



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки \_\_\_\_\_

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика \_\_\_\_\_

**РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**  
***К КУРСОВОЙ РАБОТЕ***  
***НА ТЕМУ:***

***Модель двух конкурирующих видов***

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-42Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
А. И. Токарев  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
М. П. Галанин  
(И. О. Фамилия)

2021 г.

## Содержание

Введение . . . . .	3
1. Постановка задачи . . . . .	4
2. Стационарные состояния . . . . .	4

---

# Введение

# 1. Постановка задачи

Рассмотрим некоторые задачи из области динамики популяций. Пусть есть два сходных вида, конкурирующих между собой за пищу. Очевидно, что возможны следующие варианты:

- Выживает только первый вид;
- Выживает только второй вид;
- Выживают оба вида;
- Оба вида вымирают.

Каждый из этих вариантов соответствует наличию своего положения равновесия. Тем самым для описания данной системы нужна модель с четырьмя неподвижными точками — стационарными состояниями системы.

В соответствии с гипотезой В. Волтера<sup>1</sup> модель двух конкурирующих видов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2x_2^2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_1, a_2$  — коэффициенты скорости роста популяции;  $b_{12}, b_{21}$  — коэффициенты межвидовой борьбы;  $c_1, c_2$  — внутривидовой борьбы первого и второго вида соответственно.

В данной курсовой работе необходимо рассмотреть все варианты параметров системы и исследовать качественное поведение ее решений. Также важно уделить внимание особым точкам системы.

## 2. Стационарные состояния

Найдем стационарные точки. Для этого необходимо решить СЛАУ вида:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2 = 0, \\ a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2x_2^2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> В. Волтера (*um.* Vito Volterra, 1860–1940) — итальянский математик и физик.

откуда получаем 4 стационарных состояния:

1.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  — вымирание обоих видов;
2.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{a_2}{c_2}$  — вымирание первого вида, достижение вторым видом конечной численности  $\frac{a_2}{c_2}$ ;
3.  $x_1 = \frac{a_1}{c_1}, x_2 = 0$  — противоположная ситуация, то есть достижение первым видом численности  $\frac{a_1}{c_1}$  и вымирание второго вида;
4.  $x_1 = \frac{a_1 c_2 - a_2 b_{12}}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}}, x_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}}$  — выживание обоих видов.

Особое внимание стоит уделить 4 стационарному состоянию. Решения  $x_1, x_2$  в этой ситуации должны быть положительными. Условия положительности неподвижных решений выполняются в одном из двух случаях:

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} a_1 c_2 > a_2 b_{12}, \\ a_2 c_1 > a_1 b_{21}, \\ c_1 c_2 > b_{12} b_{21} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} a_1 c_2 < a_2 b_{12}, \\ a_2 c_1 < a_1 b_{21}, \\ c_1 c_2 < b_{12} b_{21} \end{cases}$$

Также расположение стационарных точек можно продемонстрировать на графике. Каждое из уравнений (2) задает прямую-сепаратрису:

$$\left[ \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{a_1 + c_1 x_1}{b_{12}}, \end{cases} \right. \quad (3)$$

$$\left[ \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{a_1 + c_1 x_1}{b_{12}} \end{cases} \right.$$

Попарные пересечения сепаратрис дают стационарные состояния. Возможные взаимные расположения прямых-сепаратрис приведены на рис. 1:

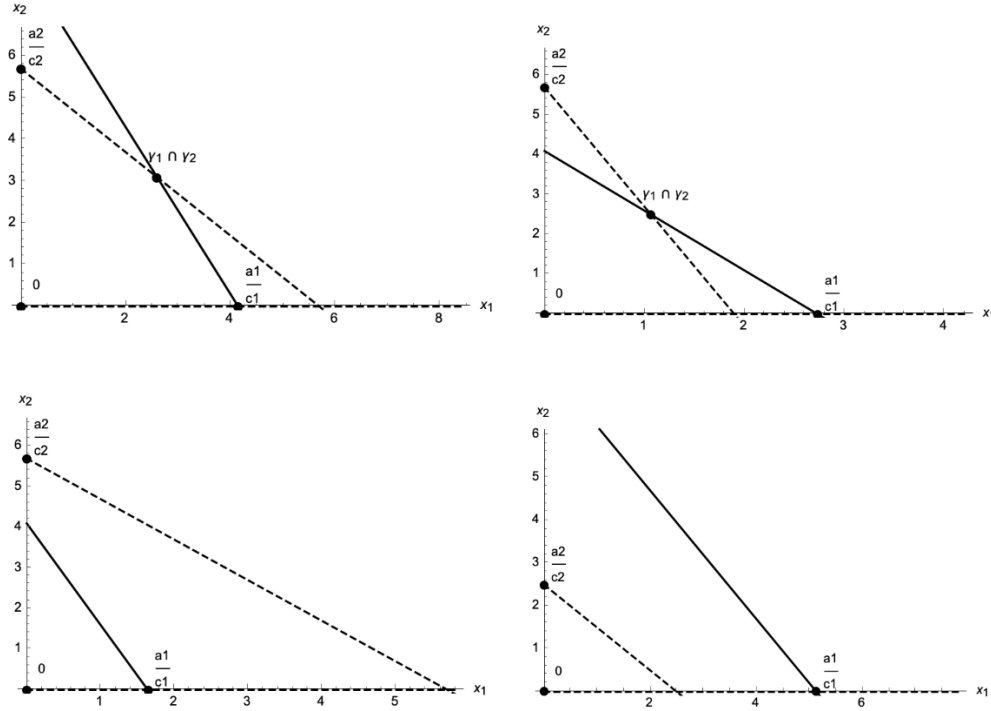


Рис. 2.1. Расположение сепаратрис системы в зависимости от параметров.

Линеаризация системы — построение приближенной линейной модели. Линеаризуем нашу систему:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} a_1 - b_{12}x_2 - 2c_1x_1 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - b_{21}x_1 - 2c_2x_2 \end{pmatrix}$$