TP - Optimisation et Contrôle
Questions théoriques de la séance 1

ZHANG Mofan

Mars 2020

Montrer que les problèmes (13), (14) et (19) sont équivalents.

Problème d'optimisation à résoudre :

$$\min_{q\in\mathbb{R}^n, f_r\in\mathbb{R}^{m_r}} \frac{1}{3} < q, r\cdot q\cdot |q| > + < p_r, f_r > \tag{13a}$$

sous la contrainte :

$$Aq - f = 0 \tag{13b}$$

On utilise la partition de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} A_r \\ A_d \end{pmatrix} \tag{9}$$

À partir de (13b), on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_d \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix}$$

Il est évident que :

$$\begin{cases} A_r q = f_r \\ A_d q = f_d \end{cases}$$

On déduit ainsi le problème (14) :

$$\min_{q\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{3} < q, r\cdot q\cdot |q| > + < p_r, A_r q > \tag{14a}$$

sous la contrainte :

$$A_d q - f_d = 0 \tag{14b}$$

En suite, d'après la partition de la matrice A_d :

$$A_d = (A_{d,T}\ A_{d,C})$$

(14b) devient :

$$(A_{d,T}\ A_{d,C}) \begin{pmatrix} q_T \\ q_C \end{pmatrix} = f_d$$

C'est-à-dire :

$$A_{d,T}\, q_T + A_{d,C}\, q_C = f_d$$

On peut déduire l'expression de q_T :

$$q_T = A_{d,T}^{-1}(f_d - A_{d,C}\, q_C) \tag{17}$$

En utilisant l'expression (18),

$$q = q^{(0)} + B\, q_C \qquad avec \qquad q^{(0)} = \begin{pmatrix} A_{d,T}^{-1}\, f_d \\ O_{n-m_d} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -A_{d,T}^{-1}\, A_{d,C} \\ I_{n-m_d} \end{pmatrix} \tag{18}$$

on obtient la forme sans contrainte (19) :

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \frac{1}{3} < q^{(0)} + B\, q_C, r \cdot (q^{(0)} + B\, q_C) \cdot |q^{(0)} + B\, q_C| > + < p_r, A_r(q^{(0)} + B\, q_C) > \tag{19}$$

Montrer que les problèmes (14) et (19) admettent chacun une solution unique, et que les critères de ces 2 problèmes sont *strictement* (mais pas *fortement*) convexe.

Pour le problème 14, la fonction J est :

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{1}{3} < q, r \cdot q \cdot |q| > + < p_r, A_r q > \\ &= f(q) + g(q) \end{aligned}$$

L'ensemble admissible de solutions U^{ad} est donné par (14b). Il est évident que U^{ad} est convexe et fermé. Quand une solution u tend vers l'infinie, $\lim J(u) = +\infty$. La fonction J est donc coercive sur U^{ad}.

D'après le **théorème 4.3.** du cours, dans le cas où $J(q)$ est une fonction strictement convexe, le problème (14) admet une solution unique. Afin de montrer cette dernière assertion, on considère respectivement les fonctions $f(q)$ et $g(q)$.

Pour un $\alpha \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} g(\alpha u + (1-\alpha)v) &= < p_r, A_r(\alpha u + (1-\alpha)v) > \\ &= \alpha < p_r, A_r u > + (1-\alpha) < p_r, A_r v > \\ &= \alpha g(u) + (1-\alpha) g(v) \end{aligned}$$

Alors que la fonction $g(q)$ est convexe.

Sachant que l'autre partie de la fonction $J(q)$, c'est-à-dire que la fonction $f(q)$ selon les notations précédentes, est une fonction strictement convexe. Nous savons que la somme d'une fonction strictement convexe et une fonction convexe est encore strictement convexe. Ainsi, $J(q)$ est strictement convexe. D'après le théorème, il y a une solution unique pour le problème (14).

Pour le problème (19), le raisonnement est quasi-identique.