수치해석 I 과제 #1

컴퓨터소프트웨어학부
2018008559
신상윤

본과제 에 작성된 내용은 (아래에 작성한 바와 같이 일부 참고문헌의 도움을 받거나 동료들과 상의는 하였지만) 기본적으로는 본인 스스로 해결하고 작성한 것임을 서약합니다. 서약이 거짓이면 F학점을 받는것에 동의합니다.

2022/3/19 신상윤 (신상윤)

참고한 내용 : 교재.

1.1 - #6.

(a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $[0,2]$

$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(-1) = f'(1) = 0$

$|f(0)| = 0$, $|f(1)| = 1$, $|f(2)| = \frac{4}{5}$

$\therefore \max_{0 \le x \le 2} |f(x)| = |f(1)| = 1$

(b) $f(x) = x^2\sqrt{(4-x)}$ $[0,4]$

$f'(x) = 2x\sqrt{(4-x)} + x^2 \cdot \frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$

$= 2x\sqrt{4-x} + (-\frac{x^2}{2})\frac{\sqrt{4-x}}{4-x} = \sqrt{4-x}\left(2x - \frac{x^2}{8-2x}\right)$

$= \frac{\sqrt{4-x}}{8-2x}(16x - 5x^2)$, $f'(0) = f'(\frac{16}{5}) = 0$

$|f(0)| = 0$, $|f(4)| = 0$, $|f(\frac{16}{5})| = 9.1589344$

$\therefore \max_{0 \le x \le 4} |f(x)| = |f(\frac{16}{5})| = 9.1589344$

(c) $f(x) = x^3 - 4x + 2$ $[1,2]$

$f'(x) = 3x^2 - 4$, $f'(\frac{2}{\sqrt{3}}) = f'(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = 0$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547$ $|f(1)| = +1$, $|f(2)| = 2$, $|f(\frac{2}{\sqrt{3}})| = 1.079$

$\therefore \max_{1 \le x \le 2} |f(x)| = |f(2)| = 2$

(d) $f(x) = x\sqrt{3-x^2}$ $[0,1]$

$f'(x) = \sqrt{3-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(3-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$= \sqrt{3-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}}$, $f'(\sqrt{\frac{3}{2}}) = f'(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0$

$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247$ $|f(0)| = 0$, $|f(1)| = \sqrt{2}$

$\therefore \max_{0 \le x \le 1} |f(x)| = |f(1)| = \sqrt{2}$

1.1 - #8

$f(x) = 0$ 을 만족하는 $[a,b] \ni x$ 가 2개 이상 (p, q) 존재한다고 가정.

$f(p) = f(q) = 0$.

$\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = f'(c)$ 인 c가 (p, q) 에 존재한다. (by 평균값정리)

$f'(c) = 0$ 하지만 문제 조건에 의해 모든 (a,b)에 있는 x 에 대해 $f'(x) \neq 0$을 만족해야 하므로 모순.

$\therefore$ $p \in [a,b]$, $f(p) = 0$ 인 p 는 최대 1개 존재한다.

1.1 #15

$f(x) = xe^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}\cdot 2x = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$

$f''(x) = 2x\cdot e^{x^2} + 4x\cdot e^{x^2} + 4x^3 e^{x^2}$

$= (4x^3+6x)e^{x^2}$

$f'''(x) = (12x^2+6)e^{x^2} + (4x^3+6x)2x\, e^{x^2}$

$= (8x^4+24x^2+6)e^{x^2}$

$f''''(x) = (32x^3+48x)e^{x^2} + (8x^4+24x^2+6)2x\, e^{x^2}$

$= (16x^5+80x^3+60x)e^{x^2}$

$f^{(5)}(x) = (80x^4+240x^2+60)e^{x^2} + (16x^5+80x^3+60x)2x e^{x^2}$

$= (32x^6+240x^4+360x^2+60)e^{x^2}$

$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$

$= 0 + x + 0 + \frac{6}{6}x^3 + 0 = \underline{x + x^3}$

(a) $|f(x) - P_4(x)| = |R_4(x)|$

$= \left|\frac{f^{(5)}(\xi(x))}{5!}(x-x_0)^5\right| \quad \xi(x)\in[x_0, x]$

$= \left|\frac{x^5}{5!} e^{\xi(x)^2}(32\xi(x)^6 + 240\xi(x)^4 + 360\xi(x)^2 + 60)\right|$

upper bound for $0 \le x \le 0.4$

$\le \left|\frac{(0.4)^5}{5!} e^{0.4^2}(32\cdot(0.4)^6 + 240(0.4)^4 + 360\cdot(0.4)^2 + 60)\right|$

$= 0.0124048$

$\therefore |f(x) - P_4(x)| \le 0.012405$

(b) $\int_0^{0.4} f(x)dx \approx \int_0^{0.4} P_4(x)\,dx = \int_0^{0.4}(x^3+x)\,dx$

$= {}_0^{0.4}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right] = 0.0864$

(c)

$\left|\int_0^{0.4} f(x)dx - \int_0^{0.4} P_4(x)dx\right| = \left|\int_0^{0.4} R_4(x)\,dx\right|$

$= \left|\int_0^{0.4}\frac{f^{(5)}(\xi(x))}{5!}x^5\,dx\right| \le \frac{f^{(5)}(0.4)}{5!}\left|\int_0^{0.4}x^5 dx\right|$

$= 8.269866305\times 10^{-4}$

(d) $f'(0.2) = 1.124075636$

$P_4'(0.2) = 1.12$

error $= f'(0.2) - P_4'(0.2) = 0.004075636$

1.1 #22

$f(x) = x^3+2x+K$, $f(x)$는 연속, 미분가능

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

by Intermediate Value theorem

$-\infty, \infty$ 사이에 있는 $f(c)=0$ 인

c가 존재. 따라서 그래프는 x축을 지난다.

그래프가 2번이상 x축을 지난다고 가정.

$f(p)=0$, $f(q)=0$ 인 p, q가 존재

by Rolle's Theorem $\quad d\in(p,q)$

$f'(d) = \frac{f(p)-f(q)}{p-q} = 0$ 인 d가 존재한다.

하지만 $f'(x) = 3x^2+2 > 0$ 이므로 모순.

$\therefore$ 그래프는 K 값에 관계없이

정확히 x축과 1번 만난다.

1.2 - #1

(a) absolute error $= |P-P^*| = 1.264489 \times 10^{-3}$

relative error $= \frac{|P-P^*|}{|P|} = 4.024994 \times 10^{-4}$

(b) A.E $= 7.3464102 \times 10^{-6}$

R.E $= 2.3384349 \times 10^{-6}$

(c) A.E : $2.818284579 \times 10^{-4}$

R.E : $1.03678896 \times 10^{-4}$

(d) A.E : $2.135623731 \times 10^{-4}$

R.E : $1.510114022 \times 10^{-4}$

1.2 - #6

(a) $P = 133.921$ A.E $= 0.079$

$P^* = 134$ R.E $= 5.899 \times 10^{-4}$

(b) $P = 132.501$ A.E $= 0.499$

$P^* = 133$ R.E $= 3.766 \times 10^{-3}$

(c) $P = 1.673$ A.E $= 0.327$

$P^* = 2$ R.E $= 0.195457$

(d) $P = 1.673$ A.E $= 0.003$

$P^* = 1.67$ R.E $= 1.79318 \times 10^{-3}$

1.2 - #22

(a) $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = -1.827105379$

(b) $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}} = 6.959452 \times 10^{-3}$

(c) 실제 $e^{-5} = 6.74 \times 10^{-3}$

(b)가 더 정확한 근사 이다.

마이너스 부호를 없애는 것이 정확한 근사가 가능하다.

1.2 - #23

(a) $m = 0.89646 \approx 0.8965$

$d_1 = -6.099 - 0.8965 \times (-6.99)$

$= -6.099 + 6.267 = 0.168$

$f_1 = 14.22 - 14.2 \times 0.8965$

$= 14.22 - 12.73 = 1.49$

$y = 8.869$

$x = \frac{14.2 + 61.99}{1.130} = \frac{76.19}{1.13} = 67.42$

(b) $m = -2.233$

$d_1 = 112.2 + 27.24 = 139.4$

$f_1 = -0.1376 - 0.3059 = -0.4435$

$y = -3.181 \times 10^{-3}$

$x = \frac{-0.137 + 0.03881}{8.11} = -0.01211$

1.3 - #6

(a) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$

$|\sin\frac{1}{n} - 0| \le |\frac{1}{n}| \times 1$ $\boxed{O(\frac{1}{n})}$

($\sin x \le x$, 0부근에서)

(b) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n^2} = 0.$

$|\sin\frac{1}{n^2} - 0| \le |\frac{1}{n^2}|$ $\boxed{O(\frac{1}{n^2})}$

(c) $\lim_{n\to\infty} (\sin\frac{1}{n})^2 = 0$ $\boxed{O(\frac{1}{n^2})}$

$|(\sin\frac{1}{n})^2 - 0| \le |\sin\frac{1}{n}||\sin\frac{1}{n}| \le \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

(d) $\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = 0$

$|\ln(n+1) - \ln n - 0| = |\ln(\frac{n+1}{n})| = |\ln(1+\frac{1}{n})| < \frac{1}{n}$

$(\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots \quad (-1 < x \le 1))$

$\boxed{O(\frac{1}{n})}$

1.3 - #7

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$f(x) = \sin x$

$\sin x = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(\varepsilon(x))}{2}\cdot(x^2)$

$= x + \frac{x^2}{2}(-\sin(\varepsilon(x)))$

$\frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{x}{2}(-\sin(\varepsilon(x)))$ $(\sin x \le x)$

$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|-\frac{x}{2}\sin(\varepsilon(x))\right| \le \left|-\frac{x}{2}\right| |\varepsilon(x)|$

$\le \left|\frac{x^2}{2}\right|$ $(0 < \varepsilon(x) < x)$ $\therefore O(h^2)$

(b)

$\cos h = f(0) + f'(0)\cdot h + \frac{f''(\varepsilon(h))}{2}h^2$

$= 1 - \frac{h^2}{2}\cos(\varepsilon(h))$

$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{h}{2}\cos(\varepsilon(h))$

$\therefore O(h)$

$\left|\frac{1-\cos h}{h} - 0\right| = \left|\frac{h}{2}\cos(\varepsilon(h))\right| \le \left|\frac{h}{2}\right|$

(c)

$f(h) = f(0) + f'(0)\cdot h + \frac{f''(\varepsilon(h))}{2}h^2$

$f(h) = \sin h - h\cos h$, $f'(h) = h\sin h$

$f''(h) = \sin h + h\cos h$

$\sin h - h\cos h = \frac{h^2}{2}(\sin(\varepsilon(h)) + \varepsilon(h)\cdot\cos(\varepsilon(h)))$

$\left|\frac{\sin h - h\cos h}{h} - 0\right| = \frac{h}{2}(\sin(\varepsilon(h)) + \varepsilon(h)\cdot\cos(\varepsilon(h)))$

$\le \frac{h}{2}|\varepsilon(h) + \varepsilon(h)| \le h^2$

$(0 < \varepsilon(h) < h)$

$\therefore O(h^2)$

(d) $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2}e^{\varepsilon(h)}$

$\left|\frac{1-e^h}{h} + 1\right| = \left|-\frac{h}{2}e^{\varepsilon(h)}\right|$

$(0 < \varepsilon(h) < h)$

$h \to 0$ $\le \left|\frac{h}{2}\right|$ $\therefore \boxed{O(h)}$

1.2 - #22

도움 주신분 : 김지호

(a) $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!}$

$= 1 - 5 + 12.5 - 20.8 + 26.0$
$- 26.0 + 21.7 - 15.5$
$+ 9.68 - 5.38$

$= -1.8$ (by three-digit chopping)

(b) $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$

$\simeq \frac{1}{1+5+12.5+20.8+26.0+26.0+21.7+15.5+9.68+5.38}$

$= 6.96 \times 10^{-3}$ (by three-digit chopping)

(c) 실제 값은 6.74×10^{-3}

(a)의 방법은 degree가 18 이 되어서야 6.86×10^{-3} 으로 근사 되었다

(b)의 방법이 더 정확하다 할수있다.

(a)는 값이 계속 진동하는 반면,

(b)는 꾸준히 실제 값에 도달하기 때문이라 생각된다.