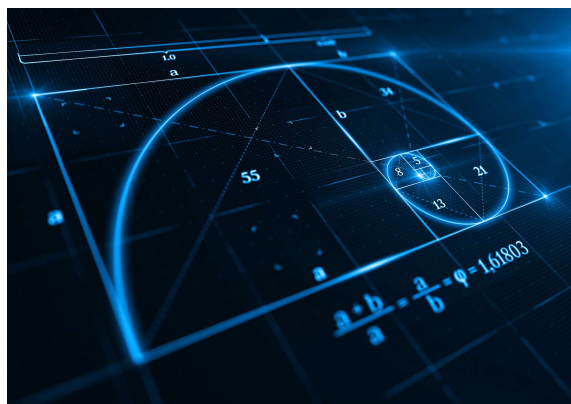


# Algebra liniowa, twierdzenie Jordana

*Łukasz Stodółka*

*Grudzień 2023*



“Everything around us can be represented and understood through numbers.”

## Twierdzenie Jordana, diagonalizacja 2x2

Twierdzenie Jordana mówi nam, że macierz się diagonalizuje albo sprowadza do klatki Jordana. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\chi(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$

Macierz  $A$  się diagonalizuje jeśli wielomian charakterystyczny  $\chi(x)$  ma dwa różne rozwiązania. (Mogą być zespolone)

### Proces diagonalizacji:

Chcemy przedstawić macierz  $A$  w postaci:

$$A = PJP^{-1}$$

gdzie

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$P$  zaś bazą, czy też układem współrzędnym gdzie nasze przedstawienie  $A$  jest diagonalne. Aby to zrobić wyznaczamy wielomian charakterystyczny, którego rozwiązania dadzą nam wektory własne.

$$\chi(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania, to są nasze wektory własne  $\lambda, \mu$ .

Teraz musimy, wyznaczyć  $P$ , więc wystarczy że rozwiążemy dwa układy równań, bo szukamy  $AU = \lambda U$ ,  $AW = \mu W$ , czyli po przekształceniu:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a-\mu & b \\ c & d-\mu \end{pmatrix} = 0$$

ponadto wiemy, że oba układy mają nieskończenie wiele rozwiązań, bo są rozwiązaniem  $\chi(x)$ , więc sprawdzamy jedno z równań z każdym z nich podstawiając np. dowolne niezerowe  $x$  i obliczamy  $y$ :

$$ax - \lambda + by = 0$$

dla  $x = 1$ ,  $y = \frac{\lambda-a}{b}$ . Daje nam to wektor  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

Drugi układ:

$$ax - \mu + by = 0$$

dla  $x = 1$ ,  $y = \frac{\mu-a}{b}$ . Daje nam to wektor  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu-a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$ .

Nasze  $P$ , będzie w postaci macierzy powstałej z  $U$ ,  $W$ . Czyli:

$$P = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{q'p - qp'} \begin{pmatrix} q' & -p' \\ -q & p \end{pmatrix}$$

Wtedy:

$$A = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \frac{1}{q'p - qp'} \begin{pmatrix} q' & -p' \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

**Przykład:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = x^2 - 6x - 7 = (x + 1)(x - 7)$$

$$\lambda = -1, \mu = 7$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Liczymy  $W$ :

$$(2 + 1)x + 5y = 0$$

$$5y = -3x$$

Spełnia to para  $U = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Liczymy  $U$ :

$$(2 - 7)x + 5y = 0$$

$$y = x$$

Spełnia to para  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Zatem

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

### Twierdzenie spektralne

Jeżeli macierz jest symetryczna czyli  $A = A^T$ , to macierz diagonalizuje się w bazie ortonormalnej czyli

$$\|U\| = \|W\| = 1, \langle U, W \rangle = 0$$
$$A = A^T$$

np.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Twierdzenie to ułatwia diagonalizację np:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = x^2 + 12x + 11 = (x - 1)(x - 11)$$

$$\lambda = 1, \mu = 11$$

Wtedy szukamy tylko jednego wektora:

$$(3 - 1)x + 4y = 0$$

$$2x + 4y = 0$$

$$W = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teraz korzystamy ze twierdzenia spektralnego, skoro iloczyn skalarny wynosi 0, to W jest prostopadłe do U. Czyli:

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wtedy od razu mamy P.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

### Sprowadzanie do klatki Jordana

Jeżeli macierz ma tylko jedno dwukrotne rozwiązanie, czyli

$$\chi(x) = (x - a)^2$$

to macierz A sprowadzamy do tak zwanej klatki Jordana czyli macierzy w innej bazie zadanej macierzą

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

np.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x) = (x - 2)^2$$

$$\lambda = 2$$

Tak jak przy diagonalizacji szukamy  $U$

$$(4 - 2)x - 4y = 0$$

$$x = 2y$$

Wtedy  $U$  np.  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  Teraz szukamy  $W$ , jednakże teraz by je dobrać bierzemy jakieś  $W$  które jest liniowo niezależne. Dodatkowo wiemy, że  $AW = \alpha U + 2W$  ( $2 = \lambda$ )

Więc weźmy np.  $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , wtedy:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 6 \\ \alpha + 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -1$$

$$U' = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$