Оглавление

1. Параметризованные кривые в пространстве. Регулярные и особые точки параметризованных кривых. Гладкие кривые

Определение 1. *Кривой γ в пространстве* $\mathbb{R}^3$ называется образ интервала (a, b) при отображении $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ класса C^k, $k \geq 1$.

Определение 2. *Параметризованной кривой класса C^k* в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется пара (γ, f), где $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^k(a, b)$, $\gamma = \mathrm{Im} f$. Отображение f называется *параметризацией кривой γ*.

Определение. Точка t_0 параметризованной кривой $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$, $t \in (a, b)$, называется *особой*, если производная $\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t_0) = \vec{\mathbf{0}}$ или не существует. Точка, не являющаяся особой, называется *регулярной* точкой параметризованной кривой $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$.

Определение. Параметризованная кривая $\gamma : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$, $t \in (a, b)$, класса C^k, $k \geq 1$, называется *регулярной*, если $\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ для всех $t \in (a, b)$.

Определение. Параметризованная кривая (γ, φ) называется *простой*, если отображение φ инъективно.

Определение. Простая регулярная параметризованная кривая $\gamma : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$, $t \in (a, b)$, класса C^k, $k \geq 1$, называется *гладкой* кривой класса C^k (в случае $k = 1$ — просто гладкой).

2. Репараметризация кривых. Натуральный парамет кривой. Существование натуральной параметризации на гладкой регулярной кривой. Свойства векторов скорости и ускорения кривой, отнесенной к натуральному параметру

2.1. Замена параметра (репараметризация) кривой

Любая кривая γ в пространстве допускает различные параметризации. Переход от одной параметризации к другой называют *репараметризацией* кривой (или просто говорят о замене параметра на кривой).

Напомним, что длину дуги гладкой кривой $\gamma : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$, $t \in [a, b]$, от точки t_1 до точки t_2 вычисляют по формуле (см. учебник [2])

$$l(\gamma)|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t)\| \, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \, dt.$$

Выберем некоторое значение параметра $t_0 \in [a, b]$ и рассмотрим функцию

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t)\| \, dt = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \, dt.$$

Функция $s(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Кроме того, в силу регулярности кривой

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}(\mathbf{t})\| > 0.$$

Следовательно, $s(t) \in C^1[a, b]$ и $s(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, т. е. определяет биективное отображение $[a, b] \to [s_a, s_b]$, где $s(a) = -\, l(\gamma)|_a^{t_0} = s_a$, $s(b) = l(\gamma)|_{t_0}^{b} = s_b$. Обратная функция $t = t(s)$ существует, является гладкой и определяет биективное отображение $[s_a, s_b] \to [a, b]$, т. е. замену параметра на кривой $\gamma : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$, $t \in [a, b]$.

Определение. Длина дуги гладкой кривой называется *натуральным (или естественным) параметром кривой*. Параметризация кривой с помощью натурального параметра называется *натуральной (естественной) параметризацией кривой*.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. На гладкой кривой всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Предложение. Длина вектора скорости гладкой кривой $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(s)$, отнесенной к натуральному параметру s, равна единице:

$$\left\| \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} \right\| = 1.$$

Доказательство. Используя правило дифференцирования сложной функции, вычисляем длину вектора скорости:

$$\left\| \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}\| \frac{1}{\|\dot{\vec{\mathbf{r}}}\|} = 1. \blacksquare$$

Предложение. Если для гладкой вектор-функции $\vec{\mathbf{a}}(t)$ выполняется условие $\|\vec{\mathbf{a}}(t)\| = \mathrm{const}$, то векторы $\vec{\mathbf{a}}(t)$ и $\dot{\vec{\mathbf{a}}}(\mathbf{t})$ ортогональны.

Доказательство. Имеем $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}) = \mathrm{const}$. Следовательно, в силу свойства 3 (см. с. 13) производной вектор-функции получаем

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}) = 2(\dot{\vec{\mathbf{a}}}, \vec{\mathbf{a}}) = 0. \blacksquare$$

3. Кривизна кривой. Радиус кривизны, центр кривизны, вектор кривизны

4. Репер Френе

5. Сопровождающий трехгранник кривой

6. Формулы Френе. Кручение кривой

7. Геометрический смысл кривизны и кручения (4 теоремы)

8. Механический смысл формул Френе. Вектор Дарбу

9. Кривизна и кручение кривой, отнесенной к произвольному параметру.

10. Формулы для вычисления кривизны плоских кривых

11. Репер Френе кривой, отнесенной к произвольному параметру

12. Натуральные уравнения кривой. Теорема существования и единственности кривой с данными кривизной и кручением (доказать единственность)

13. Параметризованные поверхности в пространстве. Регулярные и особые точки параметризованныз поверхностей. Гладкие поверхности

14. Криволинейные координаты и координатная сеть на поверхности. Касательное пространство

15. Замена криволинейной системы координат на поверхности. Преобразование координат касательного вектора при замене криволинейно системы координат на поверхности

16. Задача о вычислении длины кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Положительная определенность первой квадратичной формы. Примеры: первая квадратичная форма графика функции и поверхности вращения. Закон преобразования первой квадратичной формы при замене криволинейной системы координат на поверхности

17. Угол между кривыми на поверхности

18. Внутренняя геометрия поверхности. Изометрии. Изометричные поверхности. Теорема о квадратичных формах изометричных поверхностей

19. Вторая квадратичная форма поверхности. Примеры: вторая квадратичная форма графика функции и поверхности вращения. Закон преобразования второй квадратичной формы при замене КСК на поверхности

20. Геометрический смысл второй квадратичной формы поверхности

21. Классификация точек поверхности (эллиптические, гиперболические, параболические и точки уплощения). Расположение поверхности в окрестности эллиптической или гиперболической точки относительно касательной плоскости в этой точке

22. Основная формула для кривизны кривой на поверхности

23. Нормальная кривизна поверхности

24. Главные направления и главные кривизны поверхности: определение, способ нахождения, свойства

25. Формула Эйлера

26. Гауссова и средняя кривизны поверхности. Связь средней кривизны и нормальной кривизны. Формулы, выражающие гауссову и среднюю кривизны через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Классификация точек поверхности по знаку гауссовой кривизны

27. Минимальные поверхности. Теорема о средней кривизне минимальных поверхностей. Вывод уравнения минимальных поверхностей

28. Нормальная и геодезическая кривизны кривой на поверхности. Формулы для вычисления геодезической кривизны

29. Геодезические линии на поверхности. Теорема о главной нормали геодезической. Уравнения геодезических. Теорема существования и единственности. Экстремальное свойство геодезических. Примеры геодезических