Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА

Студент ФН2-52Б (Группа) ____________ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ____________ (Подпись, дата) М. П. Галанин (И. О. Фамилия)

2021 г.

Содержание

Введение

1. Постановка задачи

1.1. Тензор малых деформаций Коши

Под действием внешних сил в твердом теле возникают деформации, иными словам – изменение его формы и объема. Если разбить тело на систему точек $X_i(x_1 \dots x_n)$, а также задать радиус-вектор $\vec{r_i} = \vec{r}(X_i) = \vec{r}(x_1 \dots x_n)$ для каждой из них, причем

$$r_i = \Big[\sum_{k=1}^{n} (x_j - 0)^2 \Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\sum_{k=1}^{n} x_j^2 \Big]^{\frac{1}{2}},$$

то деформацию $\vec{u}$ (вектор деформации, вектор смещения)[1] тела в каждой точке можно определить, как разницу между положением до и после приложения силы:

$$\vec{u}(u_1 \dots u_n) = \vec{r}(X_i') - \vec{r}(X_i) = \vec{r}' - \vec{r} \tag{1}$$

Рассмотрим две соседние бесконечно близкие точки, тогда разность расстояния между ними до начала процесса деформации задается величиной dX, а после – dX'. Воспользовавшись определением вектора деформации (1) получим

$$dX' = dX + du \Rightarrow dx_k' = dx_k + du_k$$

а расстояния dl и dl' между заданными точками до и после деформации соответственно вычисляются по определению:

$$dl = \Big[\sum_{k=1}^{n} (dx_k)^2 \Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$dl' = \Big[\sum_{k=1}^{n} (dx_k')^2 \Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\sum_{k=1}^{n} (dx_k + du_k)^2 \Big]^{\frac{1}{2}}$$

По определению полного дифференциала $du_k = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l$. Дадим конкретный физический смысл полученной величине.

Пусть $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, а координаты вектора смещения зададим, как $u = u(u_1, u_2, u_3)$, тогда

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}dx + \frac{\partial u_1}{\partial y}dy + \frac{\partial u_1}{\partial z}dz = \Delta_{11}dx + \Delta_{12}dy + \Delta_{13}dz$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x}dx + \frac{\partial u_2}{\partial y}dy + \frac{\partial u_2}{\partial z}dz = \Delta_{21}dx + \Delta_{22}dy + \Delta_{23}dz$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x}dx + \frac{\partial u_3}{\partial y}dy + \frac{\partial u_3}{\partial z}dz = \Delta_{31}dx + \Delta_{22}dy + \Delta_{33}dz$$

Пусть деформация происходит только в направлении x, тогда $dy = dz = 0$, тогда

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}dx = \Delta_{11}dx$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x}dx = \Delta_{21}dx$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x}dx = \Delta_{31}dx$$

Величина Δ_{11} – это растяжение (сжатие) отрезка dx, спроецированного на ось x. Аналогичным образом определяются Δ_{22}, Δ_{33} растяжения (сжатия) вдоль осей y, z

Компоненты Δ_{21}, Δ_{31} определяют поворот параллельно оси x: в первом случае – вокруг оси z в сторону y (против часовой стрелки), а во втором – вокруг оси y в сторону оси z (против часовой стрелки).

Если деформация происходит по всем направлениям, то Δ_{12} определяет поворот параллельно оси y вокруг оси z в направлении x (по часовой стрелке), а Δ_{13} – вокруг оси y в направлении оси x (по часовой стрелке). Компоненты Δ_{23}, Δ_{32} определяют повороты вокруг оси x: в первом случае – в направлении оси y (по часовой стрелке), во втором – в направлении z (против часовой стрелки). Пример деформации приведен на рис. 1

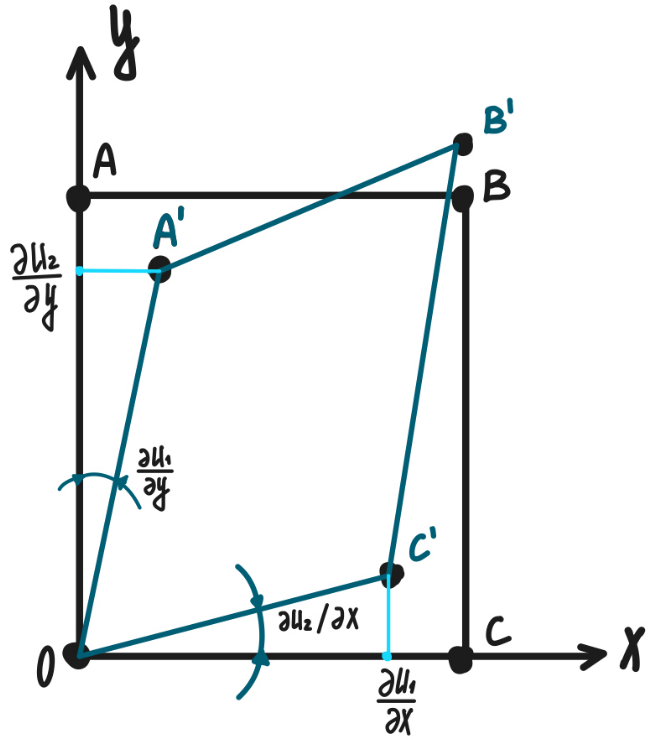

Рис. 1. Процесс деформации

Используя все проделанные раннее рассуждения, преобразуем элемент расстояния $(dl')^2$ к виду:

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} dx_k du_k + \sum_{j=1}^{n} (du_k)^2 = (dl_i)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_k + \\ + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l\right)^2$$

Запишем в более лаконичном виде:

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2\frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_k + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_k^i\right)^2 \tag{2}$$

При малых деформациях третьим слагаемым можно пренебречь в силу его большего порядка малости.

Во втором слагаемом индексы j, k являются немыми, поэтому его можно записать в симметричном виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_k = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\Big) dx_l dx_k = \varepsilon_{kl} dx_l dx_k, \tag{3}$$

где ε_{kl} – составляющая тензора деформаций в точке X.

В предположении существования аддитивного разложения компонент тензора деформаций Коши запишем:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\Big) = \varepsilon^e_{kl} + \varepsilon^0_{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3,$$

где ε^e_{kl} – компоненты упругой состовляющей тензора деформаций, а ε^0_{kl} – компоненты тенхора неупругих деформаций среду (в нашем случае температурные деформации).

Термоупругость описывает деформации при неравномерном нагреве деформируемых тел. Термоупругое тело обладает хотя бы одним естественным состоянием, в котором отсутствуют напряжения и деформации, при том температура во всех точках одинакова. Свяжем это состояние с начальной температурой тела T_0. При нагреве или охлаждении в теле возникают температурные деформации, описываемые тензором с компонентами ε^0_{kl}:

$$\varepsilon^0_{kl} = \alpha^T_{kl} \Delta T \Rightarrow \varepsilon^0_{kl} \sim \alpha^T_{kl},$$

где α^T_{kl} – компоненты тензора теплового расширения.

Заключение

Список литературы