Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Модель двух конкурирующих видов

Студент ФН2-42Б (Группа) ____ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ____ (Подпись, дата) М. П. Галанин (И. О. Фамилия)

2021 г.

Содержание

Введение

В теории, если нет никаких факторов воздействия внешней среды на некоторую популяцию, то она способна размножаться вплоть до бесконечности. Однако в реальной жизни так не происходит, и особи разных видов так или иначе воздействуют друг на друга. И одним из таких типов взаимодействий является конкуренция. Ее разделяют на внутривидовую конкуренцию (соперничество между особями одного вида за жизненные ресурсы) и на межвидовую конкуренцию (взаимоотношение между популяциями двух (или более) видов, которое неблагоприятно сказывается на их росте и выживании).

Проблема динамики популяции заинтересовала ученых еще в XVIII веке. Именно тогда они начали заниматься разработкой методов, способных описать динамику роста и сокращения популяций живых организмов.

Основателем современной математической теории популяций справедливо считается Вито Вольтерра[1], разработавший математическую теорию биологических сообществ, аппаратом которой служат дифференциальные и интегродифференциальные уравнения. Эта модель основывается на следующих гипотезах:

1. Пища имеется в неограниченном количестве или ее поступление регулируется;
2. В единицу времени погибает одинаковое количество особей одного вида;
3. Прирост численности вида пропорционален его текущей численности.

[1] В. Волтера (*ит.* Vito Volterra, 1860–1940) — итальянский математик и физик.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу из области динамики популяций. Пусть есть два сходных вида, конкурирующих между собой за пищу. Очевидно, что возможны следующие варианты:

- Выживает только первый вид;
- Выживает только второй вид;
- Выживают оба вида;
- Оба вида вымирают.

Каждый из этих вариантов соответствует наличию своего положения равновесия. Тем самым для описания данной системы нужна модель с четырьмя неподвижными точками — стационарными состояниями системы.

В соответствии с гипотезами В. Волтера модель двух конкурирующих видов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1{x_1}^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2{x_2}^2, \end{cases} \tag{1}$$

где a_1, a_2 — коэфициенты скорости роста популяции; b_{12}, b_{21} — коэфициенты межвидовой борьбы; c_1, c_2 — внутривидовой борьбы первого и второго вида соответсвенно.

В данной курсовой работе необходимо рассмотреть все варианты параметров системы и исследовать качественное поведение ее решений. Также важно уделить внимание особым точкам системы.

2. Стационарные состояния

Найдем стационарные точки. Для этого необходимо решить систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1{x_1}^2 = x_1(a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1) = 0, \\ a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2{x_2}^2 = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

откуда получаем 4 стационарных состояния:

1. $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ — вымирание обоих видов;
2. $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{a_2}{c_2}$ — вымирание первого вида, достижение вторым видом конечной численности $\dfrac{a_2}{c_2}$;
3. $x_1 = \dfrac{a_1}{c_1},\ x_2 = 0$ — противоположная ситуация, то есть достижение первым видом численности $\dfrac{a_1}{c_1}$ и вымирание второго вида;
4. $x_1 = \dfrac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}},\ x_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$ — выживание обоих видов.

Особое внимание стоит уделить последнему стационарному состоянию. Решения $x_1,\ x_2$ в этой ситуации должны быть положительными. Условие положительности выполняется в одной из двух ситуаций:

$$1 \quad \begin{cases} a_1c_2 > a_2b_{12}, \\ a_2c_1 > a_1b_{21}, \\ c_1c_2 > b_{12}b_{21} \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} a_1c_2 < a_2b_{12}, \\ a_2c_1 < a_1b_{21}, \\ c_1c_2 < b_{12}b_{21}, \end{cases}$$

в противном случае, система теряет биологический смысл, потому что число особей в популяции не может быть отрицательным.

Возникновение тех или иных стационарных состояний, упомянутых выше, зависит от исходных параметров системы (1). Для того, чтобы получить более наглядное представление о всех возможных ситуацях, которые могут возникнуть в зависимости от этих параметров, можно построить график прямых-сепаратрис. Их можно вывести из системы (2):

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_2 = \frac{a_2 + b_{21}x_1}{c_2}, \qquad x_2 = \frac{a_1 + c_1x_1}{b_{12}}. \tag{3}$$

Попарные пересечения сепаратрис дают стационарные состояния. Возможные взаимные расположения прямых-сепаратрис приведены на рис. 1:

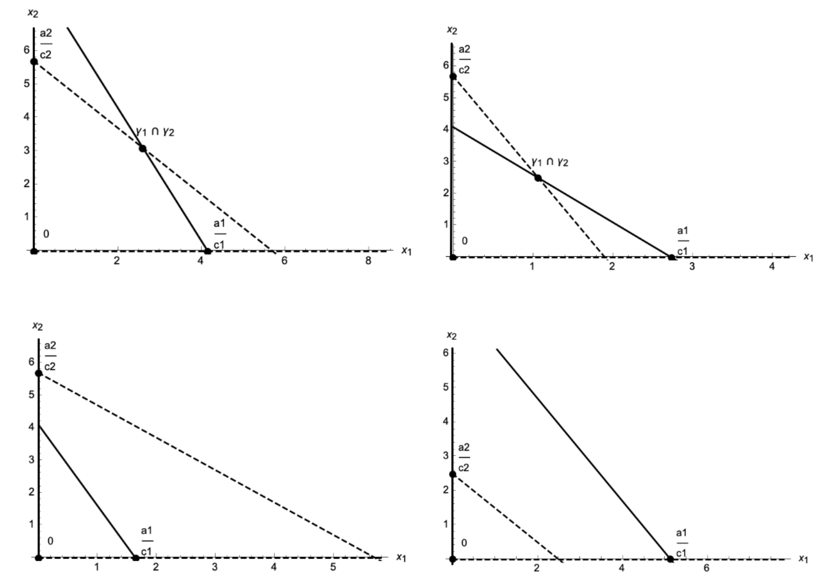

Рис. 1. Расположение сепаратрис системы в зависимости от параметров.

3. Линеаризация системы в окрестности стационарных точкек

В общем виде линеаризованную систему в окрестностях всех стационарных точек можно представить в виде матрицы Якоби следующего вида:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_{12}x_2 - 2c_1x_1 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - b_{21}x_1 - 2c_2x_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

3.1. Окрестность точки, соответствующей вымиранию обоих видов

Рассмотрим стационарное состояние $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. Подставим эти координаты в матрицу (4) и получим:

$$\mathbb{J}_I = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

По условию задачи коэфициенты a_1, a_2 строго положительные, поэтому корни $\lambda_1 = a_1,\ \lambda_2 = a_2$ также положительные. Таким образом, данная точка — неустойчивый узел.

3.2. Окрестность точки, соответствующей выживанию 1 вида

В окрестности точки, где $x_1 = \frac{a_1}{c_1},\ x_2 = 0$ матрица коэфициентов линеаризованной системы имеет вид:

$$\mathbb{J}_{II} = \begin{pmatrix} -a_1 & -\dfrac{a_1 b_{12}}{c_1} \\ 0 & \dfrac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Корни соответствующего характеристического уравнения: $\lambda_1 = -a_1,\ \lambda_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1}$. Корень λ_1 отрицательный для $\forall a_1 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим корень λ_2 поподробнее:

- $a_2 c_1 < a_1 b_{21} \Rightarrow \lambda_2 < 0$, и данная точка является устойчивый узлом;
- $a_2 c_1 > a_1 b_{21} \Rightarrow \lambda_2 > 0$ — седло.

3.3. Окрестность точки, соответствующей выживанию 2 вида

Рассмотрим следующее стационарное состояние, при котором $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a_2}{c_2}$:

$$\mathbb{J}_{III} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} & 0 \\ -\dfrac{a_2 b_{21}}{c_2} & -a_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тип этой точки определятся таким же образом, что и в предыдущем случае. Корень $\lambda_2 = -a_2$ всегда отрицательный. Корень λ_1:

- $a_1c_2 < a_2b_{12} \Rightarrow \lambda_1 < 0$, то есть данная точка — устойчивый узел;
- $a_1c_2 > a_2b_{12} \Rightarrow \lambda_1 > 0$ — седло.

3.4. Окрестность точки, соответствующей выживанию обоих видов

Наконец, рассмотрим последнее стационарное состояние:

$$\mathbb{J}_{IV} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1(a_1c_2 - a_2b_{12})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} & \dfrac{b_{12}(a_1c_2 - a_2b_{12})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} \\ \dfrac{b_{21}(a_2c_1 - a_1b_{21})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} & \dfrac{c_2(a_2c_1 - a_1b_{21})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Заключение

Имея экспериментально выведенные коэфициенты размножения, а также коэфициенты межвидовой и внутривидовой конкуренции, мы можем построить модель взаимодействия между особями двух видов и понять, способны ли они сосуществовать или же один из них вымрет. Анализ особых точек (иными словами — стационарных состояний) дает нам возможность построить график траекторий, чтобы определить, к какому из 4 стационарных состояний стремится система.