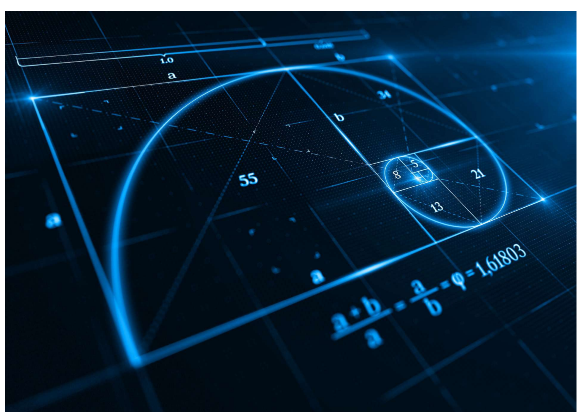
Analiza notatki- Ciągi i szeregi

Grudzień 2023



“Dekadentyzm istota ludzkości”

Ciągi

Definicja: *Ciągiem a_n nazwamy odwozorowaniem liczb naturalnych w liczby rzeczywiste. Liczby a_1, a_2, a_3,... nazywamy wyrazami ciągu.*

Przykłady:

(a) $1, 2, 3, 4, 5$....
(b) $\frac{1}{n}$

Ciągi mogą być rosnące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$$

Ciągi mogą być niemalejące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n <= a_{n+1})$$

Ciągi mogą być malejące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > a_{n+1})$$

Ciągi mogą być nierosnące wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n >= a_{n+1})$$

Ciągi mogą być stałe wtedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = a_{n+1})$$

Ciąg jest monotoniczny, gdy jest rosnący lub malejący.
Ciąg jest słabo monotoniczny, gdy jest nierosnący lub niemalejący.

Ciąg jest ograniczony z góry, jeżeli:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n <= M)$$

Ciąg jest ograniczony z dołu, jeżeli:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n >= M)$$

Zbieżność ciągu
Intuicyjnie: mówimy że ciąg jest zbieżny, gdy wyrazy ciagu leżą coraz bliżej jakieś liczby g, dla dostatecznie dużych n. Zapis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$
Formalnie:

$$(\exists g \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|a_n - g| < \varepsilon)$$

Zatem z punktu logiki, aby udowodnić jakąś granicę formalnie musimy znaleźc N dla zadanego Epsilona.

Przykład:

$$a_n = \left| \frac{n^2 + n}{2n^2 - 2n + 1} \right|$$

Niech $g = \frac{1}{2}$.
Szukamy dużego N wedle definicji:

$$\left|\frac{N^2 + N}{2N^2 - 2N + 1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Nasze a_N możemy ograniczyć z dołu zwiększając mianownik o $+2N$, bo wiemy, że $N > 0$, a g rozszerzymy o wspólny mianownik:

$$\left|\frac{N^2 + N}{2N^2} - \frac{N^2}{2N^2}\right| < \varepsilon$$

Wtedy:

$$\left|\frac{N}{2N^2}\right| = \left|\frac{1}{2N}\right| < \varepsilon$$

Możemy opuścić wartość bezwględną bo wiemy że wyrażenie z lewej strony jest dodatnie.

$$N > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Bierzemy takie N które z pewnością będzię mniejsze od ε np.

$$N = \left\lfloor \frac{1}{4\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

Tak mniej więcej wygląda proces znajdywania N, może być czasem dość nużący. Jednakże to co zrobiliśmy wyżej nie jest dowodem, aby dowód był poprawny należy ten proces odwrócić w drugą stronę, czyli pokazać, że to nasze N spełnia definicję, ułatwić może fakt, że wystarczy przepisać od dołu do góry zmieniając słowa.

Własności granic:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, b_n \neq 0$$

Dowód zostawiam czytelnikowi albo zapraszam do skryptu prof. Ryszarda Szwarca

Warunek Cauchy'go: *Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchy'go, czyli dla dostatecznie dużych wskaźników liczby leżą obok siebie, formalnie:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Dowody sprowadzają się do wyznaczenia N, jak w przykładzie na początku notatek. Pozwolę pominąć sobie kolejny przykład, bo nie należy to do zbyt podniecających rzeczy.

Rozbieżność ciagu do ∞: *Mówimy, że ciąg jest rozbieżny do ∞, gdy spełnie warunek:*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a_n > M)$$

Ważne Lematy i Twierdzenia

Lemat nr 1: *Ciąg zbieżny posiada tylko jedną granicę*
Dowód Lematu: Załóżmy nie wprost, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = g'$ oraz $g > g'$.
Weźmy $\varepsilon = (g' - g)/2$ widzimy zatem że otoczenie czyli przedziały: $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ i $(g' - \varepsilon, g' + \varepsilon)$ są rozłączne. Otrzymujemy sprzeczność, bo z definicji granicy, wyrazy, powinny leżeć zarówno w jednym jak i drugim przedziale. □

Lemat nr 2: *Każdy ciąg, który jest zarówno monotoniczny i ograniczony jest zbieżny*
Dowód lematu zostawiam czytelnikowi

Lemat nr 3: *Z wyżej wymienionych własności wynika, ze można wyciągać stałą przed lim*

Lemat nr 4: *Dla ciągu a_n, i każdego ściśle rosnącego ciągu liczb naturalnych m_n, a_{m_n} nazywamy podciągiem ciagu a_n i ma on tą samą granicę co a_n.*

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa: *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny*

Twierdzenie o trzech ciągach: *Jeżeli:*

$$a_n <= c_n <= b_n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

to c_n jest zbieżne, a

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Kryterium porównawcze: *Jeśli $a_n <= b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*

Punkt skupienia: *Liczbę α nazywamy punktem skupienia jeśli jakiś podciąg a_n jest zbieżny do α*
Ciąg zbieżny posiada tylko jeden punkt skupienia.

Twierdzenie kolejne: *Dla ograniczonego ciągu a_n istnieją najmniejszy i największy punkt skupienia nazywane granicą dolną i górną ciągu i oznaczane symbolami:*

$$\liminf a_n, \limsup a_n$$