



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

ПЕРЕНОСА

Студент _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

В. В. Лукин

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
2. Методы решения	6
2.1. Кусочно-параболический метод. PPM	7
2.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PPML	8
2.3. Потоки и усредненное значение на отрезке	10
3. Анализ и сравнение	10
3.1. Анализ точного вычисления граничных и срединных узлов	11
3.2. Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Ку-ранта	14
3.3. Анализ методов на линейном графике	16
Заключение	18
Список литературы	19

Введение

Одним из используемых вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике [1]. Он обладает порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^3)$. Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет несколько существенных недостатков: возникновение ощутимых осцилляций на разрывных решениях; некомпактность шаблона, что усложняет проведение параллельных расчетов и определение граничных условий.

Целью данной курсовой работы является анализ варианта метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML) [2]. Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностных ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение на примерах одномерных задач точности методов PPM и PPML, а также поведение решений на границах, в которых происходят разрывы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное уравнение переноса [3]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Характеристикой уравнения (1) является множество точек (x, t) , удовлетворяющее уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad (2)$$

то есть множество $x - at = b$.

Вдоль характеристики выполняется следующее равенство:

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Как результат, получаем аналитическое решение уравнения (1) в виде:

$$y(x, t) = y_0(x - at), \quad (3)$$

где y_0 – начальный профиль.

Уравнение переноса – простейший пример, применяемый для проверки алгоритма на корректность [3]. В задачах газодинамики оператор переноса является составной частью, поэтому любой численный метод для таких моделей обязан проходить проверку простейшим уравнением.

Рассмотрим задачу Коши (начальная задача) для уравнения (1) – поиск решения уравнения переноса на множестве $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, принимающее заданное значение в начальный момент времени $y(x, 0) = y_0(x)$ [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

Определим сетку $\Omega_h = \{x_i = l_1 + ih, i = 1 \dots n, h = \frac{l_2 - l_1}{n-1}\}$ – множество узлов, где $[l_1, l_2]$ – отрезок, на котором определена сетка; n – число узлов; h – шаг. Определим $y(x)$ ее разностным аналогом $y_i = y(x_i)$ на этой сетке. Значения y_i будем соотносить с узлами сетки, а $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$ и $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$ – с половинными узлами.

Определив решения y_i в момент времени t_j , можно вычислить \hat{y}_i на следующем временном слое t_{j+1} , применив интегро-интерполяционный метод к уравнению переноса в прямоугольнике $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_j, t_{j+1}]$:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0 dt dx = 0.$$

Рассмотрим интегралы в левой части по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [y(x, t_{j+1}) - y(x, t_j)] dx = h \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_{j+1}) dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_j) dx \right] = h(\bar{y}(x_i, t_{j+1}) - \bar{y}(x_i, t_j)) = h(\hat{y}_i - y_i). \end{aligned}$$

Воспользуемся особенностью переноса значений по характеристикам для интеграла, подынтегральная функция которого является потоком (рис. 1):

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(y(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - y(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i+\frac{1}{2}}} ay(x, t_j) dt - \\ &\quad - \int_{x_{i-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i-\frac{1}{2}}} ay(x, t_j) dt = a\tau(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Объединяя оба интеграла получаем:

$$h(\hat{y}_i - y_i) + a\tau(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = y_i - \frac{a\tau}{h}(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (5)$$

Таким образом, используя формулу (5), мы можем переносить средние значения ячеек.

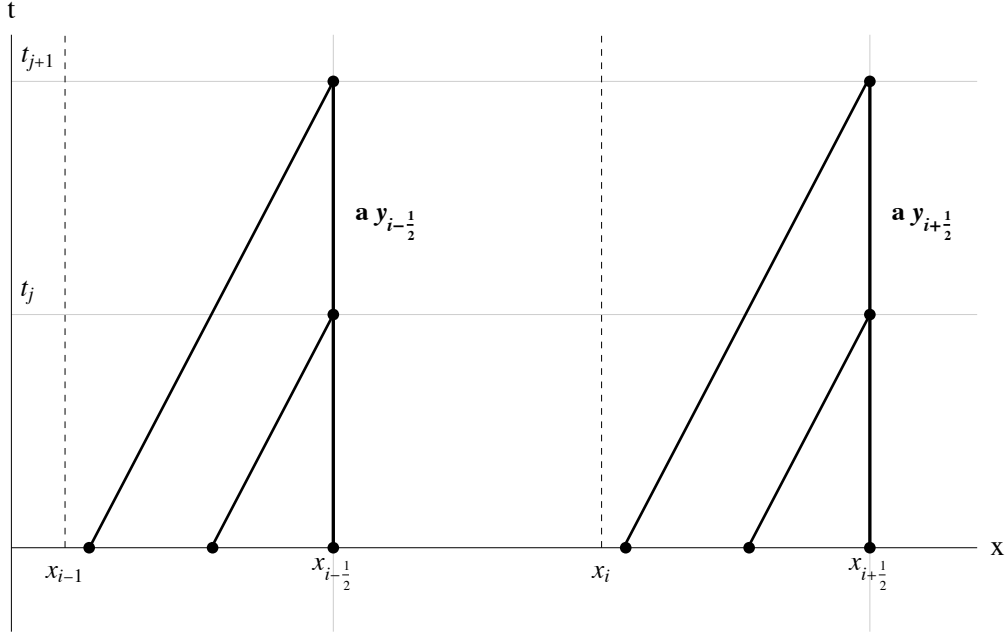


Рис. 1. Интегрирование потока по пространству, вместо времени

2. Методы решения

Основная идея рассматриваемых методов заключается в аппроксимации функции $y(x)$ параболой (рис. 6) на отрезках вида $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ [1]:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \\ y_i^{(6)} &= 6 \left[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L) \right], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) является квадратурной формулой для соотношения:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi.$$

Значение функции $y(x)$ на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \quad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}]. \quad (7)$$

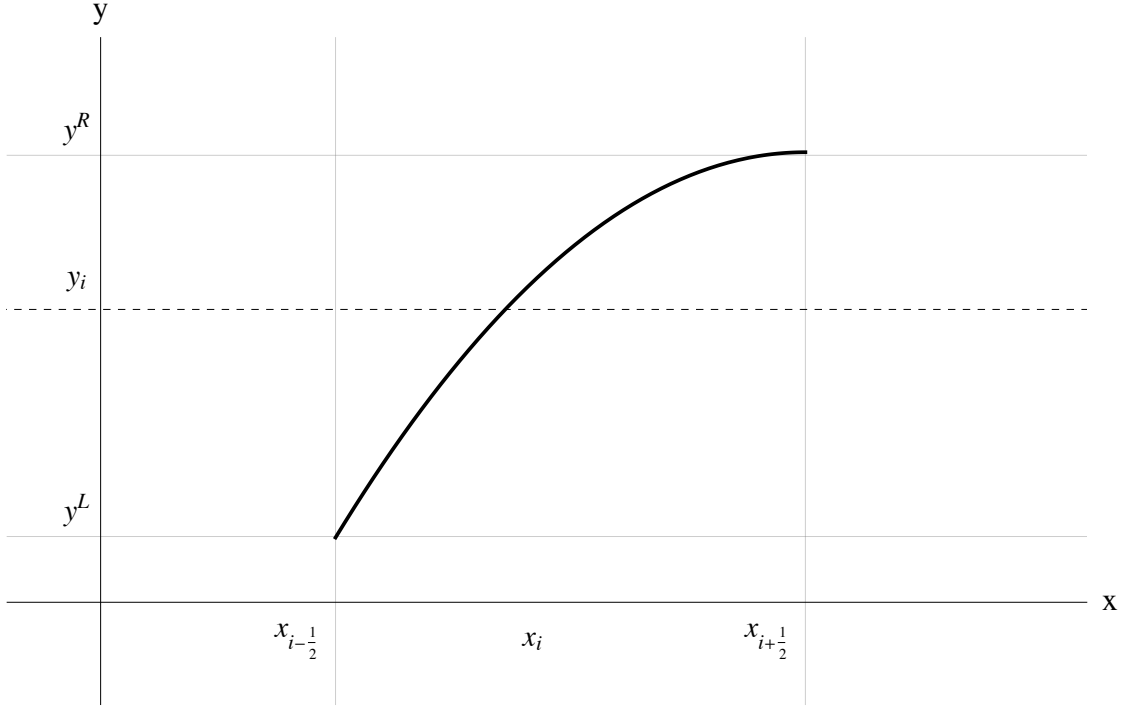


Рис. 2. Парабола внутри разностной ячейки

2.1. Кусочно-параболический метод, RPM

Первым шагом ищем значение $y_{i+\frac{1}{2}}$ интерполяционной процедурой четвертого порядка, в результате получаем значения:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (7), значения δy_i нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения $y(x)$ следует переопределять значения y_i^L, y_i^R . При этом возможны два сценария:

- y_i является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функция $y(x)$ должна быть постоянной, а значит:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0; \quad (8)$$

- y_i лежит слишком близко к границе – при условии $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$ парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае y_i^L и y_i^R должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$\begin{aligned} y_i^L &= 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2, \\ y_i^R &= 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

После всех проделанных операция функцию $y(x)$ можно считать определенной на сетке Ω_h [1, 2].

Среднее значение данной функции на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $(\alpha > 0)$ задается формулой, полученной путем аналитического интегрирования (6):

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_i^{(6)} \right], \quad (10)$$

а на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha]$, $(\alpha > 0)$:

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_{i+1}^{(6)} \right]. \quad (11)$$

2.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PRML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения $y(x)$. Чтобы обойти данное ограничение, можно определять y_i^L и y_i^R с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики

линейного уравнения переноса (1). Для ясности будем рассматривать правую границу $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$. Для того, чтобы вычислить ее на следующем временном слое $t_{j+1} = t_j + \tau$, необходимо двигаться от точки $x_{i+\frac{1}{2}}$ со значением $y_{i+\frac{1}{2}}$ вдоль характеристики до предыдущего момента времени t_j :

1. $a > 0$, следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1 - \xi)),$$

$$\xi = 1 - \frac{a\tau}{h},$$
(12)

что соответствует красной точке на рис. 3.

2. $a < 0$, следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_{i+1}^L(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1 - \xi)),$$

$$\xi = -\frac{a\tau}{h},$$

что соответствует синей точке на рис. 3.

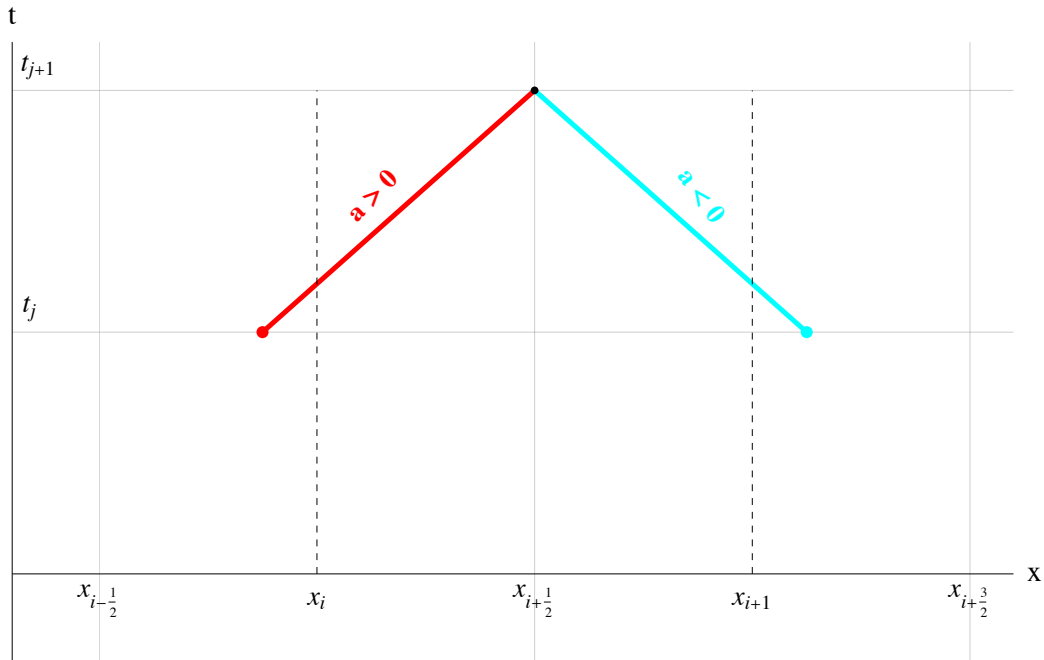


Рис. 3. Перенос значений в граничных точках вдоль характеристик в методе PPML

Алгоритм (12) реализован на локальном шаблоне, то есть для получения граничных точек при переходе на следующий временной слой не нужно использовать информацию с соседних ячеек. Нахождение среднего значения на отрезке (10), (11) и смещение экстремума (8), (9) производятся аналогично [2].

2.3. Потоки и усредненное значение на отрезке

При возникновении разрыва на границе двух смежных ячеек в точке $x_{i+\frac{1}{2}}$ возникает некоторое усредненное состояние $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$. Одномерное уравнение переноса имеет всего одну характеристику, поэтому его решение в момент времени $t = t_{j+1}$ будет определяться:

1. При $a > 0$ усреднением по пространственному интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau, x_{i+\frac{1}{2}}]$ со значением $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(a\tau)$;
2. При $a < 0$ – усреднением по интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + a\tau]$ со значением $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R(-a\tau)$.

Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt = a^+ y_{i+\frac{1}{2}}^L + a^- y_{i+\frac{1}{2}}^R, \quad (13)$$

$$a^+ = \max(0, a), \quad a^- = \min(a, 0).$$

3. Анализ и сравнение

Оценивать решение будем по норме ошибки в пространствах C , L_1 , L_2 :

$$\begin{aligned} \|z\|_C &= \max_{\Omega_h \times [0, T]} |z|, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|; \\ \|z\|_{L_1} &= \int_0^T \int_{\Omega_h} |z| dx dt, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|; \\ \|z\|_{L_2} &= \left(\int_0^T \int_{\Omega_h} z^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|, \end{aligned}$$

для методов актуальна сходимость по норме L_2 .

Рассмотрим несколько начальных профилей [3] и проанализируем точность каждого из методов в различных сценариях. Примем $l = 200$, $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, $l_{11} = \frac{50}{3}$, $l_{22} = \frac{70}{3}$, $l_{12} = 20$, $T = 200$, $h = 1$, $a = 1$.

3.1. Анализ точного вычисления граничных и серединных узлов

Рассмотрим, какой прирост точности дает метод RPML при числе Куранта $\sigma = 1$. В качестве иллюстрации приведем кусочно-линейный профиль – правый треугольник.

Правый треугольник задается уравнением:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0, & x < l_1; \\ y_0(x) = \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1}, & x \in [l_1, l_2]; \\ y_0(x) = 0, & x > l_2. \end{cases}$$

На рис. 4 показано численное решение, полученное путем применения метода РРМ.

Заметим, что на концах треугольников происходит разрыв решений в ячейках y_i^L , y_i , y_i^R , поэтому, например, вычисление нормы в пространстве $C[a, b]$ неприменимо для данных методов, потому что ее значение не будет уменьшаться при измельчении шага на кусочно-линейных графиках.

Из таблицы 1 можно сделать вывод о порядке точности метода РРМ для профиля "правый треугольник":

В пространстве L_1 : $\psi_h^{(2)} = 4.05 \approx 4$; $\psi_\tau^{(2)} = 1.995 \approx 2$.

В пространстве L_2 : $\psi_h^{(2)} = 2.003 \approx 2$; $\psi_\tau^{(2)} = 1.41$.

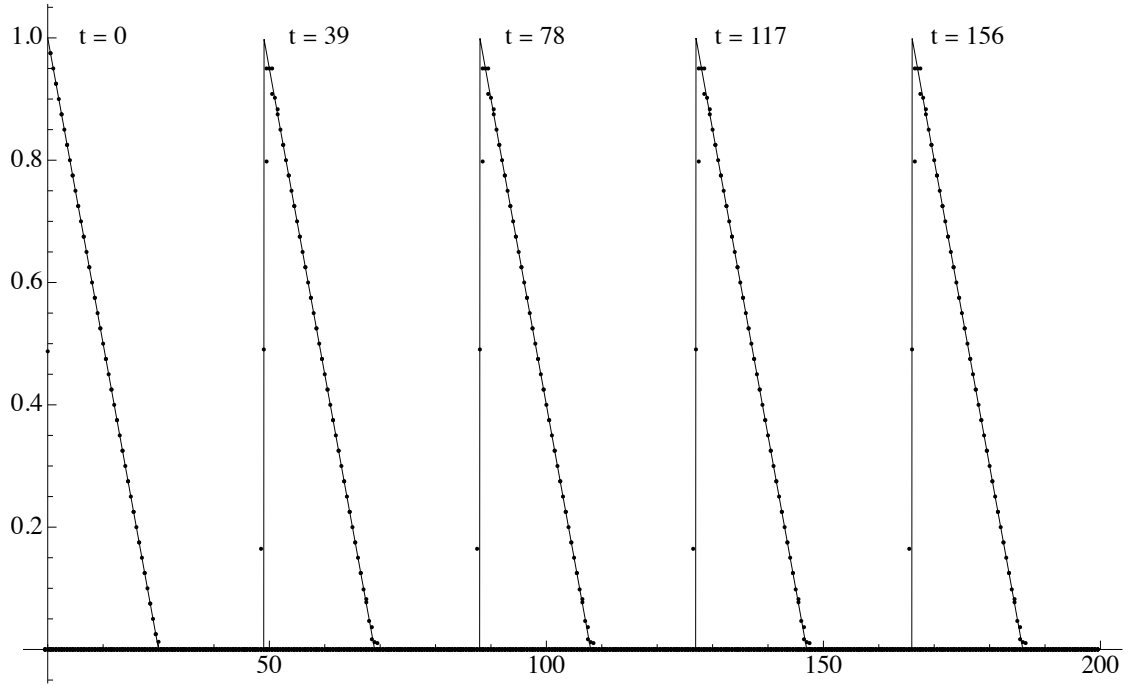
Рис. 4. Правый треугольник для РРМ при $\sigma = 1$

Таблица 1. Нормы ошибок для правого треугольника в методе РРМ

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.5125	0.58	0.65	0.506	0.61	0.695	0.503	0.613	0.696
$\ \cdot\ _{L_1}$	1.038	0.519	0.26	0.255	0.13	0.064	0.063	0.0315	0.0158
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.622	0.44	0.311	0.309	0.22	0.154	0.154	0.1087	0.077

На рис. 5 показано решение, полученное с применением метода РРМЛ. На концах треугольников параболы в каждой разностной ячейке передают значения гораздо точнее, чем в методе РРМ.

Скорость стремления нормы к нулю (таблица 2) практически идентична методу РРМ, однако визуально график больше приближен к точному решению. Оценим порядок точности метода РРМЛ:

В пространстве L_1 : $\psi_h^{(2)} \approx 4$; $\psi_\tau^{(2)} \approx 2$.

В пространстве L_2 : $\psi_h^{(2)} \approx 2$; $\psi_\tau^{(2)} \approx 1.4$.

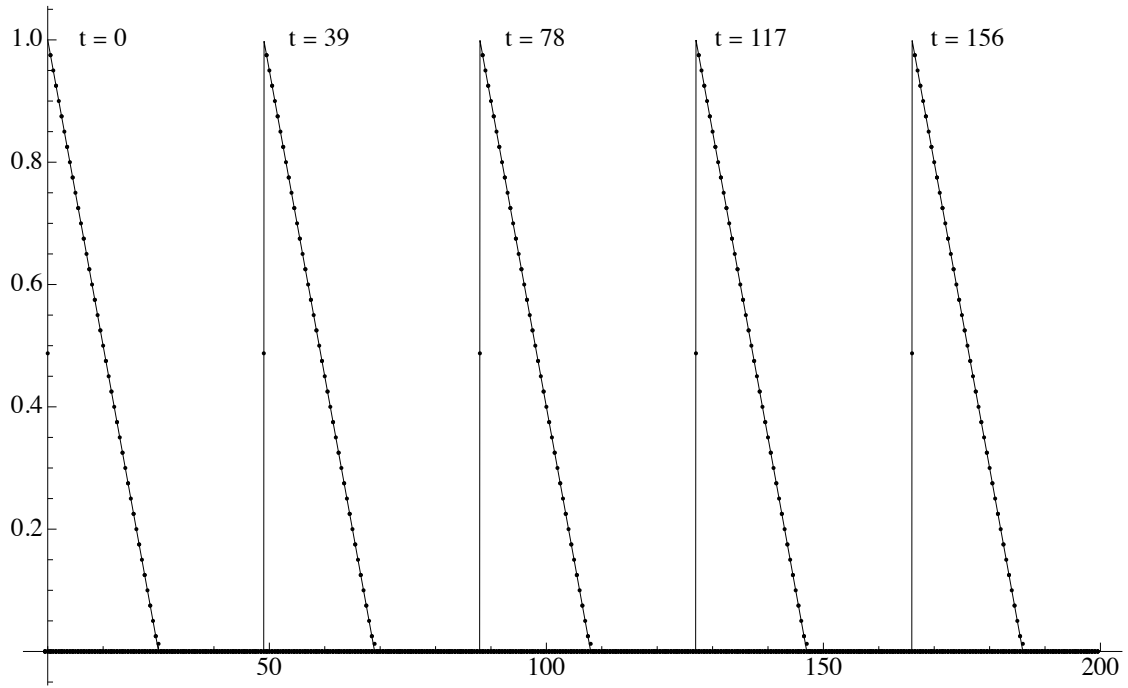
Рис. 5. Правый треугольник для PRML при $\sigma = 1$

Таблица 2. Нормы ошибок для правого треугольника в методе PRML

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.5125	0.5039	0.5544	0.50625	0.502	0.5487	0.5031	0.5001	0.5458
$\ \cdot\ _{L_1}$	1.0375	0.5187	0.2593	0.255	0.1273	0.0637	0.063	0.03154	0.01577
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.6228	0.4404	0.3114	0.3087	0.2183	0.1544	0.1537	0.1087	0.0768

3.2. Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

Рассмотрим $\sigma = 0.8$, в качестве примера рассмотрим профиль "зуб":

$$y_0(x) = \begin{cases} -\frac{2(x-l_1)}{3(l_{11}-l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2(x-l_2)}{3(l_2-l_{22})} + 1, & x \in (l_{22}, l_2]. \end{cases}$$

На рис. 6 заметна значительная диссипация и неодинаковые высоты на зубцах.

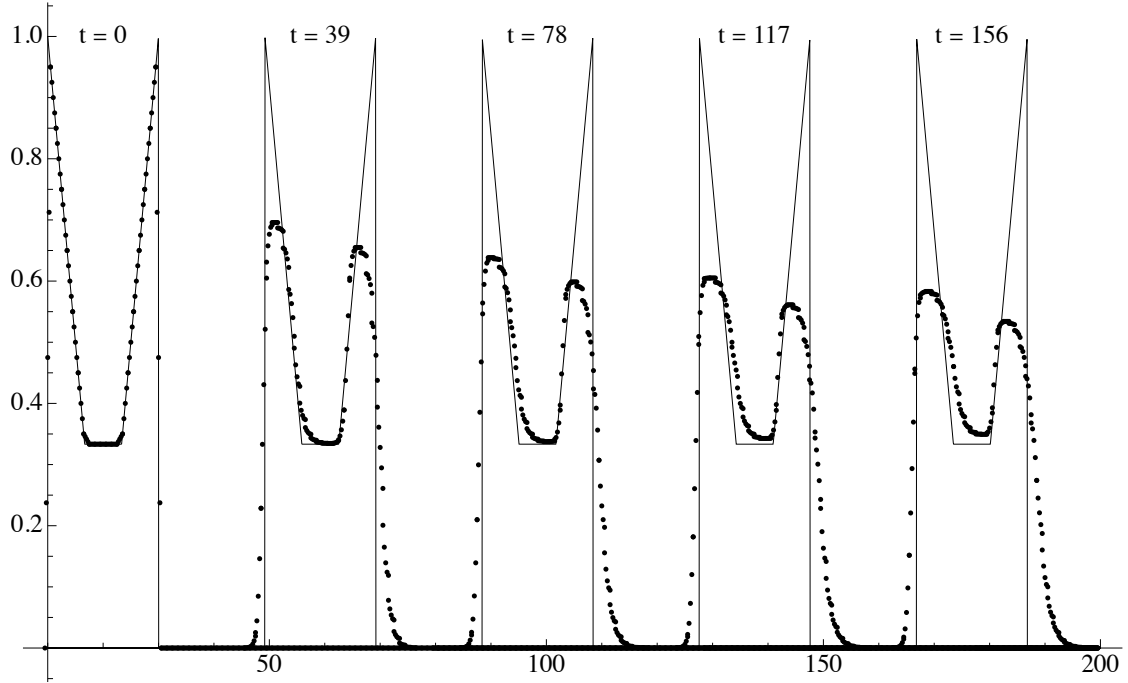


Рис. 6. Зуб для РРМ при $\sigma = 0.8$

Тем не менее, несмотря на диссипацию, сходимость по норме L_2 сохраняется (таблица 3). Точность метода РРМ для профиля "зуб":

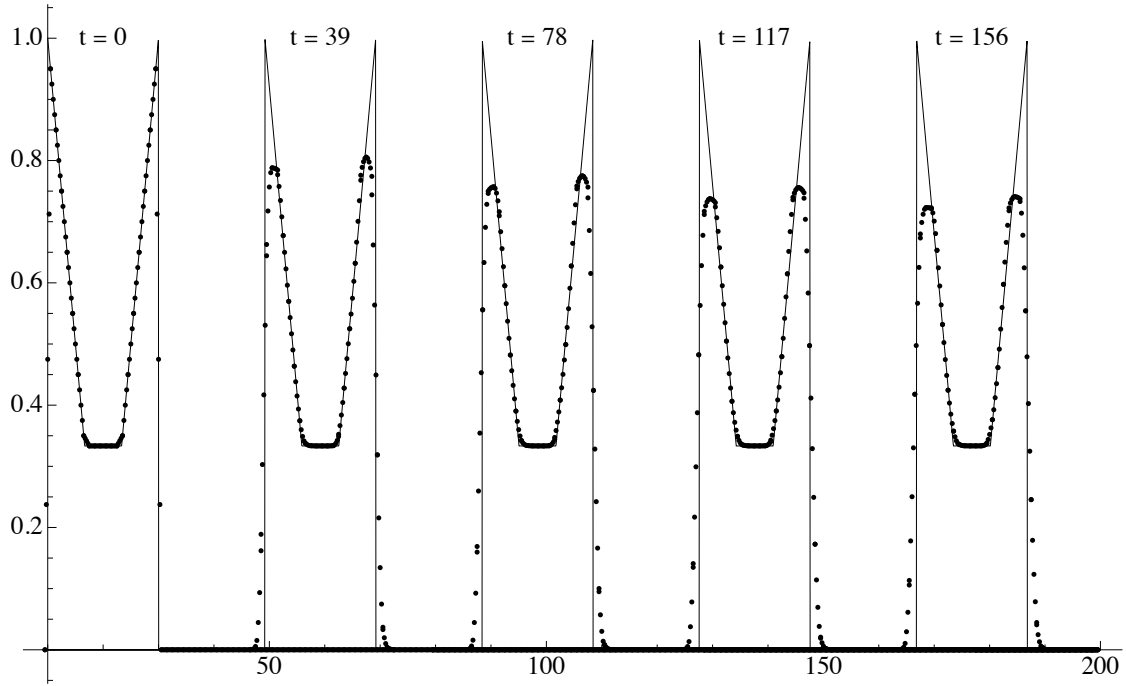
В пространстве L_1 : $\psi_h^{(2)} \approx 4$; $\psi_\tau^{(2)} \approx 2$.

В пространстве L_2 : $\psi_h^{(2)} \approx 2$; $\psi_\tau^{(2)} \approx 1.4$.

Таблица 3. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе РРМ

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.525	0.84	0.754	0.5125	0.8375	0.7501	0.50625	0.835	0.7494
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.1	1.05	0.525	0.5125	0.26	0.13	0.127	0.0633	0.032
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.9	0.63	0.45	0.44	0.311	0.22	0.22	0.154	0.11

Метод РРМЛ (рис. 7) характеризуется менее выраженной диссипацией и более ровными "горбами".

Рис. 7. Зуб для РРМЛ при $\sigma = 0.8$

Помимо этого, анализ норм ошибок для метода РРМЛ также показывает повышенную точность во всех рассматриваемых пространствах (таблица 4). Точность метода остается такой же, как и во всех предыдущих случаях:

В пространстве L_1 : $\psi_h^{(2)} \approx 4$; $\psi_\tau^{(2)} \approx 2$.

В пространстве L_2 : $\psi_h^{(2)} \approx 2$; $\psi_\tau^{(2)} \approx 1.4$.

Таблица 4. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе RPML

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.525	0.6437	0.6347	0.5125	0.6343	0.6262	0.50625	0.6297	0.6219
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.1	1.049	0.5249	0.5125	0.2563	0.1281	0.1265	0.0633	0.03164
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.895	0.633	0.4478	0.4403	0.3113	0.2202	0.2183	0.1544	0.10916

3.3. Анализ методов на линейном графике

Пусть $\sigma = 0.5$. Сравним методы на примере профиля:

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l_2 - l_1}(x - l_1)\right).$$

Как и следовало ожидать, несмотря на гладкость профиля, диссипация в случае метода РРМ (рис. 8), ровно как и в методе RPML (рис. 9) остается, хотя и менее выраженная.

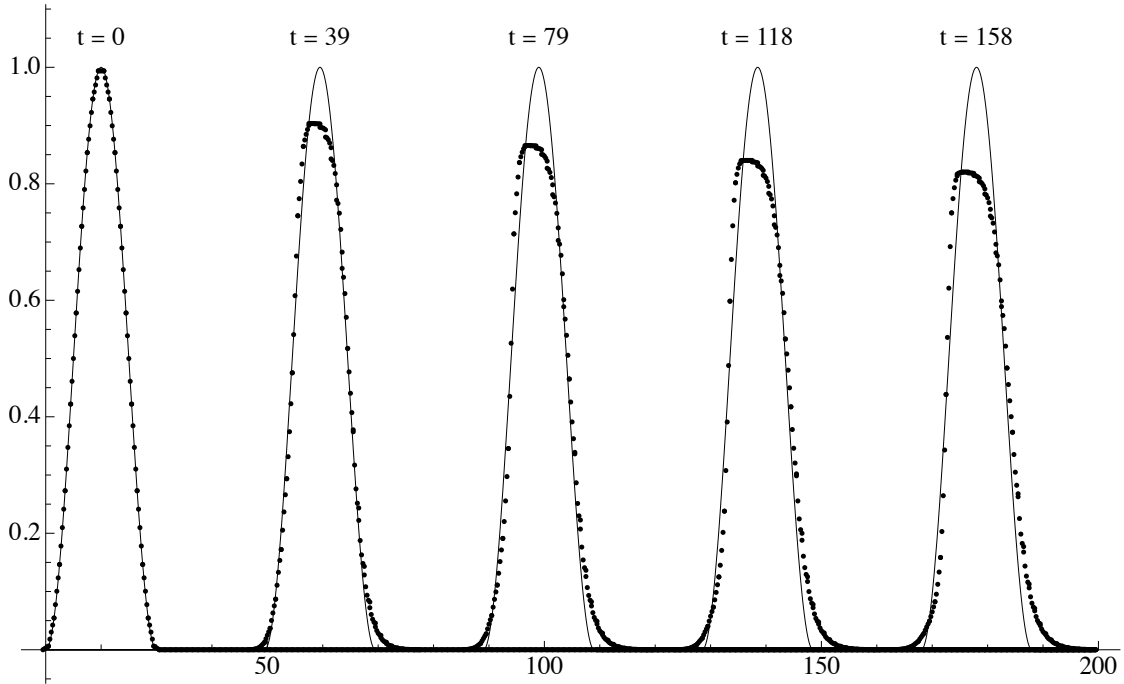
Рис. 8. Косинус для РРМ при $\sigma = 0.5$

График сохраняет свою гладкость, однако происходят заметные отклонения от точного решения в окрестностях оснований профилей. Хотя таблицы с

погрешностями решений 5, 6 показывают достаточно хороший результат для обоих методов, все же нельзя не отметить, что PPML стабильнее передает точное решение, а также обладает меньшей диссипацией.

Таблица 5. Нормы ошибок для косинуса в методе PPM

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.078	0.244	0.242	0.039	0.11	0.156	0.0196	0.044	0.06
$\ \cdot\ _{L_1}$	0.195	0.098	0.048	0.0245	0.012	0.006	0.003	0.0015	0.00077
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.028	0.02	0.014	0.005	0.0035	0.00245	0.00089	0.0006	0.00044

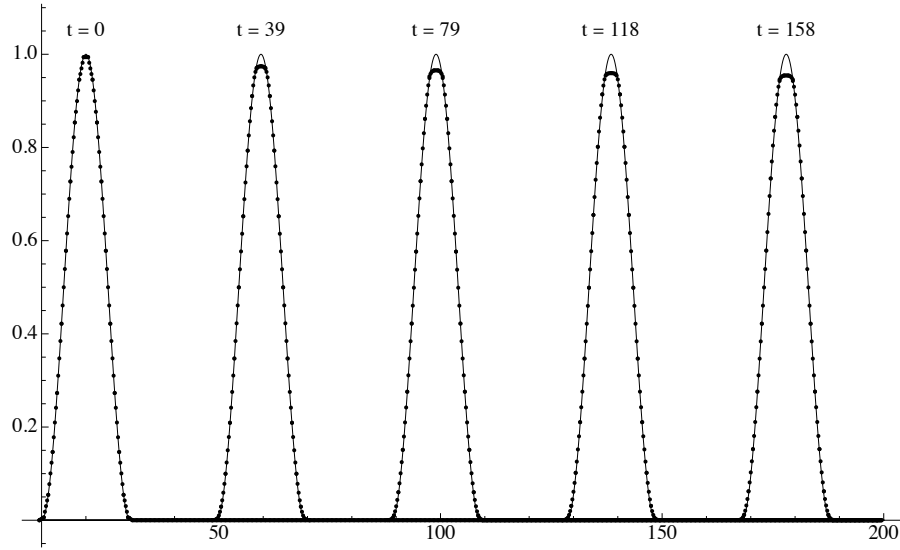


Рис. 9. Косинус для PPML при $\sigma = 0.5$

Таблица 6. Нормы ошибок для косинуса в методе PPML

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.00615	0.0479	0.0576	0.00154	0.0158	0.01859	0.00039	0.00515	0.00599
$\ \cdot\ _{L_1}$	0.19475	0.09738	0.0487	0.02449	0.01225	0.0061	0.00306	0.00153	0.00076
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.0277	0.01958	0.01384	0.005	0.00351	0.00248	0.00088	0.00059	0.00044

Заклучение

Рассмотрен кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. Выбор в пользу использования решений с предыдущего временного слоя, вместо интерполяционной процедуры, оказался удачным, так как обеспечивает более точное решение и уменьшенную диссипацию. Метод PPML протестирован на ряде примеров, рассмотренных с различными шагами, числами Куранта и профилями. Точность оценивалась на основе норм разности между точным и численным решениям в пространствах C , L_1 , L_2 . В пространствах L_1 , L_2 PPML оказался точнее во всех случаях. Однако в пространстве C результат нельзя интерпретировать однозначно. Но как уже отмечалось, актуальной является сходимость нормы ошибки в L_2 .

Список литературы

1. Corella P., Woodward P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. – P. 174 – 201.
2. М. В. Попов, С. Д. Устюгов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007. – С. 2056 – 2060.
3. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 591 с.
4. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. – 424 с.
5. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.