , usando la funzione `np.random.normal()`.
- Calcolare le metriche Peak Signal Noise Ratio (PSNR) e Mean Squared Error (MSE) tra l'immagine degradata e l'immagine esatta usando le funzioni `peak_signal_noise_ratio` e `mean_squared_error` disponibili nel modulo `skimage.metrics`.

**Exercise 1.2. Soluzione naive** Una possibile ricostruzione dell'immagine originale  $x$  partendo dall'immagine corrotta  $y$  è la soluzione naive data dal minimo del seguente problema di ottimizzazione:

$$x^* = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 \quad (2)$$

- Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato dalla funzione `minimize` della libreria `scipy`, calcolare la soluzione naive.
- Analizza l'andamento del PSNR e dell'MSE al variare del numero di iterazioni

**Exercise 1.3. Soluzione regolarizzata** Si consideri il seguente problema regolarizzato secondo Tikhonov

$$x^* = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \quad (3)$$

- Utilizzando sia il metodo del gradiente che il metodo del gradiente coniugato calcolare la soluzione del problema regolarizzato.
- Analizzare l'andamento del PSNR e dell'MSE al variare del numero di iterazioni.
- Facendo variare il parametro di regolarizzazione  $\lambda$ , analizzare come questo influenza le prestazioni del metodo analizzando le immagini.

- Scegliere  $\lambda$  con il metodo di discrepanza.
- Scegliere  $\lambda$  attraverso test sperimentali come il valore che minimizza il valore del PSNR. Confrontare il valore ottenuto con quella della massima discrepanza.

**Exercise 1.4.** Testare i punti precedenti su due immagini in scala di grigio con caratteristiche differenti (per esempio, un'immagine tipo fotografico e una ottenuta con uno strumento differente, microscopio o altro). Degradare le nuove immagini applicando, mediante le funzioni `gaussian_kernel()`, `psf_fft()`, l'operatore di blur con parametri:

- $\sigma = 0,5$  dimensione del kernel  $7 \times 7$  e  $9 \times 9$
- $\sigma = 1,3$  dimensione del kernel  $5 \times 5$
- Aggiungendo rumore gaussiano con deviazione standard nell' intervallo  $(0, 0,05]$ .