Kreuzkorrelationsfunktion

Berechnungsvorschrift

Die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) ist als aus zwei verschiedenen Funktionen gebildeter Erwartungswert definiert. Hier werden die Formeln für die Korrelation der Prozesse **X** und eines Prozesses **Y** angegeben.

$$\psi_{\mathbf{X}Y}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1) \cdot \mathbf{Y}(t_2)\} \tag{1}$$

Reale aufgenommene Audiosignale s(t), die hier mit durch die KKF verrechnet werden, sind in jedem Fall Energiesignale, da sie einen begrenzten Wertebereich haben und nach einer bestimmten Zeit enden. Da sie rein reell sind gilt die Beziehung:

$$Signalenergie := \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt < \infty \tag{2}$$

Da die aufgenommenen Audiosignale zeit-diskrete Energiesignale sind wird hier auch nur die zeit-diskrete Kreuzkorrelation beschrieben. Für zeit-diskrete Energiesignale ergibt sich die folgende Berechnungsvorschrift, wobei x(n) und y(n) Realisierungen der Prozesse **X** und **Y** sind.

$$\boxed{\psi^E_{\mathbf{XY}}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(n+k)} \tag{3}$$

vgl. [ISV] S. 84 folgende

Kreuzkorrelation im Frequenzbereich und Faltungssatz

Am Anfang unserer Arbeit haben wir uns mit der Berechnung der Kreuzkorrelation beschäftigt. Da die Bildung der Summe der Multiplikation von x(n) und y(n+k) sehr rechenaufwändig ist, haben wir nach schnelleren Möglichkeiten gesucht die KKF der beiden Signale zu berechnen. Für die Berechnung der KKF im Frequenzbereich macht man sich die Ähnlichkeit der KKF zur Faltung und den Faltungssatz zunutze.

KKF als Faltung

Zeit-kontinuierlicher Fall:

$$\psi^E_{\mathbf{XY}}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) \tag{4}$$

Zeit-diskreter Fall:

$$\psi^E_{\mathbf{XY}}(k) = x(-k) * y(k) \tag{5}$$

[ISV] Formel (2.217) S.89

Faltungssatz in Verbindung mit KKF

Wir schreiben zuerst die die KKF als Faltung.

$$\psi(t) \quad = x(-t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

$$\begin{aligned}
\underline{\Psi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) * y(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau \right] \cdot e^{-j\omega(t-\tau+\tau)}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot e^{j}\omega(-\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)}\, dt \right]}_{*} d\tau
\end{aligned}$$

Durch Substitution von $(t - \tau)$ durch t' ergibt sich * zur Fourier-transformierten $\underline{Y}(\omega)$ von y(t). Der restliche Ausdruck wird durch das positive positive Vorzeichen in der e-Funktion zur komplex konjugierten Transformierten $\underline{X}^*(\omega)$ der Funktion x(t).

Die KKF lässt sich im Frequenzbereich also als

$$\boxed{\underline{\Psi}(\omega) = \underline{X}^*(\omega) \cdot \underline{Y}(\omega)} \tag{6}$$

schreiben.
vgl. [ISV] S.180

Wenn man nun die KKF im Frequenzbereich zeitsparend durchführen will, muss man die FFT für x(k) und y(k) (dabei $k \in \mathbb{N}_0^+$) der Länge N durchführen. Dabei muss man beachten, dass bei der FFT ein Linienspektrum ergibt. Die FFT beruht vor allem auch auf der Annahme, dass sich die N diskreten Werte periodisch wiederholen. Durch die IFFT von $\underline{\Psi}(\omega)$ ergibt sich also die periodische KKF $\tilde{\underline{\Psi}}(\omega)$.
vgl. [ISV] S.135

Literatur

[ISV] Rüdiger Hoffmann, Matthias Wolff: Intelligente Signalverarbeitung 1. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014