

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

| ФАКУЛЬТЕТ | Фин на манта на на на начин | |
|-----------|-----------------------------|--|
| ΨAKJIDIEI | Фундаментальные науки | |
| | _ | |
| КАФЕДРА | Прикладная математика | |

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА *К КУРСОВОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:*

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

| Студент | ФН2-62Б | | А.И. Токарев |
|------------|---------------------|-----------------|----------------|
| | (Группа) | (Подпись, дата) | (И.О. Фамилия) |
| | | | |
| Руководите | ель курсовой работы | | В. В. Лукин |
| | | (Подпись, дата) | (И.О. Фамилия) |

2022 г.

Содержание

Введение 3

Введение

Одним из используемых вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике [1]. Он обладает порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^3)$. Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет несколько существенных недостатков: возникновение ощутимых осцилляций на разрывных решениях; некомпактность шаблона, что усложняет проведение параллельных расчетов и определение граничных условий.

Целью данной курсовой работы является анализ варианта метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML) [2]. Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностых ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение на примерах одномерных задач точности методов PPM и PPML, а также поведение решений на границах, в которых происходят разрывы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное уравнение переноса [3]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0. {1}$$

Характеристикой уравнения $(\ref{eq:condition})$ является множество точек (x,t), удовлетворяющее уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = a, (2)$$

то есть множество x - at = b.

Вдоль характеристики выполняется следующее равенство:

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Как результат, получаем аналитическое решение уравнения (??) в виде:

$$y(x,t) = y_0(x-at), (3)$$

где y_0 — начальный профиль.

Уравнение переноса – простейший пример, применяемый для проверки алгоритма на корректность [3]. В задачах газодинамики оператор переноса является составной частью, поэтому любой численный метод для таких моделей обязан проходить проверку простейшим уравнением.

Рассмотрим задачу Коши (начальная задача) для уравнения (??) – поиск решения уравнения переноса на множестве $-\infty < x < +\infty$, t > 0, принимающее заданное значение в начальный момент времени $y(x,0) = y_0(x)$ [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x). \end{cases}$$
(4)

Определим сетку $\Omega_h = \{x_i = l_1 + ih, i = 1 \dots n, h = \frac{l_2 - l_1}{n-1}\}$ — множество узлов, где $[l_1, l_2]$ — отрезок, на котором определена сетка; n — число узлов; h — шаг. Определим y(x) ее разностным аналогом $y_i = y(x_i)$ на этой сетке. Значения y_i будем соотносить с узлами сетки, а $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$ и $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$ — с половинными узлами.

Определив решения y_i в момент времени t_j , можно вычислить \hat{y}_i на следующем временном слое t_{j+1} , применив интегро-интерполяционный метод к уравнению переноса в прямоугольнике $\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]\times [t_j,t_{j+1}]$:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} dt dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} dx dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0 dt dx = 0.$$

Рассмотрим интегралы в левой части по отдельности:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_{j}}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} dt dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[y(x,t_{j+1}) - y(x,t_{j}) \right] dx = h \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x,t_{j+1}) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x,t_{j}) dx \right] = h(\overline{y}(x_{i},t_{j+1}) - \overline{y}(x_{i},t_{j})) = h(\hat{y}_{i} - y_{i}).$$

Воспользуемся особенностью переноса значений по характеристикам для интеграла, подинтегральная функция которого является потоком (рис. ??):

$$\int_{t_{j}}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} dx dt = \int_{t_{j}}^{t_{j+1}} a \left(y(x_{i+\frac{1}{2}},t) - y(y_{x-\frac{1}{2}},t) \right) dt = \int_{x_{i+\frac{1}{2}}-a\tau}^{x_{i+\frac{1}{2}}} ay(x,t_{j}) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}-a\tau}^{x_{i-\frac{1}{2}}} ay(x,t_{j}) dt = a\tau \left(a\overline{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\overline{y}_{i-\frac{1}{2}} \right).$$

Объединяя оба интеграла получаем:

$$h(\hat{y}_i - y_i) + a\tau \left(a\overline{y}_{i + \frac{1}{2}} - a\overline{y}_{i - \frac{1}{2}}\right) = 0 \implies \hat{y}_i = y_i - \frac{a\tau}{h} \left(a\overline{y}_{i + \frac{1}{2}} - a\overline{y}_{i - \frac{1}{2}}\right). \tag{5}$$

Таким образом, используя формулу (??), мы можем переносить средние значения ячеек.

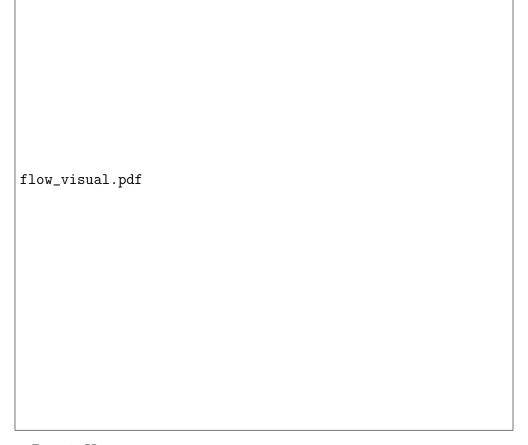


Рис. 1. Интегрирование потока по пространству, вместо времени

2. Методы решения

Основная идея рассматриваемых методов заключается в аппроксимации функции y(x) параболой (рис. $\ref{eq:condition}$) на отрезках вида $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ [1]:

$$y(x) = y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i - \frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L,$$

$$y_i^{(6)} = 6\left[y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L)\right], \quad x \in [x_{i - \frac{1}{2}}, x_{i + \frac{1}{2}}].$$
(6)

Выражение (??) является квадратурной формулой для соотнешния:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi.$$

Значение функции y(x) на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \qquad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}].$$
 (7)

2.1. Кусочно-параболический метод. РРМ

Первым шагом ищем значение $y_{i+\frac{1}{2}}$ интерполяционной процедурой четвертого порядка, в результате получаем значения:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (??), значения δy_i нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, \ 2|y_i - y_{i-1}|, \ 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \operatorname{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \le 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения y(x) следует переопределять значения y_i^L, y_i^R . При этом возможны два сценария:

• y_i является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ функция y(x) должна быть постоянной, а значит:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \le 0;$$
 (8)

• y_i лежит слишком близко к границе – при условии $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$ парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае y_i^L и y_i^R должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$y_i^L = 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2,$$

$$y_i^R = 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2.$$
(9)

После всех проделанных операция функцию y(x) можно считать определенной на сетке Ω_h [1, 2].

Среднее значение данной функции на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}], (\alpha > 0)$ задается формулой, полученной путем аналитического интегрирования (??):

$$\overline{y}_{i+\frac{1}{2}}^{L}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}-\alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x)dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_i^{(6)} \right], \tag{10}$$

а на отрезке $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha], (\alpha > 0)$:

$$\overline{y}_{i+\frac{1}{2}}^{R} = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^{L} + \frac{\alpha}{2h} \left[\Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h} \right) y_{i+1}^{(6)} \right].$$
 (11)

2.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PPML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения y(x). Чтобы обойти данное ограничение, можно определять y_i^L и y_i^R с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики

линейного уравнения переноса (??). Для ясности будем рассматривать правую границу $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$. Для того, чтобы вычислить ее на следующем временном слое $t_{j+1} = t_j + \tau$, необходимо двигаться от точки $x_{i+\frac{1}{2}}$ со значением $y_{i+\frac{1}{2}}$ вдоль характеристики до предыдущего момента времени t_j :

1. a > 0, следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1-\xi)),$$

$$\xi = 1 - \frac{a\tau}{h},$$
(12)

что соответствует красной точке на рис. ??.

2. a < 0, следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_{i+1}^L(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1-\xi)),$$

$$\xi = -\frac{a\tau}{h},$$

что соответствует синей точке на рис. ??.

Алгоритм (??) реализован на локальном шаблоне, то есть для получения граничных точкек при переходе на следующий временной слой не нужно использовать информацию с соседних ячеек. Нахождение среднего значения на отрезке (??), (??) и смещение экстремума (??), (??) производятся аналогично [2].

2.3. Потоки и усредненное значение на отрезке

При возникновении разрыва на границе двух смежных ячеек в точке $x_{i+\frac{1}{2}}$ возникает некоторое усредненное состояние $y^*(x_{i+\frac{1}{2}},t)$. Одномерное уравнение переноса имеет всего одну характеристику, поэтому его решение в момент времени $t=t_{i+1}$ будет определяться:

- 1. При a>0 усреднением по пространствунному интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}}-a au,x_{i+\frac{1}{2}}]$ со значением $y^\star(x_{i+\frac{1}{2}},t_{j+1})=\overline{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(a au);$
- 2. При a<0 усреднением по интервалу $[x_{i+\frac{1}{2}}\tau,x_{i+\frac{1}{2}}+a\tau]$ со значением $y^{\star}(x_{i+\frac{1}{2}},t_{j+1})=\overline{y}_{i+\frac{1}{2}}^{R}(-a\tau).$

Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt = a^+ y_{i+\frac{1}{2}}^L + a^- y_{i+\frac{1}{2}}^R,$$

$$a^+ = \max(0, a), \quad a^- = \min(a, 0).$$
(13)

3. Анализ и сравнение

Оценивать решение будем по норме ошибки в пространствах C, L_1, L_2 :

$$||z||_{C} = \max_{\Omega_{h} \times [0,T]} |z|, \quad z = |y(x,t) - y_{h}(x,t)|;$$

$$||z||_{L_{1}} = \int_{0}^{T} \int_{\Omega_{h}} |z| \, dx dt, \quad z = |y(x,t) - y_{h}(x,t)|;$$

$$||z||_{L_{2}} = \left(\int_{0}^{T} \int_{\Omega_{h}} z^{2} \, dx dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = |y(x,t) - y_{h}(x,t)|,$$

для методов актуальна сходимость по норме L_2 .

Рассмотрим несколько начальных профилей [3] и проанализируем точность каждого из методов в различных сценариях. Примем $l=200, l_1=10, l_2=30, l_{11}=\frac{50}{3}, l_{22}=\frac{70}{3}, l_{12}=20, T=200, h=1, a=1.$

3.1. Анализ точного вычисления граничных и серединных узлов

Рассмотрим, какой прирост точности дает метод PPML при числе Куранта $\sigma = 1$. В качестве иллюстрации приведем кусочно-линейный профиль – правый треугольник.

Правый треугольник задается уравнением:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0, & x < l_1; \\ y_0(x) = \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1}, & x \in [l_1, l_2]; \\ y_0(x) = 0, & x > l_2. \end{cases}$$

На рис. ?? показано численное решение, полученное путем применения метода PPM.

Заметим, что на концах треугольников происходит разрыв решений в ячейках y_i^L , y_i , y_i^R , поэтому, например, вычисление нормы в пространтсве C[a,b]неприменимо для данных методов, потому что ее значение не будет уменьшаться при измельчении шага на кусочно-линейных графиках.

Из таблицы ?? можно сделать вывод о порядке точности метода PPM для профиля "правый треугольник":

В пространстве
$$L_1$$
: $\psi_h^{(2)} = 4.05 \approx 4$; $\psi_{\tau}^{(2)} = 1.995 \approx 2$.

В пространстве
$$L_2$$
: $\psi_h^{(2)} = 2.003 \approx 2$; $\psi_{\tau}^{(2)} = 1.41$.

| | h = 1 | | | h = 0.5 | | | h = 0.25 | | |
|-------------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|
| | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ |
| $\ \cdot\ _C$ | 0.5125 | 0.58 | 0.65 | 0.506 | 0.61 | 0.695 | 0.503 | 0.613 | 0.696 |
| $\ \cdot\ _{L_1}$ | 1.038 | 0.519 | 0.26 | 0.255 | 0.13 | 0.064 | 0.063 | 0.0315 | 0.0158 |
| $\ \cdot\ _{L_2}$ | 0.622 | 0.44 | 0.311 | 0.309 | 0.22 | 0.154 | 0.154 | 0.1087 | 0.077 |

Таблица 1. Нормы ошибок для правого треугольника в методе РРМ

На рис. ?? показано решение, полученное с применением метода PPML. На концах треугольников параболы в каждой разностной ячейке передают значения гораздо точнее, чем в методе PPM.

Скорость стремления нормы к нулю (таблица ??) практически идентична методу PPM, однако визуально график больше приближен к точному решению. Оценим порядок точности метода PPML:

В пространстве $L_1: \psi_h^{(2)} \approx 4; \psi_{\tau}^{(2)} \approx 2.$

В пространстве L_2 : $\psi_h^{(2)} \approx 2$; $\psi_{\tau}^{(2)} \approx 1.4$.

Таблица 2. Нормы ошибок для правого треугольника в методе PPML

| | h = 1 | | | h = 0.5 | | | h = 0.25 | | |
|-------------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|
| | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ |
| $\ \cdot\ _C$ | 0.5125 | 0.5039 | 0.5544 | 0.50625 | 0.502 | 0.5487 | 0.5031 | 0.5001 | 0.5458 |
| $\ \cdot\ _{L_1}$ | 1.0375 | 0.5187 | 0.2593 | 0.255 | 0.1273 | 0.0637 | 0.063 | 0.03154 | 0.01577 |
| $\ \cdot\ _{L_2}$ | 0.6228 | 0.4404 | 0.3114 | 0.3087 | 0.2183 | 0.1544 | 0.1537 | 0.1087 | 0.0768 |

3.2. Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

Рассмотрим $\sigma = 0.8$, в качестве примера рассмотрим профиль "зуб":

$$y_0(x) = \begin{cases} -\frac{2(x-l_1)}{3(l_{11}-l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2(x-l_2)}{3(l_2-l_{22})} + 1, & x \in (l_{22}, l_2]. \end{cases}$$

На рис. ?? заметна значительная диссипация и неодинаковые высоты на зубцах.

Тем не менее, несмотря на диссипацию, сходимость по норме L_2 сохраняется (таблица $\ref{eq:constraint}$). Точность метода PPM для профиля "зуб":

В пространстве
$$L_1$$
: $\psi_h^{(2)} \approx 4$; $\psi_{\tau}^{(2)} \approx 2$.

В пространстве
$$L_2$$
: $\psi_h^{(2)} \approx 2$; $\psi_{\tau}^{(2)} \approx 1.4$.

h = 1h = 0.5h = 0.25 $\tau = 1$ $\tau = 0.5$ $\tau = 0.25$ $\tau = 1$ $\tau = 0.5$ $\tau = 0.25$ $\tau = 1$ $\tau = 0.5$ $\tau = 0.25$ 0.525 0.754 0.75010.7494 $\|\cdot\|_C$ 0.840.51250.83750.506250.8352.1 1.05 0.525 0.5125 0.260.130.127 0.0633 0.032 $\|\cdot\|_{L_1}$ 0.63 0.45 0.44 0.311 0.22 0.22 0.1540.11 $\|\cdot\|_{L_2}$

Таблица 3. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе РРМ

Метод PPML (рис. ??) характеризиуется менее выраженной диссипацией и более ровными "горбами".

Помимо этого, анализ норм ошибок для метода PPML также показывает повышенную точность во всех рассматриваемых пространствах (таблица ??). Точность метода остается такой же, как и во всех предыдущих случаях:

В пространстве
$$L_1$$
: $\psi_h^{(2)} \approx 4$; $\psi_{\tau}^{(2)} \approx 2$.

В пространстве
$$L_2$$
: $\psi_h^{(2)} \approx 2$; $\psi_{\tau}^{(2)} \approx 1.4$.

h = 1h = 0.5h = 0.25 $\tau = 0.5$ $\tau = 0.25$ $\tau = 1$ $\tau = 0.5$ $\tau = 0.25$ $\tau = 1$ $\tau = 0.5$ $\tau = 0.25$ $\tau = 1$ 0.5250.64370.63470.5125 0.6343 0.62620.50625 0.62970.6219 $\|\cdot\|_C$ 1.0490.52490.51250.25630.12650.06330.03164 $\|\cdot\|_{L_1}$ 2.1 0.12810.8950.6330.44780.44030.3113 0.22020.21830.15440.10916 $\| \cdot \|_{L_2}$

Таблица 4. Нормы ошибок для профиля "зуб"в методе PPML

3.3. Анализ методов на непрерывном графике

Пусть $\sigma = 0.5$. Сравним методы на примере профиля:

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{l_2 - l_1}(x - l_1)\right).$$

Как и следовало ожидать, несмотря на гладкость профиля, диссипация в случае метода PPM (рис. ??), ровно как и в методе PPML (рис. ??) остается, хотя и менее выраженная.

График сохраняет свою гладкость, однако происходят заметные отклонения от точного решения в окрестностях оснований профилей. Хотя таблицы с погрешностями решений ??, ?? показывают достаточно хороший результат для обоих методов, все же нельзя не отметить, что PPML стабильнее передает точное решение, а также обладает меньшей диссипацией.

Таблица 5. Нормы ошибок для косинуса в методе РРМ

| | h=1 | | | h = 0.5 | | | h = 0.25 | | |
|-------------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|
| | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ |
| $\ \cdot\ _C$ | 0.078 | 0.244 | 0.242 | 0.039 | 0.11 | 0.156 | 0.0196 | 0.044 | 0.06 |
| $\ \cdot\ _{L_1}$ | 0.195 | 0.098 | 0.048 | 0.0245 | 0.012 | 0.006 | 0.003 | 0.0015 | 0.00077 |
| $\ \cdot\ _{L_2}$ | 0.028 | 0.02 | 0.014 | 0.005 | 0.0035 | 0.00245 | 0.00089 | 0.0006 | 0.00044 |

Таблица 6. Нормы ошибок для косинуса в методе PPML

| | h = 1 | | | h = 0.5 | | | h = 0.25 | | |
|-------------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|------------|--------------|---------------|
| | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ | $\tau = 1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 0.25$ |
| $\ \cdot\ _C$ | 0.00615 | 0.0479 | 0.0576 | 0.00154 | 0.0158 | 0.01859 | 0.00039 | 0.00515 | 0.00599 |
| $\ \cdot\ _{L_1}$ | 0.19475 | 0.09738 | 0.0487 | 0.02449 | 0.01225 | 0.0061 | 0.00306 | 0.00153 | 0.00076 |
| $\ \cdot\ _{L_2}$ | 0.0277 | 0.01958 | 0.01384 | 0.005 | 0.00351 | 0.00248 | 0.00088 | 0.00059 | 0.00044 |

Заключение 16

Заключение

Рассмотрен кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. Выбор в пользу использования решений с предыдущего временного слоя, вместо интерполяционной процедуры, оказался удачным, так как обеспечивает более точное решение и уменьшенную диссипацию. Метод РРМL протестирован на ряде примеров, рассмотренных с различными шагами, числами Куранта и профилями. Точность оценивалась на основе норм разности между точным и численным решениям в пространствах C, L_1, L_2 . В пространствах L_1, L_2 РРМL оказался точнее во всех случаях. Однако в пространстве C результат нельзя интерпретировать однозначно. Но как уже отмечалось, актуальной является сходимость нормы ошибки в L_2 .

Список литературы

- 1. Corella P., Woodward P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. P. 174 201.
- 2. М. В. Попов, С. Д. Устюгов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007.- С. 2056-2060.
- 3. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 591 с.
- 4. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. 424 с.
- 5. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2001. 608 с.

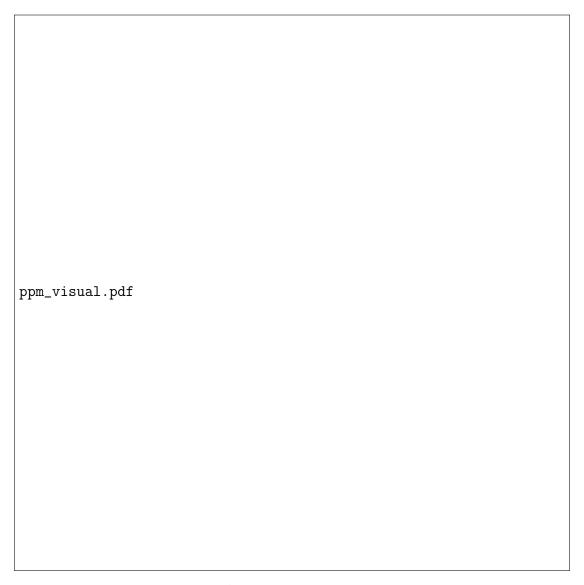


Рис. 2. Парабола внутри разностной ячейки

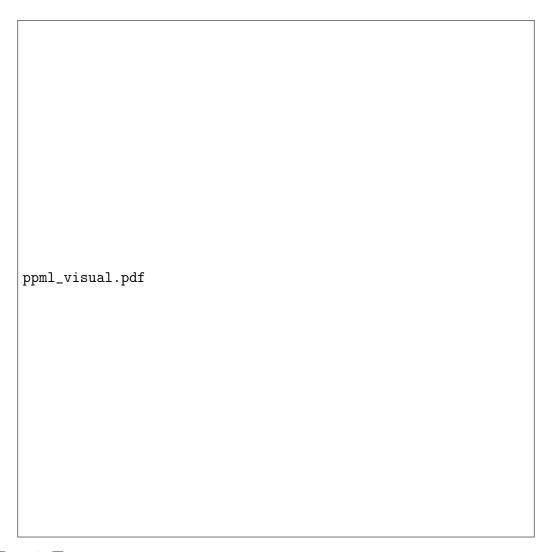


Рис. 3. Перенос значений в граничных точках вдоль характеристик в методе PPML

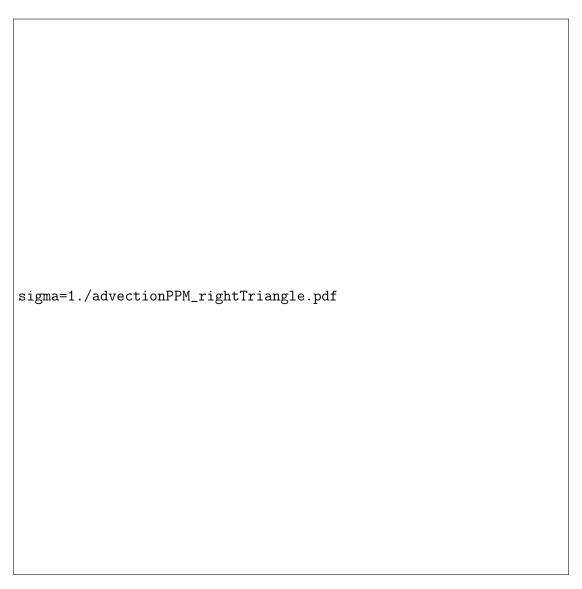


Рис. 4. Правый треугольник для РРМ при $\sigma=1$

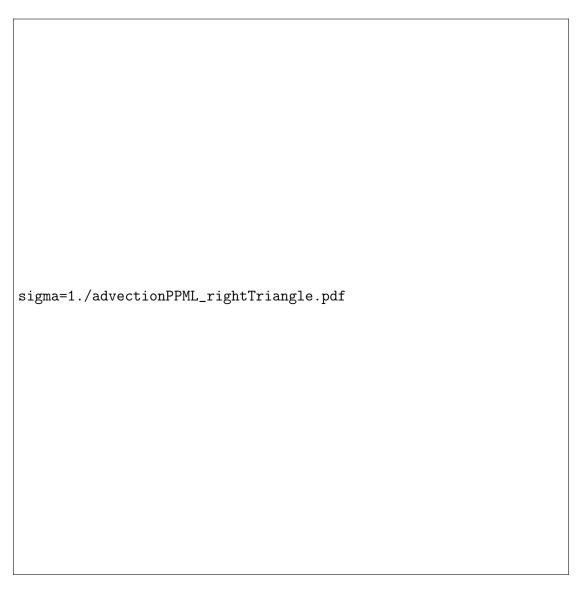


Рис. 5. Правый треугольник для PPML при $\sigma=1$

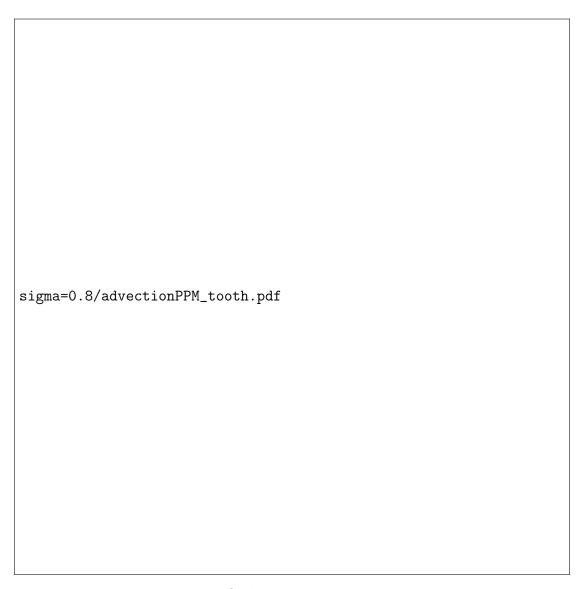


Рис. 6. Зуб для РРМ при $\sigma=0.8$

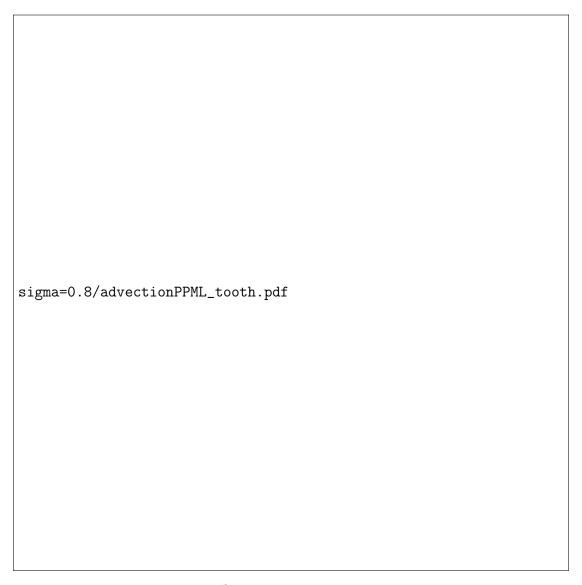


Рис. 7. Зуб для PPML при $\sigma=0.8$

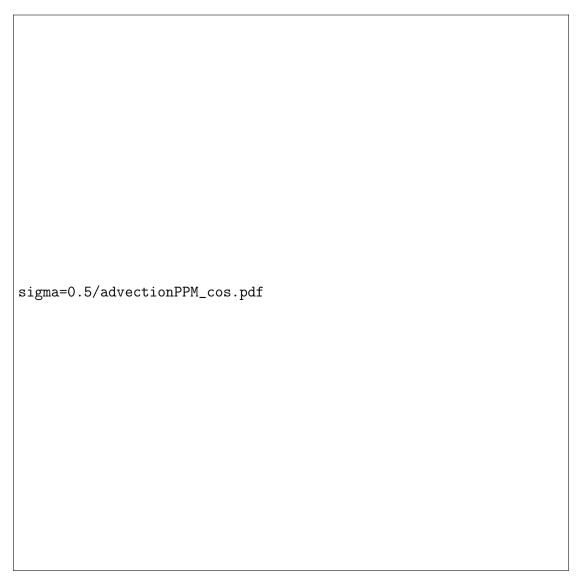


Рис. 8. Косинус для РРМ при $\sigma=0.5$

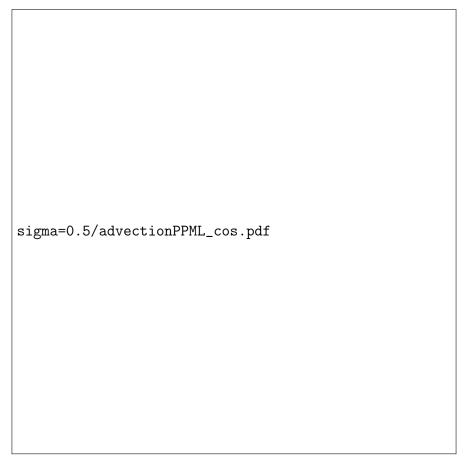


Рис. 9. Косинус для PPML при $\sigma=0.5$