Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Модель двух конкурирующих видов

Студент ФН2-42Б (Группа) ____________ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ____________ (Подпись, дата) М. П. Галанин (И. О. Фамилия)

2021 г.

Содержание

Введение

В теории, если нет никаких факторов воздействия внешней среды на некоторую популяцию, то она способна размножаться вплоть до бесконечности. Однако в реальной жизни так не происходит, и особи разных видов так или иначе воздействуют друг на друга. И одним из таких типов взаимодействий является конкуренция. Ее разделяют на внутривидовую конкуренцию (соперничество между особями одного вида за жизненные ресурсы) и на межвидовую конкуренцию (взаимоотношение между популяциями двух (или более) видов, которое неблагоприятно сказывается на их росте и выживании).

Проблема динамики популяции заинтересовала ученых еще в XVIII веке. Именно тогда они начали заниматься разработкой методов, способных описать динамику роста и сокращения популяций живых организмов.

Основателем современной математической теории популяций справедливо считается Вито Вольтерра[1], разработавший математическую теорию биологических сообществ, аппаратом которой служат дифференциальные и интегродифференциальные уравнения. Эта модель основывается на следующих гипотезах:

1. Пища имеется в неограниченном количестве или ее поступление регулируется;
2. В единицу времени погибает одинаковое количество особей одного вида;
3. Прирост численности вида пропорционален его текущей численности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу из области динамики популяций. Пусть есть два сходных вида, конкурирующих между собой за пищу. Очевидно, что возможны следующие варианты:

[1] В. Вольтерра (*ит.* Vito Volterra, 1860–1940) — итальянский математик и физик.

- Выживает только первый вид;
- Выживает только второй вид;
- Выживают оба вида;
- Оба вида вымирают.

Каждый из этих вариантов соответствует наличию своего положения равновесия. Тем самым для описания данной системы нужна модель с четырьмя стационарными точками — стационарными состояниями системы.

В соответствии с гипотезами В. Вольтерра модель двух конкурирующих видов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1{x_1}^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2{x_2}^2, \end{cases} \tag{1}$$

где a_1, a_2 — коэфициенты скорости роста популяции; b_{12}, b_{21} — коэфициенты межвидовой борьбы; c_1, c_2 — внутривидовой борьбы первого и второго вида соответсвенно.

В данной курсовой работе необходимо рассмотреть все варианты параметров системы и исследовать качественное поведение ее решений. Также важно уделить внимание особым точкам системы.

2. Стационарные состояния

Найдем стационарные точки. Для этого необходимо решить систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1{x_1}^2 = x_1(a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1) = 0, \\ a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2{x_2}^2 = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

откуда получаем 4 стационарных состояния:

1. $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ — вымирание обоих видов;
2. $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{a_2}{c_2}$ — вымирание первого вида, достижение вторым видом конечной численности $\dfrac{a_2}{c_2}$;

3. $x_1 = \dfrac{a_1}{c_1}$, $x_2 = 0$ — противоположная ситуация, то есть достижение первым видом численности $\dfrac{a_1}{c_1}$ и вымирание второго вида;

4. $x_1 = \dfrac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$, $x_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$ — выживание обоих видов.

Особое внимание стоит уделить последнему стационарному состоянию. Решения x_1, x_2 в этой ситуации должны быть положительными, в противном случае система теряет биологический смысл, потому что число особей в популяции не может быть отрицательным. Условие положительности выполняется в одной из двух ситуаций:

$$\begin{cases} a_1c_2 > a_2b_{12}, \\ a_2c_1 > a_1b_{21}, \\ c_1c_2 > b_{12}b_{21}, \end{cases} \tag{3}$$

или

$$\begin{cases} a_1c_2 < a_2b_{12}, \\ a_2c_1 < a_1b_{21}, \\ c_1c_2 < b_{12}b_{21}, \end{cases} \tag{4}$$

при этом третье неравенство следует из первого и второго в обоих случаях.

Возникновение тех или иных стационарных состояний, упомянутых выше, зависит от исходных параметров системы (1). Для того, чтобы получить более наглядное представление о всех возможных ситуацях, которые могут возникнуть в зависимости от этих параметров, можно построить график прямых-сепаратрис. Их можно вывести из системы (2):

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_2 = \frac{a_2 + b_{21}x_1}{c_2}, \qquad x_2 = \frac{a_1 + c_1x_1}{b_{12}}. \tag{5}$$

Попарные пересечения сепаратрис дают стационарные состояния. Возможные взаимные расположения прямых-сепаратрис продемонстрированы на рис. 1-2:

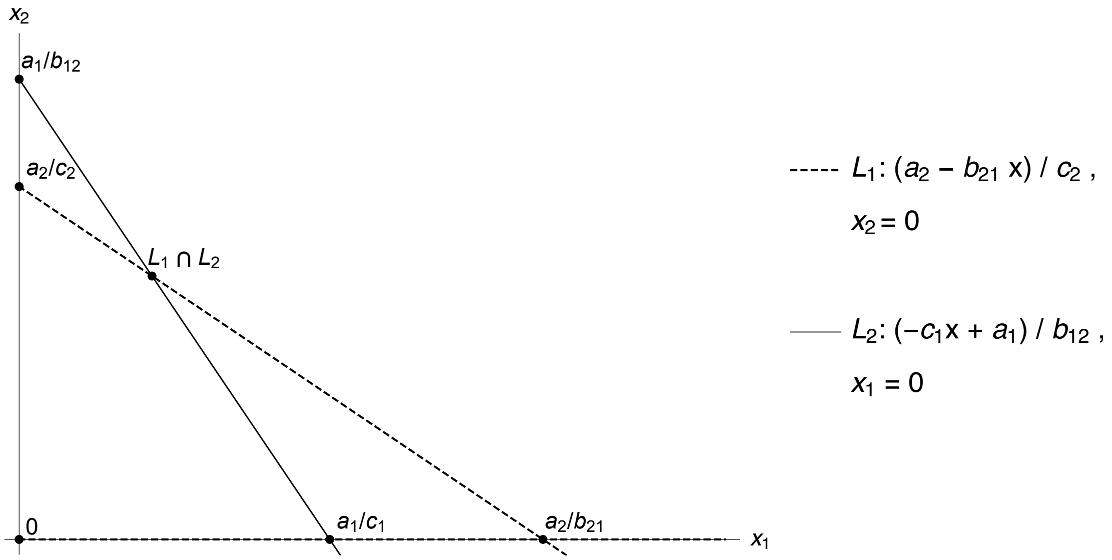

Рис. 1. Расположение прямых-сепаратрис, когда числитель и знаменатель положительные

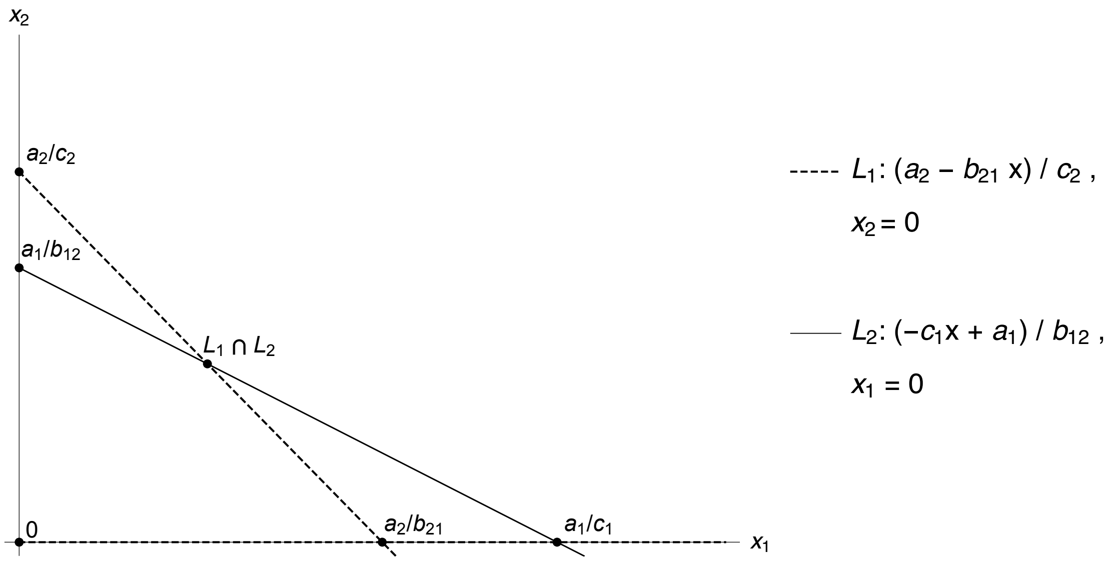

Рис. 2. Расположение прямых-сепаратрис, когда числитель и знаменатель отрицательные

3. Линеаризация системы в окрестности стационарных точкек

В общем виде линеаризованную систему можно представить в виде матрицы Якоби следующего вида:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_{12}x_2 - 2c_1x_1 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - b_{21}x_1 - 2c_2x_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Линеаризуем систему в окрестности всех четырех стационарных точек:

$$\mathbb{J}_I = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{II} = \begin{pmatrix} -a_1 & -\dfrac{a_1b_{12}}{c_1} \\ 0 & \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{III} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2} & 0 \\ -\dfrac{a_2b_{21}}{c_2} & -a_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{J}_{IV} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1(a_1c_2 - a_2b_{12})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} & \dfrac{b_{12}(a_1c_2 - a_2b_{12})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} \\ \dfrac{b_{21}(a_2c_1 - a_1b_{21})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} & \dfrac{c_2(a_2c_1 - a_1b_{21})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} \end{pmatrix},$$

и вспомним, что в зависимости от исходных параметров системы выполняется одно из двух условий(3, 4), определящих типы этих точек.

4. Фазовые портреты

Все стационарные точки являются простыми, поэтому их тип определяется собственными числами матриц $\mathbb{J}_{I-IV}$.

4.1. Первый вариант параметров системы.

1. $\lambda_1 = a_1 > 0,\ \lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$ точка $(0,0)$ — неустойчивый узел;
2. $\lambda_1 = -a_1 < 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1} > 0 \Rightarrow$ точка $\left(\dfrac{a_1}{c_1}, 0\right)$ — седло;

3. $\lambda_1 = \dfrac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2} > 0,\ \lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$ точка $\left(0, \dfrac{a_2}{c_2}\right)$ — седло;
4. Мне нужно расписывать все очень подробно или можно как-то сразу скзазать, что с.ч. отрицательные? .... точка $\left(\dfrac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}, \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}\right)$ — устойчивый узел.

Имеем только одно устойчивое состояние. Воспользуемся системой компьютерной алгебры Wolfram Mathematica для того, чтобы построить фазовый портрет. С учетом условий (3) он имеет вид:

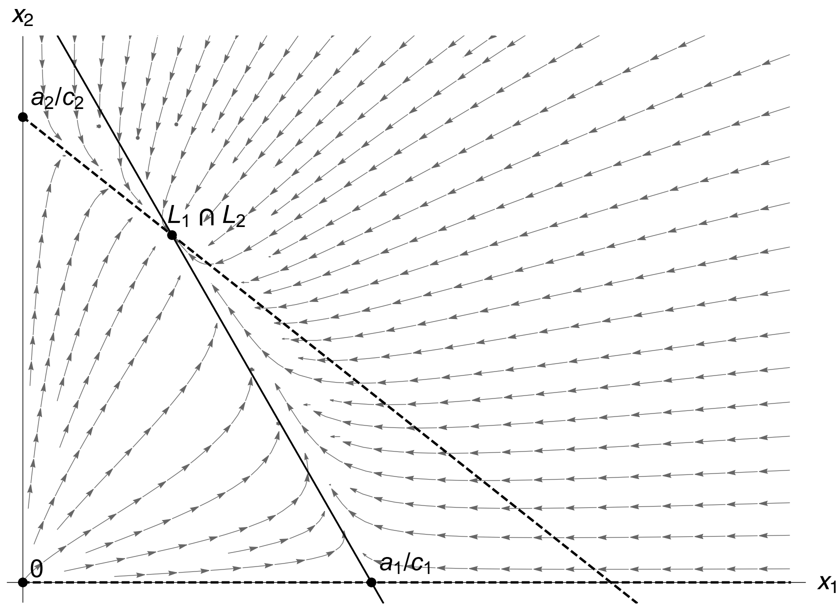

Рис. 3. Сосуществование двух видов

Из полученной картины можно сделать вывод, что сосуществование двух видов гарантировано, потому что все траектории стремятся к 4$^{\text{ой}}$ точке.

4.2. Второй вариант параметров системы

1. $\lambda_1 = a_1 > 0,\ \lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$ точка $(0,0)$ — неустойчивый узел;
2. $\lambda_1 = -a_1 < 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1} < 0 \Rightarrow$ точка $\left(\dfrac{a_1}{c_1}, 0\right)$ — устойчивый узел;

3. $\lambda_1 = \dfrac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2} < 0$, $\lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$ точка $\left(0, \dfrac{a_2}{c_2}\right)$ — устойчивый узел;

4. $\det \mathbb{J}_{IV} < 0 \Rightarrow$ собственные значения имеют разные знаки, а значит точка-пересечение сепаратрис $\left(\dfrac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}, \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}\right)$ — седло.

Получили два устойчивых узла и один неустойчивый, которые разделены седлом. Значит, фазовые траектории с учетом условий (4) принимают вид:

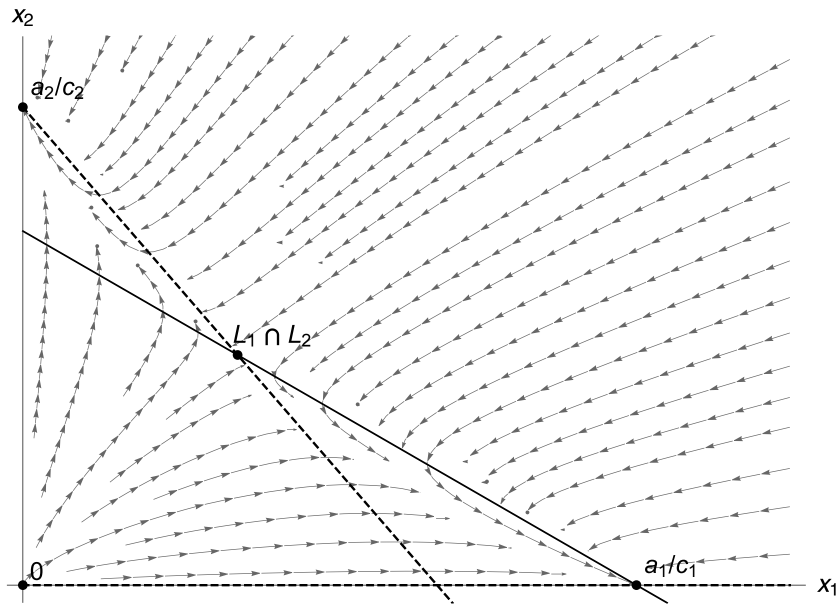

Рис. 4. Выживание одного из двух конкурирующих видов

Таким образом, сосуществование двух конкурирующих видов крайне маловероятно. Большинство траекторий стремятся либо ко $2^{\text{ой}}$, либо к $3^{\text{ей}}$ точке. А они соответствуют выживанию лишь одного из видов.

5. Дополнительные случаи

Опишем ситуации, когда не выполняется ни одно из условий $(3, 4)$, то есть когда точка пересечения сепаратрис находится вне $1^{\text{го}}$ квадранта (или ее вовсе нет, если прямые параллельные). Тогда эту точку можно исключить из рассмотрения, потому что число особей не может быть отрицательным. Значит, будем рассматривать один из двух случаев:

$$\begin{cases} a_1c_2 > a_2b_{12}, \\ a_2c_1 < a_1b_{21}, \end{cases} \tag{7}$$

или

$$\begin{cases} a_1c_2 < a_2b_{12}, \\ a_2c_1 > a_1b_{21} \end{cases} \tag{8}$$

5.1. Первый случай

При выполнении условий (7) график прямых-сепаратрис выглядит следующим образом:

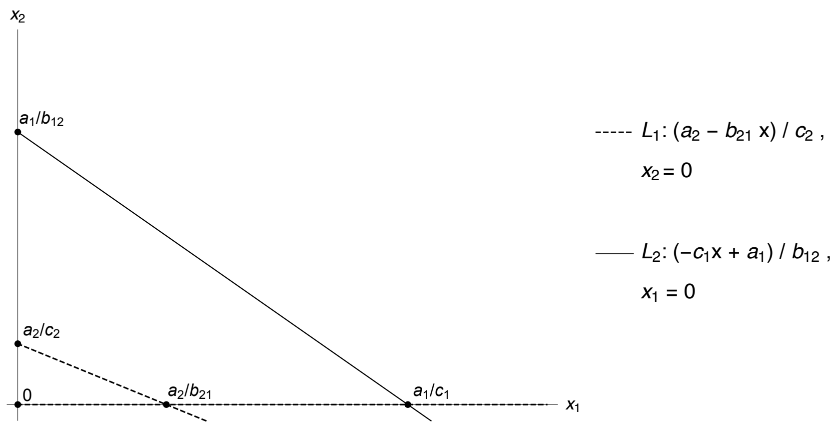

Рис. 5. Первый дополниетльный случай расположения сепаратрис

1. $\lambda_1 = a_1 > 0,\ \lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$ точка $(0,0)$ — неустойчивый узел;
2. $\lambda_1 = -a_1 < 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1} < 0 \Rightarrow$ точка $\left(\dfrac{a_1}{c_1}, 0\right)$ — устойчивый узел;
3. $\lambda_1 = \dfrac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2} > 0,\ \lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$ точка $\left(0, \dfrac{a_2}{c_2}\right)$ — седло.

Построим фазовый портрет для данного случая:

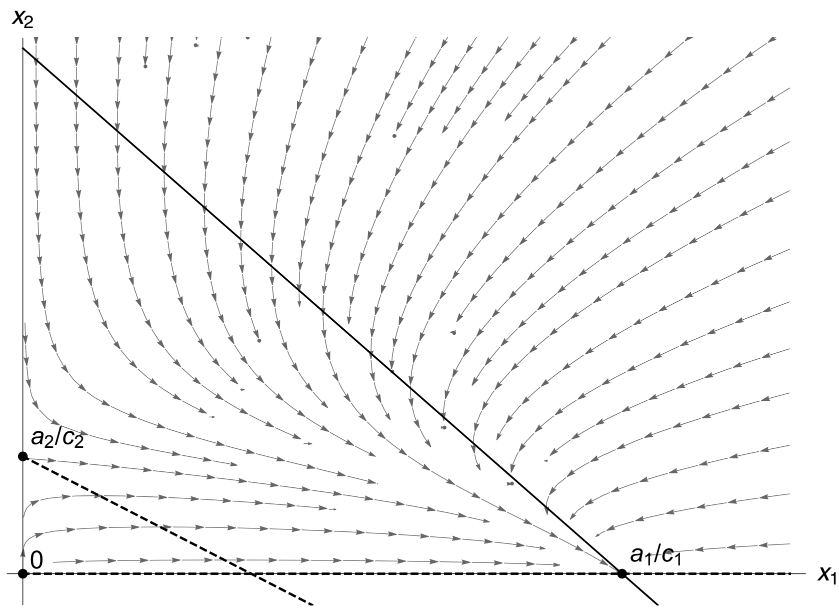

Рис. 6. Выживает первый вид, второй — вымирает

В системе присутствует всего одно устойчивое состояние ($2^{\text{ая}}$ точка), поэтому все фазовые траектории стремятся к нему.

5.2. Второй случай

В случае выполнения условий (8) возникает противоположная ситуация:

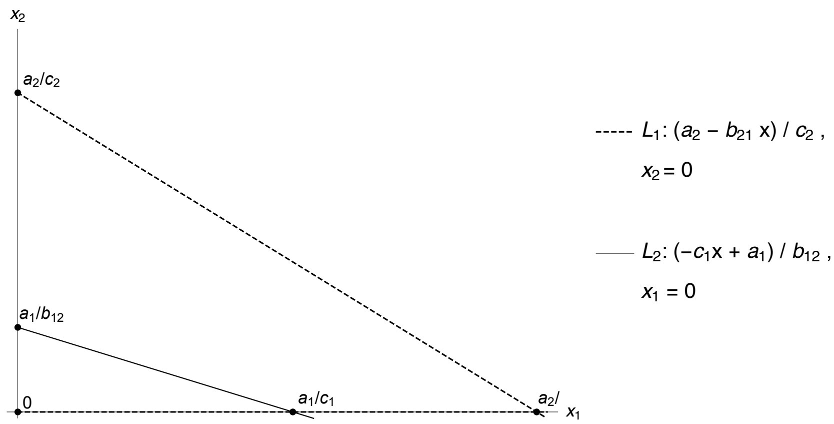

Рис. 7. Второй дополниетльный случай расположения сепаратрис

1. $\lambda_1 = a_1 > 0,\ \lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$ точка $(0, 0)$ — неустойчивый узел;
2. $\lambda_1 = -a_1 < 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1} > 0 \Rightarrow$ точка $\left(\dfrac{a_1}{c_1}, 0\right)$ — седло;
3. $\lambda_1 = \dfrac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2} < 0,\ \lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$ точка $\left(0, \dfrac{a_2}{c_2}\right)$ — устойчивый узел.

Фазовый портрет с учетом всего выше сказанного:

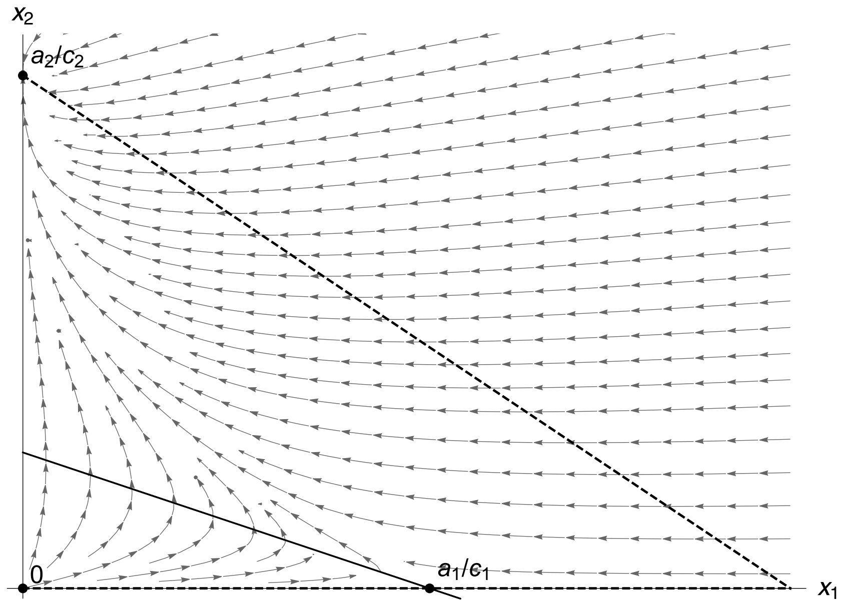

Рис. 8. Выживает второй вид, первый — вымирает

Как и в предыдущем случае, в системе присутствует одно устойчивое состояние, однако на этот раз оно соответствует $1^{\text{ой}}$ точке, и все траектории устремляются к ней.

Заключение

Имея экспериментально выведенные коэфициенты размножения, а также коэфициенты межвидовой и внутривидовой конкуренции, мы можем построить модель взаимодействия между особями двух видов и понять, способны ли они сосуществовать или же один из них вымрет. Анализ особых точек (иными словами — стационарных состояний) дает нам возможность построить график траекторий, чтобы определить, к какому из четырех стационарных состояний стремится система.

Список литературы

1. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. — 2-е изд. испр. и доп. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 560 с.
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 336 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1970. 280 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1970. 332 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука: Физматлит, 1989. 416 с.