

# Модель термоупругого разрушения хрупкого материала

Токарев А.И.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

1 июня 2022 г.

- ❶ Постановка задачи
- ❷ Математическая модель для одномерного случая
- ❸ Алгоритм
- ❹ Пример

## Тензор малых деформаций Коши

Деформации – смещение каждой точки тела. Тензор деформаций симметричен и может быть записан следующим образом:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^0, \quad k, l = 1, 2, 3,$$

где  $\varepsilon_{kl}^e$  – упругие деформации;  $\varepsilon_{kl}^0$  – неупругие деформации.

## Тензор напряжений

Напряжения и деформации связаны линейно соотношением:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0),$$

$C_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных (четвертого ранга), в общем случае состоящий из 36 компонент.

Для изотропного тела с учетом нотации Фойгта тензор упругих постоянных может быть преобразован к матрице 6x6 с компонентами:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

## Аппроксимация

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}},$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  выводятся экспериментально. Для диоксида урана:  
 $A = -0.024$ ,  $B = 1.69$ ,  $C = 0.5$ .

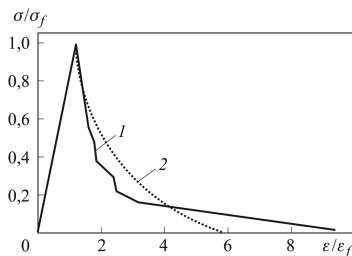


Рис. 1. Экспериментально выведенная зависимость напряжений от деформаций

До достижения предела прочности  $\sigma = \sigma_f^v$  тело ведет себя, как линейно-упругое. В области послепиковых значений деформаций и напряжений (инициализация трещины) просиходит разгрузка по нелинейному закону.

## Зависимость напряжений от деформаций

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon); \\ \sigma_f \left( A + B e^{-C \frac{\varepsilon^e}{\varepsilon_f}} \right), & E\varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases}$$

где  $\sigma_f^v$  – переменный предел прочности.

Тело подвержено тепловым нагрузкам, описываемыми уравнением:

$$T(x, t) = \tilde{T} + F(x)\tau(t),$$

тут  $\tilde{T}$  – средняя температура;  $F(x)$  – пространственное распределение температуры, а  $\tau(x)$  – временное.

Пусть  $l$  – длина стержня. Стержень закреплен с обоих концов, поэтому наложим некоторые ограничения:

$$u(0, t) = u(l, t)$$

### Математическая модель

$$\begin{cases} T(x, t) = \tilde{T} + F(x)\tau(t), & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon^T), & \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^T = \alpha(T - T_0), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases}$$

- 1 В предположении линейной упругости решаем уравнение равновесия и находим деформации в каждой точке сетки:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial (E(\varepsilon - \varepsilon^t))}{\partial x} = 0.$$

- 2 Если то, то се, если се, то то.
- 3 Пятое десятое
- 4 Ну и еще что-то



# Пример

Рассмотрим процесс разрушения наглядно. Построим графики зависимости: напряжений от деформаций  $\sigma(\varepsilon - \varepsilon^T)$ ; деформаций и напряжений от времени  $\varepsilon(t)$ ,  $\sigma(t)$  и температуры от времени  $T(t)$ .

## Условия

Определим зависимость температуры от координаты и времени:

$$T(x, t) = \tilde{T} + F(x)t \sin t, \quad F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Для линейного случая зависимости можно найти аналитическое решение для перемещений:

$$u(x, t) = \frac{alt\alpha \sin(t) - 2atx\alpha \sin(t) - alt\alpha \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin t}{\pi}.$$

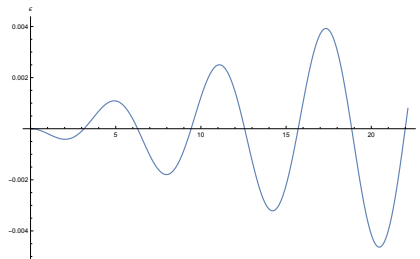


Рис. 2. Зависимость деформаций от времени

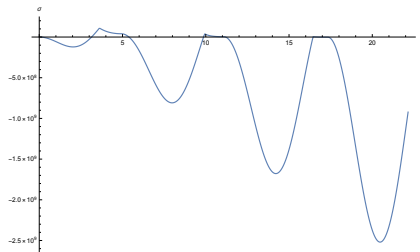


Рис. 3. Зависимость напряжений от времени

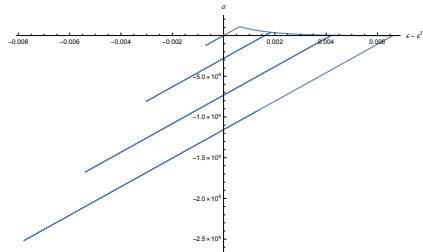


Рис. 4. Зависимость напряжений от деформаций

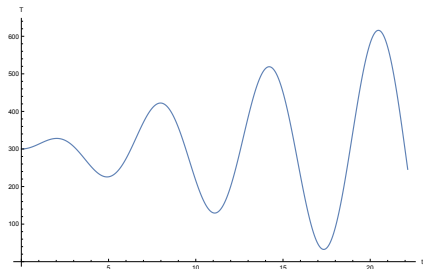


Рис. 5. Зависимость температуры от времени

# Список использованных источников



Тензоры напряжений и деформаций. URL:  
[http://solidstate.karelia.ru/p/tutorial/ftt/Part4/part4\\_1.htm](http://solidstate.karelia.ru/p/tutorial/ftt/Part4/part4_1.htm)



Тензор деформаций. SolverBook - онлайн сервисы для учебы. URL:  
<http://ru.solverbook.com/spravochnik/fizika/tensor-deformacii/>



Теория упругости. Wikipedia — свободная энциклопедия. URL:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_elasticity](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_elasticity)



Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей/М.П. Галанин, Е.Б. Савенков.—М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.—591, [1] с.: ил. (Математическое моделирование в технике и технологии)



Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013.No 100. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100>