

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для решения линейного уравнения переноса

Выполнил: Токарев А. И.

Научный руководитель: к. ф.-м. н., доц. каф. ФН2 Лукин В. В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

29 июня 2022 г.

- ❶ Постановка задачи
- ❷ Методы решения
- ❸ Тестирование и сравнение методов
- ❹ Заключение

Постановка задачи

Линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Характеристики

Характеристикой уравнения (1) является множество точек (x, t) , удовлетворяющее уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad (2)$$

то есть множество $x - at = b$. Таким образом, вдоль характеристики выполняется следующее равенство:

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Точное решение

Точное решение линейного уравнения переноса (1) представляется в виде:

$$y(x, t) = y_0(x - at),$$

где y_0 – начальный профиль.

Задача Коши (начальная задача)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x). \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи (3) заключается в сnose неизменного профиля по характеристикам. Его свойством является сохранение начального профиля y_0 .

Сетка

Введем сетку, на которой будем решать задачу:

$$\Omega_h = \left\{ x_i = l_1 + ih, \quad i = 1 \dots n, \quad h = \frac{l_2 - l_1}{n - 1} \right\},$$

где $[l_1, l_2]$ – отрезок, на котором определена сетка; n – число узлов; h – шаг. Определим $y(x)$ ее разностным аналогом $y_i = y(x_i)$ на этой сетке. Значения y_i будем соотносить с узлами сетки, а $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$ и $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$ – с половинными узлами.

Интегро-интерполяционный метод. Перенос узлов

Определив решения y_i в момент времени t_j , можно вычислить \hat{y}_i на следующем временном слое t_{j+1} , применив интегро-интерполяционный метод к уравнению переноса в прямоугольнике $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_j, t_{j+1}]$:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0 dt dx = 0.$$

Рассмотрим интегралы по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [y(x, t_{j+1}) - y(x, t_j)] dx = h \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_{j+1}) dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_j) dx \right] = h(\bar{y}(x_i, t_{j+1}) - \bar{y}(x_i, t_j)) = h(\hat{y}_i - y_i). \end{aligned}$$

Интегро-интерполяционный метод. Перенос узлов

Воспользуемся особенностью переноса значений по характеристикам для интеграла, подынтегральная функция которого является потоком (рис. 1):

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} a (y(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - y(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a y(x, t_j) dt - \\ &- \int_{x_{i-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i-\frac{1}{2}}} a y(x, t_j) dt = a\tau (a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Объединяя оба интеграла получаем:

$$h(\hat{y}_i - y_i) + a\tau (a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = y_i - \frac{a\tau}{h} (a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (4)$$

В соответствии с формулой (4) переносятся значения в узлах сетки $y_i = y(x_i)$ на следующий временной слой.

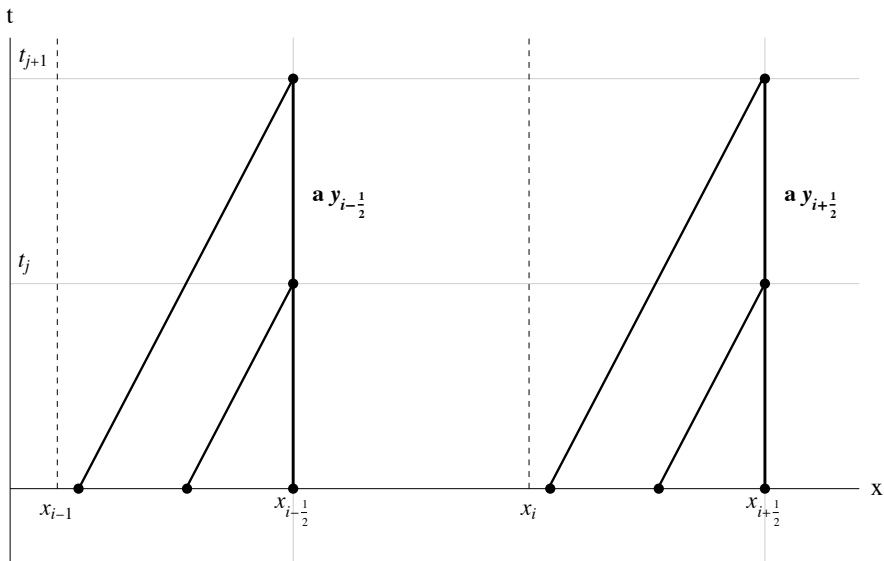


Рис. 1. Интегрирование потока по пространству, вместо времени

Общая идея

Имея значения в узлах x_i , $i = 0 \dots n$, доопределяем значения в половинных узлах, то есть исходная сетка Ω_h преобразуется в набор отрезков $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ с определенными в них параболами (рис. 2):

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \\ y_i^{(6)} &= 6 \left[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L) \right], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (5)$$

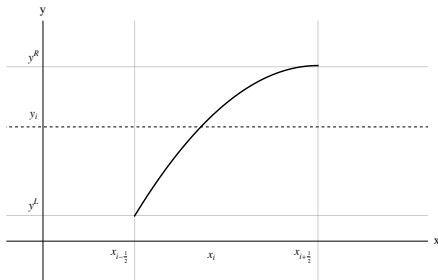


Рис. 2. Парабола внутри разностной ячейки

Средние значения на отрезке

Для выражение (5) выполняется соотношение:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi, \quad (6)$$

то есть значения в узлах сетки Ω_h являются средними значениями.

Среднее значение на отрезке

После определения парабол можно считать средние значения на отрезках $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}]$ и $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha]$:

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_i^{(6)} \right], \quad (7)$$

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_{i+1}^{(6)} \right]. \quad (8)$$

Граничные значения в RPM

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i), \quad \delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Для того, чтобы обеспечить монотонность решения, δy_i заменяется на:

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

Граничные значения в RPML

В качестве альтернативы предлагает перенос граничных узлов по характеристикам.

Пусть $\frac{dx}{dt} = a$.

- Если $a > 0$, то получаем:

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \quad \xi = 1 - \frac{a\tau}{h}.$$

- При $a < 0$:

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_{i+1}^L(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1 - \xi)), \quad \xi = -\frac{a\tau}{h}.$$

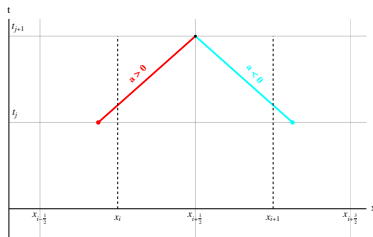


Рис. 3. Перенос значений на границах вдоль характеристик в методе PRML

Избавление от локальных экстремумов

- y_i является локальным экстремумом, тогда:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0;$$

- y_i лежит слишком близко к границе:

$$y_i^L = 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2,$$

$$y_i^R = 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2.$$

Нормы ошибок решения в различных пространствах

Норма ошибка в пространстве C :

$$\|z\|_C = \max_{\Omega_h \times [0, T]} |z|, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|.$$

Норма ошибка в пространстве L_1 :

$$\|z\|_{L_1} = \int_0^T \int_{\Omega_h} |z| \, dx dt, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|.$$

Норма ошибка в пространстве L_2 :

$$\|z\|_{L_2} = \left(\int_0^T \int_{\Omega_h} z^2 \, dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|.$$

Исходные параметры

Рассмотрим несколько начальных профилей [3] и проанализируем точность каждого из методов в различных сценариях. Примем $l = 200$, $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, $l_{11} = \frac{50}{3}$, $l_{22} = \frac{70}{3}$, $l_{12} = 20$, $T = 200$, $h = 1$, $a = 1$.

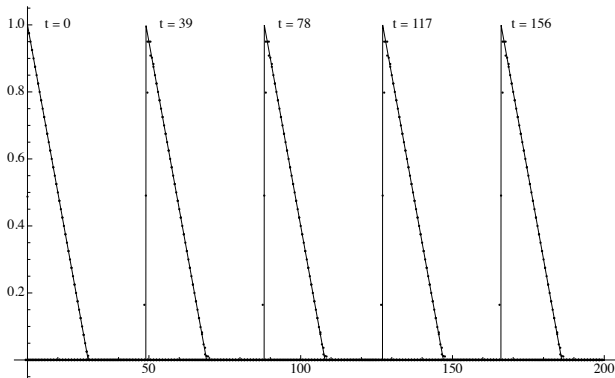


Рис. 4. Правый треугольник для PPM при $\sigma = 1$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.5125	0.506	0.503	0.501	0.5
$\ \cdot \ _{L_1}$	25.6	6.32	1.57	0.39	0.1
$\ \cdot \ _{L_2}$	2.89	1.44	0.72	0.36	0.18

Таблица 1. Нормы ошибок для правого треугольника в методе PPM

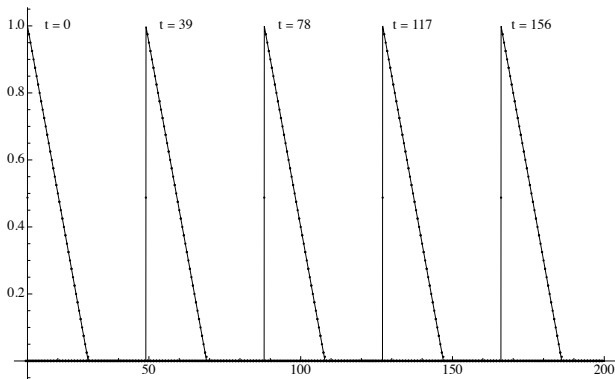


Рис. 5. Правый треугольник для PPML при $\sigma = 1$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.5125	0.505	0.5029	0.5025	0.5
$\ \cdot \ _{L_1}$	25.6	6.32	1.57	0.39	0.1
$\ \cdot \ _{L_2}$	2.86	1.42	0.71	0.305	0.17

Таблица 2. Нормы ошибок для правого треугольника в методе PPML

Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

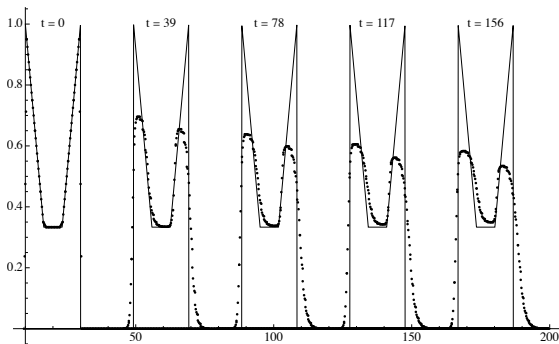


Рис. 6. Зуб для PPM при $\sigma = 0.8$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.716	0.7099	0.7067	0.7023	0.7
$\ \cdot \ _{L_1}$	41.15	10.14	2.518	0.62	0.3
$\ \cdot \ _{L_2}$	0.8	0.39	0.195	0.097	0.04

Таблица 3. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе PPM

Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

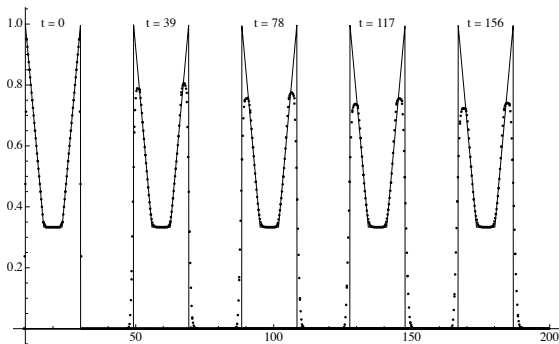


Рис. 7. Зуб для PPML при $\sigma = 0.8$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot \ _C$	0.58	0.56	0.557	0.554	0.55
$\ \cdot \ _{L_1}$	39.85	9.9	2.2	0.56	0.27
$\ \cdot \ _{L_2}$	0.7	0.34	0.187	0.08	0.03

Таблица 4. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе PPML

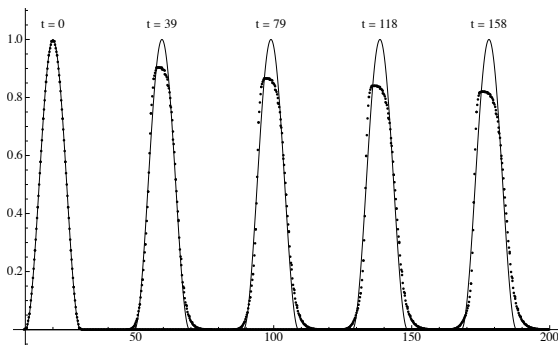


Рис. 8. Косинус для PPM при $\sigma = 0.5$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.244	0.1117	0.044	0.019	$1e-05$
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.59	0.327	0.04	0.005	$2e-05$
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.99	0.18	0.003	0.00055	$2e-05$

Таблица 5. Нормы ошибок для косинуса в методе PPM

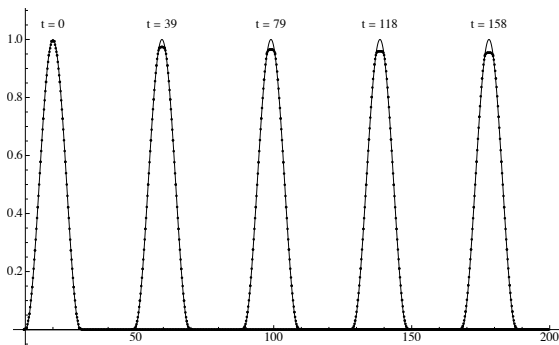


Рис. 9. Косинус для PPML при $\sigma = 0.5$

	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$
$\ \cdot\ _C$	0.048	0.015	0.005	0.0016	$1e-06$
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.55	0.32	0.0398	0.0049	$2e-06$
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.99	0.18	0.003	0.00055	$2e-06$

Таблица 6. Нормы ошибок для косинуса в методе PPML

Рассмотрен кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. Выбор в пользу использования решений с предыдущего временного слоя, вместо интерполяционной процедуры, оказался удачным, так как обеспечивает более точное решение и уменьшенную диссипацию. Метод PPML был протестирован на ряде примеров, рассмотренных с различными шагами, числами Куранта и профилями. Точность оценивалась на основе норм разности между точным и численным решениям в пространствах C , L_1 , L_2 . В пространствах L_1 , L_2 PPML оказался точнее во всех случаях. Однако в пространстве C результат нельзя интерпретировать однозначно. Но как уже отмечалось, актуальной является сходимость нормы ошибки в L_2 .