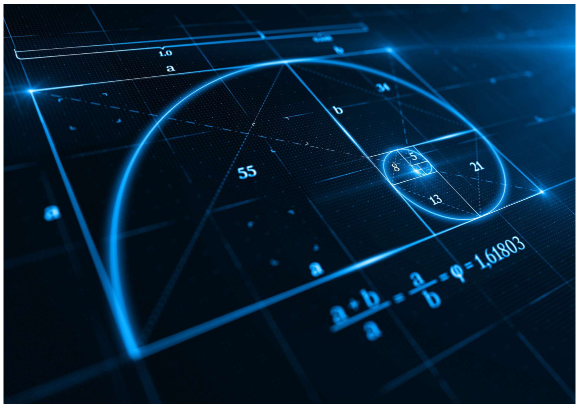
Algebra liniowa, twierdzenie Jordana

Łukasz Stodółka

Grudzień 2023



“Everything around us can be represented and understood through numbers.”

Twierdzenie Jordana, diagonalizacja 2x2

Twierdzenie Jordana mówi nam, że macierz się diagonalizuje albo sprowadza do klatki Jordana. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = det(\begin{pmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{pmatrix})$$

Macierz A się diagonalizuje jeśli wielomian charakterystyczny $\chi(x)$ ma dwa różne rozwiązania. (Mogą być zespolone)

Proces diagonalizacji:
Chcemy przedstawić macierz A w postaci:

$$A = PJP^{-1}$$

gdzie

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

P zaś bazą, czy też układem współrzędnym gdzie nasze przedstawienie A jest diagonalne.
Aby to zrobić wyznaczamy wielomian charakterystyczny, którego rozwiązania dadzą nam wektory własne.

$$\chi(x) = x^2 - tr(A)x + det(A) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania, to są nasze wektory własne λ, μ.
Teraz musimy, wyznaczyć P, więc wystarczy że rozwiążemy dwa układy równań, bo szukamy $AU = \lambda U$, $AW = \mu U$, czyli po przekształceniu:

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{pmatrix} = 0$$

ponadto wiemy, że oba układy mają nieskończenie wiele rozwiązać, bo są rozwiązaniem $\chi(x)$, więc sprawdzamy jedno z równań z każdym z nich podstawiając np. dowolne niezerowe x i obliczamy y:

$$ax - \lambda + by = 0$$

dla $x = 1$, $y = \frac{\lambda - a}{b}$. Daje nam to wektor $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda - a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Drugi układ:

$$ax - \mu + by = 0$$

dla $x = 1$, $y = \frac{\mu - a}{b}$. Daje nam to wektor $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu - a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$.

Nasze P, będzie w postaci macierzy powstałej z U, W. Czyli:

$$P = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{q'p - qp'} \begin{pmatrix} q' & -p' \\ -q & p \end{pmatrix}$$

Wtedy:

$$A = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \frac{1}{q'p - qp'} \begin{pmatrix} q' & -p' \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$$

$$\lambda = -1, \mu = 7$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Liczymy W:

$$(2+1)x + 5y = 0$$

$$5y = -3x$$

Spełnia to para $U = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Liczymy U:

$$(2-7)x + 5y = 0$$

$$y = x$$

Spełnia to para $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Zatem

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie spektralne

Jeżeli macierz jest symetryczna czyli $A = A^T$, to macierz diagonalizuje się w bazie ortonormalnej czyli

$$||U|| = ||W|| = 1, < U, W >= 0$$

$$A = A^T$$

np.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Twierdzenie to ułatwia diagonalizację np:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = x^2 + 12x + 11 = (x - 1)(x - 11)$$

$$\lambda = 1, \mu = 11$$

Wtedy szukamy tylko jednego wektora:

$$(3 - 1)x + 4y = 0$$

$$2x + 4y = 0$$

$$W = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teraz korzystamy ze twierdzenia spektralnego, skoro iloczyn skalarny wynosi 0, to W jest prostopadłe do U. Czyli:

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wtedy od razu mamy P.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Sprowadzanie do klatki Jordana

Jeżeli macierz ma tylko jedno dwukrotne rozwiązanie, czyli

$$\chi(x) = (x - a)^2$$

to macierz A sprowadzamy do tak zwanej klatki Jordana czyli macierzy w innej bazie zadanej macierzą

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

np.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = (x - 2)^2$$

$$\lambda = 2$$

Tak jak przy diagonalizacji szukamy U

$$(4 - 2)x - 4y = 0$$

$$x = 2y$$

Wtedy U np. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Teraz szukamy W, jednakże teraz by je dobrać bierzemy jakieś W które jest liniowo niezależne. Dodatkowo wiemy, że $AW = \alpha U + 2W$ $(2 = \lambda)$

Więc weźmy np. $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, wtedy:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 6 \\ \alpha + 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -1$$

$$U' = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$