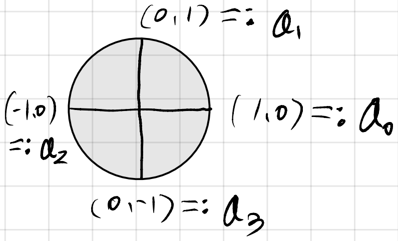
Encoding



(1,0)을 a_0, (0,1)을 a_1, (-1,0)을 a_2, (0,-1)을 a_3라 정의하겠습니다.

group isomorphism

$D_2 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 에다가 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$을 연산을 준다면 $D_2 \simeq \mathbb{Z}_4$ 입니다.

그러면 D_2는 1에 의해 span이 되고, $B_2 = \{1\}$라 하겠습니다.

D_{2^k}는 다음과 같이 정의됩니다

$$B_{2^k} = \{b_i \| b_i \mid b_i \in B_{2^{k-1}}\} \cup \{\overbrace{0\cdots0}^{2^{k-1}} \| \overbrace{2\cdots2}^{2^{k-1}}\}$$

그러면 span B_{2^k}는 $\mathbb{Z}_4^{2^{k-1}}$의 normal subgroup이 되고,

$C_{2^k} = \{\underbrace{0\cdots0}_{2^{k-1}} \| b_i \mid b_i \in B_{2^{k-1}}\}$로 정의하고

D_{2^k}를 span $\{B_{2^k}, C_{2^k}\}$로 정의하겠습니다

$$\phi' : \mathbb{Z}_4 \to \{0, 1, -1\} \text{ s.t } \phi'(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s = 0 \\ 0 & \text{if } s = 1, 3 \\ -1 & \text{if } s = 2 \end{cases}$$

$\phi : \mathbb{Z}_4^k \to \mathbb{R}$ s.t $\phi(s_0 s_1 \cdots s_k) = \underline{\sum_{i=1}^{k} \phi'(s_i)}$ 로 정의하면,

ϕ는 inner product와 같은 역할을 함을 알 수 있고,

$\phi(\text{span}(B_{2^k})) = \{1, 0, -1\}$ 임을 알 수 있습니다.

$\phi(D_{2^k}) = \{1, s \le \frac{1}{2}\}$ 입니다.