



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ

ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Студент _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

В. В. Лукин

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
1.1. Кусочно-параболический метод. RPM	4
1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. RPML	6
Заключение	6

Введение

Одним из наиболее удачных вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике. Он обладает порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^3)$. Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет ряд недостатков: концы парабол на разностных ячейках связываются путем реконструкции переменных на расширенном четырехточечном шаблоне, что повышает диссипацию в схеме. Кроме того, PPM дает достаточно точный результат на гладких решениях, а вот на разрывах происходят ощутимые осцилляции.

Целью данной курсовой работы является анализ улучшенного метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML). Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностных ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение точности методов PPM и PPML на примерах одномерных задач. Также проведем демонстрацию рассматриваемого метода на нескольких двумерных задачах газовой динамики.

1. Постановка задачи

1.1. Кусочно-параболический метод. PPM

Рассмотрим одномерную задачу. Пусть Ω_h – множество узлов сетки, в общем случае неравномерной. Определим функцию $y(x)$ ее разностным аналогом $y_i, i = 1 \dots n$ на этой сетке. Значения y_i будем соотносить с центрами ячеек, а $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$ и $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$ – с концами. Строение разностной ячейки можно увидеть на рис. 1

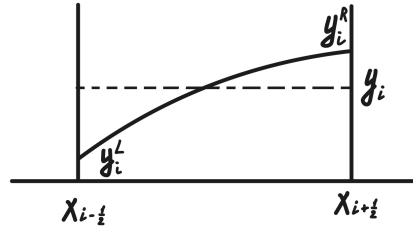


Рис. 1. Парабола внутри разностной ячейки

Основная идея метода PPM заключается в следующем – внутри отрезка $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функцию $y = y(x)$ можно аппроксимировать параболой:

$$y(x) = y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)),$$

$$\xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \quad y_i^{(6)} = 6 \left[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L) \right]. \quad (1)$$

Выражение (1) является квадратурной формулой для соотношения:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi.$$

Значение функции $y(x)$ на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \quad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}], \quad (2)$$

что дает возможность установить соответствие граничных узлов на соседних ячейках:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

$$y_i^L = y_{i-1}^R = y_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i-1}) - \frac{1}{6}(\delta y_i - \delta y_{i-1}),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Эта интерполяционная процедура имеет четвертый порядок. Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (2), значения δy_i нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения $y(x)$ следует переопределять значения на границах, то есть y_i^L, y_i^R . При этом возможны два сценария:

- y_i является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ функция $y(x) = \text{const}$, а значит $y_i^L = y_i^R = y_i$.
- y_i лежит слишком близко к границе, а при условии $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$ парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае y_i^L и y_i^R должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$y_i^L = 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2,$$

$$y_i^R = 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2.$$

После всех проделанных операция функцию $y(x)$ можно считать определенной на сетке Ω_h . Рассмотрим среднее значение данной функции на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}-\alpha}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ (при $\alpha > 0$):

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}-\alpha}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_i^{(6)} \right].$$

**** Линейное уравнение переноса и потоки ****

1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PRML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения $y(x)$. Чтобы обойти данное ограничение, можно определять y_i^L и y_i^R с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = a$. При этом переопределять нужно лишь одну из границ. Для ясности впредь будем рассматривать $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$.

Заклучение