



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

*Лабораторная работа №1 по дисциплине  
"Разработка программных комплексов" на  
тему "Методы конечных элементов"*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-72Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Токарев А. И.  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Принял

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Азметов Х. Х.  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2022 г.

## Содержание

1. Задача . . . . .	3
2. Метод коллокации в точке . . . . .	4
3. Метод коллокаций в подобластях . . . . .	5
4. Метод Бубнова-Галеркина . . . . .	6
5. Метод Галеркина . . . . .	7
6. Метод наименьших квадратов . . . . .	8
7. Метод Рунге . . . . .	9

## 1. Задача

Создать программу решения дифференциального уравнения проекционными методами. Задано уравнение на области  $[0, 1]$ :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Необходимо реализовать методы решения:

1. Метод коллокаций в точках
2. Метод коллокаций в подобластях
3. Метод Бубнова-Галеркина
4. Метод Галеркина
5. Метод наименьших квадратов
6. Метод Рунге

Для каждого из методов нужно получить решение с порядком аппроксимации от 1 до 3.

## 2. Метод коллокации в точке

№	Норма ошибки	Коэффициенты
1	0.12	$a_1 = 0.286$
2	0.0117	$a_1 = 0.195, a_2 = 0.17$
3	$8 \cdot 10^{-4}$	$a_1 = 0.19, a_2 = 0.196, a_3 = -0.02$
4	$5 \cdot 10^{-5}$	$a_1 = 0.1883, a_2 = 0.1887, a_3 = -0.105, a_4 = -0.008$
5	$3 \cdot 10^{-6}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1883, a_3 = -0.0094, a_4 = -0.0102, a_5 = 0.0008$

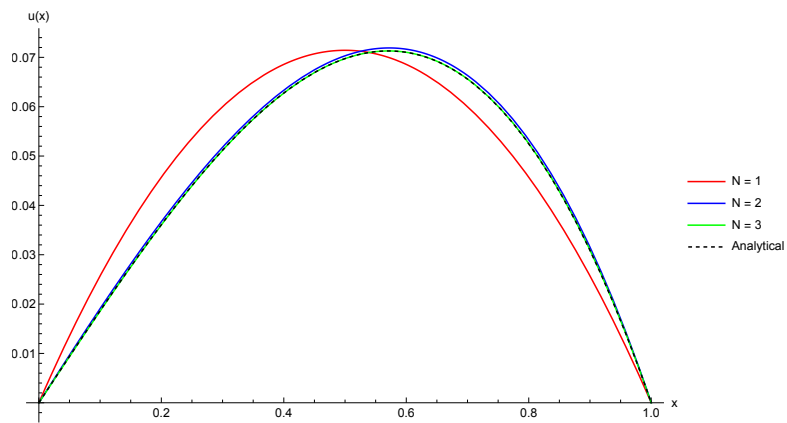


Рис. 1. График полученных решений при различных  $N$

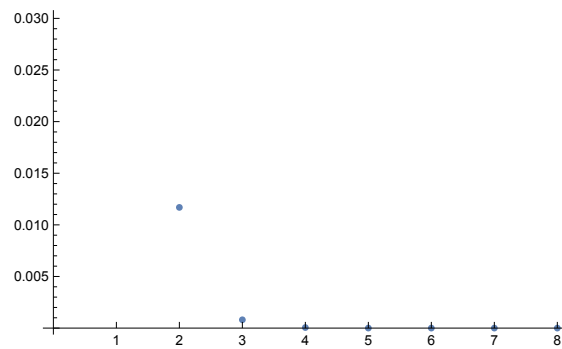


Рис. 2. График ошибок

### 3. Метод коллокаций в подобластях

№	Норма ошибки	Коэффициенты
1	0.117	$a_1 = 0.27$
2	0.02	$a_1 = 0.1876, a_2 = 0.17$
3	$8 \cdot 10^{-4}$	$a_1 = 0.1882, a_2 = 0.193, a_3 = -0.023$
4	$4 \cdot 10^{-5}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1886, a_3 = -0.01, a_4 = -0.0086$
5	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$a_1 = 0.1883, a_2 = 0.1883, a_3 = -0.0094, a_4 = -0.0102, a_5 = 0.0008$

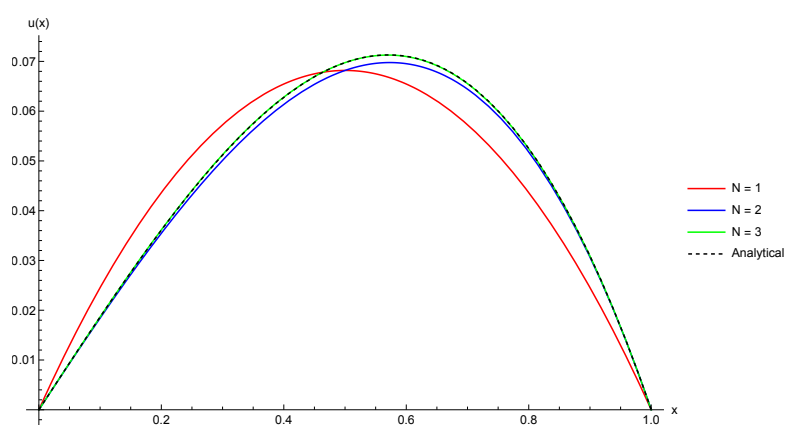


Рис. 3. График полученных решений при различных  $N$

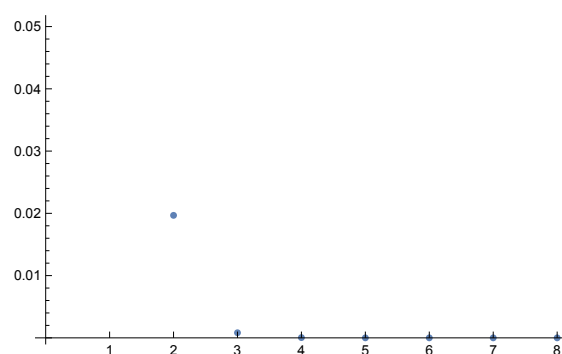


Рис. 4. График ошибок

## 4. Метод Бубнова-Галеркина

№	Норма ошибки	Коэффициенты
1	0.115	$a_1 = 0.2778$
2	0.004	$a_1 = 0.1924, a_2 = 0.1707$
3	$3 \cdot 10^{-4}$	$a_1 = 0.1878, a_2 = 0.1941, a_3 = -0.02341$
4	$7.2 \cdot 10^{-6}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1886, a_3 = -0.01052, a_4 = -0.0086$
5	$4.1 \cdot 10^{-7}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1884, a_3 = -0.0095, a_4 = -0.01, a_5 = 0.0008$

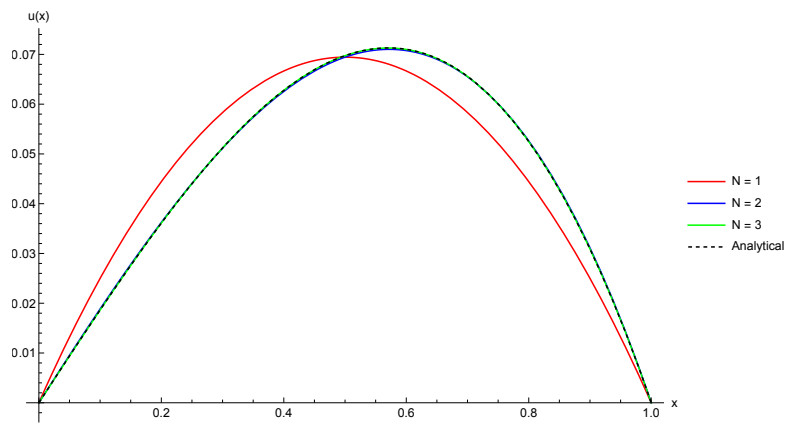
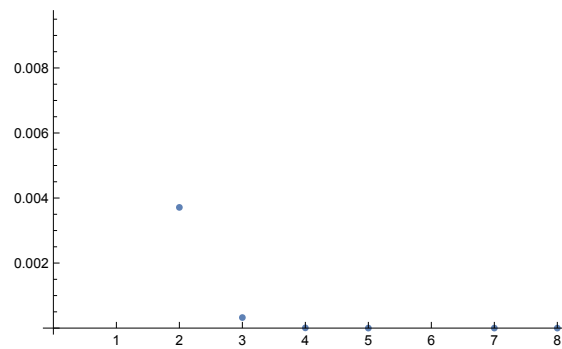
Рис. 5. График полученных решений при различных  $N$ 

Рис. 6. График ошибок

## 5. Метод Галеркина

№	Норма ошибки	Коэффициенты
1	0.115	$a_1 = 0.2778$
2	0.0037	$a_1 = 0.1924, a_2 = 0.1707$
3	$3 \cdot 10^{-4}$	$a_1 = 0.1878, a_2 = 0.1941, a_3 = -0.02341$
4	$7.2 \cdot 10^{-6}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1886, a_3 = -0.01052, a_4 = -0.0086$
5	$4.1 \cdot 10^{-7}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1884, a_3 = -0.0095, a_4 = -0.01, a_5 = 0.0008$

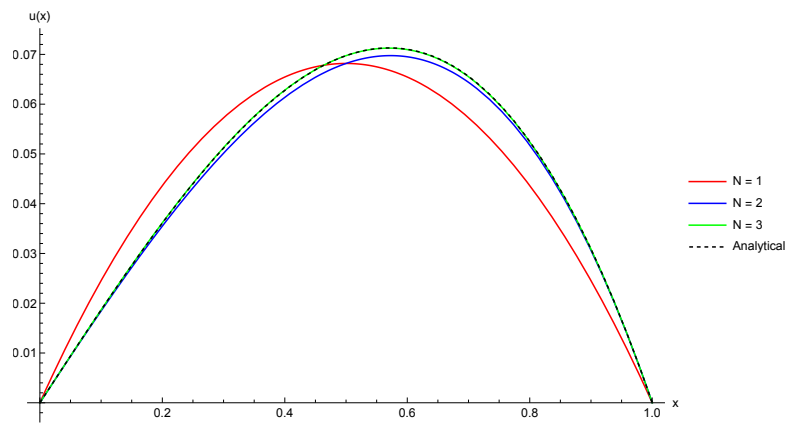


Рис. 7. График полученных решений при различных N

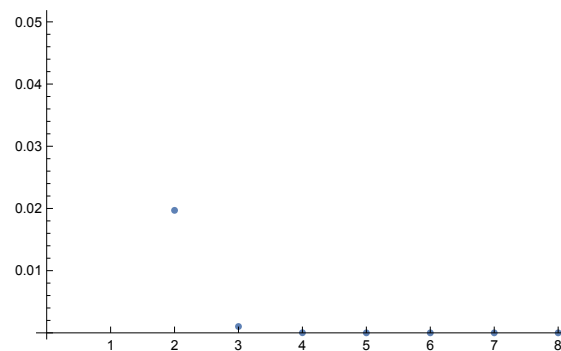


Рис. 8. График ошибок

## 6. Метод наименьших квадратов

№	Норма ошибки	Коэффициенты
1	0.117	$a_1 = 0.2723$
2	0.021	$a_1 = 0.1875, a_2 = 0.1695$
3	$13 \cdot 10^{-3}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1928, a_3 = -0.02332$
4	$2 \cdot 10^{-5}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1885, a_3 = -0.01046, a_4 = -0.008571$
5	$1.23 \cdot 10^{-6}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1884, a_3 = -0.0095, a_4 = -0.01, a_5 = 0.0008$

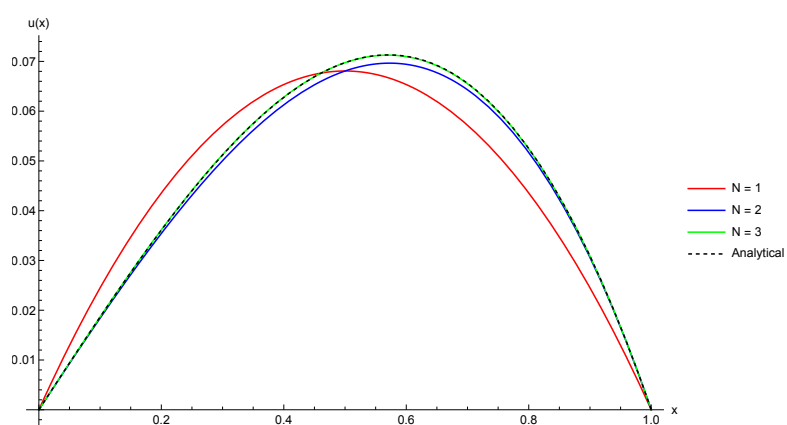


Рис. 9. График полученных решений при различных N

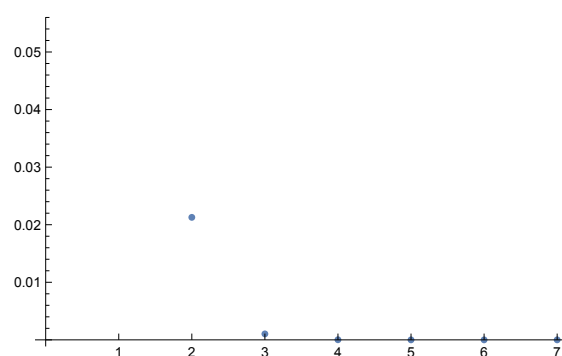


Рис. 10. График ошибок



## 7. Метод Рунге

№	Норма ошибки	Коэффициенты
1	0.115	$a_1 = 0.2778$
2	0.004	$a_1 = 0.1924, a_2 = 0.1707$
3	$3 \cdot 10^{-4}$	$a_1 = 0.1878, a_2 = 0.1941, a_3 = -0.02341$
4	$7.2 \cdot 10^{-6}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1886, a_3 = -0.01052, a_4 = -0.0086$
5	$4.1 \cdot 10^{-7}$	$a_1 = 0.1884, a_2 = 0.1884, a_3 = -0.0095, a_4 = -0.01, a_5 = 0.0008$

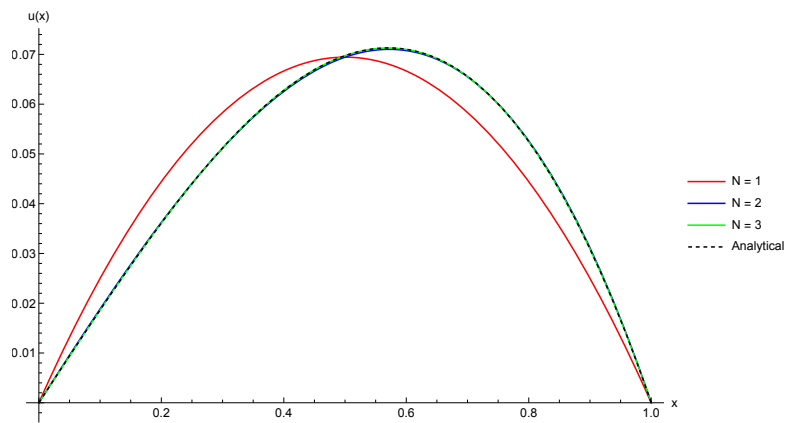


Рис. 11. График полученных решений при различных  $N$

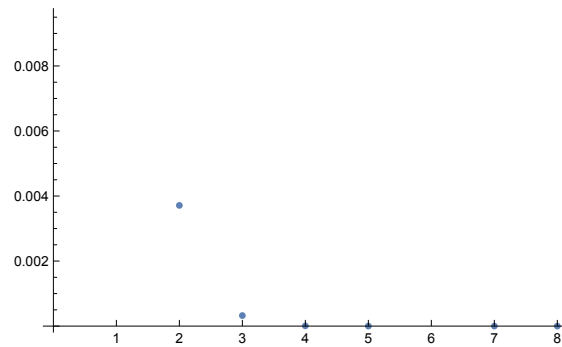


Рис. 12. График ошибок