

Дифференциальная геометрия
Домашнее задание № 1
«Кривые и поверхности в пространстве»
ФН2-42Б, 2 курс, 4 семестр
Арсений Токарев, Вариант 2-23

Дано

Поверхность S задана параметрически уравнениями:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \cos v \\ 5 \operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Уравнение кривой на поверхности:

$$\gamma: u = v. \quad (2)$$

Координаты точек:

$$P_1(1, 0, 0); \quad P_2(-\operatorname{ch} \pi, 5 \operatorname{sh} \pi, 0). \quad (3)$$

Задачи

Задача 1. Найти особые точки параметризированной поверхности. Составить уравнение касательной к поверхности в точках P_1 и P_2 .

Для того, чтобы вывести уравнение касательной плоскости к поверхности в точке, необходимо найти вектор нормали к поверхности в данной точке. Сначала нужно взять частные производные $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v$:

$$\mathbf{r}_u = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \cos v \\ 5 \operatorname{ch} u \\ \operatorname{sh} u \sin v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_v = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u \sin v \\ 0 \\ \operatorname{ch} u \cos v \end{pmatrix},$$

затем векторно их перемножить:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \operatorname{sh} u \cos v & 5 \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \sin v \\ -\operatorname{ch} u \sin v & 0 & \operatorname{ch} u \cos v \end{vmatrix} = \mathbf{i} (5 \operatorname{ch}^2 u \cos u) - \\ &- \mathbf{j} (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \cos^2 v + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin^2 v) + \mathbf{k} (5 \operatorname{ch}^2 u \sin v) = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \operatorname{ch}^2 u \cos v \\ -\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \\ 5 \operatorname{ch}^2 u \sin v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Координаты вектора (4) не обращаются в 0 одновременно, поэтому $\forall u, v \in \mathbb{R}$: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$. Это означает, что все точки поверхности регулярные.

Посчитаем норму векторного произведения $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$:

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{25 \operatorname{ch}^4 u + \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{ch} u \sqrt{25 \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u},$$

таким образом, вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}$ будет равен:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u}} \begin{pmatrix} 5 \operatorname{ch} u \cos v \\ -\operatorname{sh} u \\ 5 \operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Выразим координаты точек P_1 и P_2 через u и v . Для этого подставим их декартовы координаты в уравнение поверхности (1):

$$\begin{aligned} P_1: \begin{cases} \operatorname{ch} u \cos v = 1, \\ 5 \operatorname{sh} u = 0, \\ \operatorname{ch} u \sin v = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0 \end{cases} \\ P_2: \begin{cases} \operatorname{ch} u \cos v = -\operatorname{ch} \pi, \\ 5 \operatorname{sh} u = 5 \operatorname{sh} \pi, \\ \operatorname{ch} u \sin v = 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \pi, \\ v_2 = \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь можно найти нормали касательных плоскостей в точках P_1 и P_2 соответственно. В точке P_1 вектор единичной нормали (5) равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда уравнение касательной плоскости $T|_{P_1}$ имеет вид:

$$x - 1 = 0.$$

В точке P_2 вектор единичной нормали (5) равен:

$$\vec{n}|_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5 \operatorname{ch} \pi \\ -\operatorname{sh} \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

и уравнение касательной плоскости $T|_{P_2}$ выглядит следующим образом:

$$5 \operatorname{ch} \pi \cdot x + \operatorname{sh} \pi \cdot y + 5 = 0.$$

Ответ: особых точек нет, $T|_{P_1}: x - 1 = 0$, $T|_{P_2}: 5 \operatorname{ch} \pi \cdot x + \operatorname{sh} \pi \cdot y + 5 = 0$.

Задача 2. Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров (u, v) . Составить уравнения координатных линий. Построить поверхность и координатную сеть на ней (с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica).

Уравнение поверхности, выраженное через x, y, z :

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \cos v, \\ y = 5 \operatorname{sh} u, \\ z = \operatorname{ch} u \sin v \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + z^2 - \frac{y^2}{25} = 1,$$

значит, данная поверхность — однополостный гиперболоид (рис. 1).

Рассмотрим координатные линии данной поверхности. При $u_0 = \operatorname{const}$ получаем:

$$x^2 + z^2 = R = \sqrt{1 + \frac{y^2}{25}} = \operatorname{ch} u_0 = \operatorname{const},$$

т.е. уравнения окружностей с радиусами $R = \operatorname{ch} u_0$. А при $v_0 = \operatorname{const}$ получаем семейство гипербол.

Ответ: однополостный гиперболоид, (u_0, v) — окружности, (u, v_0) — гиперболы.

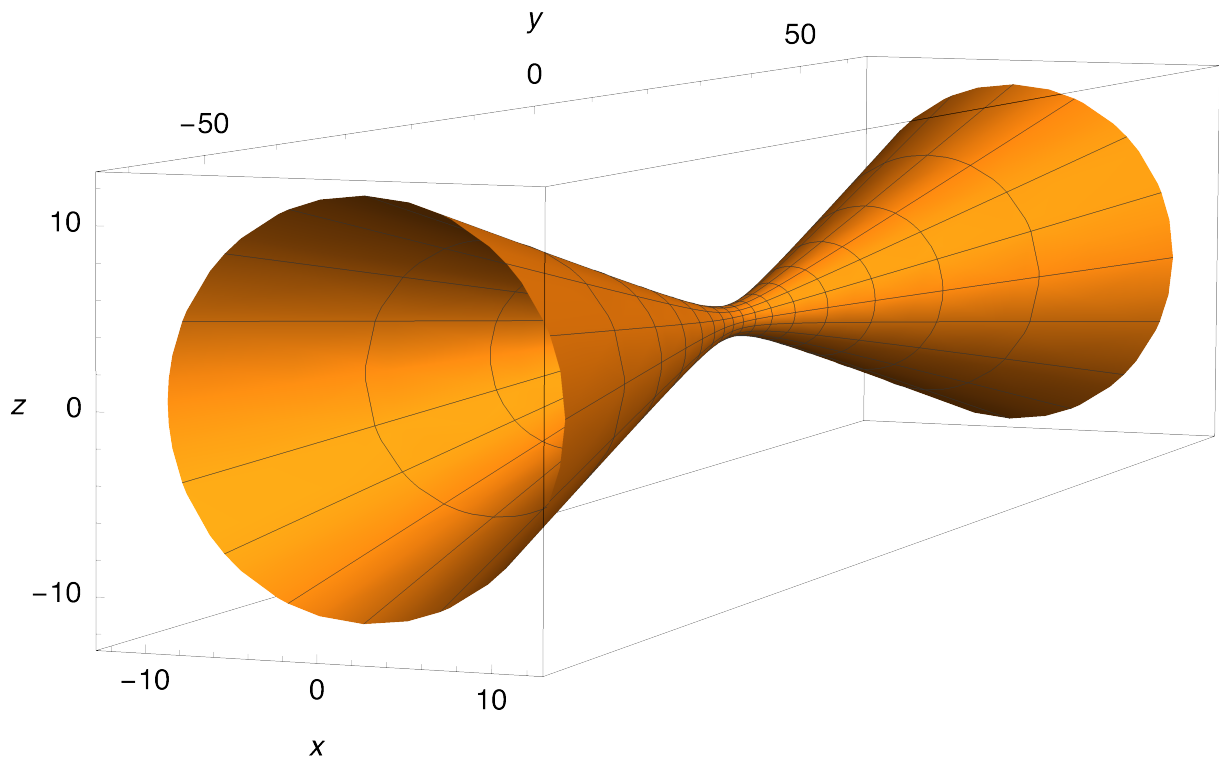


Рис. 1. Однополостный гиперболоид

Задача 3. Вычислить первую квадратичную форму поверхности. Вычислить угол между кривыми $l_1: u = v^2$ и $l_2: u = v$ в точке их пересечения.

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(u, v) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) = \operatorname{sh}^2 u + 25 \operatorname{ch}^2 u,$$

$$M(u, v) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0,$$

$$G(u, v) = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) = \operatorname{ch}^2 u,$$

значит, матрица первой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{G}(u, v) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2 u + 25 \operatorname{ch}^2 u & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Угол между кривыми — это угол между векторами скоростей этих кривых в точке их пересечения. Его можно вычислить по следующей формуле:

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \mathbf{x}_2}{\sqrt{(\mathbf{x}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \mathbf{x}_1} \cdot \sqrt{(\mathbf{x}_2)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \mathbf{x}_2}}, \quad \text{а почему } \mathbf{x}_i \text{ печатает } \mathbf{x}?$$

Для нахождения точек пересечения и для вычисления векторов скоростей параметризуем кривые l_1 и l_2 :

$$l_1: u = v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = t^2, \\ v_1 = t \end{cases}$$

$$l_2: u = v \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = t, \\ v_2 = t \end{cases}$$

теперь найдем точки их пересечения:

$$\begin{cases} t^2 = t, \\ t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Далее вычислим векторы скоростей кривых l_1 и l_2 в произвольной точке t :

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $t = t_1 = 0$, тогда:

$$\mathbb{G}|_{t_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2(t_1) = \mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а значит угол между кривыми в точке t_1 равен:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{26} \Rightarrow \alpha_1 = \arccos \frac{1}{26} \approx 1.34^\circ.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $t = t_2 = 1$:

$$\mathbb{G}|_{t_2} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2 1 + 25 \operatorname{ch}^2 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1(t_2) = \mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и угол между кривыми в точке t_2 равен:

$$\cos \alpha_2 \approx \frac{124.198}{246.015 \cdot 63.2896} \Rightarrow \alpha_2 \approx 0.097^\circ.$$

Ответ: $I = (\operatorname{sh}^2 u + 25 \operatorname{ch}^2 u) du^2 + (\operatorname{ch}^2 u) dv^2$, $\alpha_1 \approx 1.34^\circ$, $\alpha_2 \approx 0.097^\circ$.

Задача 4. Вычислить вторую квадратичную форму поверхности. Определить типы точек поверхности.

$$\mathbf{r}_{uu} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \cos v \\ 5 \operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{uv} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} u \sin v \\ 0 \\ \operatorname{sh} u \cos v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{vv} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u \cos v \\ 0 \\ -\operatorname{ch} u \sin v \end{pmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = \frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}},$$

$$M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = 0,$$

$$L = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = -\frac{5 \operatorname{ch}^2 u}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}},$$

то есть матрица второй квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{B} = \frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а значит все точки поверхности гиперболические.

Ответ: $II = \left(\frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}} \right) du^2 - \left(\frac{5 \operatorname{ch}^2 u}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}} \right) dv^2$, все точки поверхности гиперболические.

Задача 5. Найти главные направления и главные кривизны в точках P_1, P_2 . Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности в этих точках.

Найдем главные кривизны и главные направления в точке P_1 :

$$\mathbb{B}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbb{B}|_{P_1} - k \cdot \mathbb{G}|_{P_1}) = (k + 1) \left(k - \frac{1}{25} \right).$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_2 = \frac{1}{25}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем главные кривизны и главные направления в точке P_2 :

$$\mathbb{B}|_{P_2} = \frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 \pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}|_{P_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi} & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 \pi \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbb{B}|_{P_2} - k \cdot \mathbb{G}|_{P_2}) = \left(k - \frac{5}{(25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(k + \frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}} \right).$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_3 = \frac{5}{(25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi)^{\frac{3}{2}}}$:

$$\mathbf{x}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_4 = -\frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}}$:

$$\mathbf{x}_4 = c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, можно вычислить средние и гауссовы кривизны в точках P_1, P_2 :

$$K_{P_1} = k_1 \cdot k_2 = -0.04, \quad K_{P_2} = k_3 \cdot k_4 = -\frac{5}{(25 \operatorname{ch}^2 \pi + \sin^2 \pi)^2},$$

$$H_{P_1} = \frac{k_1 + k_2}{2} = -0.48, \quad H_{P_2} = \frac{k_3 + k_4}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1 - (25 \operatorname{ch}^2 \pi + \sin^2 \pi)^2}{(25 \operatorname{ch}^2 \pi + \sin^2 \pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Задача 6. Составить уравнения линий кривизны, асимптотических и геодезических линий для рассматриваемой поверхности. Привести примеры решения этих уравнений

Первое семейство линий кривизны:

$$\begin{cases} \dot{u} = 1, \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = t + C_1, \\ v = C_2, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t + C_1) \cos C_2 \\ 5 \operatorname{sh}(t + C_1) \\ \operatorname{ch}(t + C_1) \sin C_2 \end{pmatrix}.$$

Второе семейство линий кривизны:

$$\begin{cases} \dot{u} = 0, \\ \dot{v} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = C_3, \\ v = t + C_4, \end{cases} \quad C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(C_3) \cos(t + C_4) \\ 5 \operatorname{sh}(C_3) \\ \operatorname{ch}(C_3) \sin(t + C_4) \end{pmatrix}.$$

Асимптотические линии:

$$\frac{5}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u}} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\dot{u}^2 - \dot{v}^2 \operatorname{ch}^2 u = 0 \Rightarrow du = \pm \operatorname{ch} u dv,$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{ch} u} = \pm \int dv = \pm v + C, C \in \mathbb{R},$$

$$2 \arctan e^u = \pm v + C, C \in \mathbb{R}.$$

Геодезические линии при $u = u(v)$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u(v) \cos v \\ 5 \operatorname{sh} u(v) \\ \operatorname{ch} u(v) \sin v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \operatorname{ch} u(v) \cos v \\ -\operatorname{sh} u(v) \\ 5 \operatorname{ch} u(v) \sin v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} u'(v) \operatorname{sh} u(v) \cos v - \operatorname{ch} u(v) \sin v \\ 5u'(v) \operatorname{ch} u \\ u'(v) \operatorname{sh} u(v) \sin v + \operatorname{ch} u(v) \cos v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}'' = \begin{pmatrix} u''(v) \operatorname{sh} u(v) \cos v + (u'(v))^2 \operatorname{ch} u(v) \cos v - 2u'(v) \operatorname{sh} u(v) \sin v + \operatorname{ch} u(v) \cos v \\ 5(u''(v) \operatorname{ch} u + (u'(v))^2 \operatorname{sh} u) \\ u''(v) \operatorname{sh} u(v) \sin v + (u'(v))^2 \operatorname{ch} u(v) \cos v + 2u'(v) \operatorname{sh} u(v) \cos v - \operatorname{ch} u(v) \sin v \end{pmatrix},$$

то есть смешанное произведение полученных векторов $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{n})$ не равно 0 ни при каких значениях v , поэтому можно сделать вывод, что геодезических линий нет.

Задача 7. Вычислить кривизну кривой γ в точках P_1, P_2 . В одной из точек построить реперь Френе.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \cos u \\ 5 \operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u \sin u \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \cos u - \operatorname{ch} u \sin u \\ 5 \operatorname{ch} u \\ \operatorname{sh} u \sin u + \operatorname{ch} u \cos u \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -2 \operatorname{sh} u \sin u \\ 5 \operatorname{sh} u \\ 2 \operatorname{sh} u \cos u \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \operatorname{sh} u \cos u - \operatorname{ch} u \sin u & 5 \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \sin u + \operatorname{ch} u \cos u \\ -2 \operatorname{sh} u \sin u & 5 \operatorname{sh} u & 2 \operatorname{sh} u \cos u \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \cos u - 5 \operatorname{sh}^2 u \sin u \\ -2 \operatorname{sh}^2 u \\ 5 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin u - 5 \operatorname{sh}^2 u \cos u \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{25 \operatorname{sh}^2 u + 54 \operatorname{sh}^4 u}, \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{26 + 27 \operatorname{sh}^2 u}.$$

Вычислим кривизны в точках P_1, P_2 :

$$k|_{P_1} = \sqrt{\frac{25 \operatorname{sh}^2 0 + 54 \operatorname{sh}^4 0}{26 + 27 \operatorname{sh}^2 0}} = 0,$$

$$k|_{P_2} = \sqrt{\frac{25 \operatorname{sh}^2 \pi + 54 \operatorname{sh}^4 \pi}{26 + 27 \operatorname{sh}^2 \pi}} \approx 0.0045.$$

Построим репер Френе в точке P_2 (в точке P_1 репер Френе не определен, потому что кривизна в этой точке $= 0$):

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{26 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} \pi \\ 5 \operatorname{ch} \pi \\ -\operatorname{ch} \pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{25 \operatorname{ch}^2 \pi + 29 \operatorname{sh}^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5 \operatorname{ch} \pi \\ -2 \operatorname{sh} \pi \\ -5 \operatorname{sh} \pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{(26 \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \pi) \cdot (25 \operatorname{ch}^2 \pi + 29 \operatorname{sh}^2 \pi)}} \begin{pmatrix} 27 \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi \\ -1 \\ -25 \operatorname{ch}^2 \pi - 2 \operatorname{sh}^2 \pi \end{pmatrix}.$$