

Общероссийский математический портал

М. В. Попов, С. Д. Устюгов, Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, том 47, номер 12, 2055–2075

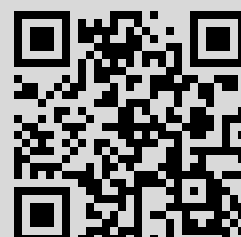
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 141.101.249.60

9 мая 2022 г., 17:16:59



УДК 519.633

## КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ<sup>1)</sup>

© 2007 г. М. В. Попов, С. Д. Устюгов

(125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМатем. РАН)

e-mail: mirage@fromru.com; ustyugs@keldysh.ru

Поступила в редакцию 30.05.2007 г.

Переработанный вариант 05.06.2007 г.

Предложен численный метод решения гиперболических систем уравнений, основанный на кусочно-параболической разностной аппроксимации. При построении численной схемы было использовано свойство сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристических кривых системы уравнений, что позволило исключить интерполяционную процедуру по четырехточечному шаблону, применяемую в стандартном кусочно-параболическом методе (PPM), и использовать информацию с предыдущего временного слоя при реконструкции решения внутри разностных ячеек. Это дало возможность точного представления разрывных решений без добавления излишней диссипации. Локальный шаблон также удобен при расчетах на адаптивных разностных сетках. Проведено сравнение нового метода с методом PPM на тестовых задачах для линейного уравнения переноса и невязкого уравнения Бюргерса. Сравнение проводилось на основании значений ошибок в различных нормах. Представлена методика решения системы уравнений газодинамики, и проведено ее тестирование на примере нескольких одномерных и двумерных задач. Библ. 15. Фиг. 18. Табл. 3.

**Ключевые слова:** численные методы газодинамики, локальный шаблон, инварианты Римана, численные методы, гиперболические системы уравнений PPM, PPML.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Кусочно-параболический метод численного решения гиперболических систем уравнений (PPM) впервые был предложен в [1] и хорошо зарекомендовал себя в вычислительной практике. Метод имеет третий порядок аппроксимации по пространственным переменным и второй порядок по времени. Для нахождения граничных точек при построении параболы в каждой разностной ячейке в методе PPM используется реконструкция переменных на расширенном четырехточечном шаблоне. Это приводит к излишней диссипации в схеме, например на контактном разрыве, и, как следствие, к необходимости применения специальной настраиваемой техники для укрупнения фронтов разрывов. Кроме того, возникают вычислительные проблемы при построении и использовании корректных граничных условий в расчетной области. Применение высокого порядка интерполяции на расширенном шаблоне обеспечивает высокое качество результатов на гладких решениях, но приводит к заметным осцилляциям на разрывах. Использование лимитеров улучшает эту ситуацию, однако тогда возникают проблемы в задачах с осцилляторными решениями, так как сильная диффузия, обусловленная действием лимитеров в окрестности крутых фронтов, приводит к затуханию амплитуды осцилляций. Другой недостаток использования лимитеров для сохранения профилей разрывов – это усиление коротких мод осцилляций, ведущих к нарастанию неустойчивости при наличии дисперсионных членов в исходных уравнениях.

В данной работе предложен кусочно-параболический метод на локальном шаблоне, в котором граничные точки каждой параболы определяются с использованием информации с предыдущего временного слоя по методу характеристик. Впервые подобная идея была использована при построении разностной схемы с линейной аппроксимацией величин внутри разностных ячеек в [2] и обсуждается в [3]. Такой подход дает возможность точного представления разрывных решений без добавления излишней диссипации, присущей схемам на расширенных шаблонах. Мы предлагаем сокращенную аббревиатуру модифицированного метода – PPML (Piecewise Parabolic Method on Local stencil).

<sup>1)</sup> Работа М.В. Попова по данной тематике была выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых МК-403.2007.2.

В современной практике многими авторами используется тестирование разностных схем на основе численных экспериментов и сравнения ошибок счета в разных нормах (см. [4]–[7]). Мы сравниваем методы РРМ и РРМЛ на примере численного решения задачи Коши для линейного уравнения переноса и нелинейного невязкого уравнения Бюргерса. Анализ проводится в соответствии с методикой, использованной в [5]–[7] при аналогичном исследовании различных разностных схем. Тестирование метода РРМ и его сравнение с другими разностными схемами было проведено в [7], где показано, что РРМ является одним из лучших современных методов расчета уравнений газодинамики.

В работе представлена численная схема на основе нового метода для моделирования газодинамических течений. В системе уравнений газовой динамики имеются три характеристики, вдоль которых сохраняются инварианты Римана, имеющие смысл амплитуд волн. Уравнения являются нелинейными, и для применения характеристического анализа при решении задачи необходимо определить локально в каждой разностной ячейке базис собственных векторов. В этом случае нелинейную задачу определения потоков величин на границах ячеек удастся линеаризовать в окрестности каждой границы ячейки, что позволяет использовать кусочно-параболическое распределение физических переменных.

## 2. КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД (РРМ)

Рассмотрим однородную одномерную разностную сетку с шагом  $h$  с определенной на ней искомой функцией  $q(x)$ . Значения  $q_i$  будем соотносить с центрами ячеек, значения на их границах будем обозначать через  $q_{i+1/2}$ . В методе РРМ предполагается, что внутри каждой разностной ячейки функцию  $q(x)$  можно аппроксимировать с помощью параболы (см. фиг. 1):

$$q(x) = q_i^L + \xi(\Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad (1)$$

где

$$\xi = (x - x_{i-1/2})h^{-1}, \quad \Delta q_i = q_i^R - q_i^L, \\ q_i^{(6)} = 6(q_i - (1/2)(q_i^L + q_i^R)).$$

Формула (1) удовлетворяет соотношению

$$q_i = h^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

В областях гладкой функции  $q(x)$  в отсутствие экстремумов значение функции на границе принадлежит интервалу

$$q_{i+1/2} \in [q_i \dots q_{i+1}]. \quad (2)$$

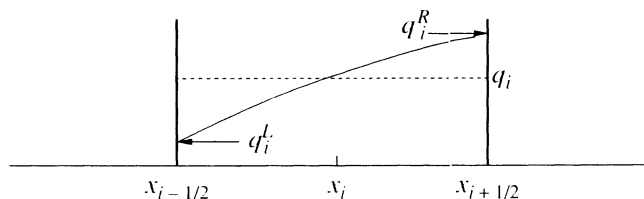
В этом случае справедливы выражения  $q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2}$  и  $q_i^L = q_{i-1}^R = q_{i-1/2}$ . Для вычисления  $q_{i+1/2}$  используется интерполяционная процедура четвертого порядка:

$$q_{i+1/2} = (1/2)(q_i + q_{i+1}) - (1/6)(\delta q_{i+1} - \delta q_i), \quad (3)$$

где

$$\delta q_i = (1/2)(q_{i+1} + q_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (2), значения  $\delta q_i$  в (3) необходи-



Фиг. 1.

мо заменить на

$$\delta_m q_i = \begin{cases} \min(|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|) \operatorname{sign}(\delta q_i), & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) > 0, \\ 0, & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения  $q(x)$  следует переопределять значения  $q_i^L$  и  $q_i^R$ . Если  $q_i$  является локальным максимумом или минимумом, то интерполяционная функция (1) должна быть константой, т.е.  $q_i^L = q_i^R = q_i$ . Если  $q_i$  лежит слишком близко к  $q_i^L$  или  $q_i^R$ , то парабола (1) может иметь экстремум внутри разностной ячейки (при этом  $|\Delta q_i| < |q_i^{(6)}|$ ). В этом случае  $q_i^L$  и  $q_i^R$  должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть экстремум к ее границам. Эти условия можно записать в виде

$$q_i^L = q_i, \quad q_i^R = q_i, \quad \text{если} \quad (q_i^L - q_i)(q_i - q_i^R) \leq 0, \quad (4)$$

и

$$\begin{aligned} q_i^L &= 3q_i - 2q_i^R, \quad \text{если} \quad \Delta q_i \cdot q_i^{(6)} > (\Delta q_i)^2, \\ q_i^R &= 3q_i - 2q_i^L, \quad \text{если} \quad \Delta q_i \cdot q_i^{(6)} < -(\Delta q_i)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

После того как функция  $q(x)$  определена, можно вычислить ее среднее значение на отрезке  $[x_{i+1/2} - y \dots x_{i+1/2}]$  (при  $y > 0$ ):

$$\bar{q}_{i+1/2}^L(y) = y^{-1} \int_{x_{i+1/2}-y}^{x_{i+1/2}} q(x) dx = q_i^R - (1/2)yh^{-1}(\Delta q_i - (1 - (2/3)yh^{-1})q_i^{(6)}). \quad (6)$$

Рассмотрим линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

При распаде разрыва на границе двух смежных ячеек в точке  $x_{i+1/2}$  возникает некоторое среднее состояние  $q^*(x_{i+1/2}, t)$ . Так как уравнение переноса имеет одну характеристику, которая определяется из условия  $dx/dt = a$ , то при  $a > 0$  решение в момент времени  $t = t_0 + \tau$  будет определяться усреднением по пространственному интервалу  $[x_{i+1/2} - a\tau \dots x_{i+1/2}]$ , т.е.  $q^*(x_{i+1/2}, t_0 + \tau) = q_{i+1/2}^L = \bar{q}_{i+1/2}^L(a\tau)$ . При  $a < 0$  определяющим интервалом (зоной влияния) будет  $[x_{i+1/2} \dots x_{i+1/2} + a\tau]$ . В этом случае имеем  $q^*(x_{i+1/2}, t_0 + \tau) = q_{i+1/2}^R = \bar{q}_{i+1/2}^R(-a\tau)$ , где

$$\bar{q}_{i+1/2}^R(y) = y^{-1} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}+y} q(x) dx = q_{i+1}^L + (1/2)yh^{-1}(\Delta q_{i+1} + (1 - (2/3)yh^{-1})q_{i+1}^{(6)}). \quad (8)$$

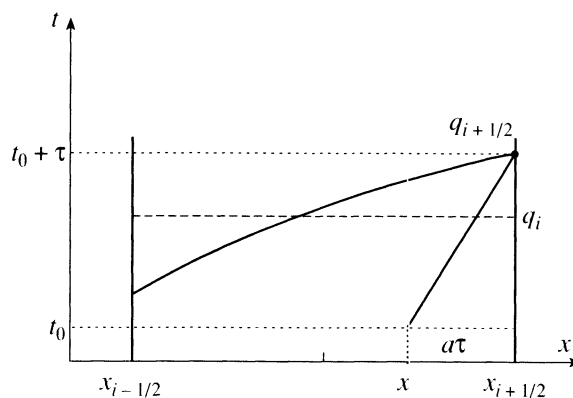
Здесь  $y > 0$ . Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(q^*(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Для удобства можно ввести функции  $a^+ = \max(a, 0) = (a + |a|)/2$  и  $a^- = \min(a, 0) = (a - |a|)/2$ , тогда имеем

$$F_{i+1/2} = a^+ q_{i+1/2}^L + a^- q_{i+1/2}^R. \quad (9)$$

Величины  $q_{i+1/2}^L$  при  $a < 0$  и  $q_{i+1/2}^R$  при  $a > 0$  можно взять любыми.



Фиг. 2.

### 3. КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ (PRML)

Недостатком метода PRM является использование интерполяционной процедуры (3) по четырехточечному шаблону. Ее применение приводит к сглаживанию разрывных решений  $q(x)$ , например на фронте ударной волны или на контактном разрыве. Вместо интерполяционной процедуры мы предлагаем определять значение  $q_{i+1/2}$ , например, на правой границе ячейки с помощью переноса значения на параболу с предыдущего шага по времени вдоль характеристики  $dx/dt = a$ . Или, другими словами, чтобы вычислить  $q_{i+1/2}$  в момент времени  $t = t_0 + \tau$  предлагается двигаться от точки  $x_{i+1/2}$  на правой границе ячейки со значением  $q_{i+1/2}$  вдоль характеристики до момента  $t = t_0$  (см. фиг. 2).

Следовательно, для  $a > 0$  имеем

$$q_{i+1/2}(t_0 + \tau) = q_i^R(t_0 + \tau) = q_i^L + \xi(\Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad (10)$$

где  $\xi = (x - x_{i-1/2})h^{-1} = (h - a\tau)h^{-1} = 1 - a\tau h^{-1}$ . Все величины в правой части (10) берутся с предыдущего шага по времени  $t = t_0$ . При  $a < 0$  значение  $q_{i+1/2}$  определяется по параболу в ячейке с номером  $i + 1$ :

$$q_{i+1/2}(t_0 + \tau) = q_{i+1}^L(t_0 + \tau) = q_{i+1}^L + \xi(\Delta q_{i+1} + q_{i+1}^{(6)}(1 - \xi)),$$

где  $\xi = -a\tau h^{-1}$ .

Таким образом, аппроксимирующая парабола строится в каждой ячейке. Далее, после проверки условий (4), (5) переходим к формулам (6) и (8) для вычисления  $\bar{q}_{i+1/2}^L(a\tau)$  при  $a > 0$  или  $\bar{q}_{i+1/2}^R(-a\tau)$  при  $a < 0$  и вычисляем потоки (9).

Предложенная модификация позволяет реализовать вычислительный алгоритм на локальном шаблоне, так как для определения граничных точек кусочной параболы при переходе к последующему шагу по времени не используется информация о решении в соседних ячейках.

### 4. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДОВ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Тестирование методов было проведено в соответствии с методикой, изложенной в [6]. Рассматривалась задача Коши для линейного уравнения переноса (7) с начальным условием  $q(x, 0)$ :  $q(x, 0) = 0$  при  $x \in (-\infty, l_1) \cup (l_2, +\infty)$  и  $q(x, 0) = q_0(x)$  при  $x \in [l_1, l_2]$ . В качестве  $q_0(x)$  использовались различные профили:

$$q_0(x) = \frac{1}{l_2 - l_1}(x - l_1) - \text{“левый треугольник”},$$

$$q_0(x) = 1 - \text{“прямоугольник”},$$

$$q_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l_2 - l_1}(x - l_1)\right) - \text{“косинус”},$$

$$q_0(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{11}-l_1)}(x-l_1)+1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2}{3(l_2-l_{22})}(x-l_2)+1, & x \in (l_{22}, l_2], \quad \text{— "зуб"}, \end{cases}$$

$$q_0(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{12}-l_1)}(x-l_1)+1, & x \in [l_1, l_{12}), \\ \frac{2}{3(l_2-l_{12})}(x-l_2)+1, & x \in [l_{12}, l_2], \quad \text{— "М"}, \end{cases}$$

$$q_0(x) = \frac{1}{l_2-l_1}(l_2-x) \text{ — "правый треугольник"}.$$

Численное решение уравнения (7) сравнивалось с точным, которое имеет вид

$$q_0(x) = \begin{cases} 0, & x-at < l_1, \\ u_0(x-at), & l_1 \leq x-at \leq l_2, \\ 0, & x-at > l_2. \end{cases}$$

Для этого вычислялись нормы в пространствах  $C, L_1, L_2, W_2^1$  на  $\Omega = (-\infty, +\infty) * [0, T]$  (интегрально по времени):

$$\|f\|_C = \max_{\Omega} |f|, \quad \|f\|_{L_1} = \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx dt, \quad \|f\|_{L_2} = \left( \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx dt \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1} = \left( \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_x')^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

В расчетах использовались следующие параметры:  $l = 520, l_1 = 10, l_2 = 30, l_{11} = 16\frac{2}{3}, l_{22} = 23\frac{1}{3}, l_{12} = 20, T = 400, h = 1, a = 1$ . При таких значениях параметров  $h$  и  $a$  число Куранта  $\sigma$  совпадает с шагом по времени  $\tau$ . За время  $T = 400$  профиль успевает пробежать 20 своих длин, что достаточно для выявления свойств используемой численной схемы.

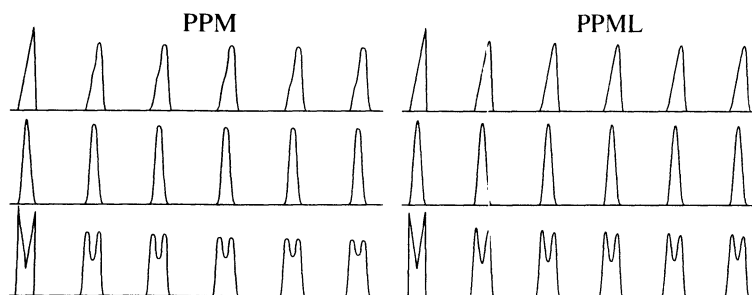
В [6] проводился анализ конечно-разностных схем. В таких схемах значения величин между узлами разностной сетки не определены и для вычисления норм необходимо использовать их конечно-разностные аналоги, заменяющие интегралы суммами по узлам сетки и шагам по времени. В кусочно-параболическом методе решение внутри разностных ячеек аппроксимируется параболой, поэтому пространственные интегралы в формулах для норм в пространствах  $L_1$  и  $L_2$  можно вычислять точно.

Для вычисления нормы в пространстве  $C$  каждая разностная ячейка с номером  $i$  дробилась на  $M = 200$  узлов (с номерами  $j$ ), в которых определялись значения  $q_{i,j}^k$  в момент времени  $k$ :

$$\|q\|_C = \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M, 0 \leq k \leq K} |q_{i,j}^k|.$$

Здесь  $N$  — число разностных ячеек,  $K$  — число шагов по времени ( $k = K$  соответствует  $t = T$ ).

При вычислении нормы в пространстве  $W_2^1$  следует иметь в виду, что во всех начальных профилях  $q_0(x)$  кроме "косинуса" имеются точки разрыва, в которых  $q_x' = \infty$ , поэтому вычисление



Фиг. 3.

точных интегралов теряет смысл. Вместо этого мы воспользовались конечно-разностным аналогом  $W_2^1$ , определяя норму, как в [6]:

$$\|q\|_{W_2^1} = \left( \tau h^{-1} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^K (q_{i-1}^k - q_i^k)^2 \right)^{1/2}.$$

В этом случае значения нормы в пространстве  $W_2^1$ , очевидно, зависят от того, насколько подробна разностная сетка, и стремятся к  $\infty$  при  $h \rightarrow 0$  для профилей, имеющих точки разрыва.

Для трех из шести форм начального профиля  $q_0(x)$  на фиг. 3 представлены результаты численного решения уравнения (7) на моменты времени  $t$  от 0 до  $T$ . Расчеты проводились при числе Куранта  $\sigma = 0.8$  и позволяют сравнить точность переноса профилей при использовании методов PPM и PPML. В табл. 1 и 2, соответственно, для методов PPM и PPML представлены значения ошибок интегрально по времени, которые представляют собой нормы разности между точным и численным решением. Видно, что численная схема на основе метода PPML позволяет получать лучшие решения для всех профилей за счет меньшей диссипации.

## 5. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДОВ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

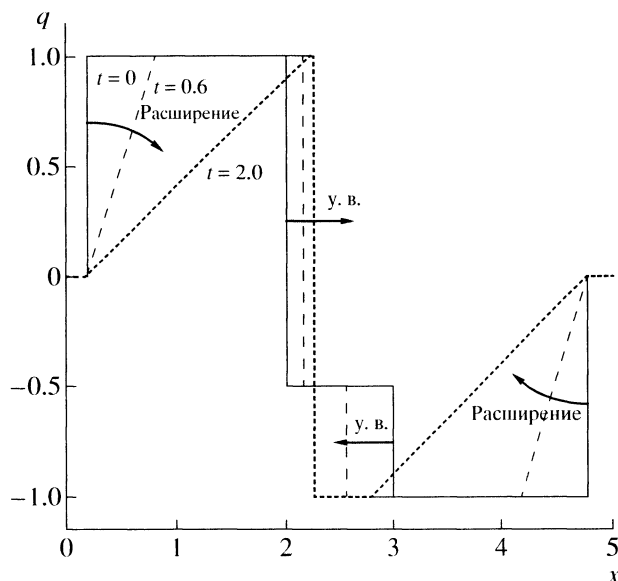
Мы также применили численные схемы на основе методов PPM и PPML при решении задачи Коши для невязкого уравнения Бюргерса, которое описывает возникновение и распространение

Таблица 1

PPM	Левый треугольник	Прямоуголь- ник	Косинус	Зуб	М	Правый треугольник
$C$	0.66672	0.64466	0.065666	0.68878	0.67407	0.66621
$L_1$	448.1290	714.6680	101.9580	1001.1000	998.2290	473.5950
$L_2$	10.8551	14.7612	1.7026	16.5501	15.8830	10.9834
$W_2^1$	15.5816	22.0077	1.5848	22.8209	22.4006	15.6465

Таблица 2

PPML	Левый треугольник	Прямоуголь- ник	Косинус	Зуб	М	Правый треугольник
$C$	0.61997	0.61360	0.040749	0.62633	0.62209	0.63704
$L_1$	363.3940	625.4640	39.4735	783.3780	790.9780	365.4070
$L_2$	9.9448	13.7838	0.79444	14.7433	14.4267	10.0368
$W_2^1$	14.9228	21.0576	0.81280	21.6119	21.3418	14.9330



Фиг. 4.

ударных волн (у. в.). Возникающие ударные волны аналогичны волнам в задачах газовой динамики. Уравнение Бюргерса имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$q_t + q q_x = 0. \quad (11)$$

Очевидно, характеристическая кривая уравнения (11) определяется из условия  $dx/dt = q$ . Так как характеристическая скорость  $q \neq \text{const}$ , то уравнение (11) является нелинейным. Скорость распространения в каждой точке, описываемой уравнением волны, может быть разной, и в результате возможно формирование разрывных решений и ударных волн. В некоторых случаях можно записать аналитическое решение уравнения (11) в виде

$$q(x, t) = q_0(x - qt), \quad (12)$$

где  $q(x, 0) = q_0(x)$  – начальный профиль. Решение (12) справедливо в случае гладкого начального профиля вплоть до момента появления ударных волн. После их появления решение записывается в виде кусочной функции.

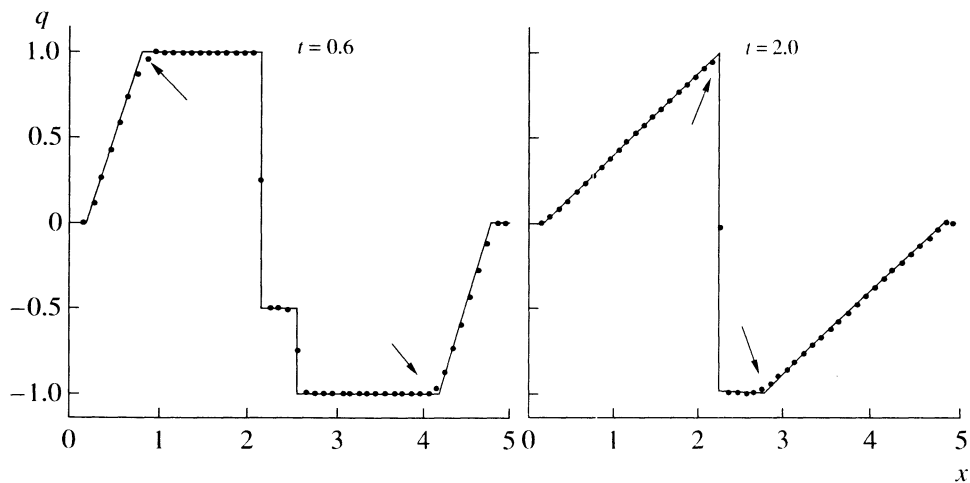
Так как поток в уравнении Бюргерса есть  $F = q^2/2$ , то вместо (9) будем иметь

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\bar{q}_{i+1/2}^L (a_{i+1/2} \tau))^2, & a_{i+1/2} \geq 0, \\ \frac{1}{2} (\bar{q}_{i+1/2}^R (-a_{i+1/2} \tau))^2, & a_{i+1/2} < 0, \end{cases}$$

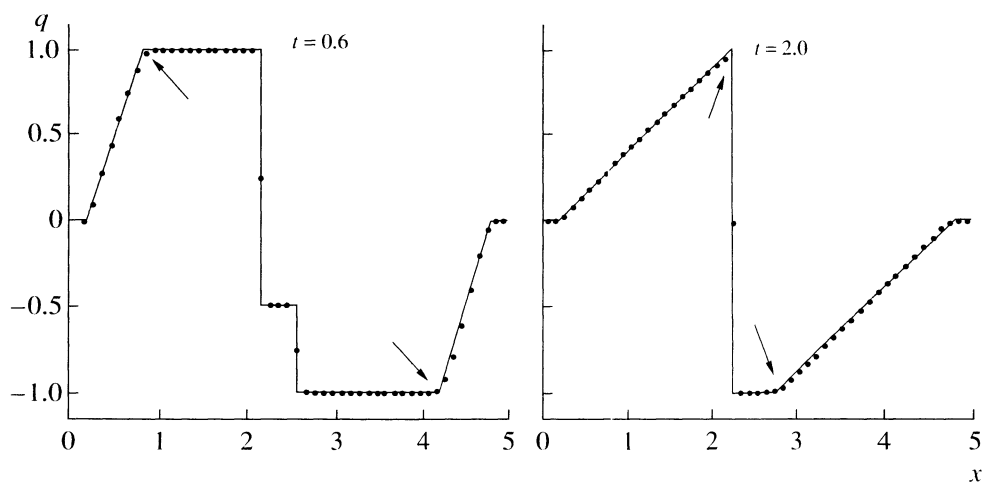
где  $\bar{q}_{i+1/2}^L(y)$  и  $\bar{q}_{i+1/2}^R(y)$  вычисляются по формулам (6) и (8) соответственно,  $a_{i+1/2}$  – скорость на границе смежных ячеек. Она вычисляется путем усреднения правого и левого граничных состояний:

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2} (q_i^R + q_{i+1}^L).$$





Фиг. 5.



Фиг. 6.

Здесь использовалась одна из тестовых задач (см. [7]), которая демонстрирует эволюцию разрывного профиля, предполагающего столкновение ударных волн и расширение областей разрежения.

Расчетная область была разбита на  $N = 50$  ячеек, вычисления проводились при  $\sigma = 0.4$ . Шаг по времени определялся из условия Куранта

$$\tau = \sigma \min_i (h/|q_i|).$$

Начальный профиль решения задается в виде

$$q_0(x) = \begin{cases} 1.0, & 0.2 < x < 2.0, \\ -0.5, & 2.0 < x < 3.0, \\ -1.0, & 3.0 < x < 4.8, \\ 0, & x < 0.2 \text{ и } x > 4.8. \end{cases}$$

На фиг. 4 представлено аналитическое решение уравнения (11) для данного начального профиля на моменты времени  $t = 0, 0.6$  и  $2.0$ . В начальный момент времени в точках  $x = 2$  и  $x = 3$  имеются две ударные волны (УВ), движущиеся навстречу друг другу, в точке  $x = 0.2$  имеется разрыв, расширяющийся направо, в точке  $x = 4.8$  – разрыв, расширяющийся налево. Видно, что с течени-

Таблица 3

$N$	$t = 0.6$		$t = 2.0$	
	PPM	PPML	PPM	PPML
64	$8.60 \times 10^{-2}$	$4.27 \times 10^{-2}$	$1.40 \times 10^{-1}$	$7.41 \times 10^{-2}$
128	$7.49 \times 10^{-2}$	$5.86 \times 10^{-2}$	$9.00 \times 10^{-2}$	$4.95 \times 10^{-2}$
256	$4.75 \times 10^{-2}$	$2.33 \times 10^{-2}$	$5.84 \times 10^{-2}$	$2.02 \times 10^{-2}$
512	$3.18 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$	$3.37 \times 10^{-2}$	$8.99 \times 10^{-3}$
1024	$1.55 \times 10^{-2}$	$5.81 \times 10^{-3}$	$1.89 \times 10^{-2}$	$7.12 \times 10^{-3}$

ем времени в точках  $x = 0.2$  и  $4.8$  появляются два расширяющихся веера. При  $t = 1$  УВ сталкиваются и сливаются в одну, движущуюся влево.

На фиг. 5 представлены результаты расчетов методом PPM на моменты времени  $t = 0.6$  и  $2.0$ . Точками показано численное решение, сплошной линией – точное. На фиг. 6 представлены результаты расчетов методом PPML на те же моменты времени. Стрелками показаны области, в которых видно отличие между тестируемыми методами. В этих областях решение, полученное методом PPML (фиг. 6), ближе к точному, чем полученное методом PPM (фиг. 5). Области расширения, наблюдаемые в данном тестовом расчете, аналогичны волнам разрежения в задачах газовой динамики. Это означает, что предложенный метод PPML позволяет получать более точные решения в местах возникновения волн разрежения. Приведем таблицу ошибок в пространстве  $L_1$  при различном  $N$  для  $t = 0.6$  и  $2.0$ , из которой видно, что метод PPML дает существенно лучшие результаты (см. табл. 3).

## 6. УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Для численного решения используется консервативная форма уравнений газодинамики, которая в двумерном случае имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} = 0, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}.$$

Систему (13) необходимо дополнить уравнением для полной энергии

$$E = \rho \epsilon + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} \quad (14)$$

и уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon, \quad (15)$$

где  $\epsilon$  – удельная внутренняя энергия.

Для решения системы газодинамики применяется консервативная разностная схема следующего вида:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\tau}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2}) - \frac{\tau}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2}). \quad (16)$$

Полуцелые пространственные индексы у потоков показывают, к каким границам разностной ячейки они относятся. Полуцелый номер шага по времени  $n + 1/2$  означает, что берутся усредненные значения потоков по временному шагу  $\tau$ , что дает второй порядок аппроксимации по времени.

Решение внутри каждой разностной ячейки аппроксимируется параболой вдоль каждой координатной оси, причем граничные точки каждой кусочной параболы определяются из свойства

сохранения значений инвариантов Римана вдоль характеристик исходной линейаризованной системы. Для вычисления потоков на границах ячеек мы преобразуем обобщенную риманову проблему о распаде разрыва, в которой распределение искомой функции внутри ячейки произвольно, в эквивалентную риманову проблему, где это распределение задается кусочно-постоянной функцией.

В исходном методе РРМ кусочная парабола внутри каждой ячейки строится с использованием физических переменных  $\mathbf{V} = (\rho, u, v, p)^T$ , поэтому для определения потоков приходится дополнительно использовать систему уравнений газодинамики в неконсервативной форме:

$$\partial_t \mathbf{V} + A \partial_x \mathbf{V} + B \partial_y \mathbf{V} = 0. \quad (17)$$

Матрицы  $A$  и  $B$  можно вычислить через якобианы консервативной системы и матрицу перехода

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}. \quad (18)$$

Например, для матрицы  $A$  имеем

$$A = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  имеют полный набор правых и левых собственных векторов, отвечающих действительным собственным значениям (система уравнений газодинамики гиперболическая). Следовательно,  $A$  и  $B$  можно разложить по своим собственным векторам. Например, для матрицы  $A$ , отвечающей за направление  $x$ , имеем

$$A = R_x \Lambda_x L_x, \quad (19)$$

где  $R_x$  – матрица, столбцы которой суть правые собственные векторы  $\mathbf{r}_x^p$  ( $p = 1, \dots, 4$ ),  $L_x$  – обратная ей матрица, строки которой суть левые собственные векторы  $\mathbf{l}_x^p$ :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ c/\rho & 0 & 0 & -c/\rho \\ 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 & \rho/(2c) & 0 & 1/(2c^2) \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & -\rho/(2c) & 0 & 1/(2c^2) \end{pmatrix},$$

$\Lambda_x$  – диагональная матрица собственных значений:  $(\Lambda_x)_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ ,  $(\Lambda_x)_{ij} = \lambda^p$  для  $i = j = p$ , где  $\lambda^p$  – решения характеристического уравнения

$$\det[\lambda E - A] = 0. \quad (20)$$

Решением уравнения (20) являются следующие собственные значения:  $\lambda^1 = u + c$ ,  $\lambda^2 = \lambda^3 = u$ ,  $\lambda^4 = u - c$ , где  $c$  – скорость звука:  $c^2 = (p_\rho)_s = (p_\rho)_e + (p_e)_p \rho^2$ .

Для построения кусочных парабол на следующем шаге по времени необходимо определить значения величин (состояния) на границах разностных ячеек и значения величин в их центрах.

### 6.1. Вычисление граничных значений кусочных парабол

Для простоты вместо (17) рассмотрим одномерную систему уравнений (далее будет рассмотрен двумерный случай)

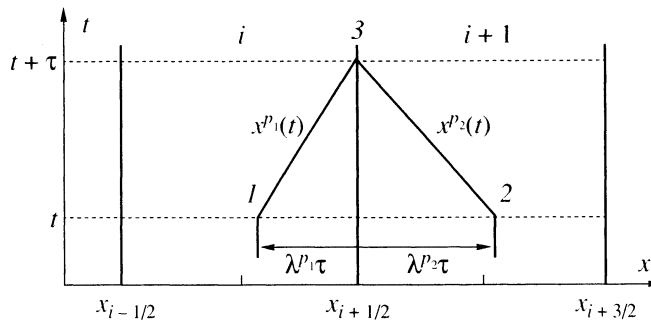
$$\partial_t \mathbf{V}(x, t) + A \partial_x \mathbf{V}(x, t) = 0. \quad (21)$$

Подставив (19) в (21) и домножив на матрицу  $L$  слева, получим

$$L \partial_t \mathbf{V} + \Lambda L \partial_x \mathbf{V} = 0. \quad (22)$$

Разложив вектор  $\mathbf{V}(x, t)$  по локальному базису правых собственных векторов  $\mathbf{r}^p$ , фиксированному для данной ячейки:

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_p \alpha^p(x, t) \mathbf{r}^p, \quad (23)$$



Фиг. 7.

и подставив в (22), получим

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = 0, \quad p = 1, \dots, 4. \quad (24)$$

Уравнения (24) означают, что коэффициенты  $\alpha^p(x, t)$  в разложении (23) (величины, соответствующие амплитудам волн) сохраняются вдоль каждой характеристики  $x^p(t)$ , определяемой из условия

$$dx^p/dt = \lambda^p,$$

т.е. являются инвариантами Римана. Значение инварианта Римана на границе ячейки при  $x = x_{i+1/2}$  в момент времени  $t + \tau$  можно вычислить через его значение в момент времени  $t$ :

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t). \quad (25)$$

В качестве примера на фиг. 7 показаны две смежные ячейки с номерами  $i$  и  $i + 1$ . Набор характеристик в ячейке  $i$  обозначен индексом  $p_1$ , в ячейке  $i + 1$  – индексом  $p_2$ . В ячейке  $i$  показана одна из характеристик  $x^{p_1}(t)$  с собственным значением  $\lambda^{p_1} > 0$ . В ячейке  $i + 1$  показана характеристика  $x^{p_2}(t)$ , отвечающая  $\lambda^{p_2} < 0$ . Согласно (25), амплитуда волны в точке 3, распространяющейся в ячейке  $i$  вдоль характеристики  $x^{p_1}(t)$ , отвечающей собственному значению  $\lambda^{p_1}$ , определяется по значению амплитуды в точке 1. Аналогично, амплитуда волны в точке 3, распространяющейся в ячейке  $i + 1$  вдоль характеристики  $x^{p_2}(t)$  с собственным значением  $\lambda^{p_2}$ , определяется по ее значению в точке 2.

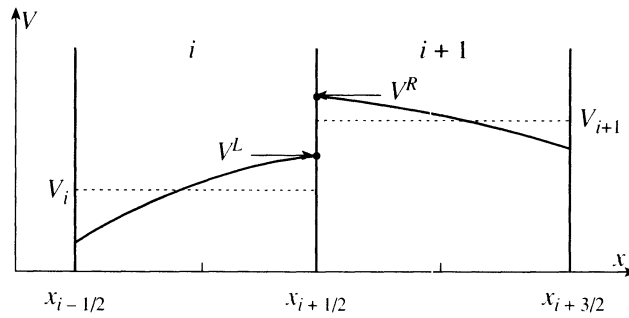
Состояние в точке 3, вычисленное по формуле (23) путем суммирования по собственным векторам, фиксированным в ячейке  $i$ , отвечающим положительным собственным значениям (т.е. по индексу  $p_1$  для всех  $\lambda^{p_1} > 0$ ), будет являться левым относительно границы. Обозначим его через  $V^L$ . Аналогично, состояние в точке 3, вычисленное путем суммирования по собственным векторам ячейки  $i + 1$ , т.е. по индексу  $p_2$  для всех  $\lambda^{p_2} < 0$ , будет являться правым относительно границы и обозначаться через  $V^R$ .

На фиг. 8 показана возможная аппроксимация одной из компонент  $V(x)$  вектор-функции  $V(x, t)$  в некоторый момент времени внутри разностных ячеек с помощью кусочных парабол. Стрелками показаны значения слева и справа от границы, причем  $V^L \neq V^R$ . Пунктиром показаны средние значения для каждой ячейки, например для ячейки с номером  $i$  имеем

$$V_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} V(x) dx.$$

Состояния  $V^L$  и  $V^R$  требуются для построения кусочных парабол на следующем шаге по времени, однако в стандартном РРМ они “сшиваются”, т.е. выполняется условие

$$V^L = V^R = V_{i+1/2}. \quad (26)$$



Фиг. 8.

В методе PPM условие (26) выполняется по построению, так как значение  $V_{i+1/2}$  вычисляется с помощью интерполяционной процедуры четвертого порядка по четырехточечному шаблону. В нашем случае для сшивки парабол необходимо решить задачу о распаде разрыва, воспользовавшись для этого, например, методом Рои (см. [8]). При этом необходимо перейти от простых переменных к консервативным:

$$U_{i+1/2,j} = \frac{U^L + U^R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p(\lambda_i^{*p} > 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}_{U_x}^p(V^*) - \frac{1}{2} \sum_{p(\lambda_i^{*p} < 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}_{U_x}^p(V^*), \quad (27)$$

где  $\mathbf{r}_{U_x}^p = M \mathbf{r}_x^p$  – правые собственные векторы для консервативной системы (13) ( $M$  – матрица перехода (18)). Значения  $U^L$  и  $U^R$  вычисляются в соответствии с выбранным базисом собственных векторов в ячейках  $i$  и  $i+1$ . Численные расчеты показали, что выбор базиса практически не влияет на результаты. Значения компонент  $\mathbf{r}_{U_x}^p$  вычисляются по состоянию  $V^*$ , определяемому с помощью следующих формул (см. [8]):

$$\rho^* = \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad \xi^* = \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \quad \text{для} \quad \xi = u, h, \quad (28)$$

где  $u$  – компонента скорости,  $h = (E + p)/\rho$  – удельная энтальпия.

Собственные значения  $\lambda^{*p}$  имеют вид  $\lambda^{*1} = u^* + c^*$ ,  $\lambda^{*2} = \lambda^{*3} = u^*$ ,  $\lambda^{*4} = u^* - c^*$ , где  $c^* = \sqrt{(p_p^*)_s}$  ( $p^* = p(\rho^*, \epsilon^*)$ ). Значения амплитуд  $\alpha^{*p}$  вычисляются по состоянию  $V^*$  в соответствии с (23):

$$V^* = \sum_p \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(V^*).$$

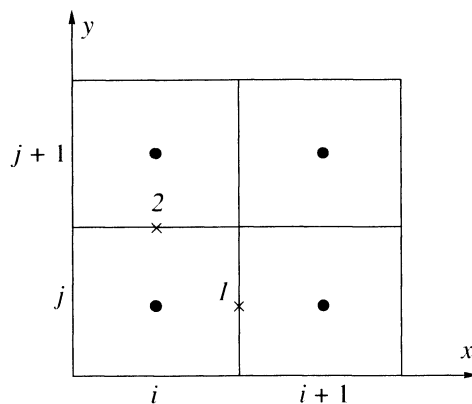
При использовании метода PPM для решения задач в двумерной постановке можно расщеплять систему (17) по пространственным переменным и решать одномерные уравнения отдельно вдоль каждой координатной оси. Однако при этом необходимо учесть дополнительное изменение величин в граничных точках за счет потоков в соответствующих направлениях. В методе PPM такая процедура не требуется.

Дополнительное изменение величин, например в точке  $I$  (см. фиг. 9) между ячейками  $(i, j)$  и  $(i+1, j)$  за счет потока в направлении  $y$  при переходе к следующему моменту времени, можно учесть, решая уравнение (17) в направлении  $x$ , рассматривая слагаемое, отвечающее за направление  $y$ , как источник. В этом случае вместо (24) будем иметь

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = D^p, \quad p = 1, \dots, 4, \quad (29)$$

$$D^p = -l^p B^p \partial_y V^p, \quad (30)$$

где  $l^p$  – левый вектор Якобиана  $A$ ,  $B^p$  – столбец Якобиана  $B$ , отвечающего за направление  $y$ . Значения компонент  $l^p$  и  $B^p$  в (30) предлагается вычислять по тому же состоянию, по которому фиксируется базис собственных векторов в ячейке  $(i, j)$  для волн, распространяющихся вдоль харак-



Фиг. 9.

теристик с положительными собственными значениями, либо в ячейке  $(i, j + 1)$  для волн, отвечающих отрицательным собственным значениям. Частные производные  $\partial_y V^p$  можно вычислить, заменив их разностными:

$$\partial_y V^p = \frac{V_{i,j+1/2}^p - V_{i,j-1/2}^p}{\Delta y}.$$

Величины  $V_{i,j-1/2}^p$  и  $V_{i,j+1/2}^p$  берутся с предыдущего временного слоя. Решение уравнения (29) записывается аналогично (25) с добавлением слагаемого, связанного с источником:

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t) + D^p \tau. \quad (31)$$

Левое и правое граничные состояния  $V^L$  и  $V^R$  в точке  $I$  вычисляются по формуле (23) путем суммирования соответствующих амплитуд (31), домноженных на правые собственные векторы Якобиана  $A$ . Далее для вычисления граничного состояния  $V_{i+1/2,j}$  используем формулу (27).

Состояние  $V_{i,j+1/2}$  в точке  $2$  вычисляется аналогично. В этом случае в источнике будет учитываться изменение за счет потока в направлении  $x$ .

### 6.2. Вычисление потоков на границах разностных ячеек

На фиг. 10 показан набор характеристик, отвечающих  $\lambda^p > 0$ , внутри разностной ячейки с номером  $i$ . Характеристика  $x^1(t)$  отвечает максимальному собственному значению  $\lambda^1$ . Точка  $I$  – это точка пересечения данной характеристики с кусочной параболой на предыдущем шаге по времени. Очевидно, на состояние в точке  $2$  (левое граничное состояние) влияет только область от границы ячейки  $x = x_{i+1/2}$  до точки  $I$ .

Для получения второго порядка аппроксимации по времени необходимо усреднить амплитуды  $\alpha^p(x, t)$ , отвечающие каждой характеристике, по своей области влияния. Если рассмотреть волну, распространяющуюся внутри ячейки  $i$  вдоль характеристики с  $\lambda^p > 0$ , то ее усредненная амплитуда на границе  $x = x_{i+1/2}$  в момент времени  $t + \tau$  будет вычисляться по формуле

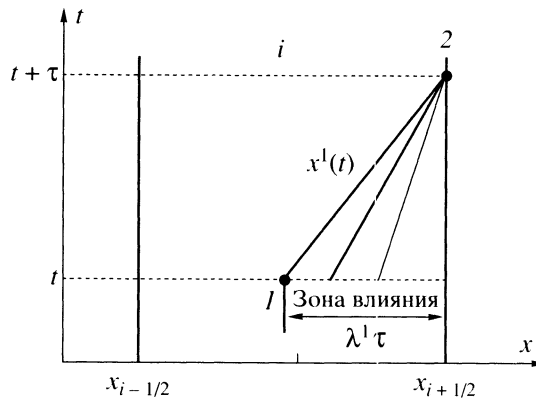
$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^p = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \alpha^p(x) dx, \quad \lambda^p > 0. \quad (32)$$

Амплитуды  $\alpha^p(x)$  можно вычислить, домножив разложение (23) на левые собственные векторы:

$$\alpha^p(x) = \mathbf{I}^p \mathbf{V}(x), \quad \lambda^p > 0. \quad (33)$$

При этом состояние  $\mathbf{V}(x)$  берется с предыдущего шага по времени. Подставляем (33) в (32) и выносим из-под знака интеграла собственные векторы  $\mathbf{I}^p$ , фиксированные в каждой ячейке, тогда имеем

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^p = \mathbf{I}^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p},$$



Фиг. 10.

где

$$\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \mathbf{V}(x) dx, \quad \lambda^p > 0. \quad (34)$$

Необходимо выбрать состояние, по которому будем вычислять собственные векторы, фиксированные в каждой ячейке. В качестве такого состояния для ячейки  $i$  предлагается взять  $\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}$  – усредненный по формуле (34) вклад в левое граничное состояние за счет волны, распространяющейся вдоль характеристики, отвечающей максимальному собственному значению. Как показали численные расчеты, этот выбор практически не влияет на результаты.

Так как волны, распространяющиеся внутри ячейки  $i$  вдоль характеристик с  $\lambda^p < 0$ , очевидно, не влияют на состояние в точке 2, то для  $\bar{\alpha}_{i+1/2}^p$  при  $\lambda^p < 0$  можно взять любое число. Для удобства предлагается использовать следующую общую формулу:

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^p = \begin{cases} \mathbf{l}^p(\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}) \cdot \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}, & \lambda^p > 0, \\ \mathbf{l}^p(\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}) \cdot \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}, & \lambda^p < 0. \end{cases} \quad (35)$$

Состояние  $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$  слева от границы получается по формуле (23) с помощью суммирования амплитуд (35), домноженных на правые векторы, однако удобно использовать формулу для разложения приращения вектора состояния по базису правых собственных векторов. Чтобы ее получить, запишем (35) в виде

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^p = \Theta(\lambda^p)(\mathbf{l}^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}) + (1 - \Theta(\lambda^p))(\mathbf{l}^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}). \quad (36)$$

(Опущены аргументы собственных векторов.) Домножив (36) на  $\mathbf{r}^p$  и просуммировав по  $p$ , после простых преобразований получим

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^L - \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} = \sum_{p(\lambda^p > 0)} \mathbf{r}^p (\mathbf{l}^p (\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} - \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1})). \quad (37)$$

До сих пор рассматривалась разностная ячейка с номером  $i$ . Рассмотрим ячейку с номером  $i+1$  и характеристики с отрицательными собственными значениями, можно получить аналогичную формулу для определения состояния  $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$  справа от границы:

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^R - \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1} = \sum_{p(\lambda^p < 0)} \mathbf{r}^p (\mathbf{l}^p (\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,p} - \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1})). \quad (38)$$

Здесь  $\mathbf{r}^p$  и  $\mathbf{l}^p$  – собственные векторы, фиксированные в ячейке  $i + 1$ . Состояние  $\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1}$  – это усредненный по соответствующей области влияния в ячейке  $i + 1$  вклад в  $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$  за счет волны, распространяющейся вдоль характеристики, отвечающей максимальному по модулю отрицательному собственному значению.

Формулы (37), (38) имеют наглядную интерпретацию: они показывают, что приращение каждой физической переменной в окрестности границы складывается из соответствующих приращений этих величин при пересечении каждой характеристики слева направо от одного состояния к другому.

Теперь необходимо определить поток  $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$  на границе  $x = x_{i+1/2}$ . Снова воспользуемся методом Рунге (см. [8]). Для начала перейдем от физических переменных  $\mathbf{V}$  к консервативным  $\mathbf{U}$  (имеется взаимно однозначное соответствие  $\mathbf{V} \rightleftharpoons \mathbf{U}$ ) и вычислим потоки слева и справа от границы:  $\mathbf{F}^L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)$  и  $\mathbf{F}^R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R)$ . Далее воспользуемся формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{F}^L + \mathbf{F}^R}{2} - \frac{1}{2} \sum_p |\lambda^p(\mathbf{V}^*)| \Delta \alpha_{i+1/2}^p \mathbf{r}_U^p(\mathbf{U}^*), \quad (39)$$

где

$$\Delta \alpha_{i+1/2}^p = \mathbf{l}^p(\mathbf{V}^*)(\mathbf{V}_{i+1/2}^R - \mathbf{V}_{i+1/2}^L), \quad (40)$$

$\mathbf{r}_U^p = M \mathbf{r}^p$  – правый собственный вектор для консервативной системы газодинамики ( $M$  – матрица перехода (18)). При записи (40) использовалось свойство

$$\mathbf{l}_U^p \Delta \mathbf{U} = \mathbf{l}^p \Delta \mathbf{V},$$

которое позволило обойтись без вычисления левых собственных векторов в консервативных переменных. Компоненты  $\mathbf{V}^*$  вычисляются с помощью (28) относительно состояний  $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$  и  $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$ ,  $\mathbf{U}^*$  – состояние, соответствующее  $\mathbf{V}^*$  в консервативных переменных.

В двумерной постановке в формулах (37) и (38) будет присутствовать дополнительное слагаемое (30). Вычислив потоки на границах между ячейками для направления  $x$ , аналогично определим потоки для направления  $y$ . Далее, используя разностную схему (16), вычисляем состояния в центрах ячеек  $\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}$  на следующем шаге по времени.

Осталось переопределить граничные значения кусочных парабол  $\mathbf{V}_{i,j+1/2}^{n+1}$  и  $\mathbf{V}_{i+1/2,j}^{n+1}$ , вычисленные по формуле (27), в областях немонотонного решения согласно методу RPM (см. (4), (5)), и задача решена.

## 7. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Предложенный метод был протестирован на примере нескольких одномерных и двумерных задач газовой динамики. Во всех расчетах уравнение состояния бралось для случая идеального газа (15) с  $\gamma = 1.4$ .

### 7.1. 1D-тесты

Первые три теста в одномерной постановке были проведены в соответствии с работой [4].

Рассматривались задачи из [9], [10] и [11]. Они решались на отрезке  $x \in [-1, 1]$ , который в начальный момент времени разбивался границей  $x_b$  на две части:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x \leq x_b, \\ \mathbf{V}^R, & x > x_b. \end{cases}$$

Использовались “исторические” граничные условия – значения величин в граничных точках не менялись со временем.



Четвертый тест – это задача о взаимодействии двух ударных волн (см. [12]), которая решалась на отрезке  $x \in [0, 1]$ . В начальный момент времени отрезок разбивался на три части:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x < 0.1, \\ \mathbf{V}^M, & 0.1 \leq x < 0.9, \\ \mathbf{V}^R, & x \geq 0.9. \end{cases}$$

В этом тесте использовались граничные условия полного отражения. Для реализации таких граничных условий были введены три дополнительные ячейки с состояниями  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_{-1}, \mathbf{V}_{-2}$  для левой границы и три ячейки с состояниями  $\mathbf{V}_{N+1}, \mathbf{V}_{N+2}, \mathbf{V}_{N+3}$  для правой. Значения этих состояний на каждом шаге по времени определялись следующим образом:

$$\rho_{-l+1} = \rho_l, \quad u_{-l+1} = -u_l, \quad p_{-l+1} = p_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$\rho_{N+l} = \rho_{N-l+1}, \quad u_{N+l} = -u_{N-l+1}, \quad p_{N+l} = p_{N-l+1}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Время счета обозначалось буквой  $T$ ,  $N$  – количество разностных ячеек. Шаг по времени  $\tau$  вычислялся из условия Куранта с числом Куранта  $\sigma = 0.5$  для всех расчетов.

**Тест 1** (задача из [9]). Начальные условия для системы уравнений газодинамики имеют вид

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (1, 0, 1),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (0.125, 0, 0.1),$$

$$x_b = 0, \quad N = 100, \quad T = 0.4.$$

**Тест 2** (задача из [10]). Начальные условия имеют вид

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (0.445, 0.698, 3.528),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (0.5, 0, 0.571),$$

$$x_b = 0, \quad N = 100, \quad T = 0.32.$$

**Тест 3** (задача из [11]). Начальные условия имеют вид

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (3.857143, 2.629369, 10.3333),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (1 + 0.2 \sin(5\pi x), 0, 1),$$

$$x_b = -0.8, \quad N = 300, \quad T = 0.36.$$

**Тест 4** (задача о взаимодействии ударных волн (1D, см. [12]). Начальные условия имеют вид

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (1, 0, 10^3), \quad (\rho^M, u^M, p^M) = (1, 0, 10^{-2}),$$

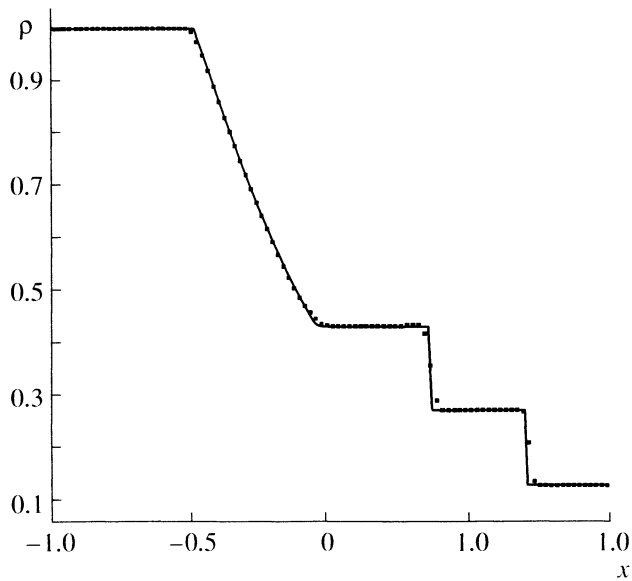
$$(\rho^R, u^R, p^R) = (1, 0, 10^2), \quad N = 400, \quad T = 0.038.$$

На фиг. 11–14 представлены результаты данных тестовых расчетов, соответственно, задач из [9]–[12]. Точное решение показано сплошной линией. В задаче о взаимодействии ударных волн образуются три области контактного разрыва, средний из которых очень трудно разрешить любыми численными методами (фиг. 14).

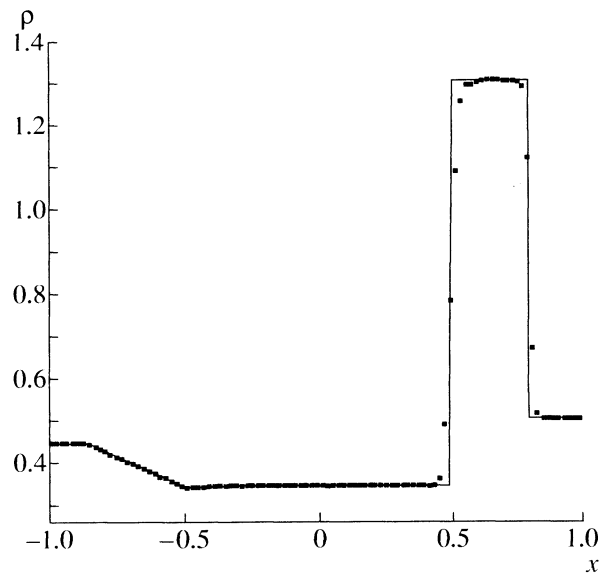
## 7.2. 2D-тесты

Для двумерных расчетов выбирались два варианта начальной конфигурации из предложенных в [13]. В первом случае происходит движение и взаимодействие ударных волн (тест 5), во втором – контактных разрывов (тест 6). Двумерная область  $x \times y = [0, 1] \times [0, 1]$  разбивалась на четыре квадрата с разными начальными состояниями. Использовалась разностная сетка  $N_x \times N_y = 400 \times 400$  ячеек, число Куранта  $\sigma = 0.2$ . Значения величин в граничных ячейках задавались путем переноса. Например, для левой границы задавались значения

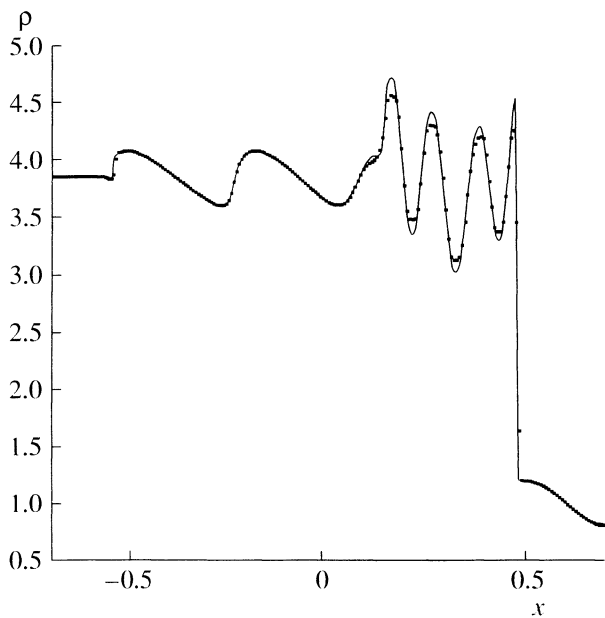
$$V_{2,j} = V_{3,j}, \quad V_{1,j} = V_{2,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y.$$



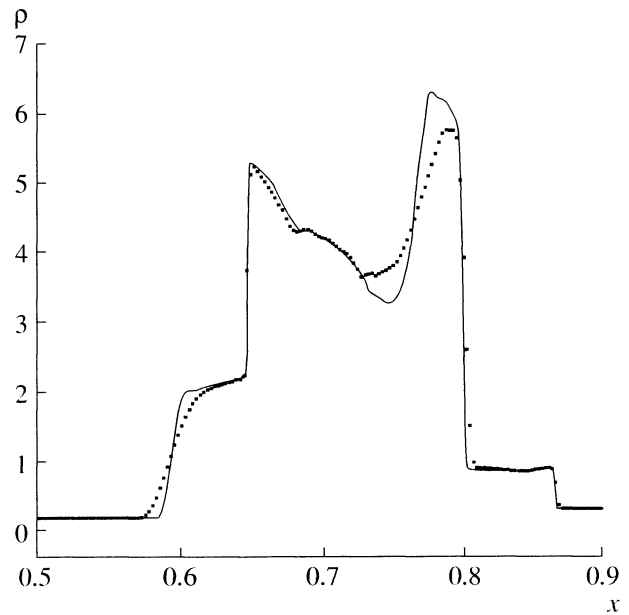
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



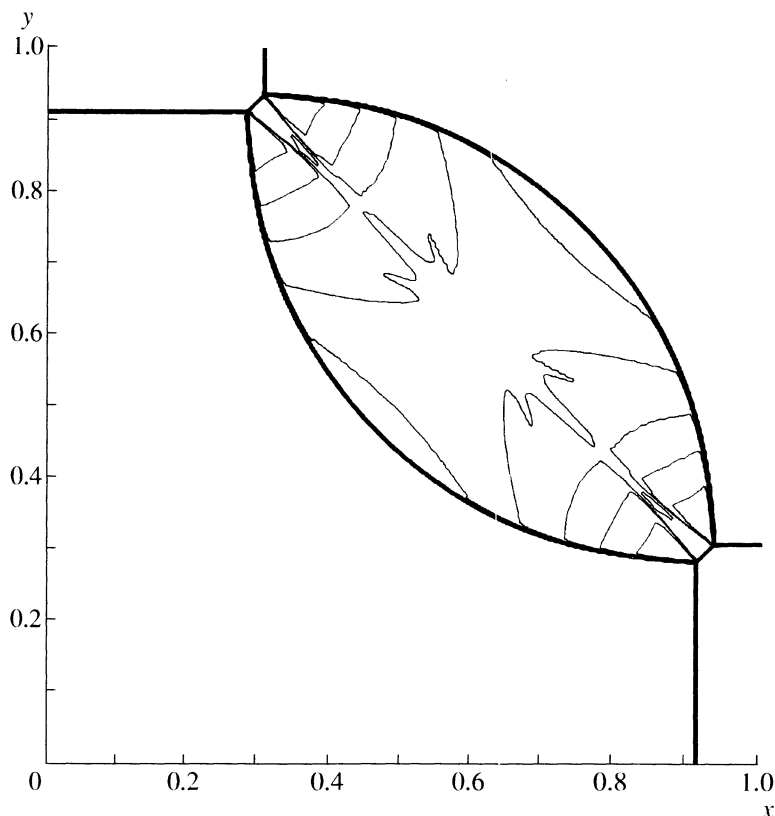
Фиг. 14.

Кроме того, был проведен тест на отражение наклонной ударной волны (см. [14, тест 7]) и решена задача двойного маховского отражения (см. [12, тест 8]).

**Тест 5** (задача о взаимодействии ударных волн (2D, см. [13])). Начальные условия имеют вид

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.1, 0, 0, 1.1), & x > 0.5, \quad y > 0.5, \\ (0.5065, 0.8939, 0, 0.35), & x < 0.5, \quad y > 0.5, \\ (1.1, 0.8939, 0.8939, 1.1), & x < 0.5, \quad y < 0.5, \\ (0.5065, 0, 0.8939, 0.35), & x > 0.5, \quad y < 0.5. \end{cases}$$

Время счета составило  $T = 0.25$ .



Фиг. 15.

**Тест 6** (задача о взаимодействии контактных разрывов, см. [13]). Начальные условия имеют вид

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, \quad y > 0.5, \\ (2, 0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, \quad y > 0.5, \\ (1, -0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, \quad y < 0.5, \\ (3, -0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, \quad y < 0.5. \end{cases}$$

Время счета составило  $T = 0.3$ .

**Тест 7** (отражение наклонной ударной волны, см. [14]). Задача решалась в области  $x \times y = [0, 4] \times [0, 1]$  на сетке из  $60 \times 40$  разностных ячеек с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ . Ударная волна инициировалась за счет условий на границах. На нижней границе задавалась твердая стенка, на правой – сверхзвуковое вытекание, слева и вверху фиксировались следующие значения физических переменных:

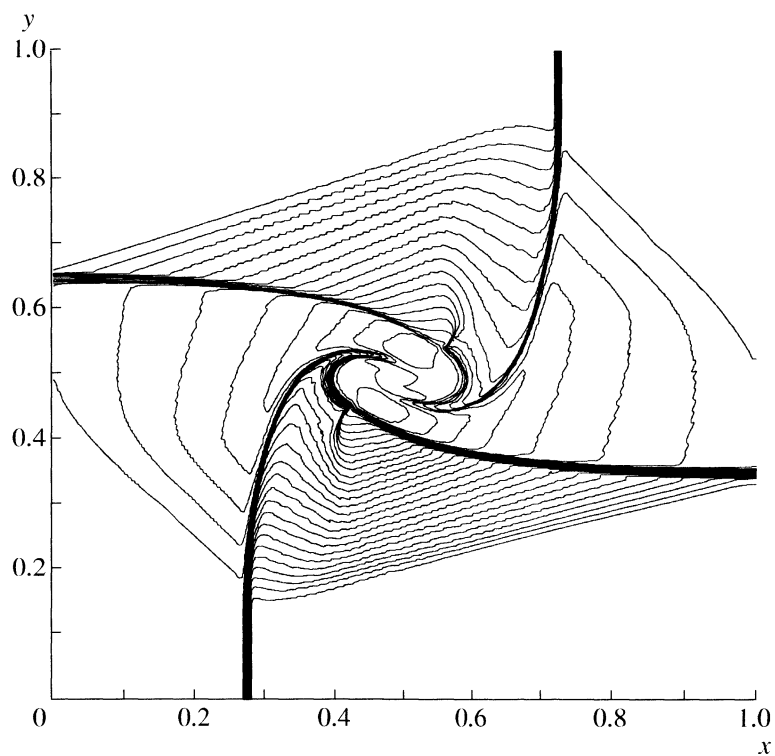
$$(\rho^L, u^L, v^L, p^L) = (1, 2.9, 0, 1/\gamma),$$

$$(\rho^T, u^T, v^T, p^T) = (1.69997, 2.61934, -0.50632, 1.52819).$$

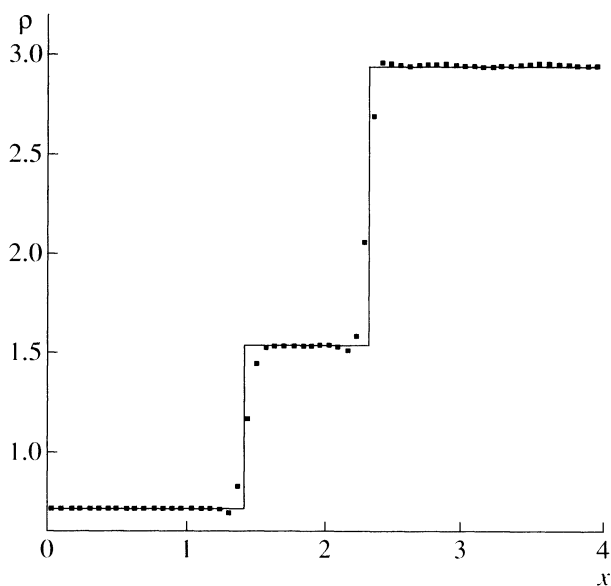
При таких граничных условиях формируется наклонная ударная волна,двигающаяся от левого верхнего угла и отражающаяся от нижней границы. После 10 000 шагов по времени устанавливалась стационарная картина течения.

**Тест 8** (двойное маховское отражение, см. [12]). Задача решалась в области  $x \times y = [0, 4] \times [0, 1]$  на сетке из  $480 \times 120$  разностных ячеек с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ . Отражающая стенка задавалась на нижней границе на отрезке  $(1/6, 0) - (4, 0)$ . На эту стенку в точке  $(1/6, 0)$  падала ударная волна со скоростью 10 М, образуя угол в  $60^\circ$  с осью  $x$ . Параметры среды слева и справа от волны брались в виде

$$(\rho^L, u^L, v^L, p^L) = (8, 7.1447, -4.125, 116.5),$$



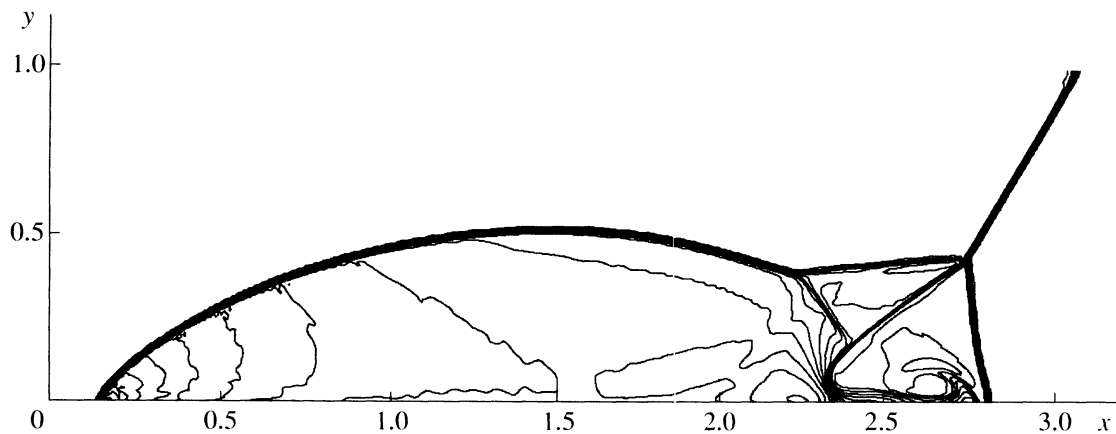
Фиг. 16.



Фиг. 17.

$$(\rho^R, u^R, v^R, p^R) = (1.4, 0, 0, 1).$$

В качестве граничных условий на нижней границе на отрезке  $(0, 0) - (1/6, 0)$  и на правой границе использовалась линейная экстраполяция величин, на левой границе – сверхзвуковое втекание, вверху – условия, меняющиеся со временем в зависимости от точного движения ударной волны. Расчет проводился до момента времени  $T = 0.2$ .



Фиг. 18.

На фиг. 15–18 представлены результаты данных двумерных расчетов. Для тестов 5, 6 и 8 линиями показаны уровни постоянной плотности. Для теста 7 (фиг. 17) приведено давление вдоль линии  $y = 0.55$ , что соответствует номеру  $j = 11$ . Точное решение показано сплошной линией.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модификация известного кусочно-параболического метода, позволяющая делать расчеты на локальном шаблоне, не используя информацию о решении в соседних ячейках. Метод PPML был исследован при решении задачи Коши для одномерного линейного уравнения переноса, был выполнен ряд тестовых расчетов с различными начальными профилями. Оценка точности была сделана на основе вычисленных норм разности между точным и численным решением в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  и  $W_2^1$ . Сравнение ошибок, полученных в расчетах методами PPM и PPML, позволяет сделать вывод об улучшении точности решения: новая схема уменьшает ошибки в нормах всех пространств. Хорошо заметно снижение диссипации схемы. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса позволило исследовать новую схему при описании процессов образования, движения и столкновения ударных волн, а также при исследовании областей разрежения. Метод PPML позволяет улучшить решение в областях разрежения без потери точности в остальном пространстве.

Представлена также численная схема для решения уравнений газодинамики на основе нового метода. Чтобы воспользоваться свойством сохранения инвариантов Римана при их переносе вдоль характеристик системы уравнений газодинамики, необходимо было ее линеаризовать, зафиксировав базис правых и левых собственных векторов в каждой разностной ячейке. Только в этом случае можно провести характеристический анализ. Как показали тестовые расчеты, выбор состояния, по которому фиксируется базис собственных векторов, практически не влияет на решение.

Для использования PPML в численной схеме для решения уравнений газодинамики необходимо рассмотреть две задачи. Во-первых, требуется определить граничные значения кусочных парабол в каждой разностной ячейке при переходе к следующему шагу по времени. Отличие метода PPML от метода PPM состоит в том, что теперь вместо применения интерполяционной процедуры для вычисления граничных состояний они получаются с помощью переноса соответствующих значений амплитуд волн с предыдущего шага по времени вдоль характеристик. При таком подходе для каждой разностной ячейки получаются свои граничные состояния, которые не сшиты: их значения на одном и том же общем интерфейсе для левой и правой ячеек не совпадают. Для сшивки состояний необходимо решить задачу Римана о распаде разрыва между ними, перейдя при этом к консервативным переменным.

Вторая задача состоит в вычислении потоков на границах ячеек. Для общего интерфейса смежных ячеек определяются потоки слева и справа, причем для получения второго порядка аппроксимации по времени при вычислении левого и правого граничных состояний приходится усреднять амплитуды волн по своей области влияния. Поток на границе определяется путем ре-

шения еще одной задачи Римана о распаде разрыва. Для решения задач Римана в обоих случаях предлагается использовать метод Роу (см. [8]), так как он относительно прост в реализации и обладает низкой схемной вязкостью. Состояния в центрах ячеек легко определяются через потоки по формуле (16).

После того как состояния в центрах разностных ячеек на следующем шаге по времени вычислены, необходимо переопределить граничные состояния в областях немонотонного решения согласно стандартному методу PPM (см. (4), (5)).

При решении двух- и трехмерных задач имеется еще одно отличие метода PPML от PPM: в методе PPML требуется учесть дополнительное изменение величин за счет потоков в ортогональных направлениях. Т.е. при решении системы уравнений газодинамики, например, вдоль направления  $x$  требуется учесть производные в направлении  $y$  (и  $z$  в трехмерной задаче). Эти производные входят в уравнения для амплитуд в виде источников. В этом случае при применении схемы Роу отсутствует феномен “карбункул” (см. [15]).

Проведенные исследования говорят о повышении точности численного решения при использовании метода PPML. Модифицированный метод сохранил все преимущества метода PPM, обладая при этом более низкими диссипативными свойствами. Мы также полагаем, что использование локального шаблона в методе PPML упростит алгоритм при решении задач на адаптивных разностных сетках.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Collela P., Woodward P.* The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // *J. Comput. Phys.* 1984. V. 54. P. 174–201.
2. *van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // *J. Comput. Phys.* 1974. V. 14. P. 361–370.
3. *Guinot V.* High resolution Godunov-type schemes with small stencils // *Internat. J. Numer. Meth. Fluids.* 2004. V. 44. P. 1119–1162.
4. *Suresh A., Huynh H.T.* Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // *J. Comput. Phys.* 1997. V. 136. P. 83–99.
5. *Галанин М.П., Еленина Т.Г.* Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса: Препринт № 52. М.: ИПМатем. РАН, 1998. 33 с.
6. *Галанин М.П., Еленина Т.Г.* Тестирование разностных схем для линейного уравнения переноса: Препринт № 40. М.: ИПМатем. РАН, 1999. 42 с.
7. *Yang H.Q., Przekwas A.J.* A comparative study of advanced shock-capturing schemes applied to Burgers’ equation // *J. Comput. Phys.* 1992. V. 102. P. 139–159.
8. *Roe P.L.* Characteristic-based schemes for the Euler equations // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1986. V. 18. P. 337–365.
9. *Sod G.A.* A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1978. V. 27. P. 1–31.
10. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7. P. 159–193.
11. *Shu C.-W.* Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes // *J. Sci. Comput.* 1990. V. 5. P. 127–149.
12. *Woodward P., Collela P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comput. Phys.* 1984. V. 54. P. 115–173.
13. *Schulz-Rinne C.W., Collins J.P., Glaz H.M.* Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics // *SIAM J. Sci. Comput.* 1993. V. 14. P. 1394–1414.
14. *Collela P.* Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1990. V. 87. P. 171–200.
15. *Quirk J.J.* A contribution to the great Riemann solver debate // *Internat. J. Numer. Meth. Fluids.* 1994. V. 18. P. 555–574.