Kreuzkorrelationsfunktion

Die Basis für die Bemessung der aufgenommenen Audiosignale bildet die sogenannte Kreuzkorrelationsfunktion (KKF). Wie in der Aufgabenstellung schon beschrieben werden an ihr die Bemessungsparameter festgelegt. Aufgrund der verschiedenen Blocklängen und der Masse an Daten, die korreliert werden sollen muss die Berechnung der KKF effizient und zeitsparend implementiert werden. Im Folgenden Abschnitt wird die KKF kurz theoretisch eingeführt und das das mathematische Konzept erklärt, auf dem die effiziente Berechnung der KKF beruht.

Zuerst haben wir für die KKF eine Funktion genutzt, die zur Berechnung Summen verwendete. Dabei ergab sich, dass die Berechnung zu langsam war. In der nun vorliegenden Octave-Version wird die KKF im Frequenzbereich berechnet.

Berechnungsvorschrift

Die KKF ist als aus zwei verschiedenen Funktionen gebildeter Erwartungswert definiert. Hier werden die Formeln allgemein für die Korrelation der Prozesse $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ angegeben.

$$\psi_{\mathbf{X}Y}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1) \cdot \mathbf{Y}(t_2)\} \tag{1}$$

Reale aufgenommene Audiosignale s(t), die hier mit durch die KKF verrechnet werden, sind in jedem Fall Energiesignale, da sie rein reell sind, einen begrenzten Wertebereich haben und nach einer bestimmten Zeit enden.

$$Signalenergie := \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt < \infty \tag{2}$$

Da die aufgenommenen Audiosignale zeit-diskrete Energiesignale sind wird hier auch nur die zeit-diskrete Kreuzkorrelation beschrieben. Für zeit-diskrete Energiesignale ergibt sich die folgende Berechnungsvorschrift, wobei x(n) und y(n) Realisierungen der Prozesse $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ sind.

$$\boxed{\psi^E_{\mathbf{XY}}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(n+k)} \tag{3}$$

vgl. [ISV] S. 84 folgende

Kreuzkorrelation im Frequenzbereich und Faltungssatz

Am Anfang unserer Arbeit haben wir uns mit der Berechnung der Kreuzkorrelation beschäftigt. Da die Bildung der Summe der Multiplikation von x(n) und y(n+k) sehr rechenaufwändig ist, haben wir nach schnelleren Möglichkeiten gesucht die KKF der beiden Signale zu berechnen. Eine geeignet Möglichkeit ist die Berechnung der KKF im Frequenzbereich. Für die Berechnung der KKF im Frequenzbereich macht man sich die Ähnlichkeit der KKF zur Faltung und den Faltungssatz zunutze.

KKF als Faltung

Zeit-kontinuierlicher Fall:

$$\psi^E_{\mathbf{XY}}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) \tag{4}$$

Zeit-diskreter Fall:

$$\psi^{E}_{\mathbf{XY}}(k) = x(-k) * y(k) \tag{5}$$

[ISV] Formel (2.217) S.89

Faltungssatz in Verbindung mit KKF

Wir schreiben zuerst die die KKF als Faltung.

$$\psi(t) \quad = x(-t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

$$\begin{aligned}
\underline{\Psi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) * y(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau \right] \cdot e^{-j\omega(t-\tau+\tau)}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot e^{j\omega(-\tau)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)}\, dt \right]}_{*} d\tau
\end{aligned}$$

Durch Substitution von $(t-\tau)$ durch t' ergibt sich * zur Fourier-transformierten $\underline{Y}(\omega)$ von y(t). Der restliche Ausdruck wird durch das positive positive Vorzeichen in der e-Funktion zur komplex konjugierten Transformierten $\underline{X}^*(\omega)$ der Funktion x(t).

Die KKF lässt sich im Frequenzbereich also als

$$\boxed{\underline{\Psi}(\omega) = \underline{X}^*(\omega) \cdot \underline{Y}(\omega)} \tag{6}$$

schreiben.
vgl. [ISV] S.180

Wenn man nun die KKF im Frequenzbereich zeitsparend durchführen will, muss man die FFT für x(k) und y(k) (dabei $k \in \mathbb{N}_0^+$) der Länge N durchführen. Dabei muss man beachten, dass bei der FFT ein Linienspektrum ergibt. Die FFT beruht vor allem auch auf der Annahme, dass sich die N diskreten Werte periodisch wiederholen. Durch die IFFT von $\underline{\Psi}(\omega)$ ergibt sich also die periodische KKF $\tilde{\psi}(t)$.
vgl. [ISV] S.135

Literatur

[ISV] Rüdiger Hoffmann, Matthias Wolff: Intelligente Signalverarbeitung 1. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014