

# Дифференциальная геометрия

## ФН2-42Б, 2 курс, 4 семестр

### Домашнее задание №1

#### «Кривые и поверхности в пространстве» Вариант 2-23

#### Дано:

Поверхность задана параметрически уравнениями  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$   
Уравнение поверхности:

$$\vec{r}(u, v) = \{\cosh u \cos v, 5 \sinh u, \cosh u \sin v\}$$

Вид кривой на поверхности и координаты точек:

$$\gamma : u = v; P_1(1, 0, 0); P_2(-\cosh \pi, 5 \sinh \pi, 0)$$

#### Задачи:

1. Найти особые точки параметризованной поверхности. Составить уравнение касательной к поверхности в точках  $P_1$  и  $P_2$

Для того, чтобы вывести уравнение касательной плоскости к поверхности в точке, необходимо найти вектор нормали к поверхности в точке. Сначала нужно взять частные производные  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u$  и  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$ :

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ 5 \cosh u \\ \sinh u \sin v \end{pmatrix}; \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ 0 \\ \cosh u \cos v \end{pmatrix}$$

Векторное произведение  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  имеет вид:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh u \cos v & 5 \cosh u & \sinh u \sin v \\ -\cosh u \sin v & 0 & \cosh u \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(5 \cosh^2 u \cos u) + \vec{j}(\sinh u \cosh u \cos^2 v - \sinh u \cosh u \sin^2 v) + \vec{k}(5 \cosh^2 u \sin v)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 5 \cosh^2 u \cos v \\ -\sinh u \cosh u \\ 5 \cosh^2 u \sin v \end{pmatrix}$$

Сразу можно заметить, что  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$  ни при каких значениях  $u$  или  $v$ . Это означает, что все точки поверхности – регулярные.

Посчитаем норму векторного произведения  $|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|$ :

$$|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v| = \sqrt{25 \cosh^4 u + \sinh^2 u \cosh^2 u} = \cosh u \sqrt{25 \cosh^2 u + \sinh^2 u}$$

Таким образом, вектор нормали  $\vec{\mathbf{n}}$  имеет следующий вид:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v}{|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|} = \frac{1}{\sqrt{25 \cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} 5 \cosh u \cos v \\ -\sinh u \\ 5 \cosh u \sin v \end{pmatrix}$$

Выразим координаты точек  $P_1$  и  $P_2$  через  $u$  и  $v$ . Для этого приравняем координаты уравнения поверхности  $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$  к координатам этих точек:

$$P_1 : \begin{cases} \cosh u \cos v = 1 \\ 5 \sinh u = 0 \\ \cosh u \sin v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} \cosh u \cos v = -\cosh \pi \\ 5 \sinh u = 5 \sinh \pi \\ \cosh u \sin v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \pi \\ v_2 = \pi \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить нормали касательных плоскостей в точках  $P_1$  и  $P_2$  соответственно.

В точке  $P_1$  вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда касательная плоскость имеет вид:

$$T_{P_1} : x - 1 = 0$$

В точке  $P_2$  вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{25 \cosh^2 \pi + \sinh^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5 \cosh \pi \\ -\sinh \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

и касательная плоскость имеет вид:

$$T_{P_2} : 5 \cosh \pi \cdot x + \sinh \pi \cdot y + 5 = 0$$

**Ответ:** Особых точек нет;

$$T_{P_1} : x - 1 = 0;$$

$$T_{P_2} : 5 \cosh \pi \cdot x + \sinh \pi \cdot y + 5 = 0.$$

2. Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров  $(u, v)$ . Составить уравнения координатных линий. Построить поверхность и координатную сеть на ней (с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica)

Уравнение поверхности, выраженное через  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = 5 \sinh u \\ z = \cosh u \sin v \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + z^2 - \frac{y^2}{25} = 1,$$

значит, данная поверхность – однополостный гиперболоид с осью вдоль  $OY$

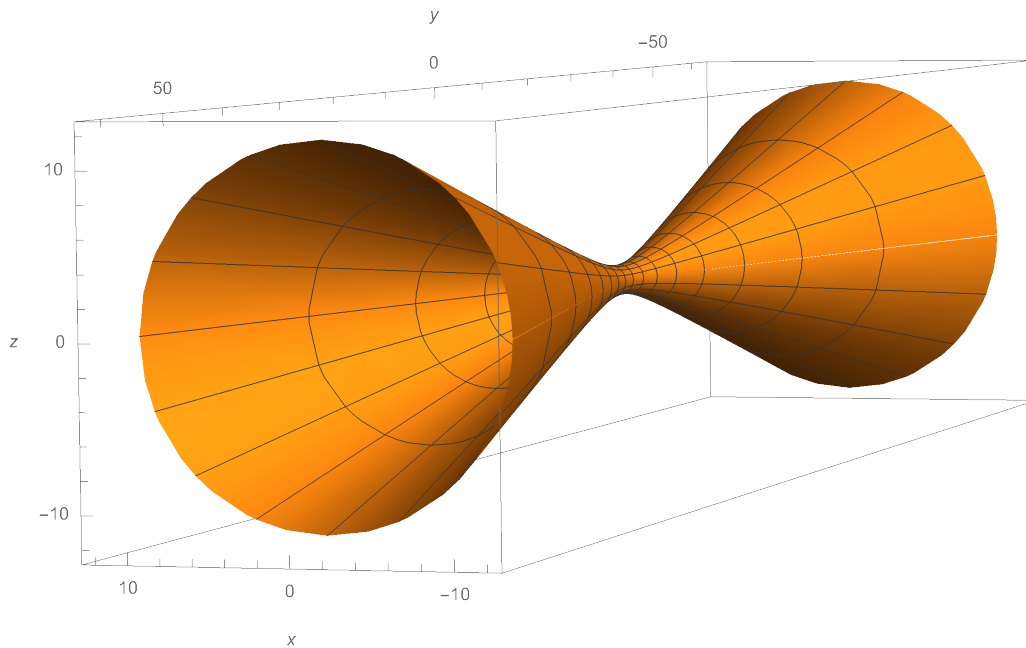


Рис. 1: Однополостный гиперболоид