CPE Lyon - 3IRC Année 2021/2022

Structures de données et algorithmes avancés

TP 3 - Récursivité / Diviser pour régner

Exercice 1. Une première fonction récursive

Ecrivez une fonction **récursive** qui affiche les nombres de 1 à n dans l'ordre croissant, et une autre qui les affiche dans l'ordre décroissant.

Exercice 2. Suite de Syracuse / Conjecture de Collatz

La suite de Syracuse d'une entier $N > 0$ est définie par récurrence de la manière suivante : $u_0 = N$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \tag{1}$$

Par exemple :

- la suite de Syracuse de $N = 13$ est : 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1…
- la suite de Syracuse de $N = 28$ est : 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1…

On constate que quand on atteint le nombre 1, la suite boucle sur le cycle 4, 2, 1, 4, 2, 1…. La ***conjecture de Syracuse*** ou ***conjecture de Collatz*** affirme que quel que soit le nombre N de départ, on finit *toujours* par retomber sur ce cycle. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les nombres $N < 2,95 \times 10^{20}$, mais n'a jamais pu être **prouvée** mathématiquement. Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

1. Ecrivez une fonction récursive `syracuse` qui **renvoie** sous forme d'une liste la suite de Syracuse d'un entier donné en paramètre (s'arrêter dès qu'on tombe sur 1).
2. Modifiez cette fonction pour qu'elle renvoie une liste de trois éléments :
   - la liste des nombres de la suite ;
   - le *temps de vol* de la suite, i.e. le plus petit indice n tel que $u_n = 1$;
   - l'*altitude maximale*, i.e. la valeur maximale de la suite.
3. **Pour les plus rapides** : représenter la suite graphiquement, et représentez sur un même graphique le temps de vol pour tous les entiers inférieurs à 10^6.

Exercice 3. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est une suite omniprésente en mathématiques et en informatique, et se rencontre également dans la nature : $F_0 = 1, F_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

1. Ecrivez une fonction récursive `fibonacci1` basée sur cette définition.
2. Observez le temps de calcul pour $F_5, F_{10}, F_{20}, F_{30}$ et F_{40}. Que pouvez-vous conjecturer quant à la complexité de cet algorithme ?
3. Dressez l'arbre de récurrence du calcul de F_5. Pourquoi l'algorithme précédent est-il inefficace ?

4. La question précédente montre qu'il serait plus astucieux de conserver dans un tableau les résultats des calculs déjà effectués. Ce procédé se nomme ***mémoïsation***. Ecrivez une fonction récursive `fibonacci2` mettant en œuvre ce procédé ; comparez les temps de calcul avec `fibonacci1`.
5. Déroulez à la main les calculs des premiers termes de la suite ; déduisez-en une fonction récursive `fibonacci3` faisant apparaître une **récursion terminale**.

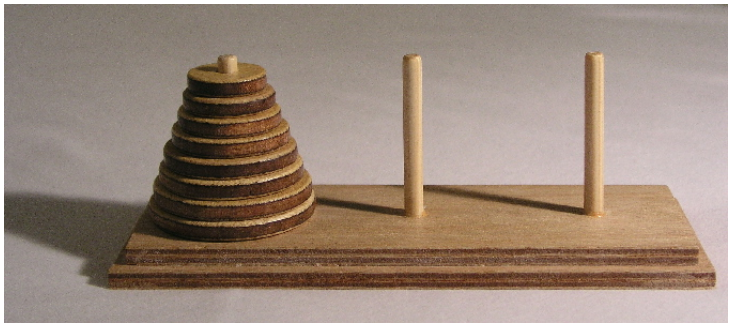
Exercice 4. Diviser pour régner

Ecrivez une fonction **`maxliste`** qui reçoit une liste en paramètre, et qui renvoie le plus grand élément de cette liste **en utilisant la technique *Diviser pour régner***.

Exercice 5. Tours de Hanoï

Les Tours de Hanoï sont un jeu de réflexion consistant à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de « départ » à une tour d'« arrivée » en passant par une tour « intermédiaire », tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.



Ecrivez une fonction récursive **`hanoi`** permettant de résoudre le problème des Tours de Hanoï à n disques. Elle affichera la solution sous la forme :

```
Déplacer un disque du pilier 1 vers le pilier 3
Déplacer un disque du pilier 1 vers le pilier 2
Déplacer un disque du pilier 3 vers le pilier 2
Déplacer un disque du pilier 1 vers le pilier 3
Déplacer un disque du pilier 2 vers le pilier 1
Déplacer un disque du pilier 2 vers le pilier 3
Déplacer un disque du pilier 1 vers le pilier 3
```

Exercice 6. Recherche dichotomique

1. La **recherche séquentielle** (ou **recherche linéaire**) consiste à parcourir les éléments d'un tableau successivement jusqu'à trouver l'élément recherché.
   (a) Quelle est la complexité de cet algorithme dans le meilleur cas ?
   (b) Quelle est la complexité de cet algorithme dans le pire des cas ?
   (c) Quelle est la complexité de cet algorithme en moyenne ?

2. La **recherche dichotomique** utilise la propriété qu'un tableau T de longueur n est déjà trié pour accélérer la recherche d'un nombre k :
   - si $T[n/2] = k$, la recherche est terminée ;
   - si $T[n/2] > k$, on recommence le processus sur la moitié gauche du tableau ;
   - si $T[n/2] < k$, on recommence le processus sur la moitié droite du tableau.

Ecrivez une fonction **`dicho`** qui reçoit en paramètres une liste **d'entiers triée par ordre croissant** ainsi qu'un entier, et qui renvoie

- l'indice de l'élément dans la liste, s'il est présent,
- -1 sinon.

vous pouvez utiliser la méthode `sort` de Python pour trier votre liste. Nous verrons dans le Cours 3 comment fonctionne cette méthode.

3. Appliquez la méthode par substitution pour calculer la complexité de votre fonction **`dicho`**, puis validez votre résultat à l'aide du Master Theorem.

Exercice 7. Master Theorem

1. Appliquez le Master Theorem aux récurrences suivantes :
   (a) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2$
   (b) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 10n$
   (c) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$

2. Expliquez pourquoi on ne peut pas appliquer le Master Theorem aux récurrences suivantes :
   (a) $T(n) = 2^n T(\frac{n}{2}) + n$
   (b) $T(n) = \frac{1}{2}T(\frac{n}{2}) + n$
   (c) $T(n) = 64T(\frac{n}{8}) - n^2 \log n$
   (d) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n(2 - \cos n)$
   (e) $\star$ $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

3. En effectuant le changement de variable $m = \log n$, résolvez la récurrence $T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{(}n)\rfloor) + \log n$