Projet semestriel

Consignes :

- **Résoudre** les différents exercices à l'aide du **logiciel R sous R-studio**
- Ecrire les **scripts** pour chaque traitement
- Tous les résultats des fonctions à implémenter seront arrondis à 10^{-2} près
- Présenter les résultats dans un **pdf** avec tous les tracés et tableaux de calcul
- **Commenter** et interpréter les résultats lors de la soutenance

Exercice 1

On considère trois suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que : $u_{n+1} = u_n + 2w_n$, $v_{n+1} = -v_n$, $w_{n+1} = 2u_n + w_n$, avec $u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 3$

En utilisant la diagonalisation, exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Eléments de cours : l'optimisation sans contrainte

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réèlles et $X_0 \in D$.

1. - f admet un maximum global en X_0, si $\forall X \in D,\ f(X) \leqslant f(X_0)$
   - f admet un minimum global en X_0, si $\forall X \in D,\ f(X) \geqslant f(X_0)$
   - f admet un maximum local en X_0, si $\exists r > 0,\ \forall X \in D,\ \|X - X_0\| < r,\ f(X) \leqslant f(X_0)$
   - f admet un minimum local en X_0, si $\exists r > 0,\ \forall X \in D,\ \|X - X_0\| < r,\ f(X) \geqslant f(X_0)$
   - Un extremum est un maximum ou un minimum
2. On pose f est de classe C^1 sur D.
   - Si f admet un extremum en X_0, alors $\nabla f(X_0) = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)) = \overrightarrow{0}$
   - On appelle point critique de f tout point X_0, tel que $\nabla f(X_0) = \overrightarrow{0}$
3. On pose f est de classe C^2 sur D et X_0 un point critique.
   - f admet un maximum en X_0 **ssi** la matrice hessienne (matrice des dérivées secondes) de f en X_0 est négative (toutes les valeurs propres sont négatives)
   - f admet un minimum en X_0 **ssi** la matrice hessienne (matrice des dérivées secondes) de f en X_0 est positive (toutes les valeurs propres sont positives)
   - **Remarque** : Si la matrice hessienne est indéfinie (admet deux valeurs propres de signes contraires) alors X_0 est un point selle (ou un point col)

Exercice 2

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^{xy} - e^x + 2$. Déterminer les éventuels extrema de f. Faire un tracé sur $[0,2]^2$

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}^3$ par $g(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$. Déterminer les extrema de g.

3. Soit h définie sur $]0,+\infty[^3$ par $h(x,y,z) = \ln(xyz) - \ln(x)\ln(y)\ln(z)$. Déterminer les éventuels extrema de h.

Eléments de cours : l'optimisation sous contraintes

Soient f, g_1, ..., g_p fonctions de classe C^2 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réèlles et $X_0 \in D$. On s'intéresse au problème :

$$\text{Optimiser } f(X) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} g_1(X) = 0 \\ ... \\ g_p(X) = 0 \end{cases}$$

On pose $A = \{X \in \mathbb{R}^n,\, g_1(X) = ... = g_p(X) = 0\}$. On suppose que A est non vide et on cherche les extrema de f sur A.

On pose $D_g(X) = (\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(X))_{1\leqslant i\leqslant p,\, 1\leqslant j\leqslant n}$, la matrice jacobienne des contraintes.

Les contraintes $g_1, ..., g_p$ sont dites qualifiées en X_0 quand $D_g(X_0)$ est de rang p

1. On pose L : fonction de Lagrange (ou Lagrangien) du problème, définie sur $\mathbb{R}^{n+p}$ par

$$L(X, \alpha_1, ..., \alpha_p) = f(X) - \alpha_1 g_1(X) - ... - \alpha_p g_p(X)$$

   - Les $\alpha_1, ..., \alpha_p$ s'appellent les multicateurs de Lagrange
   - On suppose les contraintes $g_1, ..., g_p$ qualifiées en X_0. Si f admet en X_0 un extremum sous les contraintes $g_1(X_0) = ... = g_p(X_0) = 0$, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que :

$$\nabla L(X_0, \lambda_1, ..., \lambda_p) = \overrightarrow{0}$$

2. On pose X_0 un point critique associé aux multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, ..., \lambda_p$. On note $\lambda_0 = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ et $D^2L(X_0, \lambda_0)$, la matrice hessienne du langrangien en (X_0, λ_0)

   - Si la matrice $D^2L(X_0, \lambda_0)$ est définie positive alors f admet en X_0 un minimum local sous les contraintes $g_1(X) = ... = g_p(X) = 0$
   - Si la matrice $D^2L(X_0, \lambda_0)$ est définie négative alors f admet en X_0 un maximum local sous les contraintes $g_1(X) = ... = g_p(X) = 0$

3. On pose X_0 un point critique associé aux multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, ..., \lambda_p$. On note $\lambda_0 = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ et $D^2L(X_0, \lambda_0)$, la matrice hessienne du langrangien en (X_0, λ_0) et $D_g(X_0)$ la matrice jacobienne des contraintes. On appelle matrice hessienne bordée, la matrice $H(X_0)$ carrée d'ordre $n+p$ définie par :
$$H(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & D_g(X_0) \\ (D_g(X_0))^T & D^2L(X_0, \lambda_0) \end{pmatrix}$$
   - Si les $n-p$ derniers mineurs principaux de $H(X_0)$ alternent en signe et si $det(H(X_0))$ est du même signe que $(-1)^n$, alors f admet en X_0 un maximum local sous les containtes $g_1(X) = ... = g_p(X) = 0$
   - Si les $n-p$ derniers mineurs principaux de $H(X_0)$ alternent en signe et si $det(H(X_0))$ est du même signe que $(-1)^p$, alors f admet en X_0 un minimum local sous les containtes $g_1(X) = ... = g_p(X) = 0$

Exercice 3

1. Optimiser $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $g(x, y) = x - y + 6 = 0$. Faire un tracé sur $[0, 4]^2$
2. Optimiser $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = x+y+z-1 = 0$ et $g_2(x, y, z) = z = 0$
3. Optimiser $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = x^2+y^2+2z = 6$ et $g_2(x, y, z) = x - y - z = 0$
4. Optimiser x^2y sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 3$. Faire un tracé sur $[-2, 2]^2$
5. Optimiser $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} + 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 5x + 5y + 20$ sous la contrainte $2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8 = 3$. Faire un tracé sur $[-3, 3]^2$

Exercice 4

Après s'être documenté sur la loi normale, soit l'énoncé suivant :

On suppose que la distance (en mètres) parcourue pas un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que 10% des javelots atteignent plus de 75m et 25% des javelots parcourent moins de 50m.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot, ainsi que l'écart-type de cette longueur. Interpréter.

Exercice 5

1. Créer une fonction qui identifie les mots ou phrases palindromiques (mots ou phrases qui se lisent dans les deux sens, par exemple RADAR). Cette fonction prendra comme argument le mot "mot" et retournera les phrases : "mot est un palindrome" si le mot = palindrome et "mot n'est pas un palindrome", sinon.

2. Appliquer votre fonction sur les mots "radar", "bonne année", "sept", "kayak", "la mariée ira mal", "statistiques", "engage le jeu que je le gagne", "esope reste ici et se repose". Proposer un traitement pour les lettres à accent.

3. Implḿenter une fonction qui retourne tous les mots palindromiques d'au plus 9 lettres dans un dictionnaire préalablement créé.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer $I_1, I_2, ...I_{10}$

2. Evaluer à 10^{-2} près, $lim_{n\to+\infty}(nI_n)$

Exercice 7 : ACP

Récupérer le tableau des taux de chômage par année et par pays. Vous proposerez deux études, l'une avec les pays uniquement et l'autre avec les deux dernières lignes du tableau des données.

1. Donner la matrice de corrélation des variables.

2. Quelles sont les couples de variables particulièrement corrélés et peu corrélées entre elles ?

3. Combien d'axes principaux doit-on garder pour effectuer l'analyse sur les variables centrées-réduites de ces données. Quelle part d'inertie totale sera alors représentée ?

4. Quelles variables déterminent les deux premières composantes principales (précisez les critères utilisés) ?

5. Donner le cercle de corrélation des variables. Interpréter.

6. Comment peut-on interpréter la première composante principale ? Et la seconde ?

7. Quels sont les individus qui déterminent les deux premiers axes principaux ? (précisez les critères utilisés)

8. Conclure sur l'ACP .