Programmation Dynamique

Vincent Leclère

April 23, 2020

1. On considère le système dynamique à valeur dans $\{0, 1, 2\}$ donné par

$$\boldsymbol{x}_{t+1} \equiv \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{w}_{t+1}[3].$$

On suppose que $\boldsymbol{u}_t \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{x}_0 = 0$, et que $(\boldsymbol{w}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variable aléatoire i.i.d de Bernoulli de paramètre 0.5 (i.e. $\mathbb{P}(w_t = 1) = 0.5$ et $\mathbb{P}(w_t = 0) = 0.5$). Par exemple si $u_0 = 2$, $\boldsymbol{x}_1$ vaut 2 avec probabilité 0.5 ($\boldsymbol{w}_1 = 0$) et 0 sinon ($\boldsymbol{w}_1 = 1$).

On souhaite résoudre le problème suivant

$$\min_{u_0, \boldsymbol{u}_1} \quad \mathbb{E}\big[|u_0| + |\boldsymbol{u}_1| + \boldsymbol{x}_2^2\big] \tag{1}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{x}_{t+1} \equiv \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{w}_{t+1}[3] \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_t \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

$$u_0 \text{ deterministe} \qquad \sigma(\boldsymbol{u}_1) \subset \sigma(\boldsymbol{w}_1) \tag{4}$$

(a) (1 point) Expliquer pourquoi le problème peut-être résolu par programmation dynamique ? Donner la structure d'information du problème.

> **Solution:** Les bruits sont indépendants (0.25) et supposé exogènes (0.25). Il s'agit d'un problème en décision-hasard (0.5).

(b) (1 point) Justifier que l'on peut se contenter d'étudier un nombre fini de contrôle u que l'on explicitera.

> **Solution:** Le système dynamique est à valeur dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donc les contrôles u et $u+3$ produisent le même résultat (0.5). Comme l'on veut minimiser la valeur absolue des contrôles il suffit de considérer $\{-1, 0, 1\}$ (0.5).

(c) (2 points) Trouver la valeur du problème par programmation dynamique. Donner la stratégie optimale sous forme de "look-up" table

> **Solution:** (1)

x	V_0	V_1	V_2
2	1	1.5	4
1	1.5	1.5	1
0	1	0.5	0

Donc la valeur du problème est $V(0) = 1$ (0.5).

La stratégie optimale est donnée par (1)

x	π_0	π_1
2	0	1
1	0	-1
0	0	0

(d) (2 points) Trouver la borne inférieure obtenue en considérant une solution anticipative.

Solution: Donnons une solution optimale (elle n'est pas toujours unique)

$\boldsymbol{w}_1$	$\boldsymbol{w}_2$	$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{x}_2$	coût total
0	0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0	1
1	0	-1	0	0	1
1	1	0	1	0	1

La valeur de la solution anticipative est donc $0.75 < 1$.