Arranging couriers by work shifts

Kirill Yudaykin
HSE & NES

03.10.2022

Входные данные

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,11} \\ x_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots, & & \ddots & \vdots \\ x_{7,1} & \dots & \dots & x_{7,11} \end{pmatrix}$$

где $x_{i,j}$ – это необходимое количество курьеров в день i в j-ый час.

Мы получаем данную матрицу из спрогноза модели.

Теперь мы хотим заполнить этот спрос, распределяя курьеров по сменам от 4 до 8 часов, минимизируя количество лишних часов.

Решение

Можно рассматривать минимизацию в каждый их дней как отдельную задачу, поскольку мы не можем переносить смены курьеров между днями (человек не может 4 часа 8-ми часовой смены проработать в один день, а потом 4 часа в следующий, вместо этого мы просто возьмем две смены по 4 часа в каждый из дней для разных курьеров).

Целевыми переменными в задаче будут переменные вида $n_{k,m}$ количества курьеров, назначенных на смену типа k, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (k – категориальная переменная для смен), к m-ый час, $m \in \{0, \dots, 7\}$, т.к. работник не может начать смену в 18:00 и позже, т.к. он не проработает минимальную 4-х часовую смену.

Тогда мы будем минимизировать двойную сумму вида

$$\min_{n_{k,m}} \quad \sum_{m=0}^{10} \sum_{k=0}^{4} n_{k,m}$$

При ограничениях:

(1) Ограничения на спрос должны для каждого часа должны иметь вид сумм количеств работающих курьеров при учете смены сотрудника.

То есть необходимо учитывать разную длительность смен, например, для $m = 4$ ограничение будет иметь вид:

$$\sum_{k=1}^{4} n_{k,0} + \sum_{t=1}^{4} \sum_{k=0}^{4} n_{k,t} \geq x_4,$$

т.к. курьер, начавший 4-х часовую смену в 10:00 уже не будет работать в 14:00.

Также нужно учесть, что начиная с m=4 курьеры не могут начинать 8-часовые смены (с m=5 8-ми часовые и т.д.), т.к. в противном случае они не смогут их закончить.

Тогда для каждого $m \in \{0, \ldots, 10\}$ ограничения будут иметь вид:

$m = 0$

$$\sum_{k=0}^{4} n_{k,0} \geq x_0$$

$m = 1$

$$\sum_{t=0}^{1} \sum_{k=0}^{4} n_{k,t} \geq x_1$$

$m = 2$

$$\sum_{t=0}^{2} \sum_{k=0}^{4} n_{k,t} \geq x_2$$

$m = 3$

$$\sum_{t=0}^{3} \sum_{k=0}^{4} n_{k,t} \geq x_3$$

$m = 4$

$$\sum_{k=1}^{4} n_{k,0} + \sum_{t=1}^{3} \sum_{k=0}^{4} n_{k,t} + \sum_{k=0}^{3} n_{k,4} \geq x_4$$

$m = 5$

$$\sum_{k=2}^{4} n_{k,0} + \sum_{k=1}^{4} n_{k,1} + \sum_{t=2}^{3} \sum_{k=0}^{4} n_{k,t} + \sum_{k=0}^{3} n_{k,4} + \sum_{k=0}^{2} n_{k,5} \geq x_5$$

$m = 6$

$$\sum_{k=3}^{4} n_{k,0} + \sum_{k=2}^{4} n_{k,1} + \sum_{k=1}^{4} n_{k,2} + \sum_{k=0}^{4} n_{k,3} + \sum_{k=0}^{3} n_{k,4} + \sum_{k=0}^{2} n_{k,5} + \sum_{k=0}^{1} n_{k,6} \geq x_6$$

$m = 7$

$$n_{4,0} + \sum_{k=3}^{4} n_{k,1} + \sum_{k=2}^{4} n_{k,2} + \sum_{k=1}^{4} n_{k,3} + \sum_{k=0}^{3} n_{k,4} + \sum_{k=0}^{2} n_{k,5} + \sum_{k=0}^{1} n_{k,6} + n_{0,7} \geq x_7$$

$m = 8$

$$n_{4,1} + \sum_{k=3}^{4} n_{k,2} + \sum_{k=2}^{4} n_{k,3} + \sum_{k=1}^{3} n_{k,4} + \sum_{k=0}^{2} n_{k,5} + \sum_{k=0}^{1} n_{k,6} + n_{0,7} \geq x_8$$

$m = 9$

$$n_{4,2} + \sum_{k=3}^{4} n_{k,3} + \sum_{k=2}^{3} n_{k,4} + \sum_{k=1}^{2} n_{k,5} + \sum_{k=0}^{1} n_{k,6} + n_{0,7} \geq x_9$$

$m = 10$

$$n_{4,3} + n_{3,4} + n_{1,6} + n_{0,7} \geq x_{10}$$

Переменные $n_{1,7}, n_{2,7}, n_{3,7}, n_{4,7}, n_{2,6}, n_{3,6}, n_{4,6}, n_{3,5}, n_{4,5}, n_{4,4}$ мы полагаем тождественными 0, т.к. такие смены невозможно организовать.

Тогда задача формулируется как задача целочисленного программирования и решается с помощью библиотеки *cvxpy*.

Финальная реализация

В финальном решении задачи использовалась целевая функция вида

$$\min_{n_{k,m}} \left[\sum_{m=0}^{10} \sum_{k=0}^{4} n_{k,m} + \alpha \sum_{t=0}^{10} n_{1,t} + \beta \sum_{t=0}^{10} n_{2,t} + \gamma \sum_{t=0}^{10} n_{3,t} + \zeta \sum_{t=0}^{10} n_{4,t} \right],$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \zeta \in \mathbb{R}_+$ – эмпирически подобранные константы, являющиеся "штрафом" за использование длительных смен в решении. Данное решение чем-то напоминает регуляризацию Lasso в моделях машинного обучения. Подобрав данные параметры удалось существенно улучшить качество распределения в терминах минимизации количества лишних рабочих часов.