

**Дифференциальная геометрия**  
**Домашнее задание №1**  
**«Кривые и поверхности в пространстве»**  
**ФН2-42Б, 2 курс, 4 семестр**  
**Арсений Токарев, Вариант 2-23**

**Дано:**

Поверхность задана параметрически уравнениями  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad u, v \in \mathbb{R}$ .

Уравнение поверхности:

$$\vec{r}(u, v) = \{\cosh u \cos v, \quad 5 \sinh u, \quad \cosh u \sin v\}.$$

Вид кривой на поверхности и координаты точек:

$$\gamma: u = v; \quad P_1(1, 0, 0); \quad P_2(-\cosh \pi, 5 \sinh \pi, 0).$$

**Задачи:**

**Задача 1.** Найти особые точки параметризованной поверхности. Составить уравнение касательной к поверхности в точках  $P_1$  и  $P_2$ .

Для того, чтобы вывести уравнение касательной плоскости к поверхности в точке, необходимо найти вектор к поверхности в данной точке. Сначала нужно взять частные производные  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u$  и  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$ :

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ 5 \cosh u \\ \sinh u \sin v \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ 0 \\ \cosh u \cos v \end{pmatrix},$$

затем векторно их перемножить:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh u \cos v & 5 \cosh u & \sinh u \sin v \\ -\cosh u \sin v & 0 & \cosh u \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(5 \cosh^2 u \cos u) + \vec{j}(\sinh u \cosh u \cos^2 v - \sinh u \cosh u \sin^2 v) + \vec{k}(5 \cosh^2 u \sin v)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 5 \cosh^2 u \cos v \\ -\sinh u \cosh u \\ 5 \cosh^2 u \sin v \end{pmatrix}.$$

Сразу можно заметить, что  $\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$  ни при каких значениях  $u$  или  $v$ . Это означает, что все точки поверхности – регулярные.

Посчитаем норму векторного произведения  $|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|$ :

$$|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v| = \sqrt{25 \cosh^4 u + \sinh^2 y \cosh^2 u} = \cosh u \sqrt{25 \cosh^2 u + \sinh^2 u}.$$

Таким образом, вектор нормали  $\vec{\mathbf{n}}$  имеет следующий вид:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v}{|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|} = \frac{1}{\sqrt{25 \cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} 5 \cosh u \cos v \\ -\sinh u \\ 5 \cosh u \sin v \end{pmatrix}.$$

Выразим координаты точек  $P_1$  и  $P_2$  через  $u$  и  $v$ . Для этого приравняем координаты уравнения поверхности  $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$  к координатам этих точек:

$$P_1 : \begin{cases} \cosh u \cos v = 1; \\ 5 \sinh u = 0; \\ \cosh u \sin v = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0; \\ v_1 = 0. \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} \cosh u \cos v = -\cosh \pi; \\ 5 \sinh u = 5 \sinh \pi; \\ \cosh u \sin v = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \pi; \\ v_2 = \pi. \end{cases}$$

Теперь можно найти нормали касательных плоскостей в точках  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. В точке  $P_1$  вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда касательная плоскость имеет вид:

$$T|_{P_1} : x - 1 = 0.$$

В точке  $P_2$  вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{25 \cosh^2 \pi + \sinh^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5 \cosh \pi \\ -\sinh \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

и касательная плоскость имеет вид:

$$T|_{P_2} : 5 \cosh \pi \cdot x + \sinh \pi \cdot y + 5 = 0.$$

**Ответ:** Особых точек нет;

$$T|_{P_1} : x - 1 = 0;$$

$$T|_{P_2} : 5 \cosh \pi \cdot x + \sinh \pi \cdot y + 5 = 0.$$

**Задача 2.** Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров  $(u, v)$ . Составить уравнения координатных линий. Построить поверхность и координатную сеть на ней (с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica)

Уравнение поверхности, выраженное через  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v; \\ y = 5 \sinh u; \\ z = \cosh u \sin v; \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + z^2 - \frac{y^2}{25} = 1,$$

значит, данная поверхность – однополостный гиперболоид с осью вдоль  $OY$  (рис. 1).

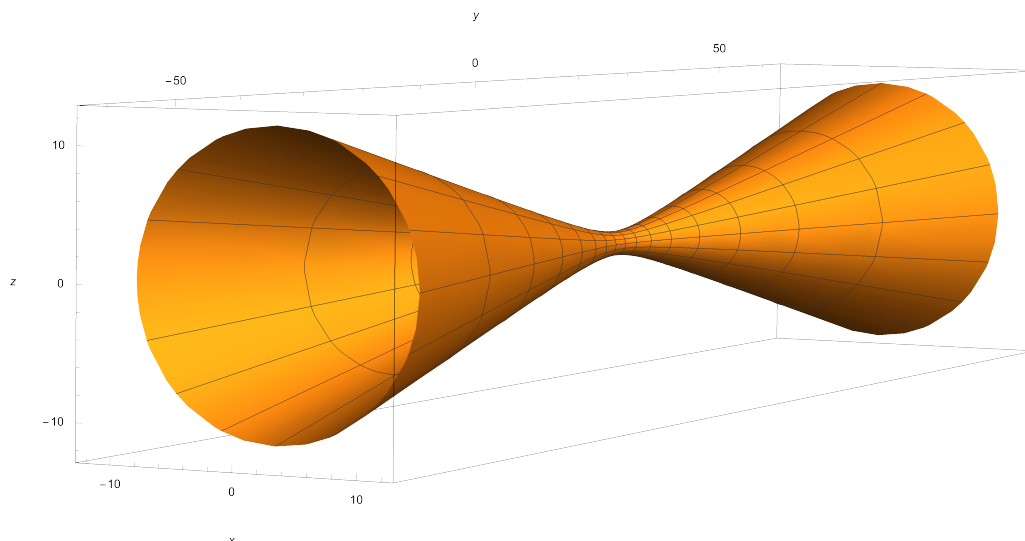


Рис. 1: Однополостный гиперболоид

Рассмотрим координатные линии данной поверхности. При  $u_0 = \text{const}$  получаем:

$$x^2 + z^2 = \text{const}, \text{const} = R = \sqrt{1 + \frac{y^2}{25}} = \cosh u_0,$$

то есть уравнения окружностей с радиусами  $R = \cosh u_0$ . А при  $v_0 = \text{const}$  получаем семейство гипербол.

**Ответ:** Однополостный гиперболоид;

$(u_0, v)$  – окружности;

$(u, v_0)$  – гиперболы.

**Задача 3.** Вычислить первую квадратичную форму поверхности. Вычислить угол между кривыми  $l_1: u = v^2$  и  $l_2: u = v$  в точке их пересечения.

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(u, v) = (\vec{r}_u, \vec{r}_u) = \sinh^2 u + 25 \cosh^2 u,$$

$$M(u, v) = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0,$$

$$G(u, v) = (\vec{r}_v, \vec{r}_v) = \cosh^2 u,$$

значит, матрица первой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{G}(u, v) = \begin{pmatrix} \sinh^2 u + 25 \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}.$$

Угол между кривыми – это угол между векторами их скоростей в точке их пересечения. Его можно вычислить по следующей формуле:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{\xi}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \vec{\xi}_2}{\sqrt{(\vec{\xi}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \vec{\xi}_1} \cdot \sqrt{(\vec{\xi}_2)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \vec{\xi}_2}}$$

Для нахождения точек пересечения и для вычисления векторов скоростей параметризуем кривые  $l_1$  и  $l_2$ :

$$l_1: u = v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = t^2; \\ v_1 = t. \end{cases}$$

$$l_2: u = v \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = t; \\ v_2 = t, \end{cases}$$

теперь найдем их точки пересечения:

$$\begin{cases} t^2 = t; \\ t = t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0; \\ t_2 = 1. \end{cases}$$

Далее вычислим векторы скоростей кривых  $l_1$  и  $l_2$  в произвольной точке  $t$ :

$$\vec{\xi}_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $t = t_1 = 0$ , тогда:

$$\mathbb{G}|_{t_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_1(t_1) = \vec{\xi}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_2(t_1) = \vec{\xi}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а значит угол между кривыми в точке  $t_1$  равен:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{26} \Rightarrow \alpha_1 = \arccos \frac{1}{26} \approx 1.34^\circ$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $t = t_2 = 1$ , следовательно:

$$\mathbb{G}|_{t_2} = \begin{pmatrix} \sinh^2 1 + 25 \cosh^2 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_1(t_2) = \vec{\xi}_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_2(t_2) = \vec{\xi}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и угол между кривыми в точке  $t_2$  равен:

$$\cos \alpha_2 \approx \frac{124.198}{246.015 \cdot 63.2896} \Rightarrow \alpha_2 \approx 0.097^\circ$$

$$\textbf{Ответ:} \quad I = (\sinh^2 u + 25 \cosh^2 u) du^2 + (\cosh^2 u) dv^2;$$

$$\alpha_1 \approx 1.34^\circ;$$

$$\alpha_2 \approx 0.097^\circ.$$