Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Студент ФН2-62Б (Группа) ________ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ________ (Подпись, дата) В. В. Лукин (И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

Введение

Одним из наиболее удачных вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике. Он обладает порядком аппроксимации $O(\boldsymbol{\tau}^2 + h^3)$. Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет ряд недостатков: концы парабол на разностных ячейках связываются путем реконструкции переменных на расширенном четырехточечном шаблоне, что повышает диссипацию в схеме. Кроме того, PPM дает достаточно точный результат на гладких решениях, а вот на разрывах происходят ощутимые осцилляции.

Целью данной курсовой работы является анализ улучшенного метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML). Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностных ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение точности методов PPM и PPML на примерах одномерных задач. Также проведем демонстрацию рассматриваемого метода на нескольких двумерных задач газовой динамики.

1. Постановка задачи

1.1. Кусочно-параболический метод. PPM

Рассмотрим одномерную задачу. Пусть Ω_h – множество узлов сетки, в общем случае неравномерной. Определим функцию $y(x)$ ее разностным аналогом y_i, $i = 1 \ldots n$ на этой сетке. Значения y_i будем соотносить с центрами ячеек, а $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$ и $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$ – с концами. Строение разностной ячейки можно увидеть на рис. 1

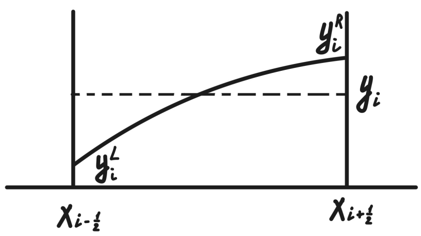

Рис. 1. Парабола внутри разностной ячейки

Основная идея метода PPM заключается в следующем – внутри отрезка $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функцию $y = y(x)$ можно аппроксимировать параболой:

$$\begin{aligned} &y(x) = y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1-\xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \\ &y_i^{(6)} = 6\Big[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L)\Big], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \tag{1}$$

Выражение (1) является квадратурной формулой для соотнешния:

$$y(x_i) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi)d\chi.$$

Значение функции $y(x)$ на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \qquad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}], \tag{2}$$

далее производится монотонизация функции внутри каждой разностной ячейки, в результате чего меняются граничные значения, а приводит к появлению разрывов.

Первым шагом ищем значение $y_{i+\frac{1}{2}}$ интерполяционной процедурой четвертого порядка, в результате получаем значения:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (2), значения δy_i нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|,\, 2|y_i - y_{i-1}|,\, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot sign(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

После определения всех граничных точек переходим к следующему шагу. В областях немонотонного решения $y(x)$ следует переопределять значения y_i^L, y_i^R. При этом возможны два сценария:

- y_i является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функция $y(x) = \text{const}$, а значит:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0; \tag{3}$$

- y_i лежит слишком близко к границе, а при условии $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$ парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае y_i^L и y_i^R должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$\begin{aligned} y_i^L &= 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2, \\ y_i^R &= 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

После всех проделанных операция функцию $y(x)$ можно считать определенной на сетке $\boldsymbol{\Omega}_h$.

Среднее значение данной функции на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}], (\alpha > 0)$ задается формулой:

$$\overline{y}^L_{i+\frac{1}{2}}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{x_{i+\frac{1}{2}}-\alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x)dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h}\Big[\Delta y_i - \Big(1 - \frac{2\alpha}{3h}\Big)y_i^{(6)}\Big], \tag{5}$$

а на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha], (\alpha > 0)$:

$$\overline{y}^R_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha}\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}+\alpha} y(x)dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h}\Big[\Delta y_{i+1} + \Big(1 - \frac{2\alpha}{3h}\Big)y_{i+1}^{(6)}\Big]. \tag{6}$$

1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PPML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения $y(x)$. Чтобы обойти данное ограничение, можно определять y_i^L и y_i^R с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = a$. Причем переопределять нужно лишь одну из границ. Для ясности будем рассматривать $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$. Для того, чтобы вычислить ее на следующем временном слое $t_j + \tau = t_{j+1}$ (обязательное ограничение – выполнение условия Куранта $a\Delta t_j \le \min_{0\le i\le n}\Delta x_i$), необходимо двигаться от точки $x_{i+\frac{1}{2}}$ со значением $y_{i+\frac{1}{2}}$ вдоль характеристики до предыдущего момента времени t_j:

1. $a > 0$, следовательно

$$\begin{aligned} &y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1-\xi)),\\ &\xi = \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 1 - \frac{a\tau}{h}; \end{aligned} \tag{7}$$

2. $a < 0$, следовательно

$$\begin{aligned} &y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_j) = y_i^R(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1-\xi)),\\ &\xi = \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 1 - \frac{a\tau}{h}. \end{aligned}$$

Алгоритм (7) реализован на локальном шаблоне, то есть для получения граничных точкек при переходе на следующий временной слой не нужно использовать информацию с соседних ячеек. Нахождение среднего значения на отрезке (5), (6) и смещение экстремума (3), (4) производятся аналогично.

1.3. Потоки и усредненное значение на отрезке

При возникновении разрыва на границе двух смежных ячеек в точке $x_{i+\frac{1}{2}}$ возникает некоторое усредненное состояние $y^\star(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$. Одномерное уравнение переноса имеет всего одну характеристику, поэтому его решение в момент времени $t = t_{j+1}$ будет определяться:

1. При $a > 0$ усреднением по пространствунному интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau, x_{i+\frac{1}{2}}]$ со значением $y^\star(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \overline{y}^L_{i+\frac{1}{2}}(a\tau)$;
2. При $a < 0$ – по интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}}\tau, x_{i+\frac{1}{2}} + a\tau]$ со значением $y^\star(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \overline{y}^R_{i+\frac{1}{2}}(-a\tau)$.

Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле:

$$\begin{aligned} &F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(y^\star(x_{i+\frac{1}{2}}, t))dt = a^+ y^L_{i+\frac{1}{2}} + a^- y^R_{i+\frac{1}{2}}, \\ &a^+ = \max(0, a), \quad a^- = \min(a, 0). \end{aligned} \tag{8}$$

2. Одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a\frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

Решением уравнения переноса является функция, сохраняющая свой профиль с течением времени, то есть $y(x,t) = y_0(x - at)$, где u_0 – начальный профиль. Это происходит по той причине, что профиль при сносе по характеристикам остается одинаковым. Если $\frac{dx}{dt} = a$ – характеристика, то прямые $x - at = b$ называют характеристическими. На каждой из таких прямых $y = \text{const}$ и перемещается по ней с некоторой заданной скоростью a.

Уравнение переноса – простейший пример, применяемый для проверки алгоритма на корректность. В задачах газодинамики оператор переноса является составной частью, поэтому любой численный метод для таких моделей обязан проходить проверку простейшим уравнением.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса (9) с различными начальными условиями y_0:

$$y_0(x) = \frac{x - l_1}{l_2 - l_1} \text{ – левый треугольник,}$$

$$y_0(x) = \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1} \text{ – правый треугольник,}$$

$$y_0(x) = 1 \text{ – прямоугольник,}$$

$$y_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{2(x - l_1)}{3(l_{11} - l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \dfrac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \dfrac{2(x - l_2)}{3(l_2 - l_{22})} + 1, & x \in (l_{22}, l2], \quad \text{– зуб,} \end{cases}$$

$$y_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{2(x - l_1)}{3(l_{12} - l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{12}), \\ \dfrac{2(x - l_2)}{3(l_2 - l_{12})} + 1, & x \in [l_{12}, l2], \quad \text{– М,} \end{cases}$$

где $l = 520$, $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, $l_{11} = \frac{50}{3}$, $l_{22} = \frac{70}{3}$, $l_{12} = 20$, $T = 400$, $h = 1$, $a = 1$.

Численное решение будем сравнивать с точным, имеющим вид:

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & x - at < l_1, \\ u_0(x - at), & l_1 \le x - at \le l_2, \\ 0, x - at > l_2. \end{cases}$$

3. Уравнение Брюггерса

Заключение