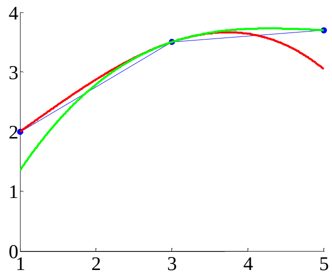
INTERPOLACJA FUNKCJAMI SKLEJANYMI

Do wykonania ćwiczenia konieczna jest znajomość rozdz. 3 (Interpolacja) ze skryptu nr 2287 Politechniki Śląskiej pt. Laboratorium metod numerycznych, pod redakcją E. Straszeckiej

1. Wyznaczanie funkcji sklejanych stopnia trzeciego

Jest wiele przypadków, w których zwiększanie liczby węzłów nie prowadzi do zmniejszenia błędu interpolacji, wręcz przeciwnie, zwiększa ten błąd. Równie często występuje konieczność interpolacji funkcji w wielu podprzedziałach, zwłaszcza, gdy chcemy odtworzyć kształt funkcji próbkowanej. Należałoby więc interpolować funkcję przedziałami. Najprostszy sposób, to interpolacja liniowa w każdym z przedziałów. Jednak powstała funkcja nie jest gładka (pochodne w węzłach nie są określone). Dlatego zamiast prostych używa się wielomianów stopnia trzeciego, z założeniem, że w węzłach wartości pierwszej i drugiej pochodnej „stykających się" wielomianów są równe (rys.1.), tzn. $W_1'(x)= W_2'(x)$, $W_1''(x)= W_2''(x)$.



Rys.1. funkcje sklejane: liniowe i trzeciego stopnia.

Zakłada się, że wielomian trzeciego stopnia interpolujący funkcję w przedziale $[x_j, x_{j+1}]$ ma postać:

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy_j'' + Dy_{j+1}'', \tag{1}$$

gdzie zastosowano oznaczenia:

$$y \equiv W(x),\ y_j \equiv W(x_j) = f(x_j),\ y_j'' \equiv f''(x_j),$$

a poszczególne współczynniki są równe, odpowiednio:

$$A = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \tag{2}$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \tag{3}$$

$$C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2, \tag{4}$$

$$D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2. \tag{5}$$

Zauważmy, że w węzłach interpolacji:

$$x = x_j \Rightarrow A = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_j} = 1,\ x = x_{j+1} \Rightarrow A = \frac{x_{j+1} - x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} = 0, \tag{6}$$

$$x = x_j \Rightarrow B = \frac{x_j - x_j}{x_{j+1} - x_j} = 0,\ x = x_{j+1} \Rightarrow B = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_j} = 1 \tag{7}$$

oraz dla $x=x_j$ lub $x=x_{j+1}$ zachodzi C=0 i D=0, co można stwierdzić wstawiając (6) i (7) do (4) i (5). Stąd wniosek, że w węzłach interpolacji wielomian (1) rzeczywiście przybiera wartości funkcji iterpolowanej, tzn. $x=x_j \Rightarrow y=y_j$, $x=x_{j+1} \Rightarrow y=y_{j+1}$.
Wielomian (1) nie może być wyznaczony jeśli nie znamy y_j'', y_{j+1}''. Aby wyznaczyć te wartości konieczne jest uzupełnienie równań wynikających z warunku interpolacji $W(x_i)= f(x_i)$, równaniami odpowiadającymi równości pierwszych i drugich pochodnych „stykających się” wielomianów w węzłach. Obliczmy zależności dla tych pochodnych:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dA}{dx}y_j+\frac{dB}{dx}y_{j+1}+\frac{dC}{dx}y_j''+\frac{dD}{dx}y_{j+1}'', \tag{8}$$

$$A=\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}\Rightarrow\frac{dA}{dx}=-\frac{1}{x_{j+1}-x_j}, \tag{9}$$

$$B=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\Rightarrow\frac{dB}{dx}=\frac{1}{x_{j+1}-x_j}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}C=\frac{1}{6}(A^3-A)(x_{j+1}-x_j)^2\Rightarrow\frac{dC}{dx}&=\frac{1}{6}(3A^2-1)(x_{j+1}-x_j)^2\frac{dA}{dx}=\\&=-\frac{1}{6}(3A^2-1)(x_{j+1}-x_j)\end{aligned}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}D=\frac{1}{6}(B^3-B)(x_{j+1}-x_j)^2\Rightarrow\frac{dD}{dx}&=\frac{1}{6}(3B^2-1)(x_{j+1}-x_j)^2\frac{dB}{dx}=\\&=\frac{1}{6}(3B^2-1)(x_{j+1}-x_j)\end{aligned}. \tag{12}$$

Po podstawieniu (9)-(12) do (8) uzyskujemy:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=-\frac{y_j}{x_{j+1}-x_j}+\frac{y_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}&-\frac{1}{6}(3A^2-1)(x_{j+1}-x_j)y_j''+\\&+\frac{1}{6}(3B^2-1)(x_{j+1}-x_j)y_{j+1}''\end{aligned}. \tag{13}$$

Z (13) można także wyznaczyć zależność dla drugiej pochodnej:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=0+0-\frac{1}{6}6A(x_{j+1}-x_j)\frac{dA}{dx}y_j''+\frac{1}{6}6B(x_{j+1}-x_j)\frac{dB}{dx}y_{j+1}''=\\&=-A(x_{j+1}-x_j)\left(-\frac{1}{x_{j+1}-x_j}\right)y_j''+B(x_{j+1}-x_j)\left(\frac{1}{x_{j+1}-x_j}\right)y_{j+1}''=Ay_j''+By_{j+1}''\end{aligned}. \tag{14}$$

Ponieważ A i B w węzłach interpolacji są równe 0 lub 1, to z (14) wynika, że

$$x=x_j\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=y_j'',\; x=x_{j+1}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=y_{j+1}'', \tag{15}$$

czyli w węzłach interpolacji nie tylko wartości funkcji i wielomianu, ale także drugich pochodnych funkcji i wielomianu są takie same. Jednakże (14) nie pomoże nam w wyznaczeniu wartości drugich pochodnych w węzłach, ponieważ zwykle nie znamy wartości drugich pochodnych funkcji interpolowanej. Natomiast, możemy skorzystać z założenia, że wartości pierwszych pochodnych w węzłach są takie same dla „stykających” się wielomianów. Wtedy z (13):

dla przedziału (x_j, x_{j+1}), w punkcie x_j : A=1, B=0: (16)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y_j}{x_{j+1}-x_j}+\frac{y_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}-\frac{1}{6}(3A^2-1)(x_{j+1}-x_j)y_j''+\frac{1}{6}(3B^2-1)(x_{j+1}-x_j)y_{j+1}''=$$

$$=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{1}{3}(x_{j+1}-x_j)y_j''-\frac{1}{6}(x_{j+1}-x_j)y_{j+1}''$$

dla przedziału (x_{j-1}, x_j), w punkcie x_j : A=0, B=1: (17)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}+\frac{y_j}{x_j-x_{j-1}}-\frac{1}{6}(3A^2-1)(x_j-x_{j-1})y_{j-1}''+\frac{1}{6}(3B^2-1)(x_j-x_{j-1})y_j''=$$

$$=\frac{y_j-y_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}+\frac{1}{6}(x_j-x_{j-1})y_{j-1}''+\frac{1}{3}(x_j-x_{j-1})y_j''.$$

Porównując (16) i (17) oraz porządkując wyrazy otrzymujemy:

$$\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}=\frac{1}{6}(x_j-x_{j-1})y_{j-1}''+\frac{1}{3}(x_{j+1}-x_{j-1})y_j''+\frac{1}{6}(x_{j+1}-x_j)y_{j+1}''. \tag{18}$$

Zależność (18) pomoże nam wyznaczyć wartości drugich pochodnych we wszystkich punktach x_j , za wyjątkiem x_0 i x_n. W tych punktach wartości drugich pochodnych trzeba założyć, najczęściej y_0”= y_n”=0. Można też założyć wartości pierwszych pochodnych y_0’ i y_n’, wartości drugich pochodnych obliczyć z zależności (17). W poniższym przykładzie skorzystamy z pierwszego założenia.

Przykład 1.
Wyznaczyć wielomiany sklejane rzędu trzeciego dla trzech poniższych węzłów, przy założeniu y_0”=y_2”=0.

	x_i	y_i
x_0	1	2
x_1	3	3.5
x_2	5	3.7

Posłużymy się zależnością (18) do obliczenia y_1”.

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{1}{6}(x_1-x_0)y_0''+\frac{1}{3}(x_2-x_0)y_1''+\frac{1}{6}(x_2-x_1)y_2''=$$

$$\frac{1}{6}(x_1-x_0)0+\frac{1}{3}(x_2-x_0)y_1''+\frac{1}{6}(x_2-x_1)0=\frac{1}{3}(x_2-x_0)y_1'',$$

stąd: $y_1''=\frac{3}{5-1}\left(\frac{3.7-3.5}{5-3}-\frac{3.5-2}{3-1}\right)=-0.4875$.

Obliczymy wielomian dla przedziału [x_0, x_1]:

$$y = Ay_0 + By_1 + Cy_0'' + Dy_1'' = Ay_0 + By_1 + 0y_0'' + Dy_1'' = Ay_0 + By_1 + Dy_1'',$$

$$A = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} = \frac{x-3}{1-3} = -\frac{1}{2}(x-3),$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{2}(x-1),$$

$$D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2 = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{8}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)\right](3-1)^2 = \frac{1}{12}\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right),$$

stąd wielomian:

$$y = -\frac{1}{2}(x-3)2 + \frac{1}{2}(x-1)3.5 + \frac{1}{12}(x^3 - 3x^2 - x + 3)(-0.4875) =$$

$$= -0.040625x^3 + 0.121875x^2 + 0.790625x + 1.128125.$$

Analogicznie, dla przedziału $[x_1, x_2]$ wielomian:

$$y = Ay_1 + By_2 + Cy_1'' + Dy_2'' = Ay_1 + By_2 + Cy_1'' + 0y_2'' = Ay_1 + By_2 + Cy_1'',$$

$$A = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} = \frac{x-5}{3-5} = -\frac{1}{2}(x-5),$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{x-3}{5-3} = \frac{1}{2}(x-3),$$

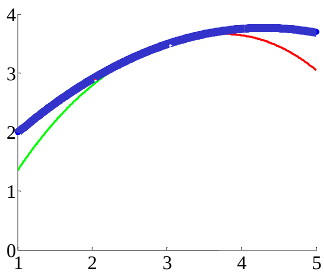
$$C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2 = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{8}(x-5)^3 + \frac{1}{2}(x-5)\right](5-3)^2 = \frac{1}{12}\left(-x^3 + 15x^2 - 71x + 105\right),$$

stąd drugi wielomian:

$$y = -\frac{1}{2}(x-5)3.5 + \frac{1}{2}(x-3)3.7 + \frac{1}{12}(-x^3 + 15x^2 - 71x + 105)(-0.4875) =$$

$$= -0.040625x^3 - 0.609375x^2 + 2.984375x - 1.065625.$$

Wielomiany oraz funkcję sklejaną przedstawiono na rys.2.



Rys.2. Wielomiany i wynikająca z nich funkcja sklejana.

ZADANIA

1) Oblicz wielomiany rzędu trzeciego składające się na funkcję sklejaną dla podanych trzech węzłów.
2) W środowisku Matlab wyznacz funkcje sklejane liniowe i trzeciego stopnia interpolujące wskazaną przez prowadzącego funkcję, dla czterech podanych węzłów. Wykonaj wykresy funkcji i oblicz maksymalny moduł błędu dla każdej z interpolacji. Stwierdź, która interpolacja była lepsza w tym konkretnym przypadku.
3) Podobne zadania jak w p.2 wykonaj dla interpolacji wielomianem Lagrange'a i funkcjami sklejanymi rzędu trzeciego dla różnej liczby równoodległych węzłów. Wyciągnij wnioski.