



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ

ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Студент _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

В. В. Лукин

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
1.1. Кусочно-параболический метод. PPM	4
1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PPML	6
1.3. Потоки и усредненное значение на отрезке	7
2. Одномерное уравнение переноса	7
3. Уравнение Брюггерса	8
Заключение	8

Введение

Одним из наиболее удачных вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике. Он обладает порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^3)$. Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет ряд недостатков: концы парабол на разностных ячейках связываются путем реконструкции переменных на расширенном четырехточечном шаблоне, что повышает диссипацию в схеме. Кроме того, PPM дает достаточно точный результат на гладких решениях, а вот на разрывах происходят ощутимые осцилляции.

Целью данной курсовой работы является анализ улучшенного метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML). Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностных ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение точности методов PPM и PPML на примерах одномерных задач. Также проведем демонстрацию рассматриваемого метода на нескольких двумерных задачах газовой динамики.

1. Постановка задачи

1.1. Кусочно-параболический метод. PPM

Рассмотрим одномерную задачу. Пусть Ω_h – множество узлов сетки, в общем случае неравномерной. Определим функцию $y(x)$ ее разностным аналогом $y_i, i = 1 \dots n$ на этой сетке. Значения y_i будем соотносить с центрами ячеек, а $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$ и $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$ – с концами. Строение разностной ячейки можно увидеть на рис. 1

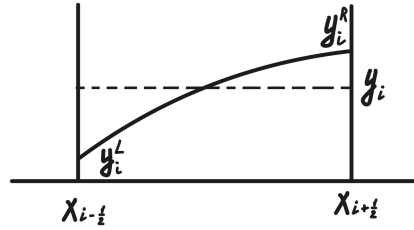


Рис. 1. Парабола внутри разностной ячейки

Основная идея метода PPM заключается в следующем – внутри отрезка $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функцию $y = y(x)$ можно аппроксимировать параболой:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \\ y_i^{(6)} &= 6\left[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L)\right], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Выражение (1) является квадратурной формулой для соотношения:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi.$$

Значение функции $y(x)$ на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \quad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}], \quad (2)$$

далее производится монотонизация функции внутри каждой разностной ячейки, в результате чего меняются граничные значения, а приводит к появлению разрывов.

Первым шагом ищем значение $y_{i+\frac{1}{2}}$ интерполяционной процедурой четвертого порядка, в результате получаем значения:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (2), значения δy_i нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

После определения всех граничных точек переходим к следующему шагу. В областях немонотонного решения $y(x)$ следует переопределять значения y_i^L, y_i^R . При этом возможны два сценария:

- y_i является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функция $y(x) = \text{const}$, а значит:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0; \quad (3)$$

- y_i лежит слишком близко к границе, а при условии $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$ парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае y_i^L и y_i^R должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$\begin{aligned} y_i^L &= 3y_i - 2y_i^R, & \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} &> (\Delta y_i)^2, \\ y_i^R &= 3y_i - 2y_i^L, & \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} &< -(\Delta y_i)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

После всех проделанных операция функцию $y(x)$ можно считать определенной на сетке Ω_h .

Среднее значение данной функции на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $(\alpha > 0)$ задается формулой:

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_i^{(6)} \right], \quad (5)$$

а на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha]$, $(\alpha > 0)$:

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_{i+1}^{(6)} \right]. \quad (6)$$

1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. RPML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения $y(x)$. Чтобы обойти данное ограничение, можно определять y_i^L и y_i^R с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = a$. Причем переопределять нужно лишь одну из границ. Для ясности будем рассматривать $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$. Для того, чтобы вычислить ее на следующем временном слое $t_j + \tau = t_{j+1}$ (обязательное ограничение – выполнение условия Куранта $a\Delta t_j \leq \min_{0 \leq i \leq n} \Delta x_i$), необходимо двигаться от точки $x_{i+\frac{1}{2}}$ со значением $y_{i+\frac{1}{2}}$ вдоль характеристика до предыдущего момента времени t_j :

1. $a > 0$, следовательно

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) &= y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \\ \xi &= \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 1 - \frac{a\tau}{h}; \end{aligned} \quad (7)$$

2. $a < 0$, следовательно

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) &= y_i^R(t_j) = y_i^R(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \\ \xi &= \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 1 - \frac{a\tau}{h}. \end{aligned}$$

Алгоритм (7) реализован на локальном шаблоне, то есть для получения граничных точек при переходе на следующий временной слой не нужно использовать информацию с соседних ячеек. Нахождение среднего значения на отрезке (5), (6) и смещение экстремума (3), (4) производятся аналогично.

1.3. Потоки и усредненное значение на отрезке

При возникновении разрыва на границе двух смежных ячеек в точке $x_{i+\frac{1}{2}}$ возникает некоторое усредненное состояние $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$. Одномерное уравнение переноса имеет всего одну характеристику, поэтому его решение в момент времени $t = t_{j+1}$ будет определяться:

1. При $a > 0$ усреднением по пространственному интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau, x_{i+\frac{1}{2}}]$ со значением $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(a\tau)$;
2. При $a < 0$ – по интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}}\tau, x_{i+\frac{1}{2}} + a\tau]$ со значением $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R(-a\tau)$.

Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt = a^+ y_{i+\frac{1}{2}}^L + a^- y_{i+\frac{1}{2}}^R, \quad (8)$$

$$a^+ = \max(0, a), \quad a^- = \min(a, 0).$$

2. Одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Решением уравнения переноса является функция, сохраняющая свой профиль с течением времени, то есть $y(x, t) = y_0(x - at)$, где y_0 – начальный профиль. Это происходит по той причине, что профиль при сносе по характеристикам остается одинаковым. Если $\frac{dx}{dt} = a$ – характеристика, то прямые $x - at = b$ называют характеристическими. На каждой из таких прямых $y = \text{const}$ и перемещается по ней с некоторой заданной скоростью a .

Уравнение переноса – простейший пример, применяемый для проверки алгоритма на корректность. В задачах газодинамики оператор переноса является составной частью, поэтому любой численный метод для таких моделей обязан проходить проверку простейшим уравнением.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса (9) с различными начальными условиями y_0 :

$$y_0(x) = \frac{x - l_1}{l_2 - l_1} - \text{левый треугольник,}$$

$$y_0(x) = \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1} - \text{правый треугольник,}$$

$$y_0(x) = 1 - \text{прямоугольник,}$$

$$y_0(x) = \begin{cases} -\frac{2(x - l_1)}{3(l_{11} - l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2(x - l_2)}{3(l_2 - l_{22})} + 1, & x \in (l_{22}, l_2], \end{cases} - \text{зуб,}$$

$$y_0(x) = \begin{cases} -\frac{2(x - l_1)}{3(l_{12} - l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{12}), \\ \frac{2(x - l_2)}{3(l_2 - l_{12})} + 1, & x \in [l_{12}, l_2], \end{cases} - \text{М,}$$

где $l = 520$, $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, $l_{11} = \frac{50}{3}$, $l_{22} = \frac{70}{3}$, $l_{12} = 20$, $T = 400$, $h = 1$, $a = 1$.

Численное решение будем сравнивать с точным, имеющим вид:

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & x - at < l_1, \\ u_0(x - at), & l_1 \leq x - at \leq l_2, \\ 0, & x - at > l_2. \end{cases}$$

3. Уравнение Брюггерса

Заключение