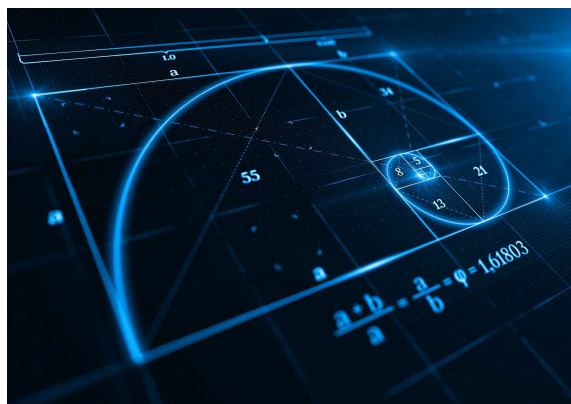


Analiza notatki- Ciągi i szeregi

Grudzień 2023



“Dekadentyzm istota ludzkości”

Ciągi

Definicja: Ciągiem a_n nazwamy odwzorowaniem liczb naturalnych w liczby rzeczywiste. Liczby a_1, a_2, a_3, \dots nazywamy wyrazami ciągu.

Przykłady:

(a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

(b) $\frac{1}{n}$

Ciągi mogą być rosnące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$$

Ciągi mogą być niemalejące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$$

Ciągi mogą być malejące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > a_{n+1})$$

Ciągi mogą być nierosnące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq a_{n+1})$$

Ciągi mogą być stałe wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = a_{n+1})$$

Ciąg jest monotoniczny, gdy jest rosnący lub malejący.

Ciąg jest słabo monotoniczny, gdy jest nierosnący lub niemalejący.

Ciąg jest ograniczony z góry, jeżeli:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq M)$$

Ciąg jest ograniczony z dołu, jeżeli:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq M)$$

Zbieżność ciągu

Intuicyjnie: mówimy że ciąg jest zbieżny, gdy wyrazy ciągu leżą coraz bliżej jakiejś liczby g , dla dostatecznie dużych n . Zapis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

Formalnie:

$$(\exists g \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|a_n - g| < \varepsilon)$$

Zatem z punktu logiki, aby udowodnić jakąś granicę formalnie musimy znaleźć N dla zadanego Epsilon.

Przykład:

$$a_n = \left| \frac{n^2 + n}{2n^2 - 2n + 1} \right|$$

Niech $g = \frac{1}{2}$.

Szukamy dużego N wedle definicji:

$$\left| \frac{N^2 + N}{2N^2 - 2N + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Nasze a_N możemy ograniczyć z dołu zwiększając mianownik o $+2N$, bo wiemy, że $N > 0$, a g rozszerzymy o wspólny mianownik:

$$\left| \frac{N^2 + N}{2N^2} - \frac{N^2}{2N^2} \right| < \varepsilon$$

Wtedy:

$$\left| \frac{N}{2N^2} \right| = \left| \frac{1}{2N} \right| < \varepsilon$$

Możemy opuścić wartość bezwzględną bo wiemy że wyrażenie z lewej strony jest dodatnie.

$$N > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Bierzemy takie N które z pewnością będzie większe np.

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

Tak mniej więcej wygląda proces znajdowania N , może być czasem dość nużący. Jednakże to co zrobiliśmy wyżej nie jest dowodem, aby dowód był poprawny należy ten proces odwrócić w drugą stronę, czyli pokazać, że to nasze N spełnia definicję, ułatwić może fakt, że wystarczy przepisać od dołu do góry zmieniając słowa.

Własności granic:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, b_n \neq 0\end{aligned}$$

Dowód zostawiam czytelnikowi albo zapraszam do skryptu prof. Ryszarda Szwarca

Warunek Cauchy'go: Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchy'go, czyli dla dostatecznie dużych wskaźników liczby leżą obok siebie, formalnie:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Dowody sprowadzają się do wyznaczenia N , jak w przykładzie na początku notatek. Pozwolę pominąć sobie kolejny przykład, bo nie należy to do zbyt podniecających rzeczy.

Rozbieżność ciągu do ∞ : Mówimy, że ciąg jest rozbieżny do ∞ , gdy spełnie warunek:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a_n > M)$$

Ważne Lematy i Twierdzenia

Lemat nr 1: Ciąg zbieżny posiada tylko jedną granicę

Dowód Lematu: Załóżmy nie wprost, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g'$ oraz $g > g'$.

Weźmy $\varepsilon = (g' - g)/2$ widzimy zatem że otoczenie czyli przedziały: $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ i $(g' - \varepsilon, g' + \varepsilon)$ są rozłączne. Otrzymujemy sprzeczność, bo z definicji granicy, wyrazy, powinny leżeć zarówno w jednym jak i drugim przedziale. \square

Lemat nr 2: Każdy ciąg, który jest zarówno monotoniczny i ograniczony jest zbieżny

Dowód lematu zostawiam czytelnikowi

Lemat nr 3: Z wyżej wymienionych własności wynika, że można wyciągać stałą przed \lim

Lemat nr 4: Dla ciągu a_n , i każdego ściśle rosnącego ciągu liczb naturalnych m_n , a_{m_n} nazywamy podciągiem ciągu a_n i ma on tą samą granicę co a_n .

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa: Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny

Twierdzenie o trzech ciągach: Jeżeli:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

to c_n jest zbieżne, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Kryterium porównawcze: Jeśli $a_n \leq b_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

Punkt skupienia: Liczbę α nazywamy punktem skupienia jeśli jakiś podciąg a_n jest zbieżny do α

Ciąg zbieżny posiada tylko jeden punkt skupienia.

Twierdzenie kolejne: Dla ograniczonego ciągu a_n istnieją najmniejszy i największy punkt skupienia nazywane granicą dolną i górną ciągu i oznaczane symbolami:

$$\liminf a_n, \limsup a_n$$