



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

**РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**  
***К КУРСОВОЙ РАБОТЕ***  
***НА ТЕМУ:***

***Модель двух конкурирующих видов***

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-42Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
А. И. Токарев  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
М. П. Галанин  
(И. О. Фамилия)

2021 г.

## Содержание

Введение . . . . .	3
1. Постановка задачи . . . . .	3
2. Стационарные состояния . . . . .	4
3. Линеаризация системы в окрестности стационарных точек . . . . .	7
4. Фазовые портреты . . . . .	7
4.1. Первый вариант параметров системы. . . . .	7
4.2. Второй вариант параметров системы . . . . .	11
5. Дополнительные случаи . . . . .	15
5.1. Первый случай . . . . .	15
5.2. Второй случай . . . . .	18
Заключение . . . . .	21
Список литературы . . . . .	22

## Введение

В теории, если нет никаких факторов воздействия внешней среды на некоторую популяцию, то она способна размножаться вплоть до бесконечности. Однако в реальной жизни так не происходит, и особи разных видов так или иначе воздействуют друг на друга. И одним из таких типов взаимодействий является конкуренция. Ее разделяют на внутривидовую конкуренцию (соперничество между особями одного вида за жизненные ресурсы) и на межвидовую конкуренцию (взаимоотношение между популяциями двух (или более) видов, которое неблагоприятно сказывается на их росте и выживании).

Проблема динамики популяции заинтересовала ученых еще в XVIII веке. Именно тогда они начали заниматься разработкой методов, способных описать динамику роста и сокращения популяций живых организмов.

Основателем современной математической теории популяций справедливо считается Вито Вольтерра<sup>1</sup>, разработавший математическую теорию биологических сообществ, аппаратом которой служат дифференциальные и интегродифференциальные уравнения. Эта модель основывается на следующих гипотезах:

1. Пища имеется в неограниченном количестве или ее поступление регулируется.
2. В единицу времени погибает одинаковое количество особей одного вида.
3. Прирост численности вида пропорционален его текущей численности.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу из области динамики популяций. Пусть есть два сходных вида, конкурирующих между собой за пищу. Очевидно, что возможны следующие варианты:

---

<sup>1</sup> В. Вольтерра (*um.* Vito Volterra, 1860–1940) — итальянский математик и физик.

- Выживает только первый вид.
- Выживает только второй вид.
- Выживают оба вида.
- Оба вида вымирают.

Каждый из этих вариантов соответствует наличию своего положения равновесия. Тем самым для описания данной системы нужна модель с четырьмя стационарными точками — стационарными состояниями системы.

В соответствии с гипотезами В. Вольтерра модель двух конкурирующих видов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2x_2^2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_1, a_2$  — коэффициенты скорости роста популяции;  $b_{12}, b_{21}$  — коэффициенты межвидовой борьбы;  $c_1, c_2$  — внутривидовой борьбы первого и второго вида соответственно.

В данной курсовой работе необходимо рассмотреть все варианты параметров системы и исследовать качественное поведение ее решений. Также важно уделить внимание особым точкам системы.

## 2. Стационарные состояния

Найдем стационарные точки. Для этого необходимо решить систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2 = x_1(a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1) = 0, \\ a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2x_2^2 = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

откуда получаем 4 стационарных состояния:

1.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  — вымирание обоих видов.
2.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{a_2}{c_2}$  — вымирание первого вида, достижение вторым видом конечной численности  $\frac{a_2}{c_2}$ .

3.  $x_1 = \frac{a_1}{c_1}$ ,  $x_2 = 0$  — противоположная ситуация, то есть достижение первым видом численности  $\frac{a_1}{c_1}$  и вымирание второго вида.

4.  $x_1 = \frac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$ ,  $x_2 = \frac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$  — выживание обоих видов.

Особое внимание стоит уделить последнему стационарному состоянию. Решения  $x_1$ ,  $x_2$  в этой ситуации должны быть положительными, в противном случае система теряет биологический смысл, потому что число особей в популяции не может быть отрицательным. Условие положительности выполняется в одной из двух ситуаций:

$$\begin{cases} a_1c_2 > a_2b_{12}, \\ a_2c_1 > a_1b_{21}, \\ c_1c_2 > b_{12}b_{21}, \end{cases} \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} a_1c_2 < a_2b_{12}, \\ a_2c_1 < a_1b_{21}, \\ c_1c_2 < b_{12}b_{21}, \end{cases} \quad (4)$$

при этом третье неравенство следует из первого и второго в обоих случаях.

Возникновение тех или иных стационарных состояний, упомянутых выше, зависит от исходных параметров системы (1). Для того, чтобы получить более наглядное представление о всех возможных ситуациях, которые могут возникнуть в зависимости от этих параметров, можно построить график прямых-сепаратрис. Их можно вывести из системы (2):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{a_2 + b_{21}x_1}{c_2}, \quad x_2 = \frac{a_1 + c_1x_1}{b_{12}}. \quad (5)$$

Попарные пересечения сепаратрис дают стационарные состояния. Возможные взаимные расположения прямых-сепаратрис продемонстрированы на рис. 1-2:

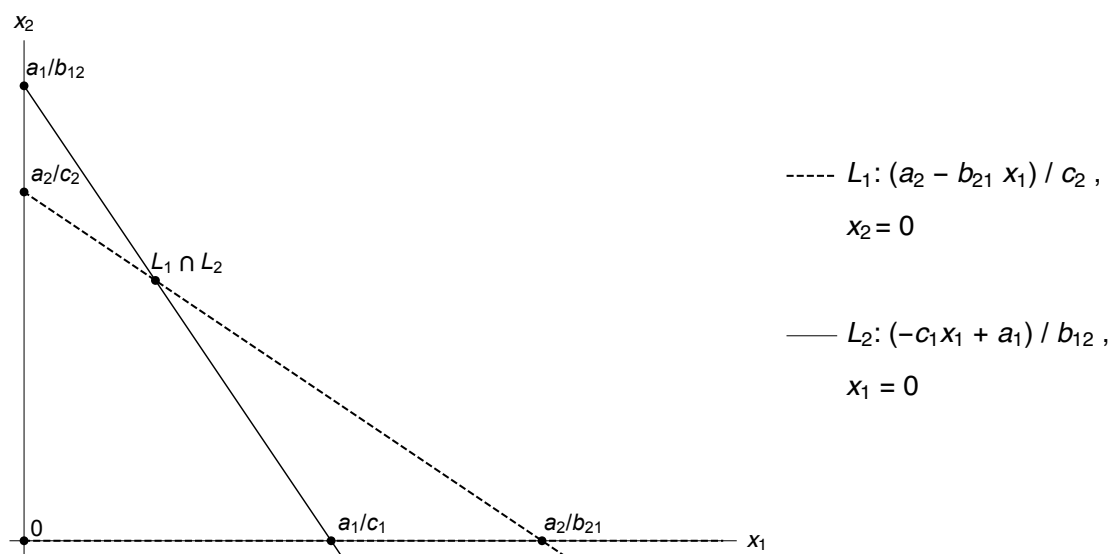


Рис. 1. Расположение прямых-сепаратрис, когда числитель и знаменатель положительные

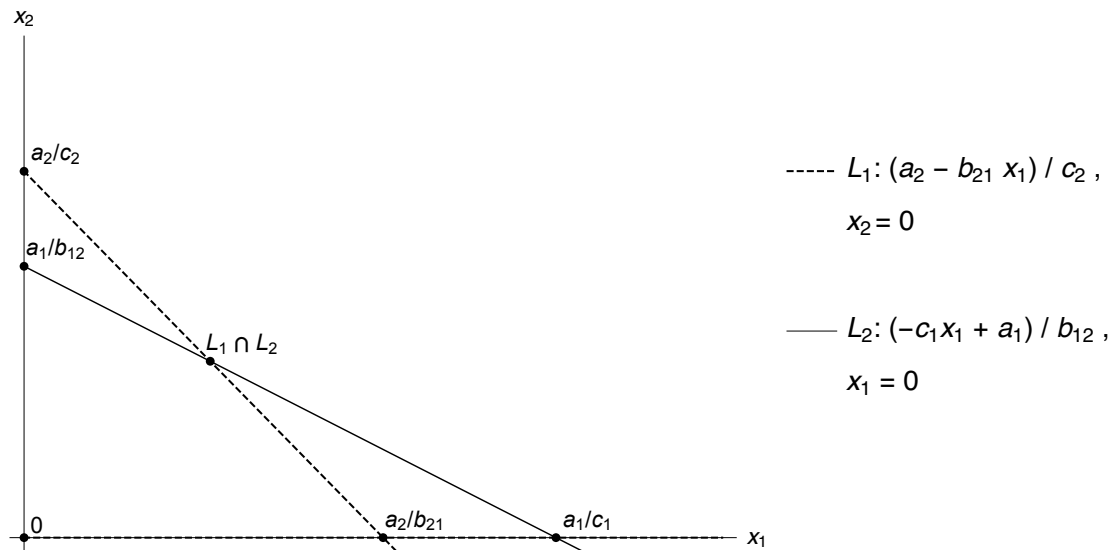


Рис. 2. Расположение прямых-сепаратрис, когда числитель и знаменатель отрицательные

### 3. Линеаризация системы в окрестности стационарных точек

В общем виде линеаризованную систему можно представить в виде матрицы Якоби следующего вида:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_{12}x_2 - 2c_1x_1 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - b_{21}x_1 - 2c_2x_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Линеаризуем систему в окрестности всех четырех стационарных точек:

$$\mathbb{J}_I = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{II} = \begin{pmatrix} -a_1 & -\frac{a_1 b_{12}}{c_1} \\ 0 & \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{III} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} & 0 \\ -\frac{a_2 b_{21}}{c_2} & -a_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{J}_{IV} = \begin{pmatrix} \frac{c_1(a_1 c_2 - a_2 b_{12})}{b_{12} b_{21} - c_1 c_2} & \frac{b_{12}(a_1 c_2 - a_2 b_{12})}{b_{12} b_{21} - c_1 c_2} \\ \frac{b_{21}(a_2 c_1 - a_1 b_{21})}{b_{12} b_{21} - c_1 c_2} & \frac{c_2(a_2 c_1 - a_1 b_{21})}{b_{12} b_{21} - c_1 c_2} \end{pmatrix},$$

и вспомним, что в зависимости от исходных параметров системы выполняется одно из двух условий(3, 4), определяющих типы этих точек.

### 4. Фазовые портреты

Все стационарные точки являются простыми, поэтому их тип определяется собственными числами матриц  $\mathbb{J}_{I-IV}$ .

#### 4.1. Первый вариант параметров системы.

С учетом условий (3):

1.  $\lambda_1 = a_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$  точка  $(0, 0)$  — неустойчивый узел.
2.  $\lambda_1 = -a_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} > 0 \Rightarrow$  точка  $\left(\frac{a_1}{c_1}, 0\right)$  — седло.

3.  $\lambda_1 = \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} > 0$ ,  $\lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$  точка  $\left(0, \frac{a_2}{c_2}\right)$  — седло.
4. Для того, чтобы определить тип последней стационарной точки, следует решить квадратное уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

где  $a_{ij}$  — коэффициенты матрицы  $\mathbb{J}_{IV}$ ,  $(a_{11} + a_{22}) = \text{tr } \mathbb{J}_{IV}$  — след этой матрицы,  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det \mathbb{J}_{IV}$  — ее определитель. Проанализируем знаки собственных чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , воспользовавшись теоремой Виета:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \frac{c_1(a_1 c_2 - b_{12} a_2) + c_2(a_2 c_1 - a_1 b_{21})}{b_{12} b_{21} - c_1 c_2} & (\Delta), \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \frac{(a_1 c_2 - b_{12} a_2)(a_2 c_1 - b_{21} a_1)}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}} & (\Delta\Delta) \end{cases}$$

$$(\Delta): \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \frac{c_1(a_1 c_2 - b_{12} a_2) + c_2(a_2 c_1 - a_1 b_{21})}{b_{12} b_{21} - c_1 c_2} < 0,$$

$$(\Delta\Delta): \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \text{собственные числа имеют одинаковый знак,}$$

а так как  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  и  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют один и тот же знак, то они оба отрицательные. Значит, точка  $\left(\frac{a_1 c_2 - a_2 b_{12}}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}}, \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}}\right)$  — устойчивый узел.

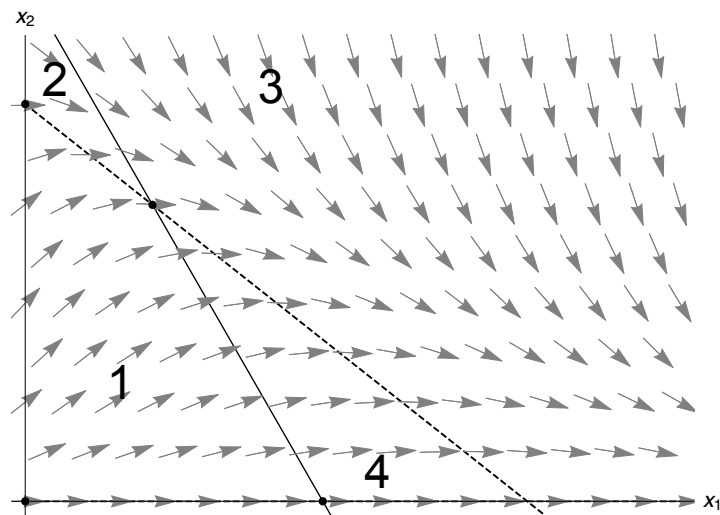
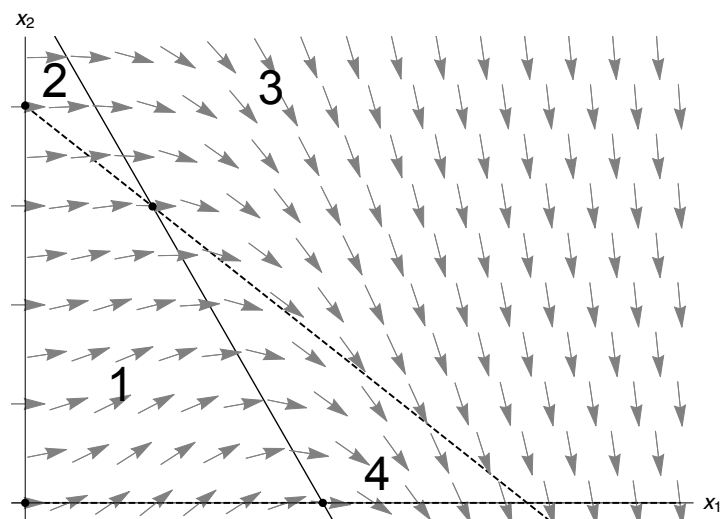
Имеем только одно устойчивое состояние. Осталось построить фазовый портрет. Для этого сначала построим поля направлений для  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ , чтобы определить знаки этих производных в каждой из подобластей рис. 1.

Общее поле направлений (рис. 5) получается путем объединения полей направлений для  $\dot{x}_1$  (рис. 3) и  $\dot{x}_2$  (рис. 4):

- В первой области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  общие траектории направлены вправо вверх;
- Во второй области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  общие траектории направлены вправо вниз;



- В третьей области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  общие траектории направлены влево вниз;
- В четвертой области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  общие траектории направлены влево вверх.

Рис. 3. Поле направлений для  $\dot{x}_1$ Рис. 4. Поле направлений для  $\dot{x}_2$

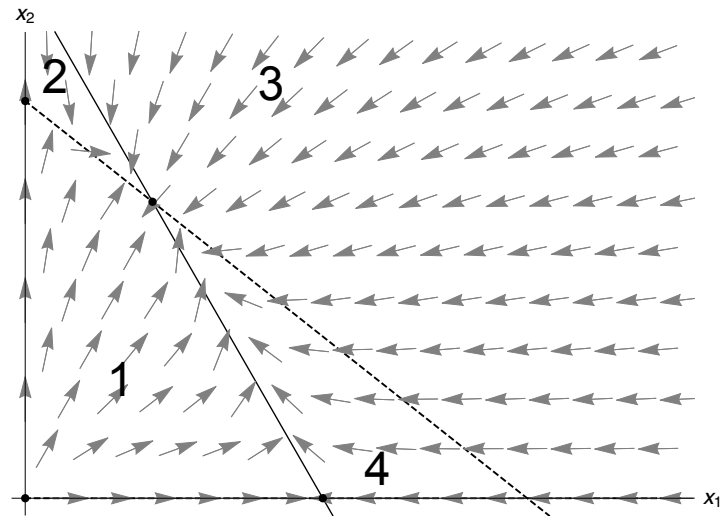


Рис. 5. Общие направления траекторий

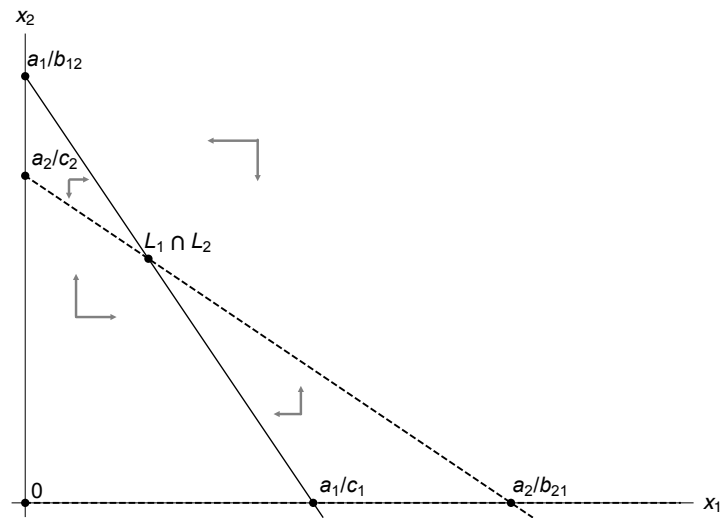


Рис. 6. Картина направлений движения траекторий

Воспользуемся системой компьютерной алгебры Wolfram Mathematica для того, чтобы построить окончательный фазовый портрет:

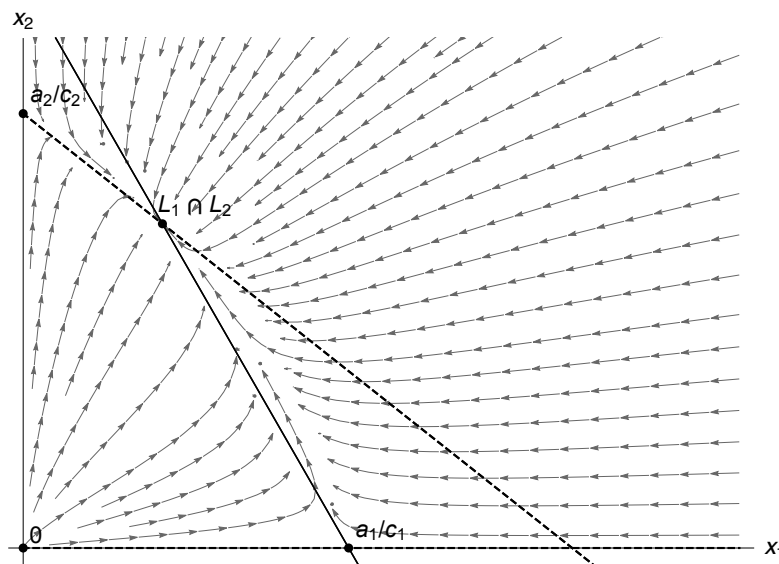


Рис. 7. Сосуществование двух видов

Из полученной картины можно сделать вывод, что сосуществование двух видов гарантировано, потому что все траектории стремятся к 4-ой точке.

#### 4.2. Второй вариант параметров системы

С учетом условий (4):

1.  $\lambda_1 = a_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$  точка  $(0, 0)$  — неустойчивый узел.
2.  $\lambda_1 = -a_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} < 0 \Rightarrow$  точка  $\left(\frac{a_1}{c_1}, 0\right)$  — устойчивый узел.
3.  $\lambda_1 = \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} < 0$ ,  $\lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$  точка  $\left(0, \frac{a_2}{c_2}\right)$  — устойчивый узел.
4.  $\det \mathbb{J}_{IV} < 0 \Rightarrow$  собственные значения имеют разные знаки, а значит точка-пересечение сепаратрис  $\left(\frac{a_1 c_2 - a_2 b_{12}}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}}, \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1 c_2 - b_{12} b_{21}}\right)$  — седло.

Получили два устойчивых узла и один неустойчивый, которые разделены седлом. Как и в предыдущем случае, продемонстрируем направления траекторий в каждой из подобластей:

- В первой области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  траектории направлены вправо вверх;
- Во второй области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  траектории направлены влево вверх;
- В третьей области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  траектории направлены влево вниз;
- В четвертой области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  траектории направлены вправо вниз.

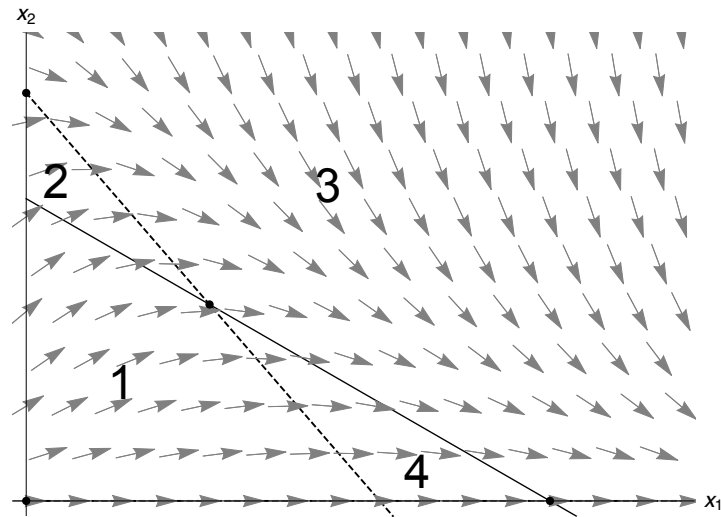


Рис. 8. Поле направлений для  $\dot{x}_1$

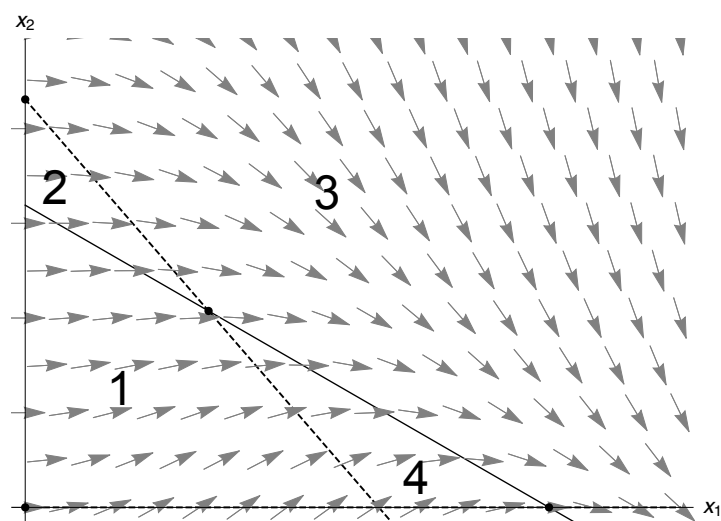
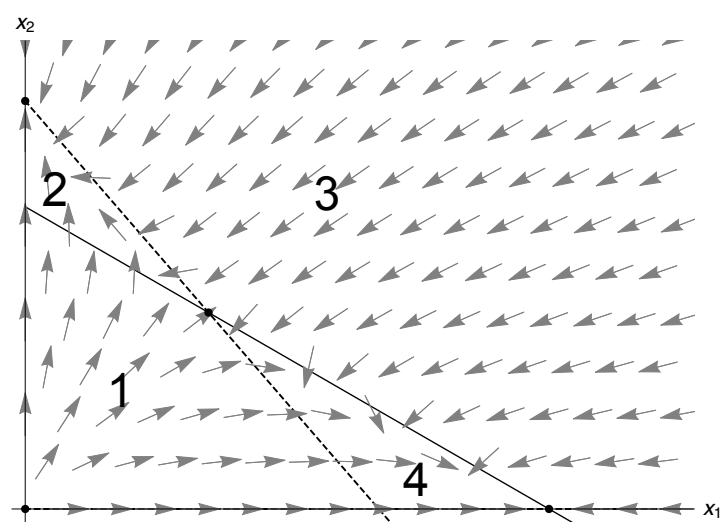
Рис. 9. Поле направлений для  $\dot{x}_2$ 

Рис. 10. Общие направления траекторий

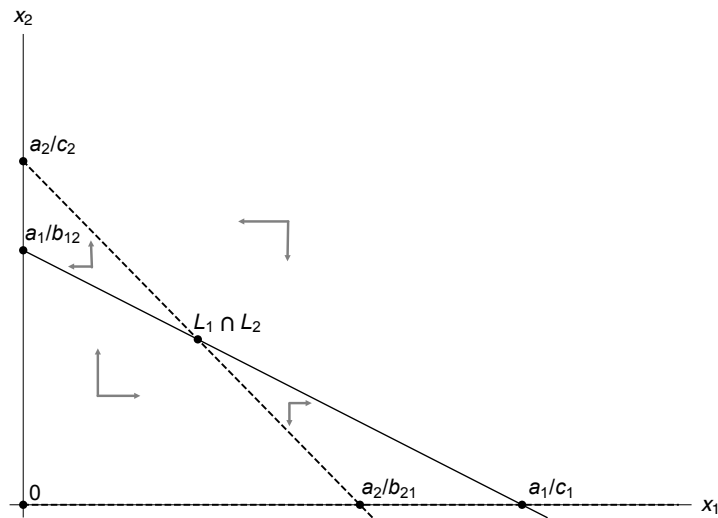


Рис. 11. Картина направлений движения траекторий

Значит, фазовый портрет выглядит следующим образом:

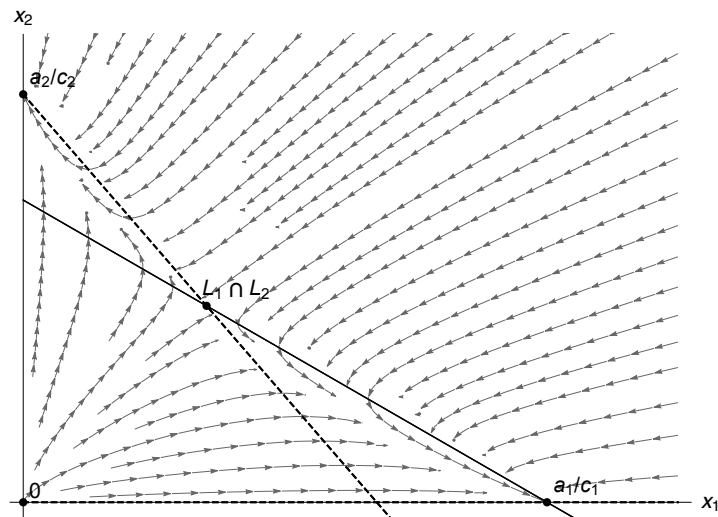


Рис. 12. Выживание одного из двух конкурирующих видов

Таким образом, сосуществование двух конкурирующих видов крайне маловероятно. Большинство траекторий стремятся либо ко 2-ой, либо к 3-ей точке. А они соответствуют выживанию лишь одного из видов.

## 5. Дополнительные случаи

Опишем ситуации, когда не выполняется ни одно из условий (3, 4), то есть когда точка пересечения сепаратрис находится вне 1<sup>го</sup> квадранта (или ее вовсе нет, если прямые параллельные). Тогда эту точку можно исключить из рассмотрения, потому что число особей не может быть отрицательным. Значит, будем рассматривать один из двух случаев:

$$\begin{cases} a_1 c_2 > a_2 b_{12}, \\ a_2 c_1 < a_1 b_{21}, \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} a_1 c_2 < a_2 b_{12}, \\ a_2 c_1 > a_1 b_{21} \end{cases} \quad (8)$$

### 5.1. Первый случай

При выполнении условий (7) график прямых-сепаратрис выглядит следующим образом:

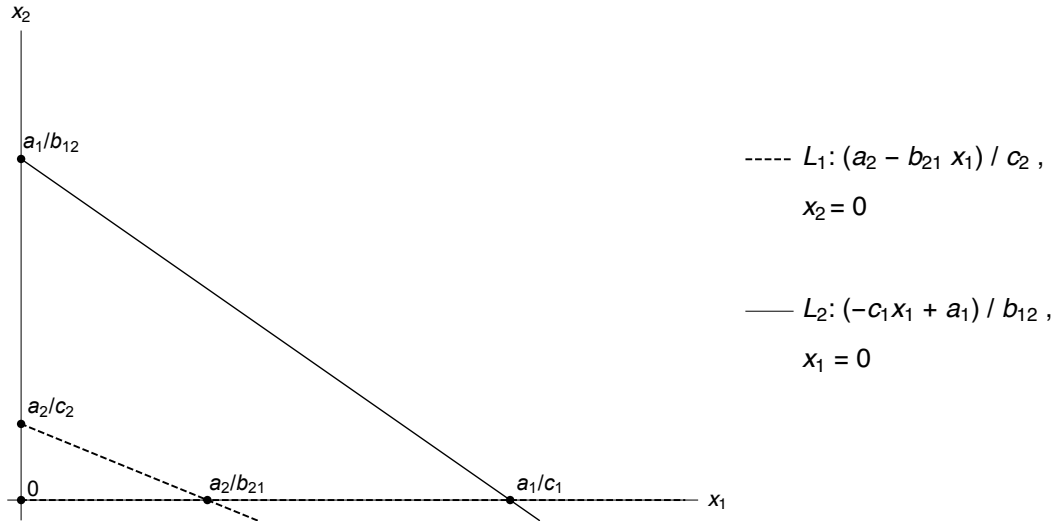


Рис. 13. Первый дополнительный случай расположения сепаратрис

1.  $\lambda_1 = a_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$  точка  $(0, 0)$  — неустойчивый узел.

2.  $\lambda_1 = -a_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} < 0 \Rightarrow$  точка  $\left(\frac{a_1}{c_1}, 0\right)$  — устойчивый узел.

3.  $\lambda_1 = \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} > 0$ ,  $\lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$  точка  $\left(0, \frac{a_2}{c_2}\right)$  — седло.

Проанализируем поля направлений:

- В первой области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  траектории направлены вправо вверх.
- Во второй области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  траектории направлены право вниз.
- В третьей области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  траектории направлены влево вниз.

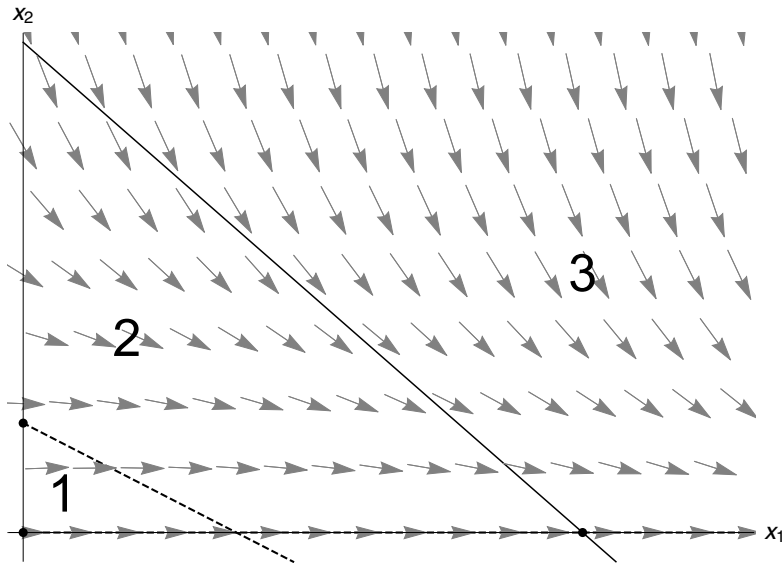


Рис. 14. Поле направлений для  $\dot{x}_1$



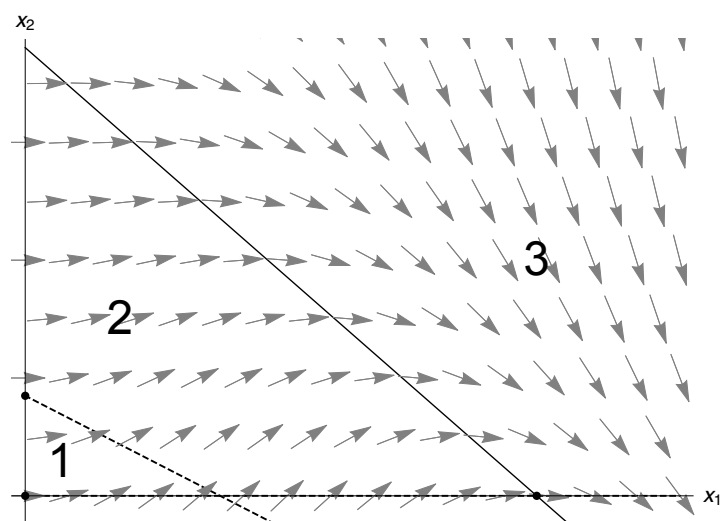
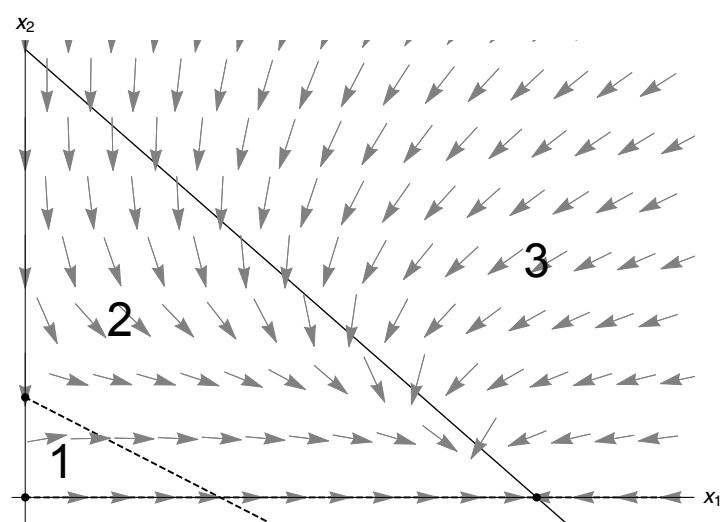
Рис. 15. Поле направлений для  $\dot{x}_2$ 

Рис. 16. Общие направления траекторий

Построим фазовый портрет для данного случая:

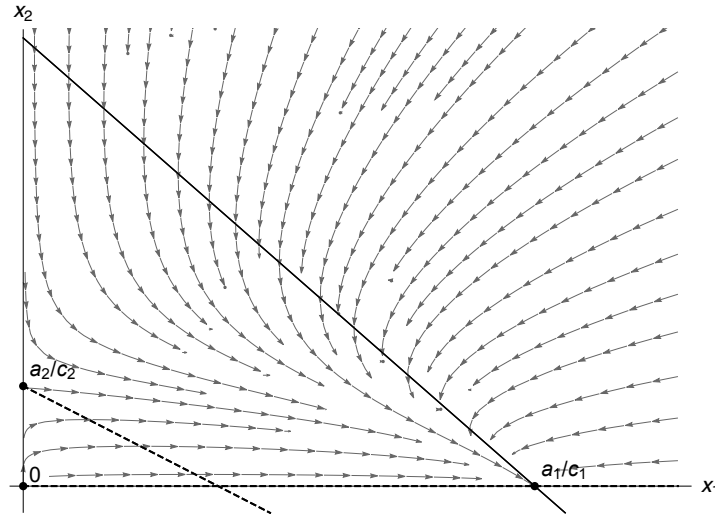


Рис. 17. Выживает первый вид, второй — вымирает

В системе присутствует всего одно устойчивое состояние (2<sup>ая</sup> точка), поэтому все фазовые траектории стремятся к нему.

## 5.2. Второй случай

В случае выполнения условий (8) возникает противоположная ситуация:

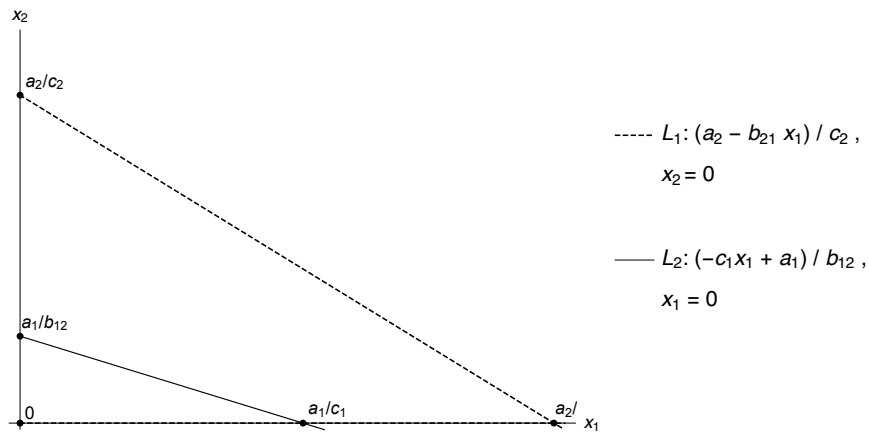


Рис. 18. Второй дополнительный случай расположения сепаратрис

1.  $\lambda_1 = a_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$  точка  $(0, 0)$  — неустойчивый узел.

2.  $\lambda_1 = -a_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} > 0 \Rightarrow$  точка  $\left(\frac{a_1}{c_1}, 0\right)$  — седло.

3.  $\lambda_1 = \frac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} < 0$ ,  $\lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$  точка  $\left(0, \frac{a_2}{c_2}\right)$  — устойчивый узел.

Поля направлений:

- В первой области  $\dot{x}_1 > 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  траектории направлены вправо вверх.
- Во второй области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 > 0 \Rightarrow$  траектории направлены влево вверх.
- В третьей области  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 < 0 \Rightarrow$  траектории направлены влево вниз.

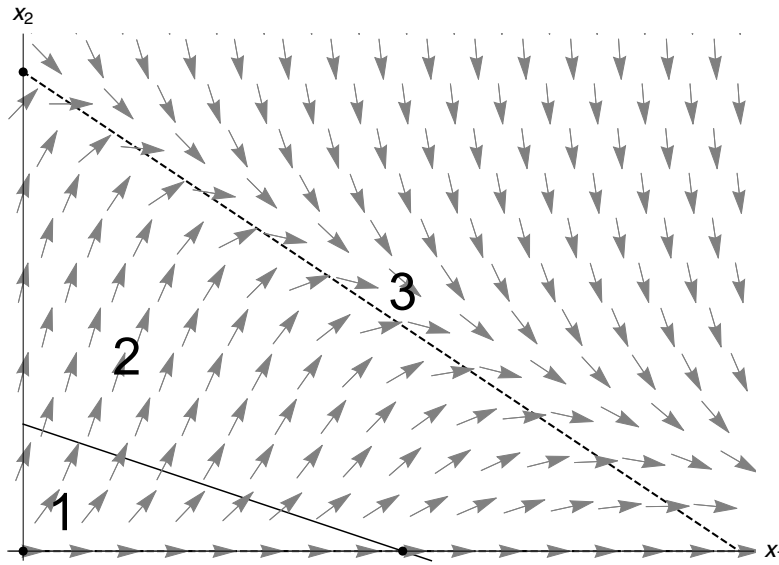


Рис. 19. Поле направлений для  $\dot{x}_1$

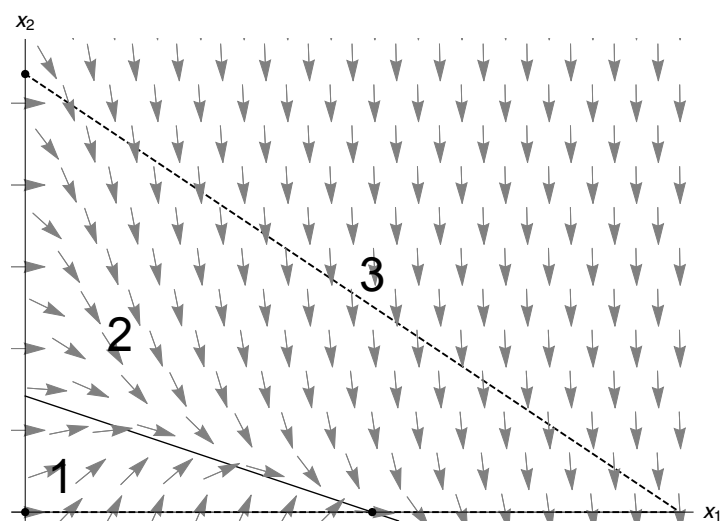
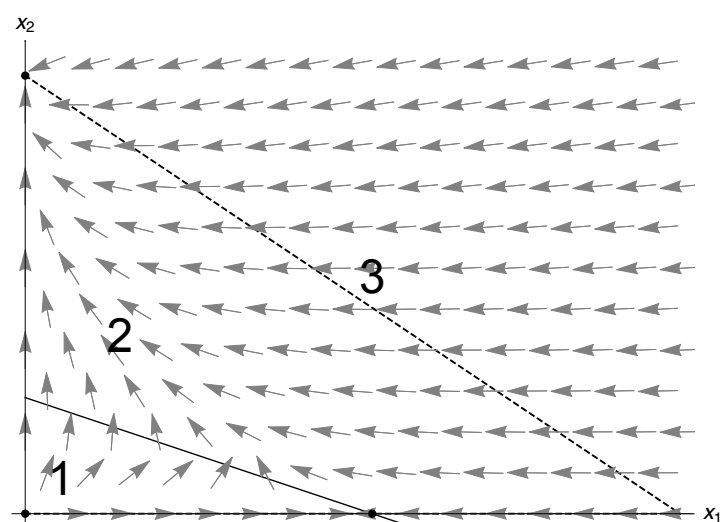
Рис. 20. Поле направлений для  $\dot{x}_2$ 

Рис. 21. Общие направления траекторий

Фазовый портрет с учетом всего выше сказанного:

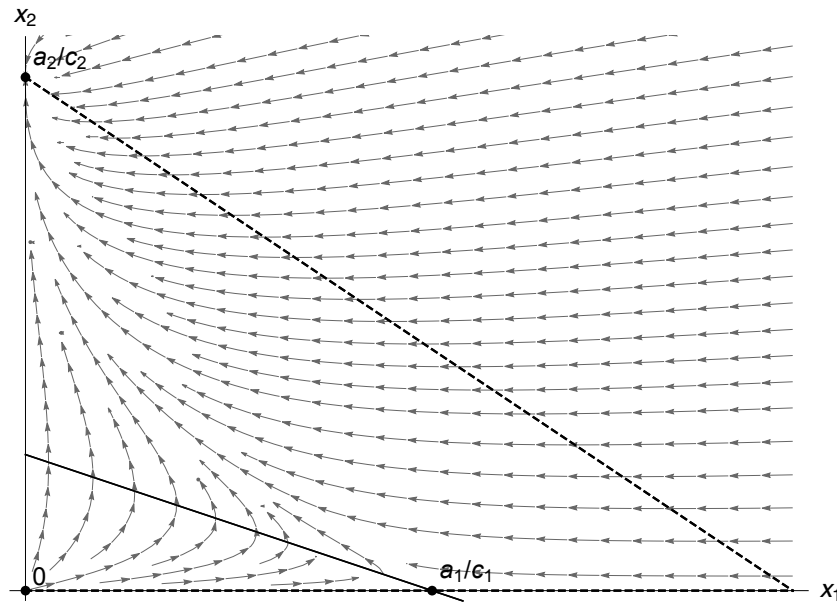


Рис. 22. Выживает второй вид, первый — вымирает

Как и в предыдущем случае, в системе присутствует одно устойчивое состояние, однако на этот раз оно соответствует  $1^{\text{ой}}$  точке, и все траектории устремляются к ней.

## Заклучение

Имея экспериментально выведенные коэффициенты размножения, а также коэффициенты межвидовой и внутривидовой конкуренции, мы можем построить модель взаимодействия между особями двух видов и понять, способны ли они сосуществовать или же один из них вымрет. Анализ особых точек (иными словами — стационарных состояний) дает нам возможность построить график траекторий, чтобы определить, к какому из четырех стационарных состояний стремится система.

## Список литературы

1. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. — 2-е изд. испр. и доп. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 560 с.
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 336 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1970. 280 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1970. 332 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука: Физматлит, 1989. 416 с.