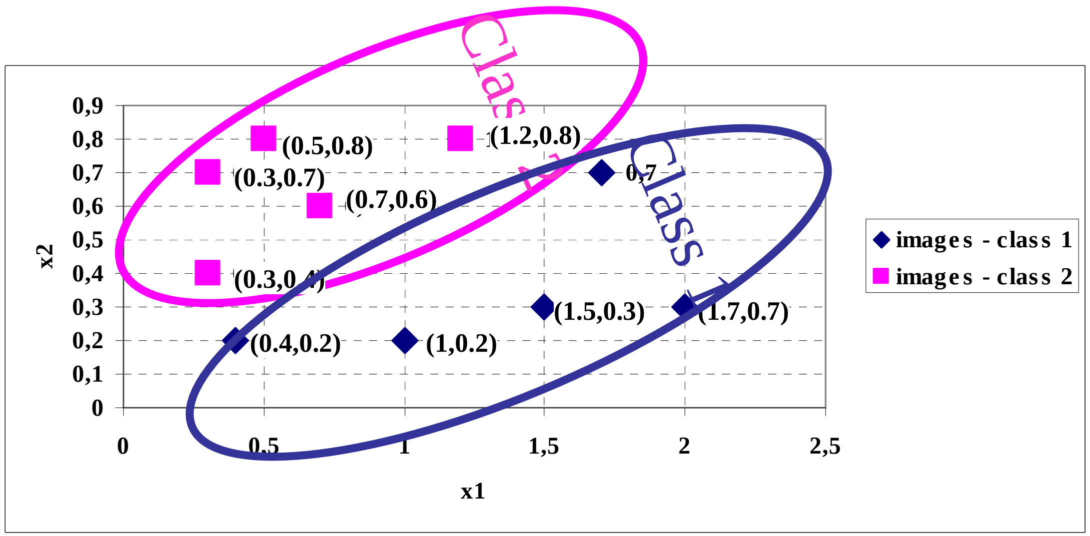
Analiza dyskryminacyjna

Celem analizy dyskryminacyjnej jest wyznaczenie przynależności obrazów do rozłącznych klas. Na przykład, jeżeli obrazy są reprezentowane przez punkty (każdy punkt jest obrazem, to:

	images - class 1	
	x11	x12
X1	0,4	0,2
X2	1	0,2
X3	2	0,3
X4	1,5	0,3
X5	1,7	0,7

	images - class 2	
	x21	x22
X6	0,3	0,7
X7	0,5	0,8
X8	0,3	0,4
X9	0,7	0,6
X10	1,2	0,8



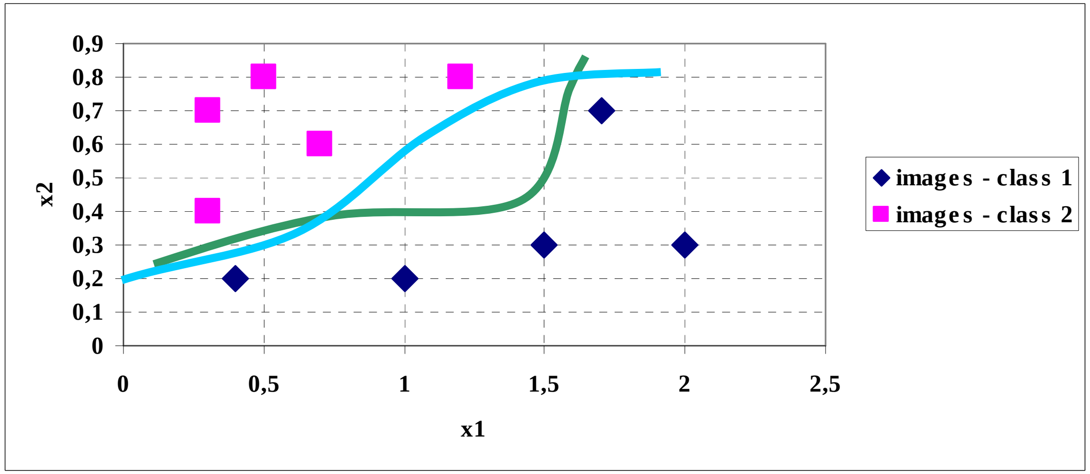
Klasy oznacza się zwykle jako ω_1 i ω_2

Kryterium rozdziału klas jest zwykle formułowane jako funkcja. Może ono być uproszczone do rozróżnienia tylko dwóch klas. Wtedy można go sformułować następująco:

$$h(X) = \begin{cases} > k \Rightarrow X \in \Omega_1 \\ < k \Rightarrow X \in \Omega_2 \end{cases}$$

k - constant

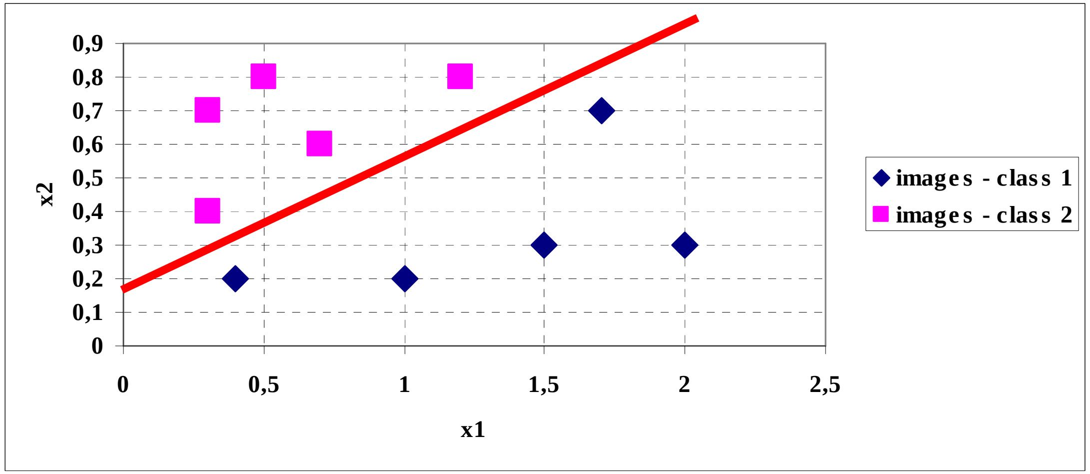
Dla $h(X) = k$ decyzja jest podejmowana arbitralnie.



Jeśli $h(X)$ rozdziela dwie klasy, to również $f(h(X))$ je rozdziela, o ile tylko f jest funkcją monotoniczną

$$g(X) = f(h(X)) = \begin{cases} > k' \Rightarrow X \in \Omega_1 \\ < k' \Rightarrow X \in \Omega_2 \end{cases}$$

Rozwiążmy najprostsze zadanie: rozdzielmy klasy za pomocą prostej.



$$x_2 = \omega_1 x_1 + \omega_0$$

$$\omega_1 x_1 - x_2 + \omega_0 = 0$$

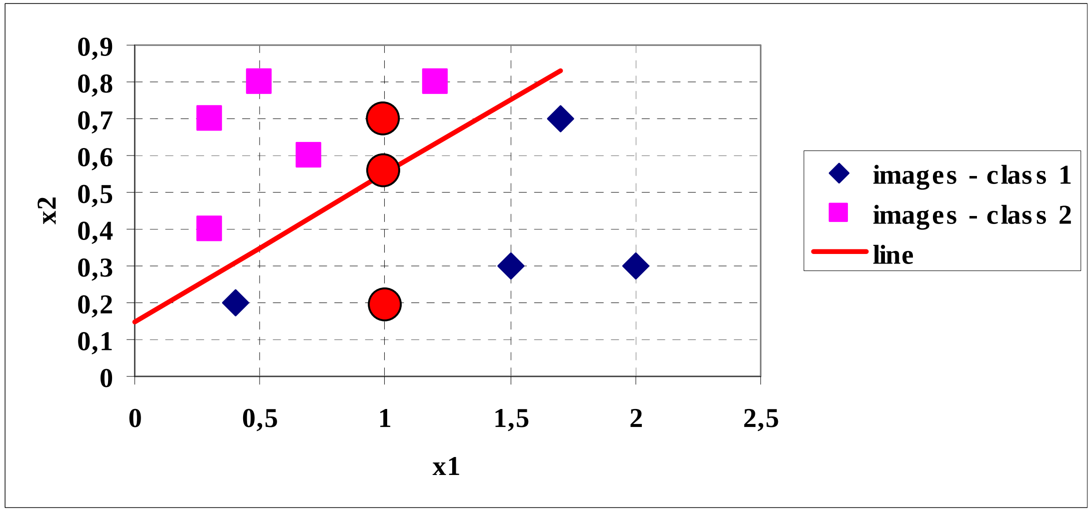
$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0 = 0$$

Liniowa funkcja dyskryminacyjna jest zdefiniowana jako:

$$\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \omega_0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0 =$$

$$g(X) = \varpi^T \tilde{X} + \omega_0 = \boldsymbol{\omega}^T X$$

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0 \cdot 1 = \underbrace{\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ 1\end{bmatrix}}_{X}$$



$$x_2 = 0.4x_1 + 0.15$$

$$0.4x_1 - x_2 + 0.15 = 0$$

$$\omega_1 = 0.4 \; \omega_2 = -1 \; \omega_0 = 0.15$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

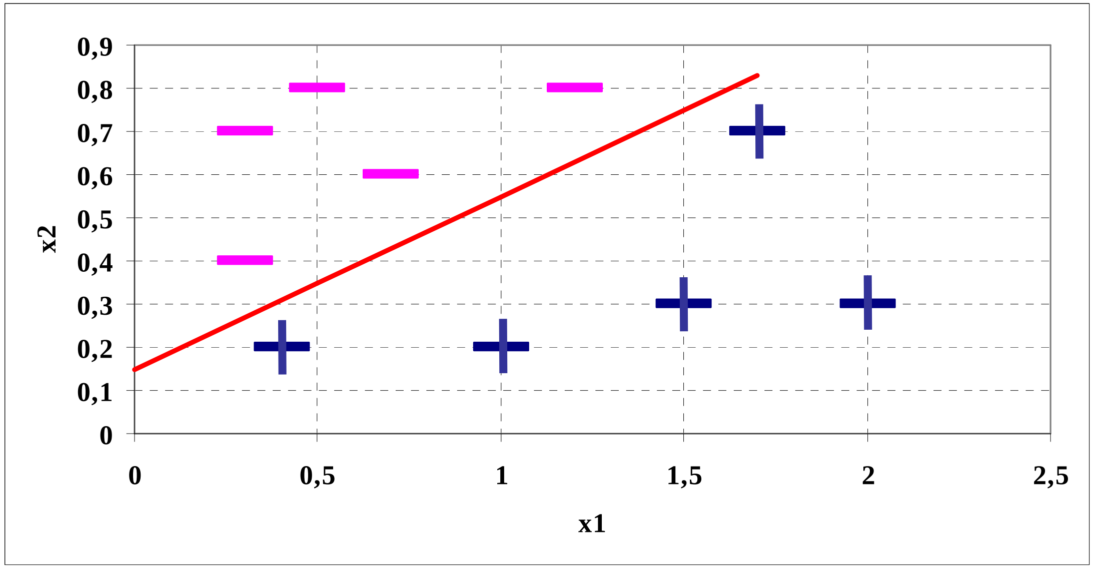
$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \omega_0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0 =$$

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0 \cdot 1 = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

			X
			1
ω^T			0,55
			1
0,4	-1	0,15	0

			X
			1
ω^T			0,2
			1
0,4	-1	0,15	0,35

			X
			1
ω^T			0,7
			1
0,4	-1	0,15	-0,15



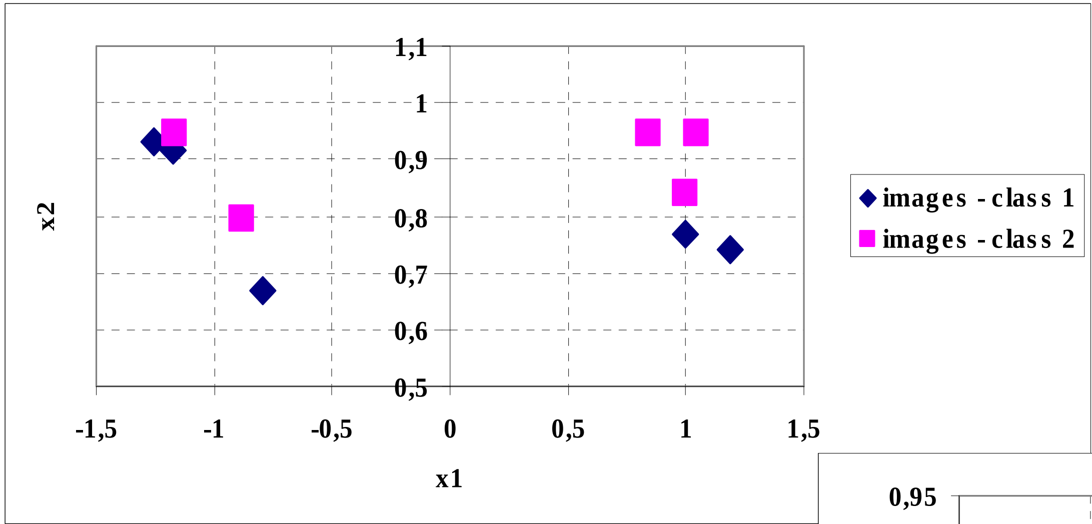
Mamy teraz proste kryterium:

$$\boldsymbol{\omega}^T X \begin{cases} > 0 \Rightarrow X \in \Omega_1 \\ < 0 \Rightarrow X \in \Omega_2 \end{cases}$$

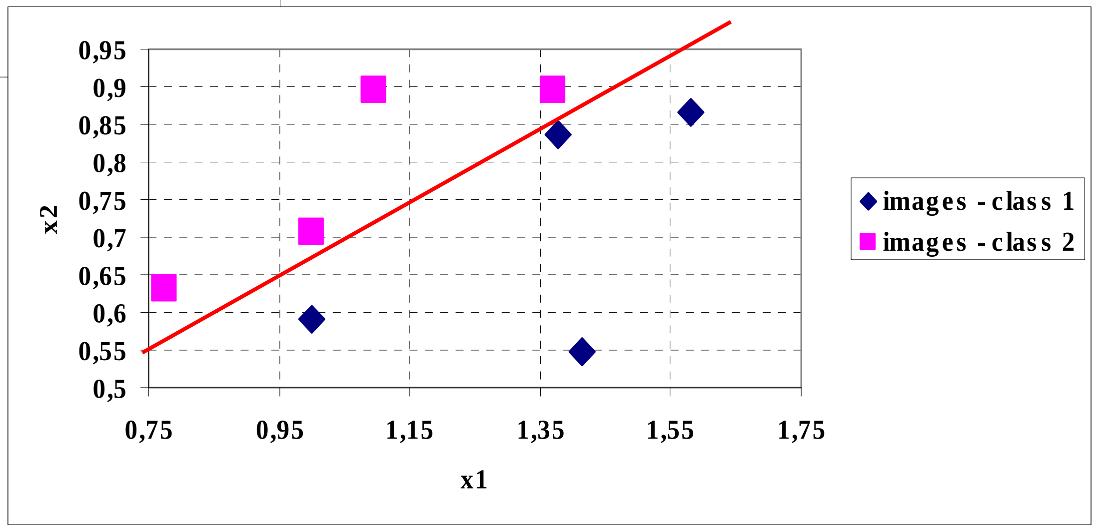
W przypadku równości, przynależność jest określona arbitralnie, jak było wspomniane.

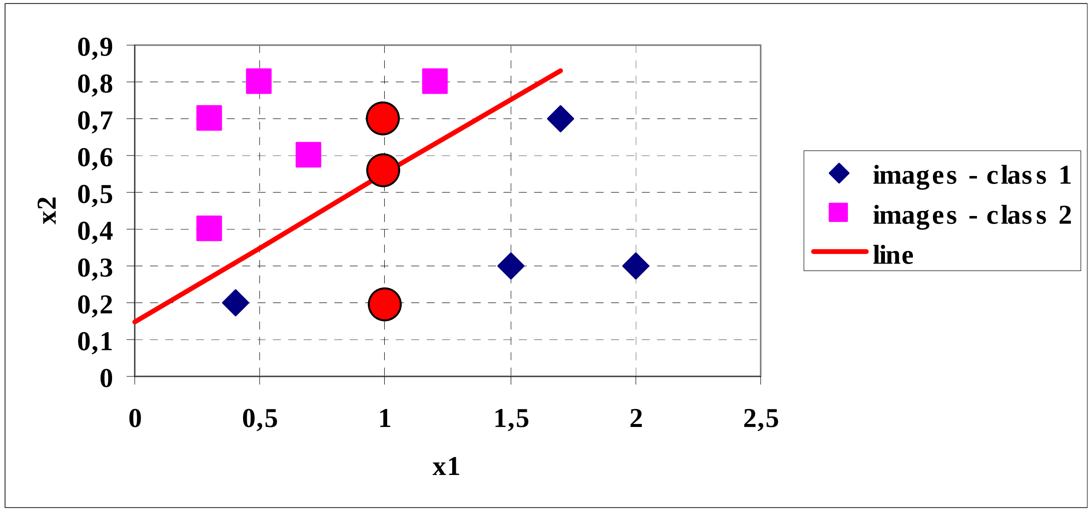
Czasem obrazy, które na pierwszy rzut oka nie mogą być rozdzielone linią prostą, podlegają liniowej dyskryminacji po transformacji.

$$g(X) = f(h(X)) = \begin{cases} > k' \Rightarrow X \in \Omega_1 \\ < k' \Rightarrow X \in \Omega_2 \end{cases}$$



$f(x)=x^2$





			X
			1
ω^T			0,55
			1
0,4	-1	0,15	0

			X
			1
			0,2
ω^T			1
0,4	-1	0,15	0,35

Można obrazy w jednej z klas pomnożyć przez -1

			X
			-1
			-0,7
			-1
0,4	-1	0,15	0,15

			X
			1
ω^T			0,7
			1
0,4	-1	0,15	-0,15

W ten sposób kryterium:

$$\boldsymbol{\omega}^T X \begin{cases} > 0 \Rightarrow X \in \Omega_1 \\ < 0 \Rightarrow X \in \Omega_2 \end{cases}$$

może być jeszcze bardziej uproszczone. Jeżeli wszystkie obrazy należące do Ω_2 jednej z klas pomnożymy przez –1, to otrzymamy:

$$\mathrm{y}_i^T = \begin{cases} X_i^T \text{ gdy } X_i \in \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{1} \\ -X_i^T \text{ gdy } X_i \in \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{2} \end{cases}$$

i możemy sformułować kryterium dzielące dwie klasy jako:

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} > 0$$

Kryterium dla perceptronu

Kryterium podziału dla perceptronu oparte jest na obrazach, które zostały błędnie sklasyfikowane. Niech *Y* będzie zbiorem błędnie sklasyfikowanych obrazów:

$$Y = \left\{ \mathrm{y}_i, \omega^T \mathrm{y}_i < 0 \right\}$$

Kryterium klasyfikacji jest następujące:

$$J_p = \sum_{\mathrm{y}_i \in Y} \left(-\omega^T \mathrm{y}_i \right)$$

Waga ω powinna być modyfikowana w taki sposób, aby $J_p \to 0$. Zmiana J_p jest powiązana ze zmianą ω w następujący sposób:

$$\frac{\partial J_p}{\partial \omega} = \sum_{\mathrm{y}_i \in Y} \left(-\mathrm{y}_i \right)$$

czyli jest określona przez sumę źle sklasyfikowanych obrazów.

Tak więc, ω powinna być modyfikowana za pomocą ważonej sumy błędnie sklasyfikowanych obrazów.

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \rho_k \sum_{y_i \in Y} y_i$$

gdzie ρ_k określa wielkość modyfikacji ω .

Warianty

1) Jednakże, można również zmieniać ω_k w zależności od wybranego (pojedynczego) obrazu. Wtedy:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \rho_k y_i$$

2) Parametr ρ_k można również dobierać, np. w taki sposób, aby:

$$\omega_{k+1} y_i > 0$$

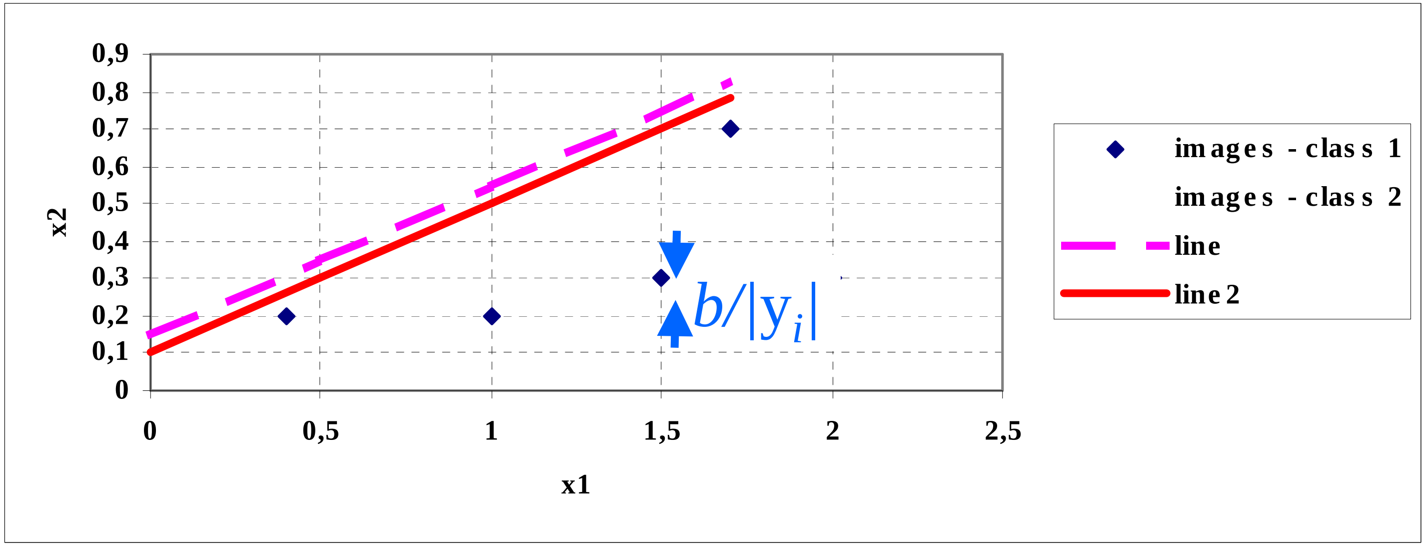
To oznacza, żę obraz y_i, który był błędnie sklasyfikowany w *i*-tej iteracji (ponieważ $\omega_k y_i < 0$), będzie poprawnie sklasyfikowany w $i+1$-szej iteracji ($\omega_{k+1} y_i > 0$). Aby to nastąpiło:

$$\rho_k > \frac{|\omega_{k+1} y_i|}{|y_i|^2}$$

Warianty c.d.

3) Parametr ω jest modyfikowany, gdy „obraz jest zbyt blisko linii podziału”

$$\omega^T y_i \le b, b > 0$$



Algorytm relaksacyjny

Algorytm relaksacyjny minimalizuje kryterium:

$$J_R = \frac{1}{2} \sum_{y_i \in Y} \frac{\left(\omega^T y_i - b\right)^2}{\left|y_i\right|^2}$$

$$Y = \left\{ y_i ,\, \omega^T y_i \leq b \right\}$$

Wagi są modyfikowane zgodnie z sumą (1) lub wybranym obrazem (2), które były (który był) błędnie sklasyfikowany:

1) $$\omega_{k+1} = \omega_k + \rho_k \sum_{y_i \in Y} \frac{b - \omega^T y_i}{\left|y_i\right|^2} y_i$$

2) $$\omega_{k+1} = \omega_k + \rho_k \frac{b - \omega^T y_i}{\left|y_i\right|^2} y_i$$

Kryterium Fishera dla liniowej analizy dyskryminacyjnej

W tym kryterium bierze się pod uwagę podobieństwo obrazów wewnątrz klasy wobec różnic pomiędzy klasami. Kryterium jest następujące:

$$J_F = \frac{\left|\omega^T (\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2)\right|^2}{\omega^T \mathrm{S}_w \omega}$$

Jego wartość powinna być jak największa. Oznaczenia:

średnia dla *j*-tej klasy

$$\mathrm{m}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} \mathrm{x}_{ij}$$

x_{ij} – *i*-ty obraz w *j*-tej klasie

$$\mathrm{S}_w = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left(n_1 \mathrm{S}_1 + n_2 \mathrm{S}_2\right)$$

$$\mathrm{S}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\mathrm{x}_{ij} - \mathrm{m}_j\right)\left(\mathrm{x}_{ij} - \mathrm{m}_j\right)^T$$

Można udowodnić, że w celu maksymalizacji J_F należy zmieniać wagi:

$$\omega = S_w{}^{-1}(m_1 - m_2)$$

obraz x jest przypisany do klasy *k* jeśli:

$$\left|\omega^T x - \omega^T m_k\right| < \left|\omega^T x - \omega^T m_j\right|, \quad k \neq j$$