Riešenie sústavy lineárnych rovníc s riedkou maticou

Alžbeta Valachová

Máme zadanú maticu sústavy vo formáte CRS, vektor pravej strany a vektor premenných

Zvolené metódy:

1. Gaussova eliminácia

GEM je pravdepodobne najznámejšia metóda výpočtu sústavy lineárnych rovníc, či už v programovaní alebo pri výpočtoch na papier.

Princíp metódy v programe:

1.krok – usporiadanie matice

V cykle, ktorý bude pracovať pre i od 0 do rozmeru matice (po riadkoch) vytvoríme druhý cyklus, ktorý pôjde od i+1 do rozmeru matice (po stĺpcoch) a v ňom usporiadame čísla v stĺpcoch tak, aby najväčšie bolo vždy na hlavnej diagonále.

2.krok – úprava matice na hornú trojuholníkovú

V ďalšom cykle si deklarujeme premennú f, ktorá je podielom prvku s indexom [i+1,i] a prvku [i,i]. (i=0,...rozmer matice). Táto premenná bude slúžiť na vynulovanie požadovaných prvkov. Odrátame ju postupne od stĺpcov a riadkov tak, aby pod hlavnou diagonálou boli len nuly. Tým vznikne horná trojuholníková matica.

3.krok – výpočet vektoru x

V poslednom cykle musíme upraviť prvky tak, aby sa dali vypočítať premenné podobným spôsobom, ako keby sme to robili ručne na papier. Začíname od konca, vypočítame premennú x(n) v poslednom stĺpci, potom dosadíme do riadku nad ním a vypočítame premennú x(n-1) a tak ďalej.

Vektor výsledkov bude uložený do posledného stĺpca matice hodnôt.

2. Gauss-Siedelova metóda

GSM metóda využíva rozklad matice sústavy na súčet dolnej trojuholníkovej a hornej trojuholníkovej matice.

Pre korene sústavy platí:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = L_*^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(k)}).$$

Kde

L_* ... dolná trojuholníková matica

U ... horná trojuholníková matica

B ... vektor pravej strany

x ... vektor výsledkov

Môžeme to prepísať ako:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Princíp metódy v programe:

Zvolíme si počet iterácii a nastavíme počiatočné hodnoty výsledkov.

V hlavnom cykle najprv pravú stranu matice podelíme prvkom na diagonále a potom vo vnútornom cykle, ktorý prejde všetky stĺpce okrem prvkov na diagonále, dekrementujeme výsledok o podiel prvku v j-tom stĺpci a prvkom na diagonále, ktorý vynásobíme predošlým výsledkom

Porovnanie metód a zhrnutie

Metóda GEM je presnejšia ako metóda GSM, ale za to je pomalšia. GSM sa oplatí použiť v prípade, keď potrebujeme počítať s veľkou maticou a chceme výsledok čo najrýchlejšie. Závisí to samozrejme aj od parametrov počítača, na ktorom program spustíme. V programe som použila funkciu, ktorá odmeria potrebný čas na výpočet, aby sme si to mohli porovnať. V mojom prípade GSM trvalo približne 4 sekundy a GEM 5 sekúnd, na inom počítači to môže byť celkom odlišné.

Konvergencia metód je odlišná.

Pre GSM platí, že vstupná matica sústavy musí byť diagonálne dominantná, inak riešenie môže, ale taktiež nemusí konvergovať.

Pre prvky teda musí platiť:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\ &\vdots \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{n,\,n-1}|. \end{aligned}$$

Metóda GEM konverguje skoro vždy.

Poznámka k programu

Program využíva triedy a dedičnosť. Vytvorila som základnú triedu SlarMatica, od ktorej sú odvodené triedy pre obe metódy. Je to kvôli tomu, že metódy majú niektoré funkcie spoločné.

Načítanie matice som robila tak, že som najprv našla nadpis pre skupinu hodnôt vo vstupnom súbore MATRIX.dat, podľa konkrétneho nadpisu som potom rozdelila hodnoty do príslušných polí. Tie sa po spustení programu vypíšu na obrazovku.

Po vypočítaní sústavy, sa výsledky vypíšu na obrazovku a pre prehľadnosť sa ešte zapíšu do textových súborov uložených v

...\valachova\data

V programe som skontrolovala moje výsledky pomocou referenčných výsledkov, ktoré sme mali k dispozícii. Pre prehľadnosť som po overení funkciu zapoznámkovala.