



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки _____

КАФЕДРА _____ Прикладная математика _____

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Модель двух конкурирующих видов

Студент _____
ФН2-42Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

М. П. Галанин
(И. О. Фамилия)

2021 г.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
2. Стационарные состояния	4
3. Линеаризация системы в окрестности стационарных точек	6
3.1. Вымирание обоих видов	7
3.2. Вымирание первого вида	7
3.3. Вымирание второго вида	7
3.4. Выживание обоих видов	7

Введение

1. Постановка задачи

Рассмотрим некоторые задачи из области динамики популяций. Пусть есть два сходных вида, конкурирующих между собой за пищу. Очевидно, что возможны следующие варианты:

- Выживает только первый вид;
- Выживает только второй вид;
- Выживают оба вида;
- Оба вида вымирают.

Каждый из этих вариантов соответствует наличию своего положения равновесия. Тем самым для описания данной системы нужна модель с четырьмя неподвижными точками — стационарными состояниями системы.

В соответствии с гипотезой В. Волтера¹ модель двух конкурирующих видов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2x_2^2, \end{cases} \quad (1)$$

где a_1, a_2 — коэффициенты скорости роста популяции; b_{12}, b_{21} — коэффициенты межвидовой борьбы; c_1, c_2 — внутривидовой борьбы первого и второго вида соответственно.

В данной курсовой работе необходимо рассмотреть все варианты параметров системы и исследовать качественное поведение ее решений. Также важно уделить внимание особым точкам системы.

2. Стационарные состояния

Найдем стационарные точки. Для этого необходимо решить систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2 = x_1(a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1) = 0, \\ a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2x_2^2 = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

¹ В. Волтера (*um.* Vito Volterra, 1860–1940) — итальянский математик и физик.

откуда получаем 4 стационарных состояния:

1. $x_1 = 0, x_2 = 0$ — вымирание обоих видов;
2. $x_1 = 0, x_2 = \frac{a_2}{c_2}$ — вымирание первого вида, достижение вторым видом конечной численности $\frac{a_2}{c_2}$;
3. $x_1 = \frac{a_1}{c_1}, x_2 = 0$ — противоположная ситуация, то есть достижение первым видом численности $\frac{a_1}{c_1}$ и вымирание второго вида;
4. $x_1 = \frac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}, x_2 = \frac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$ — выживание обоих видов.

Особое внимание стоит уделить последнему стационарному состоянию. Решения x_1, x_2 в этой ситуации должны быть положительными. Условие положительности выполняется в одной из двух ситуаций:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} a_1c_2 > a_2b_{12}, \\ a_2c_1 > a_1b_{21}, \\ c_1c_2 > b_{12}b_{21} \end{cases} \\ \textcircled{2} \quad & \begin{cases} a_1c_2 < a_2b_{12}, \\ a_2c_1 < a_1b_{21}, \\ c_1c_2 < b_{12}b_{21}, \end{cases} \end{aligned}$$

в противном случае, система теряет биологический смысл, потому что число особей в популяции не может быть отрицательным.

Возникновение тех или иных стационарных состояний, упомянутых выше, зависит от исходных параметров системы (1). Для того, чтобы получить более наглядное представление о всех возможных ситуациях, которые могут возникнуть в зависимости от этих параметров, можно построить график прямых-сепаратрис. Их можно вывести из системы (2):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{a_2 + b_{21}x_1}{c_2}, \quad x_2 = \frac{a_1 + c_1x_1}{b_{12}}. \quad (3)$$

Попарные пересечения сепаратрис дают стационарные состояния. Возможные взаимные расположения прямых-сепаратрис приведены на рис. 1:

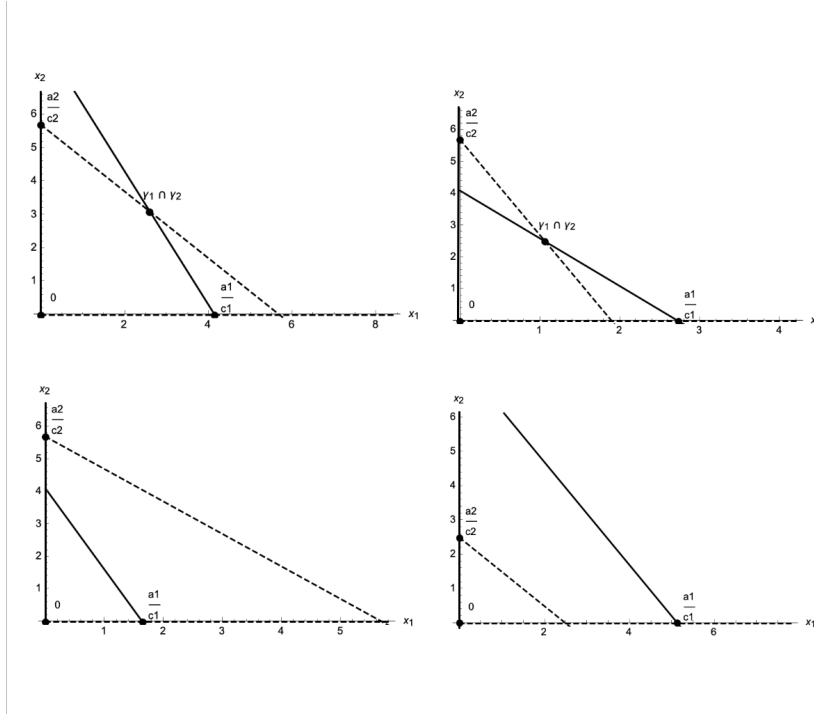


Рис. 1. Расположение сепаратрис системы в зависимости от параметров.

3. Линеаризация системы в окрестности стационарных точек

В общем виде линеаризованную систему в окрестностях всех стационарных точек можно представить в виде матрицы Якоби следующего вида:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_{12}x_2 - 2c_1x_1 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - b_{21}x_1 - 2c_2x_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

3.1. Вымирание обоих видов

Рассмотрим стационарное состояние $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Подставим эти координаты в матрицу (4) и получим:

$$\mathbb{J}_I = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

По условию задачи коэффициенты a_1, a_2 строго положительные, поэтому корни $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$ также положительные. Таким образом, данная точка — неустойчивый узел.

3.2. Вымирание первого вида

Рассмотрим следующее стационарное состояние: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a_2}{c_2}$. В его окрестности матрица коэффициентов линеаризованной системы имеет вид:

$$\mathbb{J}_{II} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} & 0 \\ -\frac{a_2 b_{21}}{c_2} & -a_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения: $\lambda_1 = \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2}$, $\lambda_2 = -a_2$. Корень λ_2 отрицательный для $\forall a_2 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим корень λ_1 подробнее:

$$\left[\begin{array}{l} \text{устойчивый узел, если } \lambda_1 < 0 \Leftrightarrow a_1 c_2 < a_2 b_{12}, \\ \text{неустойчивое седло, если } \lambda_1 > 0 \Leftrightarrow a_1 c_2 > a_2 b_{12}. \end{array} \right.$$

3.3. Вымирание второго вида

3.4. Выживание обоих видов