

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для решения гиперболических уравнений в частных производных

Выполнил: Токарев А. И.

Научный руководитель: Лукин В. В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

24 июня 2022 г.

- ❶ Постановка задачи
- ❷ Алгоритм
- ❸ Одномерное уравнение переноса
- ❹ Тестирование и сравнение методов

Аппроксимирующая парабола внутри разностной ячейки

Имея значения в узлах x_i , $i = 0 \dots N$, доопределяем значения в половинных узлах, то есть исходная сетка $\Omega_h = \{x_i, i = 0 \dots N\}$ преобразуется в набор отрезков $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ с определенными в них параболами:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \\ y_i^{(6)} &= 6 \left[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L) \right], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (1)$$

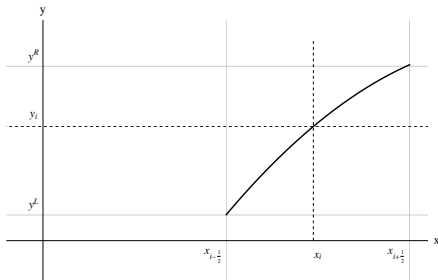


Рис. 1. Парабола внутри разностной ячейки

Постановка задачи

Для выражение (1) выполняется соотношение:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi, \quad (2)$$

то есть значения в узлах сетки Ω_h являются средними значениями (рис. 2).

Среднее значение на отрезке

После определения парабол можно считать средние значения на отрезках $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}]$ и $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha]$:

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_i^{(6)} \right], \quad (3)$$

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_{i+1}^{(6)} \right]. \quad (4)$$

Граничные значения в кусочно-параболическом методе – РРМ

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i), \quad \delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Для того, чтобы обеспечить монотонность решения, δy_i заменяется на:

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

Модификация метода. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне – РРМЛ

В качестве альтернативы предлагает перенос граничных узлов по характеристикам.

Пусть $\frac{dx}{dt} = a$.

- Если $a > 0$, то получаем:

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \quad \xi = 1 - \frac{a\tau}{h}.$$

- При $a < 0$:

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_{i+1}^L(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \quad \xi = -\frac{a\tau}{h}.$$

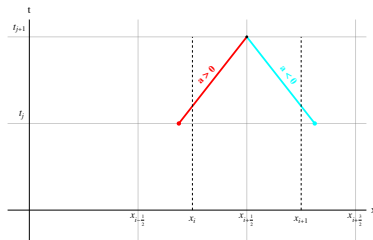


Рис. 2. Перенос значений на границах вдоль характеристик в методе PPML

Избавление от локальных экстремумов

- y_i является локальным экстремумом, тогда:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0;$$

- y_i лежит слишком близко к границе:

$$y_i^L = 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2,$$

$$y_i^R = 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2.$$

Вид уравнения и характеристики

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow x = at + b. \quad (5)$$

Интегро-интерполяционный метод

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0 dt dx = 0.$$

Рассмотрим интегралы по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[y(x, t_{j+1}) - y(x, t_j) \right] dx = h \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_{j+1}) dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_j) dx \right] = h(\bar{y}(x_i, t_{j+1}) - \bar{y}(x_i, t_j)) = h(\hat{y}_i - y_i). \end{aligned}$$

Интегро-интерполяционный метод. Перенос узлов

Воспользуемся особенностью переноса значений по характеристикам для интеграла, подынтегральная функция которого является потоком (рис. 3):

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} a (y(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - y(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a y(x, t_j) dx - \\ &- \int_{x_{i-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i-\frac{1}{2}}} a y(x, t_j) dx = a\tau (a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Объединяя оба интеграла получаем:

$$h(\hat{y}_i - y_i) + a\tau (a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = y_i - \frac{a\tau}{h} (a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (6)$$

Применение формул (3), (4) для определения средних значений на отрезках позволяет вычислить потоки $a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}$ и $a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}$.

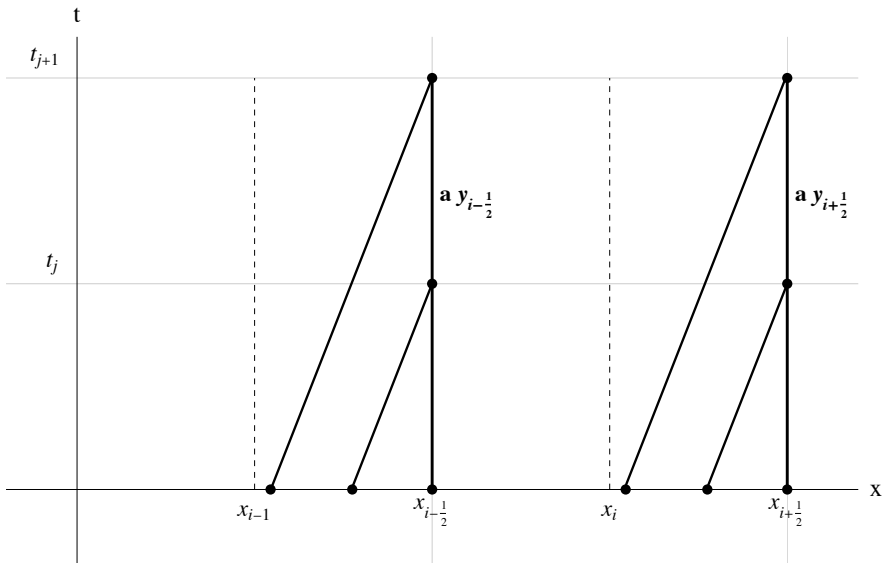


Рис. 3. Интегрирование потока по пространству, вместо времени

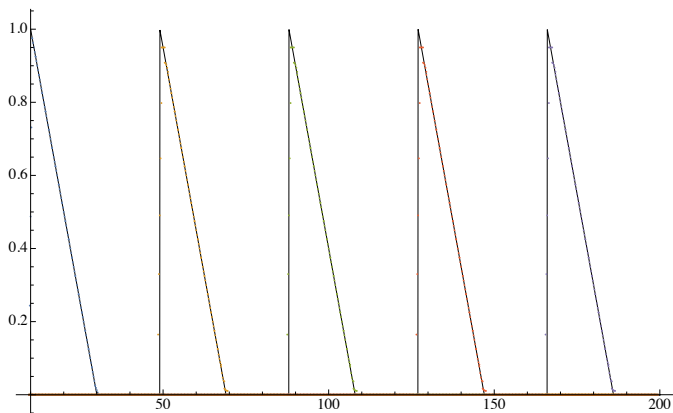


Рис. 4. Правый треугольник для РРМ при $\sigma = 1$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.5125	0.506	0.503	0.501	0.5
$\ \cdot \ _{L_1}$	25.6	6.32	1.57	0.39	0.1
$\ \cdot \ _{L_2}$	2.89	1.44	0.72	0.36	0.18

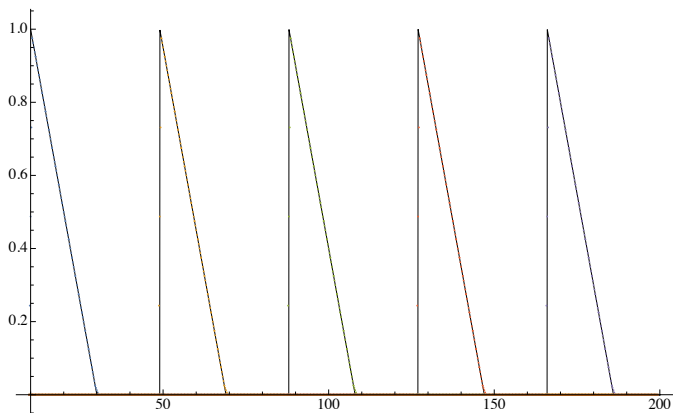


Рис. 5. Правый треугольник для PPML при $\sigma = 1$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.5125	0.505	0.5029	0.5025	0.5
$\ \cdot \ _{L_1}$	25.6	6.32	1.57	0.39	0.1
$\ \cdot \ _{L_2}$	2.86	1.42	0.71	0.305	0.17

Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

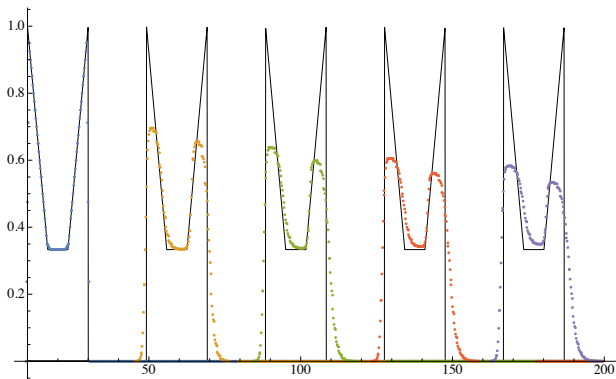


Рис. 6. Зуб для PPM при $\sigma = 0.8$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.716	0.7099	0.7067	0.7023	0.7
$\ \cdot \ _{L_1}$	41.15	10.14	2.518	0.62	0.3
$\ \cdot \ _{L_2}$	0.8	0.39	0.195	0.097	0.04

Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

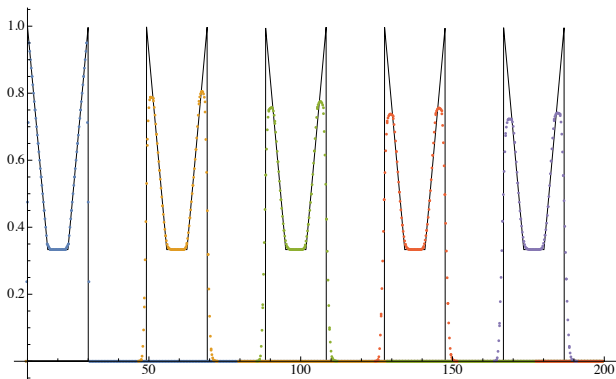


Рис. 7. Зуб для PPML при $\sigma = 0.8$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.58	0.56	0.557	0.554	0.55
$\ \cdot\ _{L_1}$	39.85	9.9	2.2	0.56	0.27
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.7	0.34	0.187	0.08	0.03

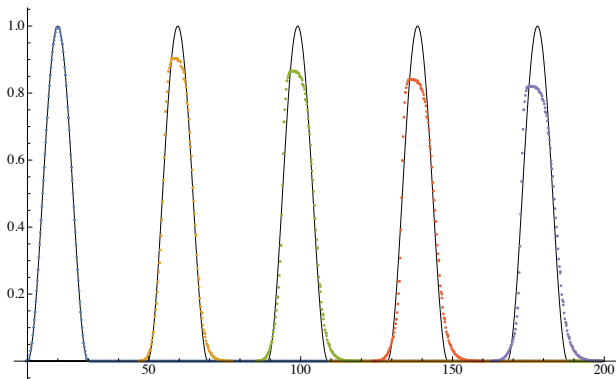


Рис. 8. Косинус для РРМ при $\sigma = 0.5$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.244	0.1117	0.044	0.019	$1e-05$
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.59	0.327	0.04	0.005	$2e-05$
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.99	0.18	0.003	0.00055	$2e-05$

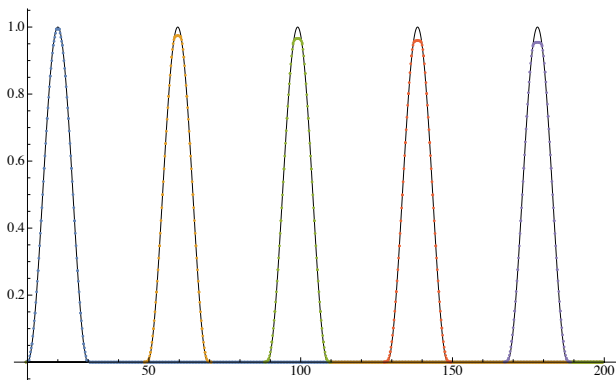


Рис. 9. Косинус для PPML при $\sigma = 0.5$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.048	0.015	0.005	0.0016	$1e-06$
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.55	0.32	0.0398	0.0049	$2e-06$
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.99	0.18	0.003	0.00055	$2e-06$



Corella P., Woodward P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. V.54. P. 174 – 201.



М. В. Попов, С. Д. Устюгов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, том 47, номер 12, 2055 – 2075, с. 2056 – 2060.



Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей/М.П. Галанин, Е.Б. Савенков.–М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.–591, [1] с.: ил. (Математическое моделирование в технике и технологии)



А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие: Для вузов – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. – 424 с.



А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.