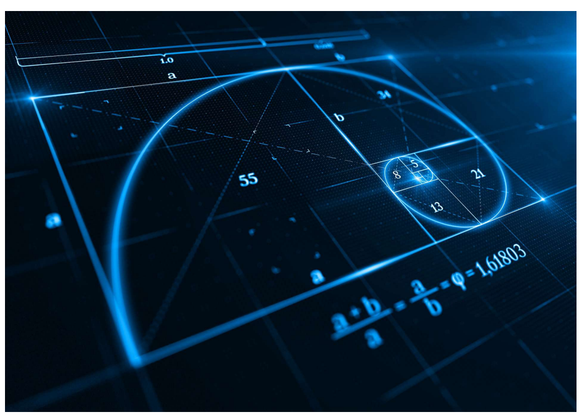
Ciągi i szeregi liczbowe

Łukasz Stodółka

Grudzień 2023



"Będzie. Po prostu będzie. Niewiadomo czy dobrze, czy źle."

Kolokwium teoria

Warunek Cauchy'go: *Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchy'go, czyli dla dostatecznie dużych wskaźników liczby leżą obok siebie, formalnie:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Rozbieżność ciagu do ∞: *Mówimy, że ciąg jest rozbieżny do ∞, gdy spełnie warunek:*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a_n > M)$$

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa: *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny*

Twierdzenie o trzech ciągach: *Jeżeli:*

$$a_n \geq c_n \geq b_n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

to c_n jest zbieżne, a

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Kryterium porównawcze: *Jeśli $a_n \geq b_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$*

Punkt skupienia: *Liczbę α nazywamy punktem skupienia jeśli jakiś podciąg a_n jest zbieżny do α*
Ciąg zbieżny posiada tylko jeden punkt skupienia.

Twierdzenie: *Dla ograniczonego ciągu a_n istnieją najmniejszy i największy punkt skupienia nazywane granicą dolną i górną ciągu i oznaczane symbolami:*

$$\liminf a_n, \limsup a_n$$

Warunek Cauchy'ego dla szeregów:
Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n| < \varepsilon)$$

Łatwo zauważyć, że

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n|$$

Fakt 1:
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Jednakże *nie wystarczy* to do stwierdzenia zbieżności

Fakt 2:
Dla każdego szeregu zbieżnego, ciąg sum częściowych jest ograniczony

Fakt 3:
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwględnie zbieżny. Jeśli szereg jest bezwględnie zbieżny to jest też zbieżny. Natomiast jeśli szereg jest zbieżny, ale nie jest bezwględnie zbieżny to szereg jest zbieżny warunkowo.

Kryteria zbieżności szeregów liczbowych

Kryterium Dirichleta:

Rozważmy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

Jeżeli $a_n \longrightarrow_n 0$, a sumy częściowe b_n są ograniczone, wtedy szereg jest zbieżny

Kryterium Leibniza:

Rozważmy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Jeżeli $a_n \longrightarrow_n 0$, to szereg jest zbieżny, bo $b_n = (-1)^{n+1}$ jest ograniczony

Kryterium porównawcze:

Rozważmy:

$$0 \geq a_n \geq b_n$$

Jeżeli b_n zbieżne to a_n również zbieżne.
Co więcej:

$$0 \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Kryterium Cauchy'ego:

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Jeśli a<1, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezwzględnie zbieżny.
Jeśli a>1, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny.
Jeśli a=1, kryterium nie rozstrzyga zbieżności.

Kryterium d'Aleberta:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Jeśli a<1, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezwzględnie zbieżny.
Jeśli a>1, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny.
Jeśli a=1, kryterium nie rozstrzyga zbieżności.

Twierdzenie o zagęszczaniu:

$$a_n \longrightarrow_n 0$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow$ gdy zbieżny jest szereg zagęszczony czyli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n a_{2^n}}$

Twierdzenia funkcje

Granica funkcji, definicja Cauchy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon)$$

Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji:
Funkcja ciągła $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ jest ograniczona i osiąga swoje kresy górny M i dolny m. Tzn. istnieją punkty x i d w przedziale $[a, b]$ takie że, $f(c) = m$ i $f(d) = M$

Włanośść Darbouxa
Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ przechodzi od $f(a)$ do wartości $f(b)$ przez wszystkie wartości pośrednie, czyli dla dowolnej liczby l między $f(a)$ i $f(b)$ $(f(a) \neq f(b))$ istnieje punkt c taki że $a < c < b$, dla którego $f(c) = l$, z czego wynika, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje wszystkie wartości, między swoimi kresami.

Gęstość

Mówimy że Podzbiór jest gęsty, jeśli dla dowolnego x, istnieje ciąg liczb zbieżny do x

Zbieżność jednostajna

Mówimy, że ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do funkcj f na zbiorze A, jeśli:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in A)(\exists N)(\forall n > N)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Podany wyżej warunek jest warunkiem Cauchy'ego zbieżności jednostajnej

Twierdzenie Diniego

Niech $f_n(x)$ będzie monotonicznym ciągiem funkcyjnym funkcji ciągłych określonych na przedzial $[a, b]$, czyli jest albo rosnącym albo malejącym.
Jeśli f_n jest zbieżny punktowo do funkcji f ciągłej na $[a, b]$. Wtedy zbieżność f_n do f jest jednostajna.

Warunek Cauchy'ego dla szeregów funkcyjnych

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny, gdy:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in A)(\forall n > m > N)(|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + ...f_n(x)| < \varepsilon)$$

Kryterium Weierstrassa o majoryzacji

Jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny oraz $|f_n(x)| \leq a_n$ dla $x \in A$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie dla $x \in A$.

Twierdzenie Abela

Jeśli szereg $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * x^n$ jest zbieżny dla $x = a$ to funkcja $f(x)$ jest lewostronnie ciągła w punkcie $x = a$, jeśli $a > 0$ i prawostronnie ciągła, jeśli $a < 0$