

---

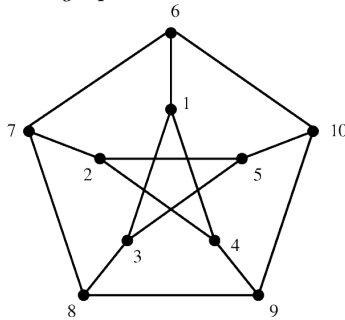
CPE Lyon - 4IRC - 2021/2022  
Structures de données et algorithmes avancés  
**Séance 6 - Graphes (notions de base)**

---



### Exercice 1. Notions fondamentales

L'un des graphes les plus célèbres est le *graphe de Petersen* :



- Ce graphe est-il orienté ou non orienté ?
- Quels sont ses sommets et ses arêtes ?
- Quels sont les voisins du sommet 2 ? Quel est le degré du sommet 10 ?
- Ce graphe est-il régulier ?
- Donnez sa matrice d'incidence et sa matrice d'adjacence
- Quel est le sous-graphe induit par les sommets  $\{6, 3, 7, 8, 1, 5\}$  ?
- Ce graphe est-il planaire ?
- ♠ Le graphe de Petersen possède-t-il un chemin *hamiltonien* ? Est-il hamiltonien (indice : ce graphe ne possède aucun cycle de longueur 3 ou de longueur 4) ?

### Exercice 2. Gestion d'emplois du temps

Cinq étudiants sont inscrits en option à différents cours de langues. Les données sont celles du tableau suivant :

	anglais	russe	espagnol	italien	grec
Axel	X		X		
Béatrice		X			X
Corentin	X			X	
Dylan		X	X		
Emilie	X	X			

Pour chacune des questions suivantes, donnez une représentation sous forme de graphe et la réponse à la question :

- Dessinez le graphe de la répartition des étudiants dans les cours ; quelle est la nature de ce graphe ?
- Quels sont tous les binômes possibles, quel que soit le cours ?
- Quelle est la taille du plus grand groupe d'étudiants n'ayant aucun cours en commun ?
- Est-il possible de faire une annonce aux étudiants d'un des cours, et qu'elle soit ensuite diffusée par les étudiants dans tous les cours ?
- Combien de cours peut-on placer au maximum lors d'un même créneau horaire ? De combien de créneaux horaires aura-t-on besoin en tout ?

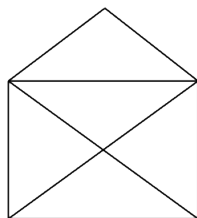
### Exercice 3. Réception à l'Ambassade

- L'Ambassadeur de France organise ~~un dîner de gala~~ une visioconférence (le Covid-19 est passé par là) avec 48 de ses homologues ; il prétend que chacun des 49 ambassadeurs connaît exactement 11 autres personnes présentes. Est-ce possible ?
- L'un des invités est absent. L'affirmation de l'Ambassadeur est-elle possible dans cette nouvelle situation ?
- Chaque ambassadeur a ~~serré la main~~ salué chacun de ses homologues. Combien y a-t-il eu de salutations lors de la soirée ?

### Exercice 4. S'il-te-plaît, dessine-moi une enveloppe

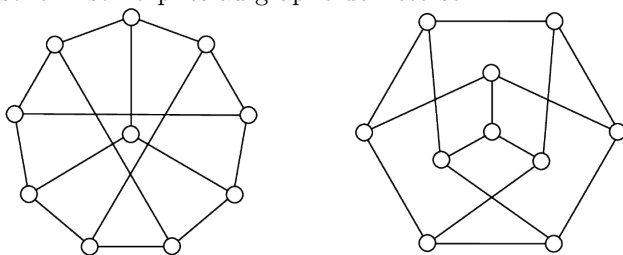
Est-il possible de dessiner l'enveloppe ci-dessous **sans lever le stylo** et sans repasser deux fois sur un même trait

- en terminant au point de départ ?
- sans nécessairement terminer au point de départ ? Si oui, par où doit-on commencer et où s'arrêtera-t-on ?



### Exercice 5. Graphes isomorphes

Les graphes ci-dessous sont-ils isomorphes au graphe de Petersen ?



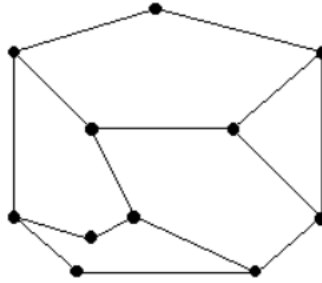
### Exercice 6. La chèvre, le chou et le loup

Un passeur souhaite transporter une chèvre, un chou et un loup d'une rive à l'autre d'un fleuve ; mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Or il ne doit jamais laisser ensemble et sans surveillance la chèvre et le loup (qui espère dévorer la chèvre), ainsi que le chou et la chèvre (qui rêve de manger le chou). Il vous demande de l'aider à résoudre ce problème.

- Modélisez ce problème à l'aide d'un graphe. Quels sont ses sommets et ses arêtes / arcs ?
- A partir obtenu à la question précédente, comment obtenir une solution au problème ?

### Exercice 7. Une nuit au musée

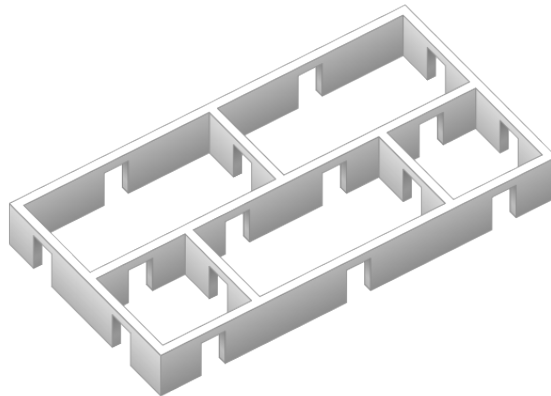
Le graphe ci-dessous représente le plan des couloirs d'un musée, les intersections (sommets) correspondant aux salles.



- a Un gardien placé dans un couloir s'occupe de la surveillance des deux salles situées à ses extrémités. Combien de gardiens au minimum sont nécessaires (et comment les placer) afin que toutes les salles soient surveillées ?
- b Si l'on place maintenant les gardiens dans les salles, en supposant qu'un tel gardien peut surveiller tous les couloirs amenant à cette salle, combien de gardiens sont nécessaires pour surveiller tous les couloirs ?

### Exercice 8. Problème des cinq salles

Est-il possible d'organiser un parcours des cinq salles ainsi que des jardins extérieurs du château représenté ci-dessous, en passant exactement **une fois** par chacune des portes ?



### Exercice 9. Problème d'emploi du temps

Une école doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

### Exercice 10. Une journée de ~~m...~~ en enfer

Dans le film *Die Hard 3 : Une journée en enfer*, John McLane (Bruce Willis) et Zeus Carver (Samuel L. Jackson) doivent résoudre le problème suivant pour empêcher l'explosion d'une bombe : comment obtenir exactement 4 litres d'eau en ayant à notre disposition seulement deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Aidez McLane et Carver à protéger les rues de New York !

- Modélisez ce problème à l'aide d'un graphe. Quels sont ses sommets et ses arêtes / arcs ?
- A partir obtenu à la question précédente, comment obtenir une solution au problème ?

### Exercice 11. Sudoku

Exprimez la résolution d'un Sudoku classique en termes de coloration de graphe. Décrivez le graphe (nombre de sommets, nombre d'arêtes, etc.). Combien faut-il de couleurs ?

### Exercice 12. Produits chimiques

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, un point signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		•	•	•			•	•
B	•				•	•	•	
C	•			•		•	•	•
D	•		•		•			•
E		•		•		•	•	
F		•	•		•			
G	•	•	•		•			
H	•		•	•				

Combien faut-il de wagons au minimum ?