Дифференциальная геометрия
Домашнее задание № 1
«Кривые и поверхности в пространстве»
ФН2-42Б, 2 курс, 4 семестр
Арсений Токарев, Вариант 2-23

Дано

Поверхность S задана параметрически уравнениями:

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \cos v \\ 5 \operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}, \quad u,\, v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Уравнение кривой на поверхности:

$$\gamma\colon u = v. \tag{2}$$

Координаты точек:

$$P_1(1,0,0); \quad P_2(-\operatorname{ch}\pi, 5\operatorname{sh}\pi, 0). \tag{3}$$

Задачи

Задача 1. Найти особые точки параметризированной поверхности. Составить уравнение касательной к поверхности в точках P_1 и P_2.

Для того, чтобы вывести уравнение касательной плоскости к поверхности в точке, необходимо найти вектор нормали к поверхности в данной точке. Сначала нужно взять частные производные $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v$:

$$\mathbf{r}_u = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \cos v \\ 5 \operatorname{ch} u \\ \operatorname{sh} u \sin v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_v = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u \sin v \\ 0 \\ \operatorname{ch} u \cos v \end{pmatrix},$$

затем векторно их перемножить:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \operatorname{sh} u \cos v & 5 \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \sin v \\ -\operatorname{ch} u \sin v & 0 & \operatorname{ch} u \cos v \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(5 \operatorname{ch}^2 u \cos u) -$$

$$- \mathbf{j}\,(\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \cos^2 v + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin^2 v) + \mathbf{k}\,(5 \operatorname{ch}^2 u \sin v) = \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \operatorname{ch}^2 u \cos v \\ -\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \\ 5 \operatorname{ch}^2 u \sin v \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора (4) не обращаются в 0 одновременно, поэтому $\forall u,\, v \in \mathbb{R}$: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$. Это означает, что все точки поверхности регулярные.

Посчитаем норму векторного призведения $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$:

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{25 \operatorname{ch}^4 u + \operatorname{sh}^2 y \operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{ch} u \sqrt{25 \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u}\,,$$

таким образом, вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}$ будет равен:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u}} \begin{pmatrix} 5 \operatorname{ch} u \cos v \\ -\operatorname{sh} u \\ 5 \operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Выразим координаты точек P_1 и P_2 через u и v. Для этого подставим их декартовы координаты в уравнение поверхности (1):

$$P_1\colon \begin{cases} \operatorname{ch} u \cos v = 1, \\ 5 \operatorname{sh} u = 0, \\ \operatorname{ch} u \sin v = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

$$P_2\colon \begin{cases} \operatorname{ch} u \cos v = -\operatorname{ch} \boldsymbol{\pi}, \\ 5 \operatorname{sh} u = 5 \operatorname{sh} \boldsymbol{\pi}, \\ \operatorname{ch} u \sin v = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_2 = \boldsymbol{\pi}, \\ v_2 = \boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

Теперь можно найти нормали касательных плоскостей в точках P_1 и P_2 соответсвенно. В точке P_1 вектор единичной нормали (5) равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда уравнение касательной плоскости $T|_{P_1}$ имеет вид:

$$x - 1 = 0.$$

В точке P_2 вектор единичной нормали (5) равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2\boldsymbol{\pi} + \operatorname{sh}^2\boldsymbol{\pi}}}\begin{pmatrix} -5\operatorname{ch}\boldsymbol{\pi} \\ -\operatorname{sh}\boldsymbol{\pi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

и уравнение касательной плоскости $T|_{P_2}$ выглядит следующим образом:

$$5\operatorname{ch}\boldsymbol{\pi}\cdot x + \operatorname{sh}\boldsymbol{\pi}\cdot y + 5 = 0.$$

Ответ: особых точек нет, $\quad T|_{P_1}: x - 1 = 0, \quad T|_{P_2}: 5\operatorname{ch}\boldsymbol{\pi}\cdot x + \operatorname{sh}\boldsymbol{\pi}\cdot y + 5 = 0.$

Задача 2. Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров (u, v). Составить уравнения координатных линий. Построить поверхность и координатную сеть на ней (с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica).

Уравнение поверхности, выраженное через x, y, z:

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \cos v, \\ y = 5\operatorname{sh} u, \\ z = \operatorname{ch} u \sin v \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + z^2 - \frac{y^2}{25} = 1,$$

значит, данная поверхность — однополостный гиперболоид (рис. 1).

Рассмотрим координатные линии данной поверхности. При $u_0 = \mathrm{const}$ получаем:

$$x^2 + z^2 = R = \sqrt{1 + \frac{y^2}{25}} = \operatorname{ch} u_0 = \mathrm{const},$$

т. е. уравнения окружностей с радиусами $R = \operatorname{ch} u_0$. А при $v_0 = const$ получаем семейство гипербол.

Ответ: однополостный гиперболоид, (u_0, v) — окружности, (u, v_0) — гиперболы.

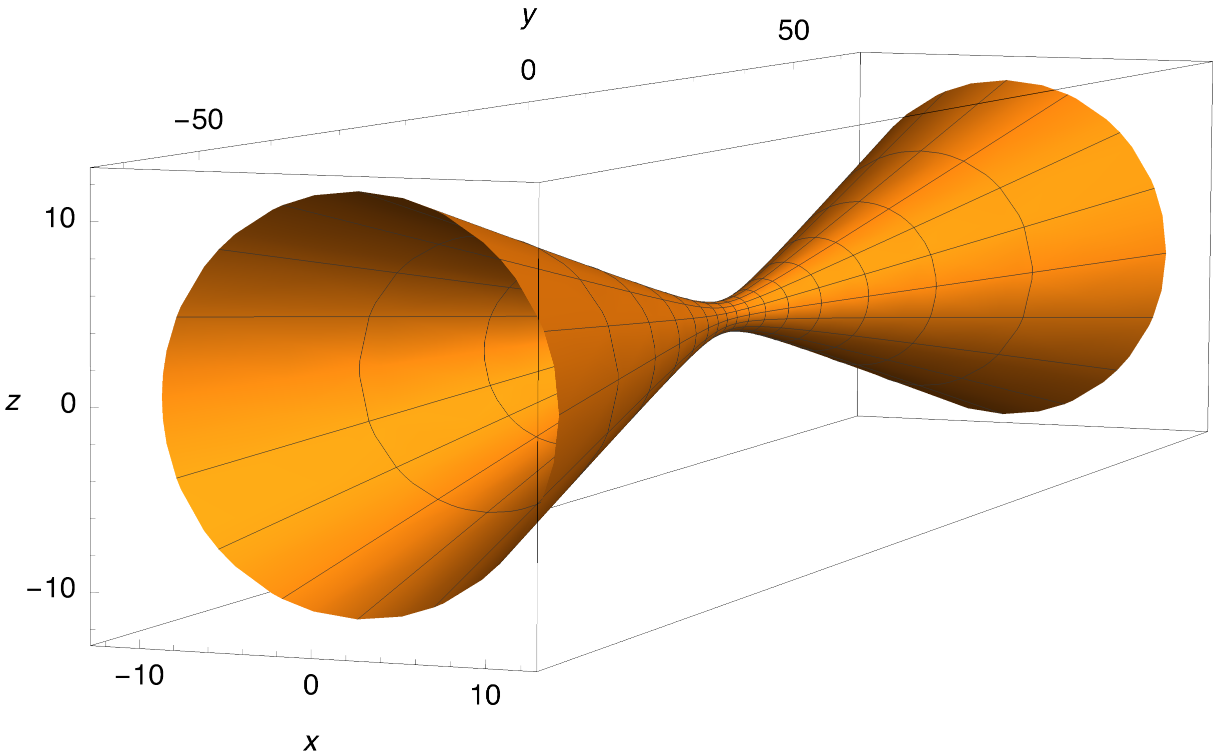

Рис. 1. Однополостный гиперболоид

Задача 3. Вычислить первую квадратичную форму поверхности. Вычислить угол между кривыми $l_1\colon u = v^2$ и $l_2\colon u = v$ в точке их пересечения.

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(u,v) = (\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_u) = \operatorname{sh}^2 u + 25 \operatorname{ch}^2 u,$$

$$M(u,v) = (\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v) = 0,$$

$$G(u,v) = (\mathbf{r}_v,\, \mathbf{r}_v) = \operatorname{ch}^2 u,$$

значит, матрица первой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{G}(u,v) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2 u + 25 \operatorname{ch}^2 u & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Угол между кривыми — это угол между векторами скоростей этих кривых в точке их пересечения. Его можно вычислить по следующей формуле:

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{x}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \mathbf{x}_2}{\sqrt{(\mathbf{x}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \mathbf{x}_1} \cdot \sqrt{(\mathbf{x}_2)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \mathbf{x}_2}}, \quad \textbf{а почему xi печатает x?}$$

Для нахождения точек пересечения и для вычисления векторов скоростей параметризуем кривые l_1 и l_2:

$$l_1 \colon u = v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1 = t^2, \\ v_1 = t \end{cases}$$

$$l_2 \colon u = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_2 = t, \\ v_2 = t \end{cases}$$

теперь найдем точки их пересечения:

$$\begin{cases} t^2 = t, \\ t = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Далее вычислим векторы скоростей кривых l_1 и l_2 в произвольной точке t:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $t = t_1 = 0$, тогда:

$$\mathbb{G}|_{t_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2(t_1) = \mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а значит угол между кривыми в точке t_1 равен:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{26} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arccos\frac{1}{26} \approx 1.34^\circ.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $t = t_2 = 1$:

$$\mathbb{G}|_{t_2} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2 1 + 25\operatorname{ch}^2 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1(t_2) = \mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и угол между кривыми в точке t_2 равен:

$$\cos\alpha_2 \approx \frac{124.198}{246.015 \cdot 63.2896} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \approx 0.097^\circ.$$

Ответ: $I = (\operatorname{sh}^2 u + 25\operatorname{ch}^2 u)du^2 + (\operatorname{ch}^2 u)dv^2, \quad \alpha_1 \approx 1.34^\circ, \quad \alpha_2 \approx 0.097^\circ.$

Задача 4. Вычислить вторую квадратичную форму поверхности. Определить типы точек поверхности.

$$\mathbf{r}_{uu} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \cos v \\ 5\operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{uv} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} u \sin v \\ 0 \\ \operatorname{sh} u \cos v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{vv} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u \cos v \\ 0 \\ -\operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = \frac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}},$$

$$M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = 0,$$

$$L = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = -\frac{5\operatorname{ch}^2 u}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}},$$

то есть матрица второй квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{B} = \frac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а значит все точки поверхности гиперболические.

Ответ: $II = \left(\dfrac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}}\right) du^2 - \left(\dfrac{5\operatorname{ch}^2 u}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}}\right) dv^2$, все точки поверхности гиперболические.

Задача 5. Найти главные направления и главные кривизны в точках P_1, P_2. Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности в этих точках.

Найдем главные кривизны и главные направления в точке P_1:

$$\mathbb{B}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det\left(\mathbb{B}|_{P_1} - k \cdot \mathbb{G}|_{P_1}\right) = (k+1)\left(k - \frac{1}{25}\right).$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_2 = \dfrac{1}{25}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем главные кривизны и главные направления в точке P_2:

$$\mathbb{B}|_{P_2} = \frac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 \pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}|_{P_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{25\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi} & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 \pi \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbb{B}|_{P_2} - k \cdot \mathbb{G}|_{P_2}) = \left(k - \frac{5}{(25\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(k + \frac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}}\right).$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_3 = \dfrac{5}{(25\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi)^{\frac{3}{2}}}$:

$$\mathbf{x}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_4 = -\dfrac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2\pi + \operatorname{sh}^2\pi}}$:

$$\mathbf{x}_4 = c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, можно вычислить средние и гауссовы кривизны в точках P_1, P_2:

$$K_{P_1} = k_1 \cdot k_2 = -0.04, \qquad K_{P_2} = k_3 \cdot k_4 = -\frac{5}{(25\operatorname{ch}^2\pi + \sin^2\pi)^2},$$

$$H_{P_1} = \frac{k_1 + k_2}{2} = -0.48, \qquad H_{P_2} = \frac{k_3 + k_4}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1 - (25\operatorname{ch}^2\pi + \sin^2\pi)^2}{(25\operatorname{ch}^2\pi + \sin^2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Задача 6. Составить уравнения линий кривизны, асимптотических и геодезических линий для рассматриваемой поверхности. Привести примеры решения этих уравнений

Первое семейство линий кривизны:

$$\begin{cases} \dot{u} = 1, \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = t + C_1, \\ v = C_2, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t + C_1)\cos C_2 F \\ 5\operatorname{sh}(t + C_1) \\ \operatorname{ch}(t + C_1)\sin C_2 \end{pmatrix}.$$

Второе семейство линий кривизны:

$$\begin{cases} \dot{u} = 0, \\ \dot{v} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = C_3, \\ v = t + C_4, \end{cases} \quad C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(C_3)\cos(t + C_4) \\ 5\operatorname{sh}(C_3) \\ \operatorname{ch}(C_3)\sin(t + C_4) \end{pmatrix}.$$

Асимптотические линии:

$$\frac{5}{\sqrt{25\operatorname{ch}^2 u+\operatorname{sh}^2 u}}\begin{pmatrix}\dot u & \dot v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\operatorname{ch}^2 u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot u & \dot v\end{pmatrix}=0,$$

$$\dot u^2-\dot v^2\operatorname{ch}^2 u=0 \;\Rightarrow\; du=\pm\operatorname{ch} u\,dv,$$

$$\int\frac{du}{\operatorname{ch} u}=\pm\int dv=\pm v+C, C\in\mathbb{R},$$

$$2\arctan e^u=\pm v+C, C\in\mathbb{R}.$$

Геодезические линии при $u=u(v)$:

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} u(v)\cos v\\ 5\operatorname{sh} u(v)\\ \operatorname{ch} u(v)\sin v\end{pmatrix},\quad \mathbf{n}=\begin{pmatrix}5\operatorname{ch} u(v)\cos v\\ -\operatorname{sh} u(v)\\ 5\operatorname{ch} u(v)\sin v\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}'=\begin{pmatrix}u'(v)\operatorname{sh} u(v)\cos v-\operatorname{ch} u(v)\sin v\\ 5u'(v)\operatorname{ch} u\\ u'(v)\operatorname{sh} u(v)\sin v+\operatorname{ch} u(v)\cos v\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}''=\begin{pmatrix}u''(v)\operatorname{sh} u(v)\cos v+(u'(v))^2\operatorname{ch} u(v)\cos v-2u'(v)\operatorname{sh} u(v)\sin v+\operatorname{ch} u(v)\cos v\\ 5(u''(v)\operatorname{ch} u+(u'(v))^2\operatorname{sh} u)\\ u''(v)\operatorname{sh} u(v)\sin v+(u'(v))^2\operatorname{ch} u(v)\cos v+2u'(v)\operatorname{sh} u(v)\cos v-\operatorname{ch} u(v)\sin v\end{pmatrix},$$

то есть смешанное произведение полученный векторов (r', r'', n) не равно 0 ни при каких значениях v, поэтому можно сделать вывод, что геодезических линий нет.

Задача 7. Вычислить кривизну кривой γ в точках P_1, P_2. В одной из точек построить реперь Френе.

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} u\cos u\\ 5\operatorname{sh} u\\ \operatorname{ch} u\sin u\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}\operatorname{sh} u\cos u-\operatorname{ch} u\sin u\\ 5\operatorname{ch} u\\ \operatorname{sh} u\sin u+\operatorname{ch} u\cos u\end{pmatrix},\quad \ddot{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-2\operatorname{sh} u\sin u\\ 5\operatorname{sh} u\\ 2\operatorname{sh} u\cos u\end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \operatorname{sh} u \cos u - \operatorname{ch} u \sin u & 5 \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \sin u + \operatorname{ch} u \cos u \\ -2 \operatorname{sh} u \sin u & 5 \operatorname{sh} u & 2 \operatorname{sh} u \cos u \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \cos u - 5 \operatorname{sh}^2 u \sin u \\ -2 \operatorname{sh}^2 u \\ 5 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin u - 5 \operatorname{sh}^2 u \cos u \end{pmatrix},$$

$$|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{25 \operatorname{sh}^2 u + 54 \operatorname{sh}^4 u}, \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{26 + 27 \operatorname{sh}^2 u}\,.$$

Вычилсим кривизны в точках P_1, P_2:

$$k|_{P_1} = \sqrt{\frac{25 \operatorname{sh}^2 0 + 54 \operatorname{sh}^4 0}{26 + 27 \operatorname{sh}^2 0}} = 0,$$

$$k|_{P_2} = \sqrt{\frac{25 \operatorname{sh}^2 \pi + 54 \operatorname{sh}^4 \pi}{26 + 27 \operatorname{sh}^2 \pi}} \approx 0.0045.$$

Построим репер Френе в точке P_2 (в точке P_1 репер Френе не определен, потому что кривизна в этой точке $= 0$):

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{26 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} \pi \\ 5 \operatorname{ch} \pi \\ -\operatorname{ch} \pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + 29 \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5 \operatorname{ch} \pi \\ -2 \operatorname{sh} \pi \\ -5 \operatorname{sh} \pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{(26 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi) \cdot (25 \operatorname{ch}^2 \pi + 29 \operatorname{sh}^2 \pi)}} \begin{pmatrix} 27 \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi \\ -1 \\ -25 \operatorname{ch}^2 \pi - 2 \operatorname{sh}^2 \pi \end{pmatrix}.$$