Дифференциальная геометрия
Домашнее задание №1
«Кривые и поверхности в пространстве»
ФН2-42Б, 2 курс, 4 семестр
Арсений Токарев, Вариант 2-23

Дано:

Поверхность задана параметрически уравнениями $S\colon \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u,v),\ u,v \in \mathbb{R}$.

Уравнение поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{\cosh u \cos v,\ 5\sinh u,\ \cosh u \sin v\}.$$

Вид кривой на поверхности и координаты точек:

$$\gamma\colon u = v,\ P_1(1,0,0),\ P_2(-\cosh\pi, 5\sinh\pi, 0).$$

Задачи:

Задача 1. Найти особые точки параметризированной поверхности. Составить уравнение касательной к поверхности в точках P_1 и P_2.

Для того, чтобы вывести уравнение касательной плоскости к поверхности в точке, необходимо найти вектор к поверхности в данной точке. Сначала нужно взять частные производные $\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u} = \vec{\mathbf{r}}_u$ и $\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial v} = \vec{\mathbf{r}}_v$:

$$\vec{\mathbf{r}}_u = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ 5\cosh u \\ \sinh u \sin v \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{r}}_v = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ 0 \\ \cosh u \cos v \end{pmatrix},$$

затем векторно их перемножить:

$$\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh u \cos v & 5\cosh u & \sinh u \sin v \\ -\cosh u \sin v & 0 & \cosh u \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}\,(5\cosh^2 u \cos u) + \vec{\mathbf{j}}\,(\sinh u \cosh u \cos^2 - \sinh u \cosh u \sin^2 v) + \vec{\mathbf{k}}\,(5\cosh^2 u \sin v)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v = \begin{pmatrix} 5\cosh^2 u \cos v \\ -\sinh u \cosh u \\ 5\cosh^2 u \sin v \end{pmatrix}.$$

Сразу можно заметить, что $\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$ ни при каких значениях u или v. Это означает, что все точки поверхности – регулярные.

Посчитаем норму векторного призведения $|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|$:

$$|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v| = \sqrt{25\cosh^4 u + \sinh^2 y \cosh^2 u} = \cosh u \sqrt{25\cosh^2 u + \sinh^2 u}\,.$$

Таким образом, вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v}{|\vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v|} = \frac{1}{\sqrt{25\cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} 5\cosh u \cos v \\ -\sinh u \\ 5\cosh u \sin v \end{pmatrix}.$$

Выразим координаты точек P_1 и P_2 через u и v. Для этого приравняем координаты уравнения поверхности $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$ к координатам этих точек:

$$P_1\colon \begin{cases} \cosh u \cos v = 1, \\ 5\sinh u = 0, \\ \cosh u \sin v = 0. \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0. \end{cases}$$

$$P_2\colon \begin{cases} \cosh u \cos v = -\cosh \pi, \\ 5\sinh u = 5\sinh \pi, \\ \cosh u \sin v = 0. \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_2 = \pi, \\ v_2 = \pi. \end{cases}$$

Теперь можно найти нормали касательных плоскостей в точках P_1 и P_2 соответсвенно. В точке P_1 вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда касательная плоскость имеет вид:

$$T|_{P_1}\colon x - 1 = 0.$$

В точке P_2 вектор единичной нормали равен:

$$\vec{\mathbf{n}}|_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{25\cosh^2 \pi + \sinh^2 \pi}} \begin{pmatrix} -5\cosh \pi \\ -\sinh \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

и касательная плоскость имеет вид:

$$T|_{P_2}:\, 5\cosh\pi\cdot x + \sinh\pi\cdot y + 5 = 0.$$

Ответ: Особых точек нет,
$T|_{P_1}:\, x - 1 = 0,$
$T|_{P_2}:\, 5\cosh\pi\cdot x + \sinh\pi\cdot y + 5 = 0.$

Задача 2. Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров (u, v). Составить уравнения координатных линий. Построить поверхность и координатную сеть на ней (с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica)

Уравнение поверхности, выраженное через x, y, z:

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v, \\ y = 5\sinh u, \\ z = \cosh u \sin v, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + z^2 - \frac{y^2}{25} = 1,$$

значит, данная поверхность – однополостный гиперболоид с осью вдоль OY (рис. 1).

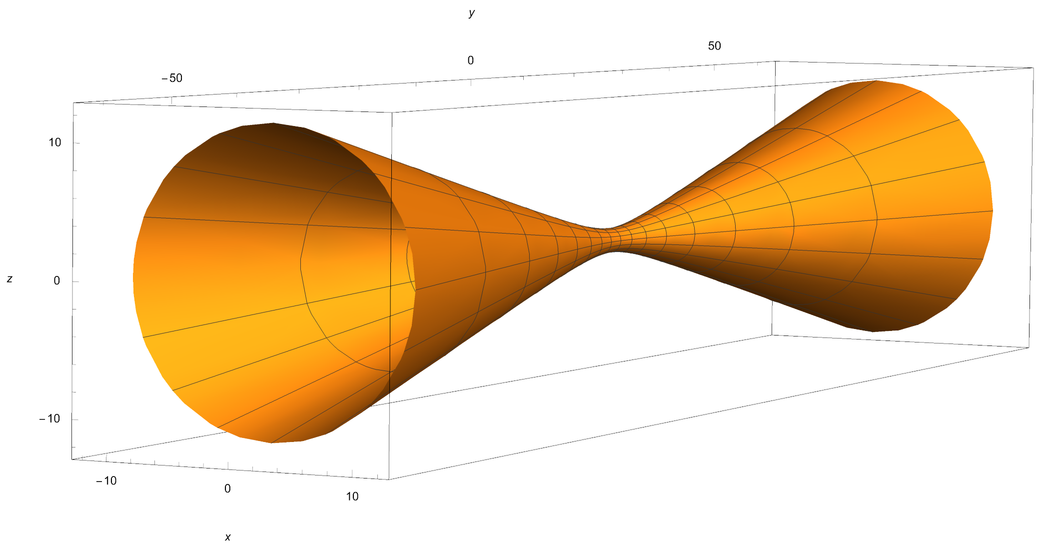

Рис. 1: Однополостный гиперболоид

Рассмотрим координатные линии данной поверхности. При $u_0 = const$ получаем:

$$x^2 + z^2 = const,\; const = R = \sqrt{1 + \frac{y^2}{25}} = \cosh u_0,$$

то есть уравнения окружностей с радиусами $R = \cosh u_0$. А при $v_0 = const$ получаем семейство гипербол.

Ответ: Однополостный гиперболоид,
(u_0, v) – окружности,
(u, v_0) – гиперболы.

Задача 3. Вычислить первую квадратичную форму поверхности. Вычислить угол между кривыми $l_1\colon u = v^2$ и $l_2\colon u = v$ в точке их пересечения.

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(u,v) = (\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_u) = \sinh^2 u + 25\cosh^2 u,$$

$$M(u,v) = (\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v) = 0,$$

$$G(u,v) = (\vec{\mathbf{r}}_v, \vec{\mathbf{r}}_v) = \cosh^2 u,$$

значит, матрица первой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{G}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh^2 u + 25\cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}.$$

Угол между кривыми – это угол между векторами их скоростей в точке их пересечения. Его можно вычислить по следующей формуле:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{\xi}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \vec{\xi}_2}{\sqrt{(\vec{\xi}_1)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \vec{\xi}_1} \cdot \sqrt{(\vec{\xi}_2)^T \cdot \mathbb{G} \cdot \vec{\xi}_2}}$$

Для нахождения точек пересечения и для вычисления векторов скоростей параметризуем кривые l_1 и l_2:

$$l_1\colon u = v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1 = t^2, \\ v_1 = t. \end{cases}$$

$$l_2\colon u = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_2 = t, \\ v_2 = t, \end{cases}$$

теперь найдем их точки пересечения:

$$\begin{cases} t^2 = t, \\ t = t. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = 1. \end{cases}$$

Далее вычислим векторы скоростей кривых l_1 и l_2 в произвольной точке t:

$$\vec{\xi}_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $t = t_1 = 0$, тогда:

$$\mathbb{G}|_{t_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_1(t_1) = \vec{\xi}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_2(t_1) = \vec{\xi}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а значит угол между кривыми в точке t_1 равен:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{26} \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\frac{1}{26} \approx 1.34^\circ$$

Теперь рассмотрим случай. когда $t = t_2 = 1$, следовательно:

$$\mathbb{G}|_{t_2} = \begin{pmatrix} \sinh^2 1 + 25\cosh^2 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_1(t_2) = \vec{\xi}_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_2(t_2) = \vec{\xi}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и угол между кривыми в точке t_2 равен:

$$\cos\alpha_2 \approx \frac{124.198}{246.015 \cdot 63.2896} \Rightarrow \alpha_2 \approx 0.097^\circ$$

Ответ: $I = (\sinh^2 u + 25\cosh^2 u)du^2 + (\cosh^2 u)dv^2,$
$\alpha_1 \approx 1.34^\circ,$
$\alpha_2 \approx 0.097^\circ.$

Задача 4. Вычислить вторую квадратичную форму поверхности. Определить типы точек поверхности.

$$\mathbf{\vec{r}}_{uu} = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ 5\sinh u \\ \cosh u \sin v \end{pmatrix}, \ \mathbf{\vec{r}}_{uv} = \begin{pmatrix} -\sinh u \sin v \\ 0 \\ \sinh u \cos v \end{pmatrix}, \ \mathbf{\vec{r}}_{vv} = \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ 0 \\ -\cosh u \sin v \end{pmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = (\vec{\mathbf{r}}_{uu}, \vec{\mathbf{n}}) = \frac{5}{\sqrt{25\cosh^2 + \sinh^2}},$$

$$M = (\vec{\mathbf{r}}_{uv}, \vec{\mathbf{n}}) = 0,$$

$$L = (\vec{\mathbf{r}}_{vv}, \vec{\mathbf{n}}) = -\frac{5\cosh^2 u}{\sqrt{25\cosh^2 + \sinh^2}},$$

то есть матрица второй квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{B} = \frac{5}{\sqrt{25\cosh^2 + \sinh^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cosh^2 u \end{pmatrix},$$

а значит все точки поверхности – гиперболические.

Ответ: $II = \left(\frac{5}{\sqrt{25\cosh^2 + \sinh^2}} \right) du^2 - \left(\frac{5\cosh^2 u}{\sqrt{25\cosh^2 + \sinh^2}} \right) dv^2,$

Все точки поверхности – гиперболические.

Задача 5. Найти главные направления и главные кривизны в точках P_1, P_2. Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности в этих точках.

Найдем главные кривизны и главные направления в точке P_1:

$$\mathbb{B}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}|_{P_1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbb{B}|_{P_1} - k \cdot \mathbb{G}|_{P_1}) = (k+1)(k - \tfrac{1}{25}).$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\xi}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_2 = \frac{1}{25}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\xi}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем главные кривизны и главные направления в точке P_2:

$$\mathbb{B}|_{P_2} = \frac{5}{\sqrt{25\cosh^2\pi + \sinh^2\pi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cosh^2\pi \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}|_{P_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{25\cosh^2\pi + \sinh^2\pi} & 0 \\ 0 & -\cosh^2\pi \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbb{B}|_{P_2} - k \cdot \mathbb{G}|_{P_2}) = \left(k - \frac{5}{(25\cosh^2\pi + \sinh^2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(k + \frac{5}{\sqrt{25\cosh^2\pi + \sinh^2\pi}}\right).$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_3 = \dfrac{5}{(25\cosh^2\pi + \sinh^2\pi)^{\frac{3}{2}}}$:

$$\vec{\xi}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Главное направление, соответствующее главной кривизне $k_4 = -\dfrac{5}{\sqrt{25\cosh^2\pi + \sinh^2\pi}}$:

$$\vec{\xi}_4 = c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, можно вычислить средние и гауссовы кривизны в точках P_1, P_2:

$$K_{P_1} = k_1 \cdot k_2 = -0.04,$$

$$K_{P_2} = k_3 \cdot k_4 = -\frac{5}{(25\cosh^2\pi + \sin^2\pi)^2},$$

$$H_{P_1} = \frac{k_1 + k_2}{2} = -0.48,$$

$$H_{P_2} = \frac{k_3 + k_4}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1 - (25\cosh^2\pi + \sin^2\pi)^2}{(25\cosh^2\pi + \sin^2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Задача 6. Составить уравнения линий кривизны, асимптотических и геодезических линий для рассматриваемой поверхности. Привести примеры решения этих уравнений

Первое семейство линий кривизны:

$$\begin{cases} \dot{u} = 1, \\ \dot{v} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = t + C_1, \\ v = C_2, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t + C_1) \cos C_2 F \\ 5 \sinh(t + C_1) \\ \cosh(t + C_1) \sin C_2 \end{pmatrix}.$$

Второе семейство линий кривизны:

$$\begin{cases} \dot{u} = 0, \\ \dot{v} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = C_3, \\ v = t + C_4, \end{cases} \quad C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cosh(C_3) \cos(t + C_4) \\ 5 \sinh(C_3) \\ \cosh(C_3) \sin(t + C_4) \end{pmatrix}.$$

Асимптотические линии:

$$\frac{5}{\sqrt{25 \cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cosh^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\dot{u}^2 - \dot{v}^2 \cosh^2 u = 0 \;\Rightarrow\; du = \pm \cosh u \, dv,$$

$$\int \frac{du}{\cosh u} = \pm \int dv = \pm v + C, C \in \mathbb{R},$$

$$2 \arctan e^u = \pm v + C, C \in \mathbb{R}.$$

Геодезические линии при $u = u(v)$:

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cosh u(v) \cos v \\ 5 \sinh u(v) \\ \cosh u(v) \sin v \end{pmatrix}, \; \vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 5 \cosh u(v) \cos v \\ - \sinh u(v) \\ 5 \cosh u(v) \sin v \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{r}}\,' = \begin{pmatrix} u'(v)\sinh u(v)\cos v - \cosh u(v)\sin v \\ 5u'(v)\cosh u \\ u'(v)\sinh u(v)\sin v + \cosh u(v)\cos v \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{r}}\,'' = \begin{pmatrix} u''(v)\sinh u(v)\cos v + (u'(v))^2\cosh u(v)\cos v - 2u'(v)\sinh u(v)\sin v + \cosh u(v)\cos v \\ 5(u''(v)\cosh u + (u'(v))^2\sinh u) \\ u''(v)\sinh u(v)\sin v + (u'(v))^2\cosh u(v)\cos v + 2u'(v)\sinh u(v)\cos v - \cosh u(v)\sin v \end{pmatrix},$$

то есть смешанное произведение полученный векторов (r', r'', n) не равно 0 ни при каких значениях v, поэтому можно сделать вывод, что геодезических линий нет.

Задача 7. Вычислить кривизну кривой γ в точках P_1, P_2. В одной из точек построить реперь Френе.

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cosh u\cos u \\ 5\sinh u \\ \cosh u\sin u \end{pmatrix},\ \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \begin{pmatrix} \sinh u\cos u - \cosh u\sin u \\ 5\cosh u \\ \sinh u\sin u + \cosh u\cos u \end{pmatrix},\ \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \begin{pmatrix} -2\sinh u\sin u \\ 5\sinh u \\ 2\sinh u\cos u \end{pmatrix}.$$

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh u\cos u - \cosh u\sin u & 5\cosh u & \sinh u\sin u + \cosh u\cos u \\ -2\sinh u\sin u & 5\sinh u & 2\sinh u\cos u \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\sinh u\cosh u\cos u - 5\sinh^2 u\sin u \\ -2\sinh^2 u \\ 5\sinh u\cosh u\sin u - 5\sinh^2 u\cos u \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}}| = \sqrt{25\sinh^2 u + 54\sinh^4 u},\ |\dot{\vec{\mathbf{r}}}| = \sqrt{26 + 27\sinh^2 u}.$$

Вычилсим кривизны в точках P_1, P_2:

$$k|_{P_1} = \sqrt{\frac{25\sinh^2 0 + 54\sinh^4 0}{26 + 27\sinh^2 0}} = 0,$$

$$k|_{P_2} = \sqrt{\frac{25\sinh^2 \pi + 54\sinh^4 \pi}{26 + 27\sinh^2 \pi}} \approx 0.0045.$$

Построим репер Френе в точке P_2 (в точке P_1 репер Френе не определен, потому что кривизна в этой точке $= 0$):

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{|\dot{\vec{\mathbf{r}}}|} = \frac{1}{\sqrt{26\cosh^2\pi + \sinh^2\pi}} \begin{pmatrix} -\sinh\pi \\ 5\cosh\pi \\ -\cosh\pi \end{pmatrix},$$

$$\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}}}{|\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}}|} = \frac{1}{\sqrt{25\cosh^2\pi + 29\sinh^2\pi}} \begin{pmatrix} -5\cosh\pi \\ -2\sinh\pi \\ -5\sinh\pi \end{pmatrix},$$

$$\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{(26\cosh^2\pi + \sinh^2\pi)\cdot(25\cosh^2\pi + 29\sinh^2\pi)}} \begin{pmatrix} 27\sinh\pi\cosh\pi \\ -1 \\ -25\cosh^2\pi - 2\sinh^2\pi \end{pmatrix}.$$