Projet sur les réseaux de distribution d'eau

◇

Introduction à la séance finale de TP

Pierre Carpentier, Adrien Le Franc & Thomas Martin

10 avril 2020

Cours : `cermics.enpc.fr/~jpc/optimisation.html`

Projet : `perso.ensta-paris.fr/~pcarpent/TP_Reseau/ENPC/`

Problèmes associés à l'équilibre d'un réseau d'eau

Depuis le début du TP, pour résoudre le problème primal

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \; \frac{1}{3}\left\langle q^{(0)}+Bq_C \,, r \bullet \left(q^{(0)}+Bq_C\right) \bullet \left|q^{(0)}+Bq_C\right| \right\rangle + \left\langle p_r \,, A_r\left(q^{(0)}+Bq_C\right) \right\rangle \,,$$

on a écrit des oracles et des algorithmes (gradient, Newton. . .).

On revient maintenant au problème sous contrainte équivalent :

$$\min_{q \in \mathbb{R}^n} \; \frac{1}{3}\left\langle q \,, r \bullet q \bullet |q| \right\rangle + \left\langle p_r \,, A_r q \right\rangle \,,$$

$$\text{s.t.} \quad A_d q - f_d = 0 \,,$$

que l'on va résoudre par dualité. Pour cela, il faut

1. former le problème dual,
2. écrire les oracles associés,
3. résoudre avec les algorithmes écrits précédemment.

Problèmes associés à l'équilibre d'un réseau d'eau

Depuis le début du TP, pour résoudre le problème primal

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \frac{1}{3}\left\langle q^{(0)} + Bq_C \,, r \bullet \left(q^{(0)} + Bq_C\right) \bullet \left|q^{(0)} + Bq_C\right| \right\rangle + \left\langle p_r \,, A_r\left(q^{(0)} + Bq_C\right) \right\rangle ,$$

on a écrit des oracles et des algorithmes (gradient, Newton. . .).

On revient maintenant au problème sous contrainte équivalent :

$$\min_{q \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{3}\left\langle q \,, r \bullet q \bullet |q| \right\rangle + \left\langle p_r \,, A_r q \right\rangle ,$$
$$\text{s.t.} \quad A_d q - f_d = 0 ,$$

que l'on va résoudre par dualité. Pour cela, il faut

1. former le problème dual,
2. écrire les oracles associés,
3. résoudre avec les algorithmes écrits précédemment.

Rappels sur la dualité

On prend un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u) \quad \text{s.t.} \quad \Theta(u) = 0 \; .$$

Le Lagrangien de ce problème est par définition

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda \, , \Theta(u) \rangle \; ,$$

et le problème initial est toujours équivalent au problème

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(u, \lambda) \; .$$

Sous certaines hypothèses (*voir le cours*), il est aussi équivalent à

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda) \; .$$

On prend un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u) \quad \text{s.t.} \quad \Theta(u) = 0 \ .$$

Le Lagrangien de ce problème est par définition

$$L(u, \lambda) = J(u) + \left\langle \lambda \, , \Theta(u) \right\rangle \ ,$$

et le problème initial est toujours équivalent au problème

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(u, \lambda) \ .$$

Sous certaines hypothèses (*voir le cours*), il est aussi équivalent à

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda) \ .$$

Rappels sur la dualité

Partant du problème en $\max - \min$

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda) ,$$

on définit la fonction duale φ de la manière suivante :

$$\varphi(\lambda) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda) .$$

Le problème se réécrit donc sous la forme

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \varphi(\lambda) ,$$

et est appelé problème dual. C'est ce problème de maximisation sans contraintes que l'on va maintenant résoudre.

$$\varphi(\lambda) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \; J(u) + \langle \lambda \,, \Theta(u) \rangle \; .$$

1. Il faut pour commencer calculer la fonction φ. On écrit la condition d'optimalité associée à la minimisation en u :

$$\nabla J(u) + \nabla \Theta(u) \cdot \lambda = 0 \; ,$$

dont la solution est notée $\widehat{u}(\lambda)$. La fonction φ vaut alors

$$\varphi(\lambda) = J\big(\widehat{u}(\lambda)\big) + \big\langle \lambda \,, \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \big\rangle \; .$$

2. Le calcul du gradient de φ peut se faire par calcul, mais... supposant toutes les fonctions différentiables, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(\lambda) &= \nabla \widehat{u}(\lambda) \cdot \Big(\nabla J\big(\widehat{u}(\lambda)\big) + \nabla \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \cdot \lambda \Big) + \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \\ &= \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \end{aligned}$$

car le premier terme est nul par optimalité de $\widehat{u}(\lambda)$. [1]

1. *En fait, ce résultat se démontre sous des hypothèses raisonnables.*

$$\varphi(\lambda) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \; J(u) + \big\langle \lambda \, , \Theta(u) \big\rangle \; .$$

1. Il faut pour commencer calculer la fonction φ. On écrit la condition d'optimalité associée à la minimisation en u :

$$\nabla J(u) + \nabla \Theta(u) \cdot \lambda = 0 \; ,$$

dont la solution est notée $\widehat{u}(\lambda)$. La fonction φ vaut alors

$$\varphi(\lambda) = J\big(\widehat{u}(\lambda)\big) + \Big\langle \lambda \, , \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \Big\rangle \; .$$

2. Le calcul du gradient de φ peut se faire par calcul, mais... supposant toutes les fonctions différentiables, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(\lambda) &= \nabla \widehat{u}(\lambda) \cdot \Big(\nabla J\big(\widehat{u}(\lambda)\big) + \nabla \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \cdot \lambda \Big) + \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \\ &= \Theta\big(\widehat{u}(\lambda)\big) \end{aligned}$$

car le premier terme est nul par optimalité de $\widehat{u}(\lambda)$.[1]

1. *En fait, ce résultat se démontre sous des hypothèses raisonnables.*

Application au problème de réseau d'eau

Dans le cas des réseaux d'eau, la fonction duale est :

$$\varphi(\lambda) = \min_{q \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{3}\langle q \, , r \bullet q \bullet |q| \rangle + \langle p_r \, , A_r q \rangle + \langle \lambda \, , A_d q - f_d \rangle \, .$$

De l'expression de la solution $\widehat{q}(\lambda)$ fournie par la condition d'optimalité de ce problème, on peut calculer les valeurs $\varphi(\lambda)$, $\nabla\varphi(\lambda)$ et $\nabla^2\varphi(\lambda)$. On dispose ainsi des éléments permettant d'écrire les oracles associés au problème dual et donc utiliser les algorithmes écrits précédemment pour le problème primal.

On utilisera le fait que maximiser la fonction duale est équivalent à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$-\min_{\lambda \in \mathbb{R}^{m_d}} -\varphi(\lambda) \, .$$

Dans le cas des réseaux d'eau, la fonction duale est :

$$\varphi(\lambda) = \min_{q \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{3}\langle q \,, r \bullet q \bullet |q| \rangle + \langle p_r \,, A_r q \rangle + \langle \lambda \,, A_d q - f_d \rangle \,.$$

De l'expression de la solution $\widehat{q}(\lambda)$ fournie par la condition d'optimalité de ce problème, on peut calculer les valeurs $\varphi(\lambda)$, $\nabla\varphi(\lambda)$ et $\nabla^2\varphi(\lambda)$. On dispose ainsi des éléments permettant d'écrire les oracles associés au problème dual et donc utiliser les algorithmes écrits précédemment pour le problème primal.

On utilisera le fait que maximiser la fonction duale est équivalent à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$- \min_{\lambda \in \mathbb{R}^{m_d}} -\varphi(\lambda) \,.$$

Travaux à effectuer et compte-rendu

Objectifs de la séance.

1. Faire les calculs permettant d'écrire les oracles duaux.
2. Mettre en œuvre les algorithmes avec ces oracles.

   Attention : les algorithmes doivent pouvoir être appliqués indifféremment au problème primal ou au problème dual.
3. Comparer les résultats obtenus par les différents algorithmes et par les deux méthodes.

Compte-rendu final.

- Pour le vendredi 24 avril 2020 au plus tard, m'envoyer par mail le notebook Python complété avec vos codes.
- Les réponses aux questions théoriques et le détail des calculs (*sans trop de détails*. . .) sont à inclure dans le notebook, ou à envoyer à part dans un fichier au format PDF.

Travaux à effectuer et compte-rendu

Objectifs de la séance.

1. Faire les calculs permettant d'écrire les oracles duaux.
2. Mettre en œuvre les algorithmes avec ces oracles.

   Attention : les algorithmes doivent pouvoir être appliqués indifféremment au problème primal ou au problème dual.
3. Comparer les résultats obtenus par les différents algorithmes et par les deux méthodes.

Compte-rendu final.

- Pour le vendredi 24 avril 2020 au plus tard, m'envoyer par mail le notebook Python complété avec vos codes.
- Les réponses aux questions théoriques et le détail des calculs (*sans trop de détails...*) sont à inclure dans le notebook, ou à envoyer à part dans un fichier au format PDF.