

Константы

```
ln[32]:= If[True,
  y... истина
  A      = - 0.024 (**);
  B      = 1.69 (**);
  CC     = 0.5 (**);
   $\alpha$   =  $10^{-5}$       (* K-1 *);
  T0     = 300          (* K *);
  Young  = 1.75 *  $10^{11}$  (* Па *);
   $\sigma_f$  = 1.1 *  $10^8$   (* Па *);
   $\epsilon_f$  = 0.000628571;
  l      = 10           (* Длина стержня *);
  Tf     = 22.2         (* Конечный момент времени *);
   $\tau$     = 0.2          (* Шаг времени *);
  a      = 50           (* Просто константа *);
  n      = 10           (* Число узлов сетки *);
  h      = 0.1          (* Шаг сетки *);
];
```

Определение всех необходимых функций

$$\text{In[34]:= } F[x_]:=a \sin\left[\frac{\pi x}{l}\right];$$

```
In[35]:= T1[x_, t_] := T0 + F[x] t Sin[t];
```

$$T2[x_, t_] := T0 + F[x] \cos[2 t] \sin[3 t];$$

Тепловые деформации

$$\text{In}[37]:= \epsilon T [T_] := \alpha (T - T0);$$

Полные деформации

```
In[38]:= ϵ[u_] := D[u, {x, 1}];
```

... **SetDelayed**: Tag List in

```
{0.00176646, 0.00104344, 0.000355808, -0.000229124, -0.000654103, -0.000877528, -
0.000877528, -0.000654103, -0.000229124, 0}[u_] is Protected.
```

Аналитическое решение (перемещения)

```
In[39]:= uAnalytical =
  First[Flatten[
    DSolve[{
      D[D[u[x, t], {x, 1}] - εT[T1[x, t]], {x, 1}] == 0,
      u[0, t] == 0,
      u[l, t] == 0
    }, u[x, t], {x, t}]]
] [[2]]
Out[39]= 
$$\frac{5 t \sin[t] - t x \sin[t] - 5 t \cos\left[\frac{\pi x}{10}\right] \sin[t]}{1000 \pi}$$

```

Численное решение (метод конечных разностей)

```
In[40]:= f = D[εT[T1[x, t]], {x, 1}]
Out[40]= 
$$\frac{\pi t \cos\left[\frac{\pi x}{10}\right] \sin[t]}{20000}$$

```

Проверки для шага и количества точек (можем выставлять и то, и то)

```
In[41]:= If[NumberQ[n],
  h =  $\frac{l}{n}$ ,
  If[NumberQ[h], n = IntegerPart[ $\frac{l}{h}$ ]; h =  $\frac{l}{n}$ ];
```

Составляем разностное уравнение

```
In[42]:=  $\frac{d^2 u}{dx^2} == f;$ 
In[43]:=  $\frac{u_{i+1} - 2 u_i + u_{i-1}}{h^2} == f$ 
Out[43]=  $u_9 - 2 u_{10} + u_{11} == \frac{\pi t \cos\left[\frac{\pi x}{10}\right] \sin[t]}{20000}$ 
```

Создаем массив точек и значений функции f в них, далее решаем СЛАУ: $Au = F(f(x_1), \dots, f(x_n))$. В идеале прогонкой

```
In[44]:= points = Table[i * h, {i, 0, n}]
Out[44]= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

```
In[45]:= values = {0}~Join~Table[f /. {x → points[[i]]}, {i, 1, n - 1}]~Join~{0}
```

$$\text{Out[45]} = \left\{ 0, \frac{\pi t \sin[t]}{20000}, \frac{\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \pi t \sin[t]}{20000}, \frac{(1 + \sqrt{5}) \pi t \sin[t]}{80000}, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \pi t \sin[t]}{20000}, \frac{(-1 + \sqrt{5}) \pi t \sin[t]}{80000}, 0, \frac{(1 - \sqrt{5}) \pi t \sin[t]}{80000}, \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \pi t \sin[t]}{20000}, \frac{(-1 - \sqrt{5}) \pi t \sin[t]}{80000}, 0 \right\}$$

```
In[46]:= H = Table[
```

```
Table[
```

```
If[i == j,
```

```
If[i == 0 || i == n, 1,  $\frac{-2}{h^2}$ ],
```

```
If[(i == j - 1 || i == j + 1) && j ≠ 0 && j ≠ n,  $\frac{1}{h^2}$ , 0]
```

```
]
```

```
, {i, 0, n}],
```

```
{j, 0, n}
```

```
];
```

```
In[47]:= H // MatrixForm
```

```
Out[47]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Численно найденные значения перемещений путем решения ДУ

In[48]:= **uNumerical** = **LinearSolve**[H, values]

[решить линейные уравнения]

$$\text{Out[48]} = \left\{ 0, \frac{-10 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{200000}, \right. \\ \frac{-5 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{100000}, \\ \frac{-20 \pi t \sin[t] - 12 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - 6 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 7 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000}, \\ \frac{-15 \pi t \sin[t] - 11 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - 8 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 6 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000}, \\ \frac{-2 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{80000}, \\ \frac{-5 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{200000}, \\ \frac{-10 \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 3 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000}, \\ \frac{-5 \pi t \sin[t] + 3 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + 4 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000}, \\ \left. \frac{4 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000}, 0 \right\}$$

Нахождение деформаций $\left(\frac{du}{dx}\right)$

In[63]:= **duNumerical** = **Table** $\left[\frac{\text{uNumerical}[[i+1]] - \text{uNumerical}[[i]]}{h}, \{i, 1, n\}\right]$

[таблица значений]

$$\text{Out[63]} = \left\{ \frac{-10 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{200000}, \right. \\ \frac{-5 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{100000} + \\ \frac{10 \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{200000}, \\ \frac{-20 \pi t \sin[t] - 12 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - 6 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 7 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000} \\ + \\ \frac{5 \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{100000}, \\ \left. \frac{-15 \pi t \sin[t] - 11 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - 8 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 6 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400000} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& \frac{20 \pi t \sin[t] + 12 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + 6 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 7 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000}, \\
& \frac{-2 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{80\,000} + \\
& \frac{15 \pi t \sin[t] + 11 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + 8 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 6 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000}, \\
& \frac{-5 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{200\,000} + \\
& \frac{2 \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{80\,000}, \\
& \frac{-10 \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 3 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000} + \\
& \frac{5 \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{200\,000}, \\
& \frac{-5 \pi t \sin[t] + 3 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + 4 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000} + \\
& \frac{10 \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 3 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000}, \\
& \frac{4 \sqrt{5} \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000} + \\
& \frac{5 \pi t \sin[t] - 3 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - 4 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + 2 \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000}, \\
& \frac{-4 \sqrt{5} \pi t \sin[t] - 2 \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} \pi t \sin[t] + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \pi t \sin[t]}{400\,000} \}
\end{aligned}$$

Решение на каждом временном слое

```

In[50]:= σ = Table[0, {i, 1, n}];
           |таблица значений
σfv = Table[σf, {i, 1, n}];
           |таблица значений
ε = Table[0, {i, 1, n}];
           |таблица значений
εε = Table[0, {i, 1, n}];
           |таблица значений
εcrk = Table[0, {i, 1, n}];
           |таблица значений
T = Table[0, {i, 1, n}];
           |таблица значений

```

```

In[56]:= data = {};
For[tt = 0, tt <= Tf, tt = tt + τ,
  ⚭цикл⚭длЯ
  temp = {};
  For[i = 1, i < n, ++i,
    ⚭цикл⚭длЯ
    T[[i]] = T1[points[[i]], tt] /. t → tt;
    ε[[i]] = duNumerical[[i]] /. t → tt;
    εε[[i]] = ε[[i]] - εT[T[[i]]] - εcrk[[i]] /. t → tt;
    If[Young * εε[[i]] < σfv[[i]],
      ⚭условный оператор⚭
      σ[[i]] = Young * εε[[i]],
      σfv[[i]] = σf ⎛A + B e-CC *  $\frac{\epsilon[[i]] - \epsilon T[T[[i]]]}{\epsilon f}$ ⎞;

      σ[[i]] = σfv[[i]]; εcrk[[i]] = ε[[i]] - εT[T[[i]]] -  $\frac{\sigma[[i]]}{Young}$ ;

    ];
    AppendTo[temp, {tt, T[[i]], σ[[i]], ε[[i]], εε[[i]] - εT[T[[i]]], εcrk[[i]]}]
    ⚭добавить в конец к⚭
  ];
  AppendTo[data, temp]
  ⚭добавить в конец к⚭
];

```

Картиночки

```

In[58]:= ListPlot[Table[{data[[i, 2, 1]], data[[i, 2, 4]]}, {i, 1, IntegerPart@  $\frac{Tf}{\tau}$ }],
[диаграмм...] [таблица значений] [целая часть]

Joined → True, AxesLabel → {"t", "ε"}
[соединё...] [истина] [обозначения на осях]

ListPlot[Table[{data[[i, 2, 1]], data[[i, 2, -1]]}, {i, 1, IntegerPart@  $\frac{Tf}{\tau}$ }],
[диаграмм...] [таблица значений] [целая часть]

Joined → True, AxesLabel → {"t", "εcrk" }
[соединё...] [истина] [обозначения на осях]

ListPlot[Table[{data[[i, 2, 1]], data[[i, 2, 3]]}, {i, 1, IntegerPart@  $\frac{Tf}{\tau}$ }],
[диаграмм...] [таблица значений] [целая часть]

Joined → True, AxesLabel → {"t", "σ"}
[соединё...] [истина] [обозначения на осях]

ListPlot[Table[{data[[i, 2, 5]], data[[i, 2, 3]]}, {i, 1, IntegerPart@  $\frac{Tf}{\tau}$ }],
[диаграмм...] [таблица значений] [целая часть]

Joined → True, AxesLabel → {"ε - εT", "σ"}
[соединё...] [истина] [обозначения на осях]

ListPlot[Table[{data[[i, 2, 1]], data[[i, 2, 2]]}, {i, 1, IntegerPart@  $\frac{Tf}{\tau}$ }],
[диаграмм...] [таблица значений] [целая часть]

Joined → True, AxesLabel → {"t", "T"}
[соединё...] [истина] [обозначения на осях]

```



