



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### *К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*

### *НА ТЕМУ:*

### *КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД*

### *НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ*

### *РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ*

### *УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ*

### *ПРОИЗВОДНЫХ*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. И. Токарев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. В. Лукин  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2022 г.

## Содержание

Введение . . . . .	4
1. Постановка задачи . . . . .	5
1.1. Кусочно-параболический метод. PPM . . . . .	5
1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PPML . . . . .	7
1.3. Потоки и усредненное значение на отрезке . . . . .	8
2. Одномерное уравнение переноса . . . . .	9
2.1. Анализ точного вычисления граничных и срединных узлов . . . . .	11
2.2. Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Ку-ранта . . . . .	13
2.3. Анализ методов на гладком графике . . . . .	15
Заключение . . . . .	17
Список литературы . . . . .	18

## Введение

Одним из наиболее удачных вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике. Он обладает порядком аппроксимации  $O(\tau^2 + h^3)$ . Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет ряд недостатков: концы парабол на разностных ячейках связываются путем реконструкции переменных на расширенном четырехточечном шаблоне, что повышает диссипацию в схеме. Кроме того, PPM дает достаточно точный результат на гладких решениях, а вот на разрывах происходят ощутимые осцилляции.

Целью данной курсовой работы является анализ улучшенного метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML). Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностных ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение точности методов PPM и PPML на примерах одномерных задач.

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Кусочно-параболический метод. PPM

Рассмотрим одномерную задачу. Пусть  $\Omega_h$  – множество узлов сетки, в общем случае неравномерной. Определим функцию  $y(x)$  ее разностным аналогом  $y_i$ ,  $i = 1 \dots n$  на этой сетке. Значения  $y_i$  будем соотносить с центрами ячеек, а  $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$  и  $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$  – с концами. Строение разностной ячейки можно увидеть на рис. 1

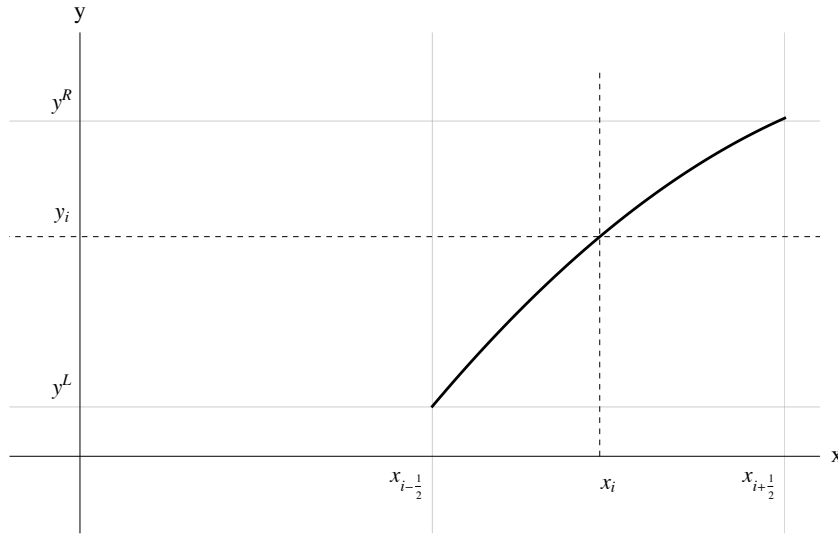


Рис. 1. Парабола внутри разностной ячейки

Основная идея метода PPM заключается в следующем – внутри отрезка  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  функцию  $y = y(x)$  можно аппроксимировать параболой [1]:

$$y(x) = y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \quad (1)$$

$$y_i^{(6)} = 6 \left[ y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L) \right], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}].$$

Выражение (1) является квадратурной формулой для соотношения:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi.$$

Значение функции  $y(x)$  на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \quad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}], \quad (2)$$

далее производится монотонизация функции внутри каждой разностной ячейки, в результате чего меняются значения на границах, что приводит к появлению разрывов на них.

Первым шагом ищем значение  $y_{i+\frac{1}{2}}$  интерполяционной процедурой четвертого порядка, в результате получаем значения:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (2), значения  $\delta y_i$  нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

После определения всех граничных точек переходим к следующему шагу. В областях немонотонного решения  $y(x)$  следует переопределять значения  $y_i^L, y_i^R$ . При этом возможны два сценария:

- $y_i$  является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  функция  $y(x)$  должна быть постоянной, а значит:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0; \quad (3)$$

- $y_i$  лежит слишком близко к границе – при условии  $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$  парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае  $y_i^L$  и  $y_i^R$  должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$\begin{aligned} y_i^L &= 3y_i - 2y_i^R, & \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} &> (\Delta y_i)^2, \\ y_i^R &= 3y_i - 2y_i^L, & \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} &< -(\Delta y_i)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

После всех проделанных операций функцию  $y(x)$  можно считать определенной на сетке  $\Omega_h$  [1, 2].

Среднее значение данной функции на отрезке  $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ,  $(\alpha > 0)$  задается формулой:

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[ \Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_i^{(6)} \right], \quad (5)$$

а на отрезке  $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha]$ ,  $(\alpha > 0)$ :

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h} \left[ \Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_{i+1}^{(6)} \right]. \quad (6)$$

## 1.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PRML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения  $y(x)$ . Чтобы обойти данное ограничение, можно определять  $y_i^L$  и  $y_i^R$  с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики  $\frac{dx}{dt} = a$ . При этом переопределять нужно лишь одну из границ. Для ясности будем рассматривать  $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$ . Для того, чтобы вычислить ее на следующем временном слое  $t_j + \tau = t_{j+1}$  (обязательное ограничение – выполнение условия Куранта  $a\Delta t_j \leq \min_{0 \leq i \leq n} \Delta x_i$ ), необходимо двигаться от точки  $x_{i+\frac{1}{2}}$  со значением  $y_{i+\frac{1}{2}}$  вдоль характеристики до предыдущего момента времени  $t_j$ :

1.  $a > 0$ , следовательно

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) &= y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \\ \xi &= 1 - \frac{a\tau}{h}, \end{aligned} \quad (7)$$

что соответствует красной точке на рис. 2.

2.  $a < 0$ , следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_{i+1}^L(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1 - \xi)),$$

$$\xi = -\frac{a\tau}{h},$$

что соответствует синей точке на рис. 2.

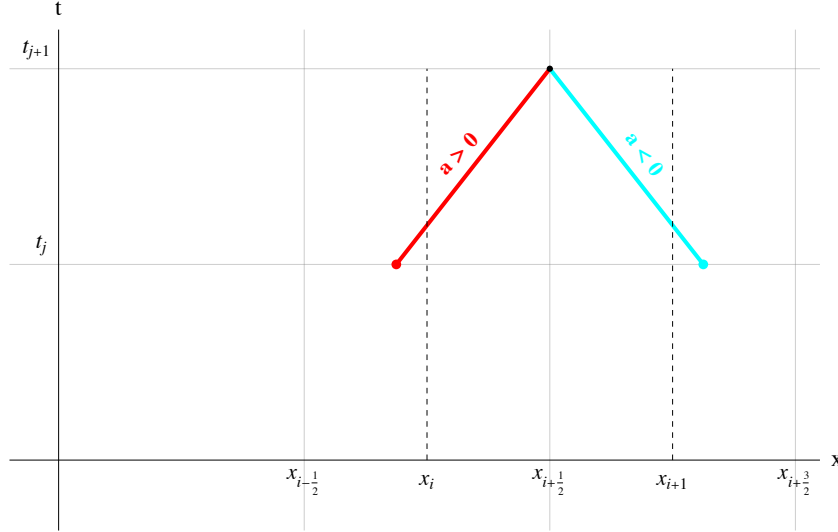


Рис. 2. Перенос значений в граничных точках вдоль характеристик в методе PPML

Алгоритм (7) реализован на локальном шаблоне, то есть для получения граничных точек при переходе на следующий временной слой не нужно использовать информацию с соседних ячеек. Нахождение среднего значения на отрезке (5), (6) и смещение экстремума (3), (4) производятся аналогично [2].

### 1.3. Потоки и усредненное значение на отрезке

При возникновении разрыва на границе двух смежных ячеек в точке  $x_{i+\frac{1}{2}}$  возникает некоторое усредненное состояние  $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$ . Одномерное уравнение переноса имеет всего одну характеристику, поэтому его решение в момент времени  $t = t_{j+1}$  будет определяться:

1. При  $a > 0$  усреднением по пространственному интервалу  $[x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau, x_{i+\frac{1}{2}}]$  со значением  $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(a\tau)$ ;



2. При  $a < 0$  – по интервалу  $[x_{i+\frac{1}{2}}\tau, x_{i+\frac{1}{2}} + a\tau]$  со значением  $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R(-a\tau)$ .

Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt = a^+ y_{i+\frac{1}{2}}^L + a^- y_{i+\frac{1}{2}}^R, \quad (8)$$

$$a^+ = \max(0, a), \quad a^- = \min(a, 0).$$

## 2. Одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Решением уравнения переноса является функция, сохраняющая свой профиль с течением времени, то есть  $y(x, t) = y_0(x - at)$ , где  $y_0$  – начальный профиль. Это происходит по той причине, что профиль при сносе по характеристике остается одинаковым. Если  $\frac{dx}{dt} = a$  – характеристика, то прямые  $x - at = b$  называют характеристическими. На каждой из таких прямых  $y = \text{const}$  и перемещается по ней с некоторой заданной скоростью  $a$ .

Уравнение переноса – простейший пример, применяемый для проверки алгоритма на корректность. В задачах газодинамики оператор переноса является составной частью, поэтому любой численный метод для таких моделей обязан проходить проверку простейшим уравнением.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса (9) с различными начальными условиями  $y_0$ . Численное решение будем сравнивать с точным, имеющим вид:

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & x - at < l_1, \\ u_0(x - at), & l_1 \leq x - at \leq l_2, \\ 0, & x - at > l_2. \end{cases}$$

Определив параболу в ячейке в момент времени  $t_j$ , можно вычислить  $\hat{y}(x_i)$  на следующем временном слое  $t_{j+1}$ , применив интегро-интерполяционный метод к уравнению переноса в прямоугольнике  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_j, t_{j+1}]$ :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0 dt dx = 0.$$

Рассмотрим интегралы в левой части по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [y(x, t_{j+1}) - y(x, t_j)] dx = h \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_{j+1}) dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_j) dx \right] = h(\bar{y}(x_i, t_{j+1}) - \bar{y}(x_i, t_j)) = h(\hat{y}_i - y_i). \end{aligned}$$

Воспользуемся особенностью переноса значений по характеристикам для интеграла, подынтегральная функция которого является потоком (рис. 3):

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(y(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - y(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i+\frac{1}{2}}} ay(x, t_j) dt - \\ &\quad - \int_{x_{i-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i-\frac{1}{2}}} ay(x, t_j) dt = a\tau(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Объединяя оба интеграла получаем:

$$h(\hat{y}_i - y_i) + a\tau(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = y_i - \frac{a\tau}{h}(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (10)$$

Таким образом, используя формулу (10), мы можем переносить средние значения ячеек.

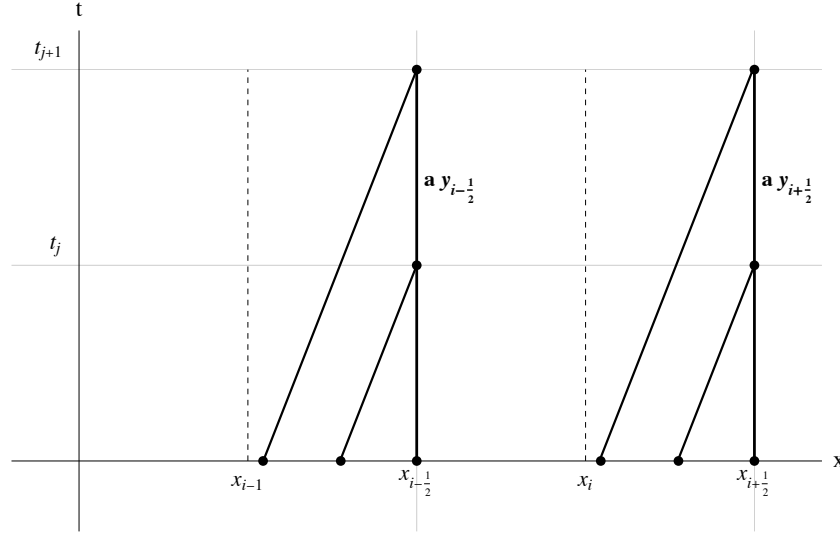


Рис. 3. Интегрирование потока по пространству, вместо времени

Оценивать решение будет по норме ошибки в пространстве  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ :

$$\|z\|_C = \max_{\Omega_h \times [0, T]} |z|, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|;$$

$$\|z\|_{L_1} = \int_0^T \int_{\Omega_h} |z| dx dt, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|;$$

$$\|z\|_{L_2} = \left( \int_0^T \int_{\Omega_h} z^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|,$$

для методов актуальна сходимость по норме  $L_2$ .

Рассмотрим несколько начальных профилей [3] и проанализируем точность каждого из методов в различных сценариях.  $l = 200$ ,  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 30$ ,  $l_{11} = \frac{50}{3}$ ,  $l_{22} = \frac{70}{3}$ ,  $l_{12} = 20$ ,  $T = 200$ ,  $h = 1$ ,  $a = 1$ .

### 2.1. Анализ точного вычисления граничных и срединных узлов

Рассмотрим, какой прирост дает метод RPML при числе Куранта  $\sigma = 1$ . В качестве иллюстрации приведем кусочно-линейный профиль – правый треугольник.

Правый треугольник задается уравнением:

$$y_0(x) = \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1}.$$

На рис. 4 показано численное решение, полученное путем применения метода РРМ.

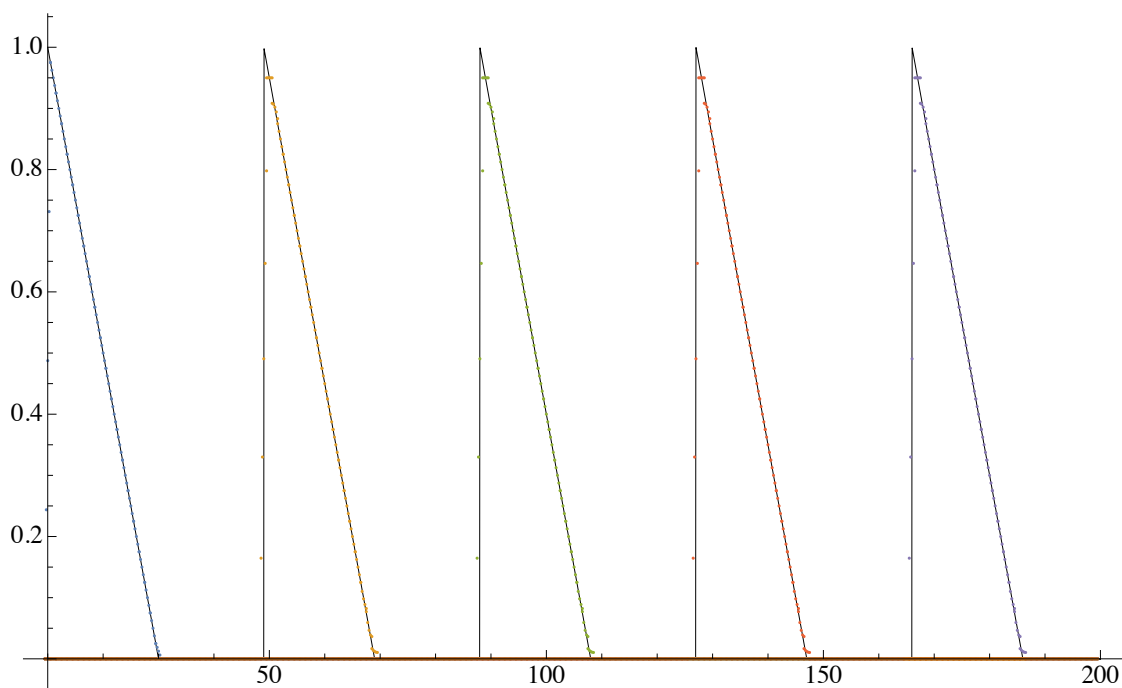


Рис. 4. Правый треугольник для РРМ при  $\sigma = 1$

Таблица вычисленных норм в пространстве  $L_2$  в зависимости от шага:

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.5125	0.506	0.503	0.501	0.5
$\ \cdot\ _{L_1}$	25.6	6.32	1.57	0.39	0.1
$\ \cdot\ _{L_2}$	2.89	1.44	0.72	0.36	0.18

Заметим, что на концах треугольников происходит уравнивание значений в ячейках  $y_i^L$ ,  $y_i$ ,  $y_i^R$ , поэтому, например, вычисление нормы в пространстве  $C[a, b]$  неприменимо для данных методов, потому что ее значение не будет уменьшаться при измельчении шага на кусочно-линейных графиках.

На рис. 5 показано решение, полученное применением метода RPML. На концах треугольников параболы в каждой разностной ячейке передают значения гораздо точнее, чем в методе РРМ.

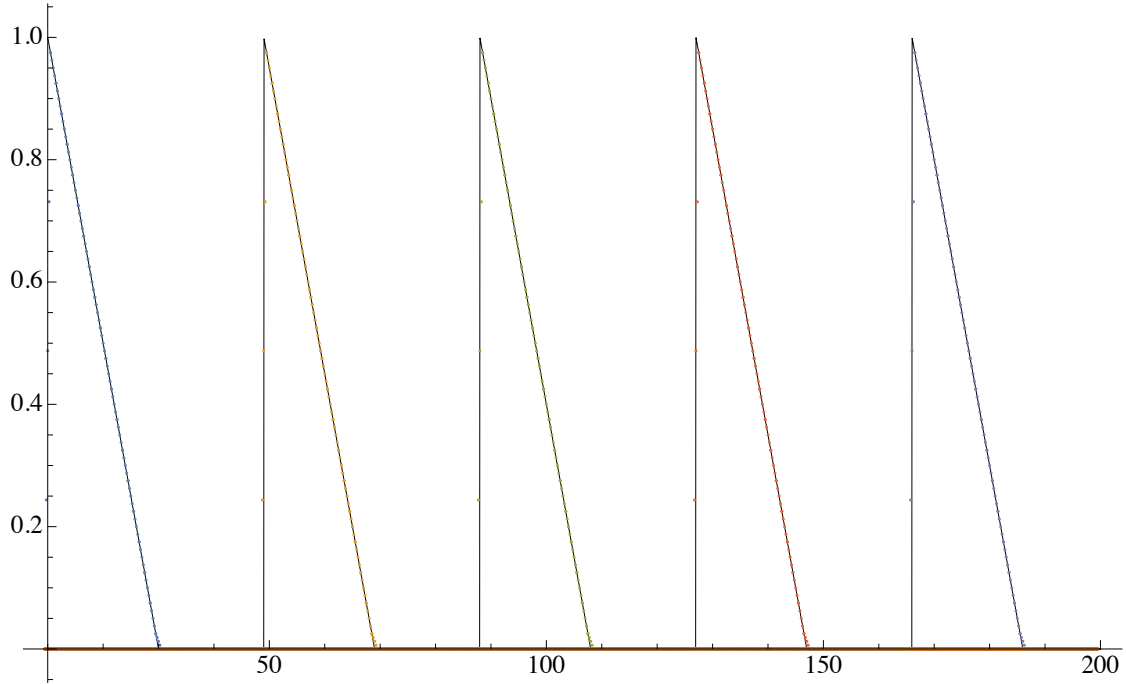


Рис. 5. Правый треугольник для RPML при  $\sigma = 1$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.5125	0.505	0.5029	0.5025	0.5
$\ \cdot\ _{L_1}$	25.6	6.32	1.57	0.39	0.1
$\ \cdot\ _{L_2}$	2.86	1.42	0.71	0.305	0.17

Скорость стремления нормы к 0 практически идентична методу РРМ, однако визуально график больше приближен к точному решению.

## 2.2. Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

Возьмем  $\sigma = 0.8$ , в качестве примера рассмотрим профиль "зуб":

$$y_0(x) = \begin{cases} -\frac{2(x-l_1)}{3(l_{11}-l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2(x-l_2)}{3(l_2-l_{22})} + 1, & x \in (l_{22}, l_2]. \end{cases}$$

На рис. 6 заметна значительная диссипация и неодинаковые высоты на зубцах.

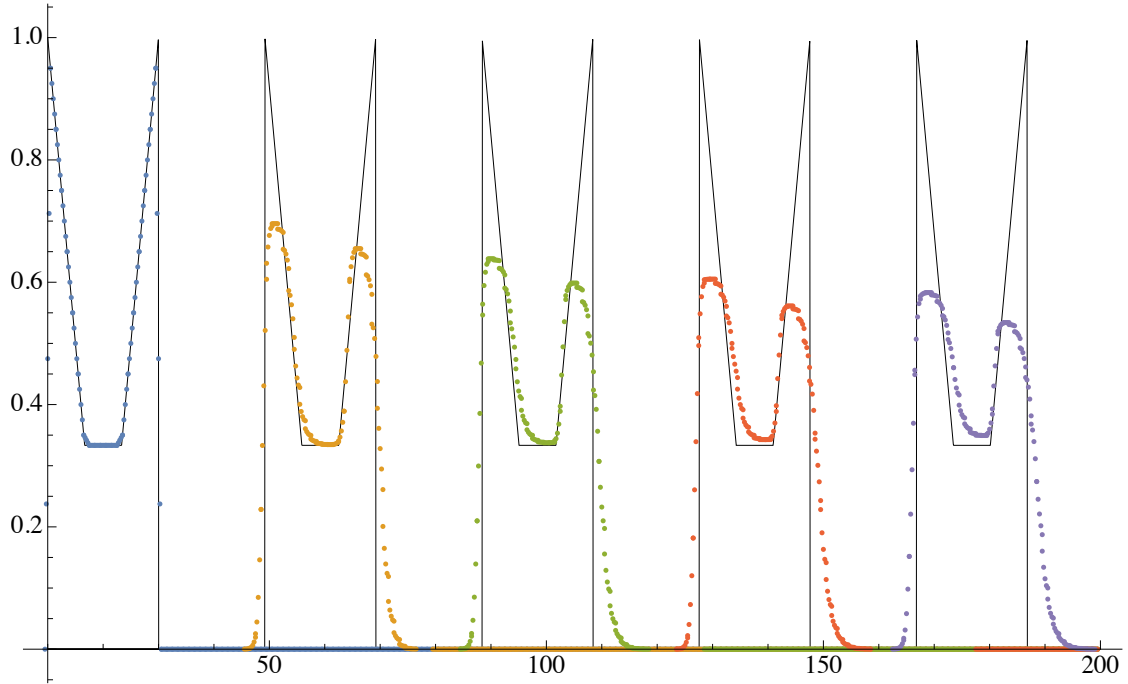


Рис. 6. Зуб для RPM при  $\sigma = 0.8$

Тем не менее, несмотря на диссипацию, сходимость по норме  $L_2$  сохраняется.

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.716	0.7099	0.7067	0.7023	0.7
$\ \cdot\ _{L_1}$	41.15	10.14	2.518	0.62	0.3
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.8	0.39	0.195	0.097	0.04

Метод PPML (рис. 7) характеризуется менее выраженной диссипацией и более ровными "горбами".

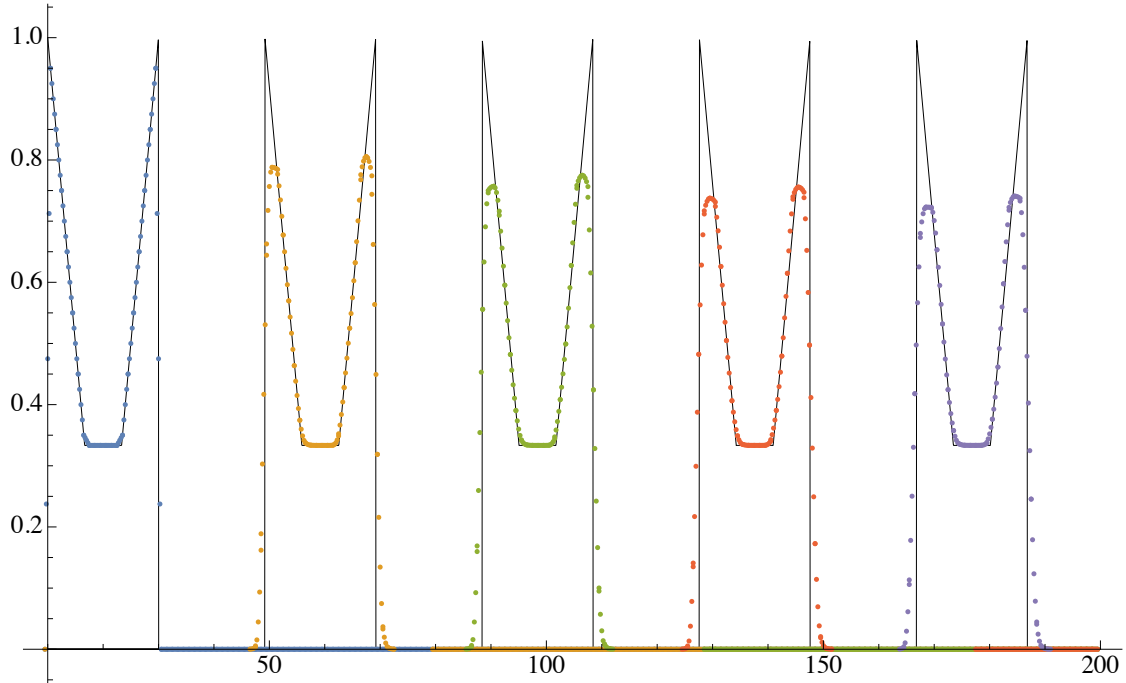


Рис. 7. Зуб для PPML при  $\sigma = 0.8$

Таблица норм в зависимости от шага выглядит следующим образом:

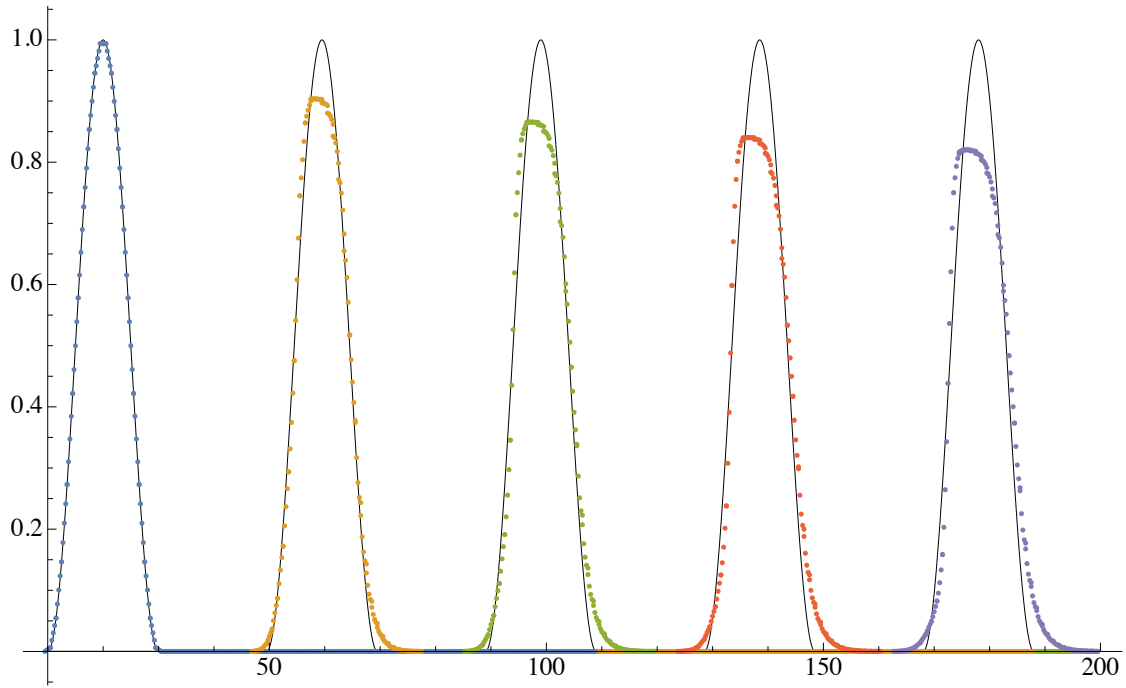
	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.58	0.56	0.557	0.554	0.55
$\ \cdot\ _{L_1}$	39.85	9.9	2.2	0.56	0.27
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.7	0.34	0.187	0.08	0.03

### 2.3. Анализ методов на гладком графике

Пусть  $\sigma = 0.5$ , а гладким профилем будет "косинус":

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l_2 - l_1}(x - l_1)\right).$$

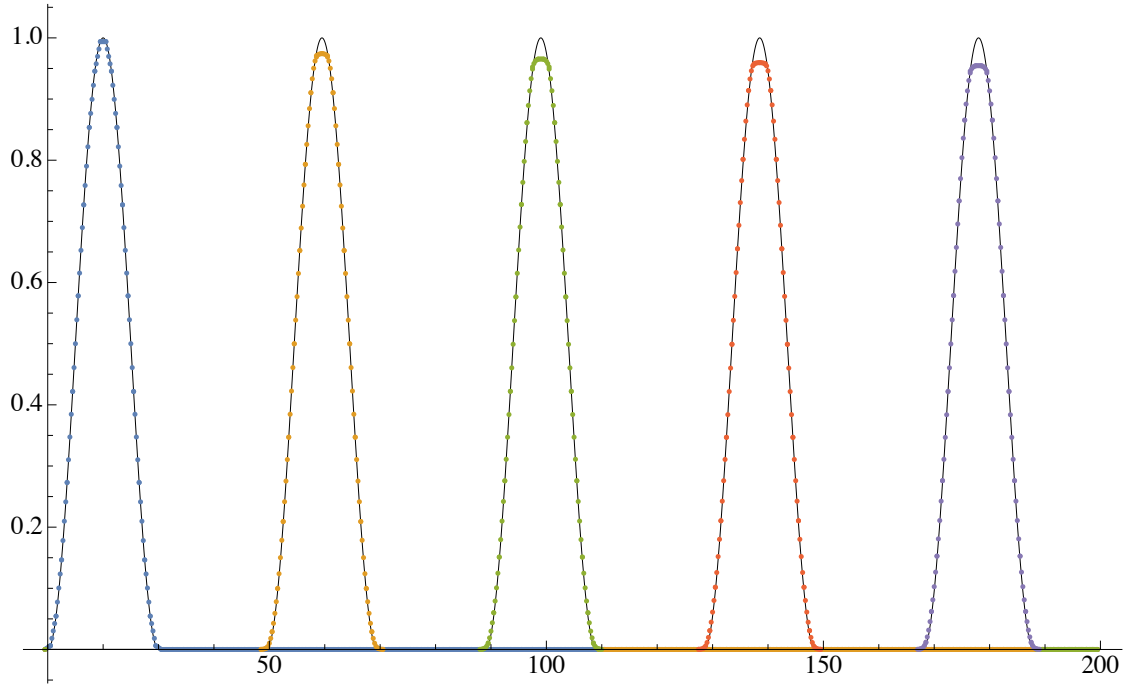
Как и следовало ожидать, несмотря на гладкость профиля, диссипация в случае метода PPM (рис. 8), ровно как и в методе PPML (рис. 9) остается, хотя и менее выраженная.

Рис. 8. Косинус для РРМ при  $\sigma = 0.5$ 

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.244	0.1117	0.044	0.019	$1e-05$
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.59	0.327	0.04	0.005	$2e-05$
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.99	0.18	0.003	0.00055	$2e-05$

График сохраняет свою гладкость, однако происходят небольшие смещения в окрестностях оснований профилей. Хотя таблица сходимости показывает достаточно хороший результат для обоих методов, все же нельзя не отметить, что РРМЛ равномернее и стабильнее передает точное решение, а также обладает мизерной диссипацией.



Рис. 9. Косинус для PPML при  $\sigma = 0.5$ 

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.048	0.015	0.005	0.0016	$1e-06$
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.55	0.32	0.0398	0.0049	$2e-06$
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.99	0.18	0.003	0.00055	$2e-06$

## Заклучение

Рассмотрен усовершенствованный кусочно-параболический метод (на локальном шаблоне). Выбор в пользу использования решений с предыдущего временного слоя, вместо интерполяционной процедуры, оказался удачным, так как выдает более точное решение и уменьшенную диссипацию. Метод PPML был протестирован на множестве примеров, взятых с различными шагами, числами Куранта и профилями. Точность оценивалась на основе норм разности между точным и численным решениям в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ . Во всех случаях PPML оказался точнее.

## Список литературы

1. Corella P., Woodward P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. V.54. P. 174 – 201.
2. М. В. Попов, С. Д. Устюгов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, том 47, номер 12, 2055 – 2075, с. 2056 – 2060.
3. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей/М.П. Галанин, Е.Б. Савенков.–М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.–591, [1] с.: ил. (Математическое моделирование в технике и технологии)
4. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие: Для вузов – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. – 424 с.
5. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.