

# HỌC TĂNG CƯỜNG

Phạm Phước Bảo Tín

September 2024

## Câu 1: Xác suất có điều kiện

Trong thí nghiệm gieo hai quân xúc xắc có 6 mặt đồng chất. Biết rằng các mặt xuất hiện trên hai quân không giống nhau.

(a) Xác định không gian xác suất.

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, x_1 \neq x_2\}. \text{ Vì vậy } |\Omega| = 6 \times 5 = 30$$
$$F = \{\emptyset, \{(1, 2)\}, \{(2, 3)\}, \{(1, 4)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}, \{(3, 1)\}, \dots\}$$

(b) Tính xác suất một trong hai quân ra mặt có 6 điểm.

- + Nếu con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 6:  $\{(6, x_2) \mid x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ . Vì vậy có 5 kết quả.
- + Nếu con xúc xắc thứ hai xuất hiện mặt 6:  $\{(x_1, 6) \mid x_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ . Vì vậy có 5 kết quả.
- + Xác suất cần tìm là  $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ .

## Câu 2: Xác suất có điều kiện

Thông thường một đồng xu có hai mặt, giả định rằng một mặt có ký hiệu là N và mặt còn lại có ký hiệu là S. Tuy nhiên, có ba đồng xu đặc biệt. Đồng xu thứ nhất có hai mặt đều có ký tự S, đồng xu thứ hai có cả hai mặt đều là ký tự N, đồng xu thứ ba có một mặt là S một mặt là N. Chọn ngẫu nhiên một đồng xu từ ba đồng xu nói trên để tung, và nhận được mặt có ký tự là N. Tính xác suất mặt còn lại là S.

- A: sự kiện đồng xu được chọn có cả hai mặt là S và N (đồng xu thứ ba).
- B: sự kiện mặt nhận được là N.

Ta cần tính xác suất điều kiện  $P(A \mid B)$ , nghĩa là xác suất đồng xu được chọn là đồng xu có hai mặt khác nhau (S và N) khi biết rằng mặt nhận được là N.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Xác suất chọn đồng xu thứ ba, đồng xu có hai mặt khác nhau, là  $P(A) = \frac{1}{3}$ .
- Xác suất để nhận được mặt N nếu đã chọn đồng xu thứ ba là  $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$
- Xác suất để nhận được mặt N từ ba đồng xu có thể được tính như sau:

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \text{xu thứ hai})P(\text{xu thứ hai}) + P(B \mid \text{xu thứ nhất})P(\text{xu thứ nhất})$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

+ Cuối cùng, tính xác suất  $P(A \mid B)$ :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Vậy xác suất để mặt còn lại là S, khi biết rằng mặt nhận được N là  $\frac{1}{3}$ .

### Câu 3: Biến cố độc lập có điều kiện

Gọi A, B, C lần lượt là ba biến cố độc lập trong một không gian xác suất. Biết rằng  $P(C) > 0$ .

(a) Chứng minh rằng  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

Ta phân tích  $P(A \cap B | C)$ :

$$P(A \cap B | C) = \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B | C) = \frac{P(A \cap B)P(C)}{P(C)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B | C) = \frac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B | C) = P(A)P(B) \quad (4)$$

Ta phân tích  $P(A | C)P(B | C)$ :

$$P(A | C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C)}{P(C)} = P(A) \quad (5)$$

$$P(B | C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)P(C)}{P(C)} = P(B) \quad (6)$$

$$P(A | C)P(B | C) = P(A)P(B) \quad (7)$$

Từ (4) và (7) ta chứng minh được rằng:  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

### Câu 4: Tính PMF từ CDF

Biết X là biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm phân phối tích lũy (CDF) được định nghĩa như sau:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Xác định  $\{p_X(x) | x = 0, 1\}$ .

Hàm khối xác suất được xác định như sau:

$$p(x) = p_X(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Vì vậy :

$$p_X(0) = \frac{1}{2}$$

$$p_X(1) = 1$$

### Câu 5: Biến ngẫu nhiên liên tục

Biết X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm phân phối xác suất(PDF) được định nghĩa như sau:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

(a) Xác định c.

Ta có tính chất tích phân toàn miền bằng 1 của hàm mật độ xác suất:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Vì tổng xác suất toàn miền là 1 nên:

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 c(4x - 2x^2) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{\int_0^2 (4x - 2x^2) dx}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{3}{8}$$

(b) Tính  $P(1/2 < X < 3/2)$ .

Xác suất trong 1 khoảng (a,b) cũng có thể được tính bằng hàm mật độ xác suất:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P\left(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx$$

$$P\left(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) dx$$

$$P\left(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) = \frac{11}{16}$$