서약문구 : 본과제에 작성된내용은 (아래에 작성한 바와 같이 일부 참고문헌의 도움을 받거나 동료들과 상의는 하였지만) 기본적으로는 본인 스스로 해결하고 작성한 것임을 서약합니다. 서약이 거짓이면 F학점을 받는 것에 동의합니다.

날짜: 2022/4/17 2018008559 신상윤 (신상윤)

참고문헌 : 교재

3.1 - #13 , P(x) 코드로 계산.

(a) $P(x) = \frac{(x-0.3)(x-0.6)}{(0-0.3)(0-0.6)} f(0) + \frac{(x-0)(x-0.6)}{(0.3-0)(0.3-0.6)} f(0.3) + \frac{(x-0)(x-0.3)}{(0.6-0)(0.6-0.3)} f(0.6)$

$\boxed{= -11.2201774x^2 + 3.8082106 + 1}$

$f(x) = e^{2x}\cos 3x$, let $g(x) = e^{2x}\sin 3x$

then

$f'(x) = 2e^{2x}\cos 3x + e^{2x} \cdot -3\sin 3x$

$= 2f(x) - 3g(x)$

$g'(x) = 2g(x) + 3f(x)$

$f''(x) = 4f(x) - 6g(x) - 6g(x) - 9f(x)$

$= -5f(x) - 12g(x)$

$f^{(3)}(x) = -10f(x) + 15g(x) - 24g(x) - 36f(x)$

$= -46f(x) - 9g(x)$

$f^{(4)}(x) = -92f(x) + 138g(x) - 18g(x) - 27f(x)$

$= -119f(x) + 120g(x)$

$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\right| |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$

$\xi(x) \in [x_0, x_2]$

$f^{(3)}(\xi(x)) = -46e^{2\xi(x)}\cos 3\xi(x) - 9e^{2\xi(x)}\sin 3\xi(x)$

임계점 : $f^{(4)}(\xi(x)) = -119f(\xi(x)) + 120g(\xi(x))$
$= 0$

정리하면 $\tan 3x = \frac{119}{120}$ 일때 임계점임.

$\tan(3x + 2\pi n) = \frac{119}{120}$

$3x = \tan^{-1}\left(\frac{119}{120}\right) - 2\pi n$, $x \in [0, 0.6]$

$n=0$ 일때만 조건 만족 $\underline{x = 0.260404}$

$f^{(3)}(0)$, $f^{(3)}(0.6)$, $f^{(3)}(0.260404)$

$= -46$, $= 5.5999$, $= -65.6522$

$|\max(f^{(3)}(\xi(x)))| = 65.6522$

$\left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\right| \le 10.94203$

$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| = |x(x^2 - 0.9x + 0.18)|$

미분 → $x^2 - 0.9x + 0.18 + 2x^2 - 0.9x = 3x^2 - 1.8x + 0.18 = 0$

$x_1 = 0.4732$, $x_2 = 0.1267949$

$f(0)$, $f(0.6)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$

$= 0$, $= 0$, $= -0.0103923$, $= 0.0103923$

$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \le 0.0103923$

$\therefore |f(x) - P(x)| \le 10.94203 \times 0.0103923$

$= 0.113713$

(b) $P(x) = \frac{(x-2.4)(x-2.6)}{(2-2.4)(2-2.6)} f(2) + \frac{(x-2)(x-2.6)}{(2.4-2)(2.4-2.6)} f(2.4) + \frac{(x-2)(x-2.4)}{(2.6-2)(2.6-2.4)} f(2.6)$

$\boxed{= -0.01306344x^2 + 0.896449708x - 0.6324960}$

$$|f(x)-P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\right| |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$f(x) = \sin(\ln x)$ $\quad f''(x) = \dfrac{-\sin\ln x \cdot \frac{x}{x} - \cos\ln x}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{\cos\ln x}{x}$ $\quad = \dfrac{-\sin\ln x - \cos\ln x}{x^2}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{\left(-\cos\ln x \cdot \frac{1}{x} + \sin\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)x^2 + (\sin\ln x + \cos\ln x)2x}{x^4}$$

$$= \frac{3\sin\ln x + \cos\ln x}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{\left(3\cos\ln x \cdot \frac{1}{x} - \sin\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)x^3 - (3\sin\ln x + \cos\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{2\cos\ln x - 4\sin\ln x}{x^4}$$

$f^{(3)}(x)$ 의 임계점 구하기 : $2\cos\ln x = 4\sin\ln x$

$\frac{1}{2} = \tan\ln x$, $2n\pi + \ln x = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$

$x = e^{0.4636476 - 2n\pi}$, $x \in [2.0, 2.6]$ 이므로

$-0.0782 \le n \le -0.0365$ $\quad \therefore$ 임계점 X.

$f(2.0)/3!$ $\quad f(2.6)/3!$

$\quad \|$ $\quad \|$

0.05596089021 $\quad 0.02870408824$

$$\therefore \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\right| \le 0.0559608902\text{1}$$

$|(x-2)(x-2.4)(x-2.6)|$ 에서 임계점 구하기.

$g(x) = x^3 - 7x^2 + 16.24x - 12.48$

$g'(x) = 3x^2 - 14x + 16.24 = 0$

$x_1 = 2.509716$, $x_2 = 2.156949913$

$g(x_1) = -5.049 \times 10^{-3}$, $g(x_2) = 0.0169$

$\therefore |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \le 0.0169$

$|f(x)-P(x)| \le 0.0559608902\text{1} \times 0.0169$

$= 9.45789 \times 10^{-4}$

(c) $\boxed{P(x) = 0.01970056x^3 - 1.0625903x^2 + 2.532452899x - 1.6668681913}$

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -x^{-2}$

$f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

$f^{(5)}(x) = 24x^{-5} > 0$

$\left|\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}\right| \le 0.25$ ($\xi(x) = 1$ 일때)

$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| = g(x)$

$g(x) = x^4 - 4.8x^3 + 8.59x^2 - 6.792x + 2.002$

$g'(x) = 4x^3 - 14.4x^2 + 17.18x - 6.792 = 0$

$x_1 = 1.04189$, $x_2 = 1.2$, $x_3 = 1.35811$

$\quad \downarrow \quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow$

-2.25×10^{-4} $\quad 4\times10^{-4}$ $\quad -2.25\times10^{-4}$

$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| \le 4\times10^{-4}$

$\therefore |f(x)-P(x)| \le 0.25 \times 4\times10^{-4}$

$= 10^{-4}$

(d) $\boxed{P(x) = -0.0079318x^3 - 0.5455x^2 + 1.0066x + 1}$

$f(x) = \cos x + \sin x$ $\quad f'(x) = \cos x - \sin x$

$f''(x) = -\sin x - \cos x$ $\quad f^{(3)}(x) = \sin x - \cos x$

$f^{(4)}(x) = \cos x + \sin x$ $\quad f^{(5)}(x) = \cos x - \sin x$

임계점 구하기 $\cos x - \sin x = 0$, $\tan x = 1$

$x + 2n\pi = \frac{\pi}{4}$, $\quad 0 \le \xi(x) \le 1$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi} \le n \le \frac{1}{8}$, $n=0$ 일때 임계점

$$\left|\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}\right| \le \left|\frac{f^{(4)}(1)}{4!}\right| = 0.0589255$$

$g(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$= x^4 - 1.75x^3 + 0.875x^2 - 0.125x$

$g'(x) = 4x^3 - 5.25x^2 + 1.75x - 0.125 = 0$

$x_1 = 0.098187 \quad x_2 = 0.382727 \quad x_3 = 0.831586$

$\downarrow \quad -5.4\times10^{-3} \quad 3.67725\times10^{-3} \quad -0.027$

$\therefore |g(x)| \le 0.02700819058$

$|f(x) - P(x)| \le 0.0589255 \times 0.027$

$= 1.591472892\times10^{-3}$

#22

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$P_n(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^k$

$P_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$P_n'(x_0) = f'(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^k$

재귀적으로 $P_n^{(k)}(x_0) = f_n^{(k)}(x_0), \ 0 \le k \le n+1$ ...①

Let $g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(t-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$

$g(x_0) = f(x_0) - P(x_0) = 0$, (by ①)

$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$

따라서 by Rolle's theorem

$g'(\varepsilon_1) = 0$ 인 ε_1 존재한다. $\in [x, x_0]$

($P_n(x)$는 n차 다항식 → $P^{(n+1)}$ 존재
$f^{(n+1)}$ 존재 → 가정)

$g'(t) = f'(t) - P'(t) - [f(x) - P(x)] \cdot (n+1)\frac{(t-x_0)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$

$g'(x_0) = f'(x_0) - P'(x_0) = 0$ (by (1))

마찬가지로 by Rolle's theorem

$g''(\varepsilon_2) = 0$ 인 $\varepsilon_2 \in [\varepsilon_1, x_0]$ 존재한다.

반복하면

$g^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1}) = 0$ 인 $\varepsilon_{n+1} \in [\varepsilon_n, x_0]$ 존재한다.

$0 = g^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1}) = f^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1}) - P^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1}) - [f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}$

인 $\varepsilon_{n+1} \in [\varepsilon_n, x_0]$ 존재.

P는 n차 다항식이므로 $P^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1}) = 0$

정리하면

$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 인

ε_{n+1}이 존재한다 할 수 있다.

($[\varepsilon_n, x_0] \subset [\varepsilon_{n-1}, x_0] \subset \cdots \subset [x, x_0]$)

2.2-#6

$f(0.5)$를 근사하기 위해 neville's method를 사용했으므로 $x = 0.5$

$P_{0,1,2} = \frac{27}{7} = \frac{(x-x_2)P_{0,1} - (x-x_0)P_{1,2}}{x_0 - x_2}$

$= \frac{-0.2\times3.5 - 0.5\times P_{1,2}}{-0.7}, \ P_{1,2} = 4$

$$P_{1,2} = 4 = \frac{(x-x_2)P_1 - (x-x_1)P_2}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{-0.2\times 2.8 - 0.1\times P_2}{-0.3}$$

$$P_2 = 6.4$$

3.3-#16

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_2,x_1] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$
$$\frac{50}{7} = \frac{10 - f[x_0,x_1]}{0.7}$$

$$f[x_0,x_1] = 5$$

$$f[x_1,x_2] = 10 = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{6 - f[x_1]}{0.3}$$

$$f[x_1] = 3$$

$$f[x_0,x_1] = 5 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{3 - f[x_0]}{0.4}$$

$$f[x_0] = 1$$

#19

		f					
x_0	-2	1	3	2	-1	0	0
x_1	-1	4	7	-1	-1	0	
x_2	0	11	5	-4	-1		
x_3	1	16	-3	-7			
x_4	2	13	-17				
x_5	3	-4					

$$P_n(x) = 1 + 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) - (x+2)(x+1)x$$
$$= -x^3 - x^2 + 7x + 11$$

∴ Polynomial interpolating 을 하면 3차 Polynomial 이다.

#23.

Divided Differences 로 계수를 결정할때.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 으로 시작하면

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P_n(x)$ 의 x^n 계수 $= f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ 으로 시작하면

마찬가지로 $P_n(x)$의 x^n계수 $= f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$

인데 (n+1)개의 점으로 결정되는 Polynomial 은 유일하므로 x^n계수는 같아야한다.

∴ $f[x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

3.4-#9 코드로 계수 구함.

$\text{speed} = \frac{\text{Distance}}{\text{Time}}$

Time	Distance f(time)	Speed ($\frac{D}{T}$)
0	0	75
0	0	
3	225	77
3	225	
5	383	80
5	383	
8	623	74
8	623	
13	993	72
13	993	

table로

Hermite interpolation을 사용하여 계수를 구할수 있다.

$$P(x)=0+75(x-0)+0(x-0)(x-0)+\frac{2}{9}(x-0)^2(x-3)$$
$$-0.031111(x-0)^2(x-3)^2-0.006444(x-0)^2(x-3)^2(x-5)$$
$$+0.0022639(x-0)^2(x-3)^2(x-5)^2$$
$$-0.0009132(x-0)^2(x-3)^2(x-5)^2(x-8)$$
$$+0.0001305(x-0)^2(x-3)^2(x-5)^2(x-8)^2$$
$$-0.0000202(x-0)^2(x-3)^2(x-5)^2(x-8)^2(x-13)$$

(a) $t=10$일때 거리와 속도.

거리 $= P(10) = 742.5028391$ feet

$P'(10) = ?$ 구한 $P(x)$로 측정값 계산.

$$P'(x) = 75+\frac{2}{3}(x^2-2x)-0.031111$$
$$(4x^3-18x^2+18x)-0.006444x(5x^3-44x^2+117x-90)$$
$$+0.0022639\cdot 2x(3x^4-40x^3+188x^2-360x+225)$$
$$-0.0009132x(7x^5-144x^4+1110x^3-3968x^2+6435x$$
$$-3600)+0.0001305\cdot 4x(2x^6-56x^5+621x^4$$
$$-3460x^3+10081x^2-14220x+7200)$$
$$-0.0000202x(9x^7-360x^6+5810x^5$$
$$-48900x^4+230325x^3-600052x^2$$
$$+782640x-374400)$$

$P'(10) = 48.31010333$ feet/sec

(b) 55 mile/hour $= 80.667$ feet/sec

전개하면 $P'(x) =$
$$-0.0001818x^8+0.008316x^7-0.152986x^6$$
$$+1.45703x^5-7.68567x^4+22.0172x^3$$
$$-30.2659x^2+14.3142x+75$$

$P'(x) = 80.667$ 일때 만족하는 가장작은 x는 5.62624

(C) $x=12.3797$에서 121.582로 가장 크다.

(by code)

$P'(10) = 48.381732$

$P'(5.6488) = 80.6667$

$\text{Max}(P'(x)) = 119.417338$ at 12.3718

#11 - (a)

$P(x)$ 가 $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$ $(k=0 \sim n)$ 를 만족하는 또다른 최대 $2n+1$차 다항식이라 하자. ($P(x)$ 존재한다 가정)

Let $D(x) = H_{2n+1}(x) - P(x)$

H_{2n+1}, P 의 정의에 따라

$D(x_k) = H_{2n+1}(x_k) - P(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0$

$D'(x_k) = H'_{2n+1}(x_k) - P'(x_k) = f'(x_k) - f'(x_k) = 0$

$(k=0 \sim n)$ 이다.

$D(x_0) = 0$ 이므로 $D(x) = (x-x_0)Q(x)$ 로 나타낼수있고 미분을 하고 $D'(x) = Q(x) + (x-x_0)Q'(x)$

$D'(x_0) = 0$ 이므로 $Q(x) = (x-x_0)Q_1(x)$

$\therefore D(x) = (x-x_0)^2 Q_1(x)$ 이다.

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 에서 모두 만족하므로

$D(x) = (x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2 Q_2(x)$ 로

나타낼수 있다.

따라서 $D(x)$는 최소 $2n+2$ 차 다항식인데

P와 H_{2n+1} 은 최대 $2n+1$차 다항식

이므로 모순이다.

$\therefore P(x) = H_{2n+1}(x)$.

(b) Let $g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \dfrac{(t-x_0)^2(t-x_1)^2 \cdots (t-x_n)^2}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2}\left(f(x) - H_{2n+1}(x)\right)$

then $g(x_k) = f(x_k) - H_{2n+1}(x_k) = 0$

$g(x) = f(t) - H_{2n+1}(t) - (f(x) - H_{2n+1}(x)) = 0$

$\rightarrow x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 에서 $g(y) = 0$.

이므로 by Rolle's theorem

$g'(x) = 0$ 인 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 이

$[x, x_0], [x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ 에 존재 한다.

추가로 $g'(t) = f'(t) - H'_{2n+1}(t) - \frac{d}{dt}(\quad)$

에서 $R(t) = (t-x_0)^2 Q(t)$ 라하면

$R'(t) = 2(t-x_0)Q(t) + (t-x_0)^2 Q'(t)$

$R'(x_0) = 0 \rightarrow g'(x_0) = 0$

$\therefore x_0, x_1, \cdots, x_n$ 에서 $g'(y) = 0$

$\rightarrow \overbrace{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, x_0, x_1, \cdots, x_n}^{2n+2\text{개}}$ 에서 $g'(y) = 0$

이므로 by generalized Rolle's theorem

$g^{(2n+2)}(\xi) = 0$ 인 $\xi \in [a, b]$ 존재.

$g^{(2n+2)}(\xi) = 0 = f^{(2n+2)}(\xi) - \cancel{H_{2n+1}^{(2n+2)}}(\xi) \rightarrow 0$ ($2n+1$차 다항식)

$- [f(x) - H_{2n+1}(x)] \cdot \dfrac{d^{(2n+2)}}{dt^{(2n+2)}} \dfrac{(t-x_0)^2 \cdots (t-x_n)^2}{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}$

$\hookrightarrow t^{2n+2}$ 계수 = 분모 $\times (2n+2)!$

$\therefore f(x) = H_{2n+1}(x) + \dfrac{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$

for some ξ in (a, b)

3.5 - #23 코드로 구함.

$S_0(x) = 0 + 75x - 0.659292x^2 + 0.219764x^3$

$x \in [0, 3]$

$S_1(x) = 225 + 76.977876(x-3)$

$+1.318584(x-3)^2 - 0.153761(x-3)^3$

$x \in [3, 5]$

$S_2(x) = 383 + 80.40708(x-5)$

$+0.396018(x-5)^2 - 0.177237(x-5)^3$

$x \in [5, 8]$

$S_3(x) = 623 + 77.997788(x-8)$

$-1.199115(x-8)^2 + 0.079912(x-8)^3$

(a) $S(10) = 774.838407$

Speed at 10 = 74.160265

(b) Speed at 5.4869

first exceed 55mile/hour.

(c) Maximum speed is

80.702033 at 5.7448

#34

$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \quad [x_0, x_1]$

$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \quad [x_1, x_2]$

조건 1 에서

$S_0(x_0) = f(x_0) \rightarrow a_0 = f(x_0)$

$S_1(x_1) = f(x_1) \rightarrow a_1 = f(x_1)$

$S_0(x_1) = f(x_1) \rightarrow a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = f(x_1)$

$S_1(x_2) = f(x_2) \rightarrow a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 = f(x_2)$

조건 2 에서

$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \rightarrow b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) = b_1$

따라서 미지수는 6개인데 방정식은

5개 밖에 없다.

유일한 해를 결정하기 위해서는 한가지

방정식이 더 필요하다.

$S \in C^2[x_0, x_2]$ 조건을 추가하면

$S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \rightarrow c_0 = c_1$ 조건이

추가되어 해를 유일하게

결정할 수 있다.