Дифференциальная геометрия
ФН2-42Б, 2 курс, 4 семестр

Домашнее задание №1
«Кривые и поверхности в пространстве»
Вариант 2-23

Дано:

Поверхность задана параметрически уравнениями $S : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v),\ u, v \in \mathbb{R}$
Уравнение поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = \{\cosh u \cos v,\ 5 \sinh u,\ \cosh u \sin v\}$$

Вид кривой на поверхности и координаты точек:

$$\gamma : u = v;\ P_1(1, 0, 0);\ P_2(-\cosh \pi, 5 \sinh \pi, 0)$$

Задачи:

Задача 1. Найти особые точки параметризированной поверхности. Составить уравнение касательной к поверхности в точках P_1 и P_2

Для того, чтобы вывести уравнение касательной плоскости к поверхности в точке, необходимо найти вектор нормали к поверхности в точке. Сначала нужно взять частные производные $\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} = \vec{\mathbf{r}}_u$ и $\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} = \vec{\mathbf{r}}_v$:

$$\vec{\mathbf{r}}_u = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ 5 \cosh u \\ \sinh u \sin v \end{pmatrix};\ \vec{\mathbf{r}}_v = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ 0 \\ \cosh u \cos v \end{pmatrix}$$

Векторное произведение $\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v$ имеет вид:

$$\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh u \cos v & 5 \cosh u & \sinh u \sin v \\ -\cosh u \sin v & 0 & \cosh u \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}\,(5 \cosh^2 u \cos u) + \vec{\mathbf{j}}\,(\sinh u \cosh u \cos^2 - \sinh u \cosh u \sin^2 v) + \vec{\mathbf{k}}\,(5 \cosh^2 u \sin v)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v = \begin{pmatrix} 5 \cosh^2 u \cos v \\ -\sinh u \cosh u \\ 5 \cosh^2 u \sin v \end{pmatrix}$$

Сразу можно заметить, что $\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$ ни при каких значениях u или v. Это означает, что все точки поверхности – регулярные.

Посчитаем норму векторного призведения $|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|$:

$$|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v| = \sqrt{25\cosh^4 u + \sinh^2 y \cosh^2 u} = \cosh u \sqrt{25\cosh^2 u + \sinh^2 u}$$

Таким образом, вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v}{|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|} = \frac{1}{\sqrt{25\cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} 5\cosh u \cos v \\ -\sinh u \\ 5\cosh u \sin v \end{pmatrix}$$

Выразим координаты точек P_1 и P_2 через u и v. Для этого приравняем координаты уравнения поверхности $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$ к координатам этих точек:

$$P_1 : \begin{cases} \cosh u \cos v = 1 \\ 5\sinh u = 0 \\ \cosh u \sin v = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} \cosh u \cos v = -\cosh \pi \\ 5\sinh u = 5\sinh \pi \\ \cosh u \sin v = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_2 = \pi \\ v_2 = \pi \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить нормали касательных плоскостей в точках P_1 и P_2 соответсвенно.

В точке P_1 вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда касательная плоскость имеет вид:

$$T_{P_1} : x - 1 = 0$$

В точке P_2 вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{25\cosh^2 \pi + \sinh^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5\cosh \pi \\ -\sinh \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

и касательная плоскость имеет вид:

$$T_{P_2} : 5\cosh \pi \cdot x + \sinh \pi \cdot y + 5 = 0$$

Ответ: Особых точек нет;
$T_{P_1} : x - 1 = 0$;
$T_{P_2} : 5\cosh \pi \cdot x + \sinh \pi \cdot y + 5 = 0$.

Задача 2. Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров (u, v). Составить уравнения координатных линий. Построить поверхность и координатную сеть на ней (с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica)

Уравнение поверхности, выраженное через x, y, z:

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = 5 \sinh u \\ z = \cosh u \sin v \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + z^2 - \frac{y^2}{25} = 1,$$

значит, данная поверхность – однополостный гиперболоид с осью вдоль OY

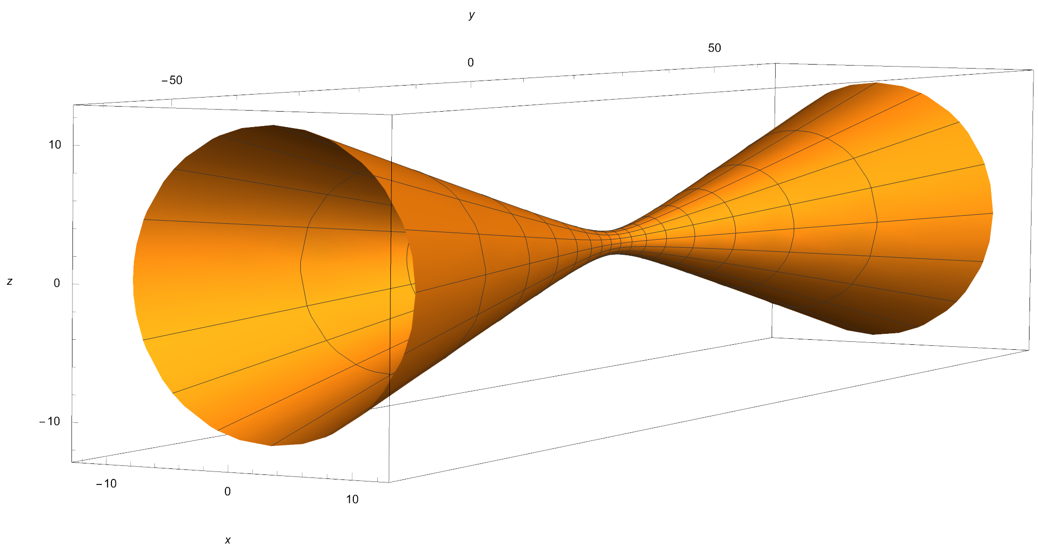

Рис. 1: Однополостный гиперболоид