



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки
КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Домашнее задание
по курсу
"Математические модели прикладной механики"
на тему:

*Упругие характеристики
поликристаллических металлов*

Вариант 15

$\alpha\text{-Fe} + \text{Cd}$

Студент _____
ФН2-72Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

Преподаватель

(Подпись, дата)

И. Ю. Савельева

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

| | |
|---|----|
| Постановка задачи | 3 |
| Список условных обозначений | 4 |
| 1. Матрицы податливости и упругости для различных типов решеток . | 5 |
| 1.1. Кубическая решетка | 5 |
| 1.2. Гексагональная решетка | 6 |
| 2. Зависимость линейной податливости от направления единичного вектора | 7 |
| 2.1. Линейная податливость для Cd (ГПУ) | 7 |
| 2.2. Линейная податливость для α -Fe (Кубическая кристаллическая решетка) | 8 |
| 2.2.1. Единичный вектор в плоскости грани | 8 |
| 2.3. Вектор находится в плоскости, содержащей диагонали двух граней, имеющие общую точку | 9 |
| 2.4. Единичный вектор лежит в плоскости, содержащей диагонали грани и куба, имеющие общую точку | 11 |
| 2.5. Единичный вектор лежит в плоскости, содержащей диагональ куба и ребро, имеющие общую точку | 12 |
| 3. Верхняя и нижняя оценки параметров λ , μ , E , ν | 15 |
| 3.1. Кубическая кристаллическая решетка | 15 |
| 3.2. ГПУ | 16 |
| 4. Задача Эшелби | 17 |
| Список литературы | 18 |

Постановка задачи

Для заданной пары чистых металлов ($\alpha\text{-Fe}$ – железо, Cd – кадмий) по значению коэффициентов упругости (или податливости) кристаллов вычислить элементы матрицы коэффициентов податливости (или упругости), сравнить точность обращения матриц с вычислением по формулам, и построить графики зависимостей линейной податливости от направления единичного вектора для гексагональной кристаллической решетки в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла, а для кубической кристаллической решетки в плоскости грани и в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба. Для кристаллической решетки каждого из металлов определить направления, по которым линейная податливость имеет экстремальные значения. Найти отношение полуосей эллипсоида вращения, образующегося после действия всестороннего давления на шар из металла с ГПУ кристаллической решеткой.

Для каждого из металлов в предположении хаотической ориентации зерен в поликристалле найти верхнюю и нижнюю оценки продольной упругости и сравнить полученные значения с вычисленными для случая статистически усредненной шаровой формы кристаллических зерен. Провести аналогичные расчеты и построить графики для пористого двухфазного сплава-смеси заданной пары металлов при трех фиксированных значениях объемной пористости, равных 0; 0.1 и 0.2, в зависимости от отношения $\frac{V_1}{(V_1 + V_2)} \in [0; 1]$, где V_1 и V_2 — объемные доли металлов в сплаве.

| | | | | | | | | | |
|--------------------|----------|----------|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha\text{-Fe}$ | C_{11} | C_{12} | C_{14} | Cd | S_{11} | S_{12} | S_{13} | S_{33} | S_{44} |
| ГПа | 234 | 135 | 114 | ТПа ⁻¹ | 12.4 | -0.76 | -9.97 | 37.5 | 63.7 |

Таблица 1. Коэффициенты упругости и податливости

Список условных обозначений

| | |
|-------------------------------|--|
| C | — матрица коэффициентов упругости |
| C_{ij} | — элементы матрицы C ($i, j = \overline{1, 6}$) |
| S | — матрица коэффициентов податливости |
| S_{ij} | — элементы матрицы S ($i, j = \overline{1, 6}$) |
| $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ | — единичный вектор нормали, заданный в кристаллографических осях. Компоненты n_i — проекции на Ox'_i |
| S_n | — линейная податливость в направлении \vec{n} |
| $e^{(\vec{n})}$ | — относительное удлинение в направлении \vec{n} |
| σ_{kl} | — компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$ ($k, l = \overline{1, 3}$) |
| S_{ijkl} | — компоненты тензора податливости \hat{S} ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) |
| ε_{kl} | — компоненты тензора малой деформации $\hat{\varepsilon}$ ($k, l = \overline{1, 3}$) |
| p | — давление |
| δ_{ij} | — символ Кронекера |
| V_0 | — контрольный объем |
| I_{ijkl} | — единичный тензор 4-го ранга ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) |
| ν | — коэффициент Пуассона |
| C_{ijkl} | — компоненты тензора коэффициентов упругости \hat{C} ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) |
| C_{ijkl}^o | — эффективные упругие характеристики поликристалла ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) |
| S_{ijkl}^o | — эффективные характеристики податливости поликристалла ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) |
| ω_{ijkl} | — тензор Эшелби ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) |

1. Матрицы податливости и упругости для различных типов решеток

1.1. Кубическая решетка

В кристаллах с кубической решеткой матрицы коэффициентов податливости S и упругости C содержат лишь по 3 независимых и отличных от нуля коэффициента:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}.$$

Обращение дает следующие расчетные формулы для ненулевых элементов матрицы S :

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_K}, \quad S_{12} = -\frac{C_{12}}{C_K}, \quad S_{44} = \frac{1}{C_{44}}, \quad C_K = (C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}).$$

Пользуясь системой компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, получим эти значения:

$$S_{11} = 7.4, \quad S_{12} = -2.7, \quad S_{13} = 8.8, \quad S_{ij} = [\text{ТПа}^{-1}].$$

Если вычислять эти коэффициенты путем обращения матрицы C , то можно оценить точность заданных формул:

$$\|S - C^{-1}\| = 2 \cdot 10^{-27}$$

1.2. Гексагональная решетка

В кристаллах с гексагональной решеткой в матрицах S и C уже присутствуют по 5 независимых компонент:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix},$$

где $S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$ и $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$.

Обращение S дает следующие расчетные формулы для ненулевых элементов матрицы C :

$$C_{11} = \frac{S_{33}}{2S_r} + \frac{1/2}{S_{11} - S_{12}}, \quad C_{12} = \frac{S_{33}}{2S_r} - \frac{1/2}{S_{11} - S_{12}}, \quad C_{13} = -\frac{S_{13}}{S_r}, \quad C_{33} = \frac{S_{11} + S_{12}}{S_r},$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}}, \quad S_r = (S_{11} + S_{12})S_{33} - 2S_{13}^2.$$

Вычисляя эти значения, получим:

$$C_{11} = 116.9, \quad C_{12} = 40.9, \quad C_{13} = 42, \quad C_{33} = 49, \quad C_{44} = 15.7, \quad C_{66} = 38, \\ C = [\text{ГПа}].$$

А норма ошибки составляет:

$$\|C - S^{-1}\| = 1.5 \cdot 10^{-5}.$$

2. Зависимость линейной податливости от направления единичного вектора

Податливость кристаллов с кубическими решетками в направлении действия растягивающей или сжимающей силы равна:

$$S_n = S_{11} - S_{44}(S^* - 1)(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2), \quad (1)$$

$$S^* = 2 \frac{S_{11} - S_{12}}{S_{44}}.$$

Из формулы 1 видно, что при $S^* = 1$ податливость не зависит от направления силы.

Податливость кристаллов с ГПУ-решетками зависит от угла между оптической кристаллографической осью Ox'_3 и направлением силы:

$$S_n = S_{11}(1 - n_3^2) + S_{33}n_3^4 + (2S_{13} + S_{44})n_3^2(1 - n_3^2), \quad (2)$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ – единичный вектор, определяющий направление силы.

2.1. Линейная податливость для Cd (ГПУ)

Рассмотрим случай, когда \vec{n} лежит в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла. Из этого следует, что $n_3 = \cos \gamma$, где $\gamma = \widehat{(\vec{n}, Ox'_3)}$, $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

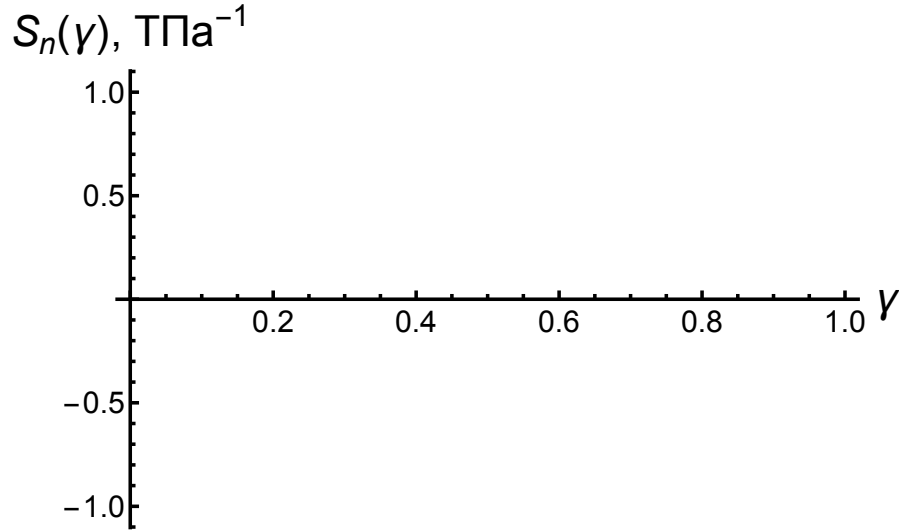


Рис. 1. График линейной податливости в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла

2.2. Линейная податливость для α -Fe (Кубическая кристаллическая решетка)

2.2.1. Единичный вектор в плоскости грани

Есть три плоскости, содержащие начало координат кристаллографической системы:

1. $\vec{n} \in \pi_1 : n_3 = 0, n_1 = \cos \alpha, n_2 = \sin \alpha, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\vec{n} \in \pi_2 : n_2 = 0, n_1 = \cos \beta, n_3 = \sin \beta, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\vec{n} \in \pi_3 : n_1 = 0, n_2 = \cos \gamma, n_3 = \sin \gamma, \gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Достаточно рассмотреть один из трех случаев. Выберем $\vec{n} \in \pi_1$. Подставив эти значения в (1), получим:

$$S_n(\alpha) = S_n(\cos \alpha, \sin \alpha, 0) = S_{11} - (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha.$$

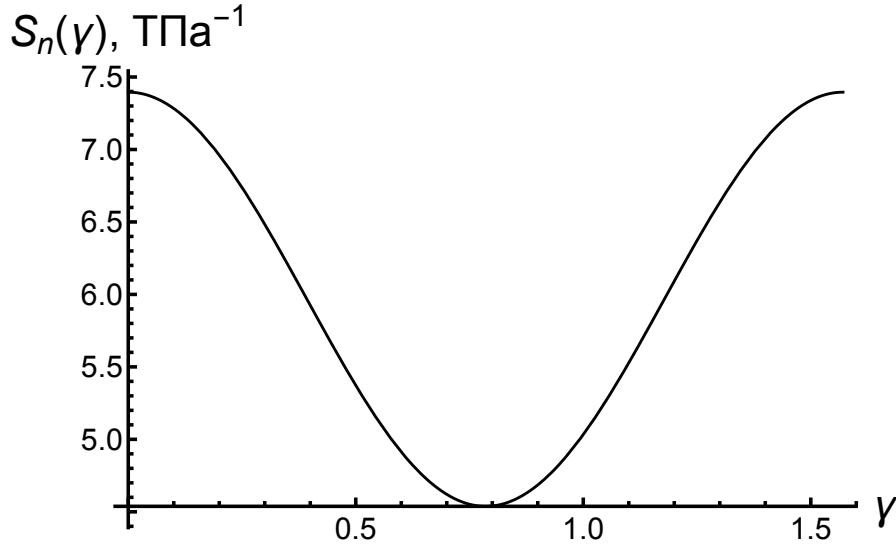


Рис. 2. График линейной податливости в плоскости грани куба

2.3. Вектор находится в плоскости, содержащей диагонали двух граней, имеющие общую точку

Пусть первая диагональ лежит в плоскости π_2 , вторая — в π_3 , а общая точка — начало координат. Векторы $\vec{b}_1 = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b}_2 = \vec{j} + \vec{k}$, лежат на этих диагоналях, следовательно, в рассматриваемой плоскости. Но не ортогональны, потому что $\cos \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \frac{1}{2}$. Ортогонализируем по алгоритму Грама-Шмидта:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}),$$

$$\vec{d}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{e}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{e}_1 = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{d}_2}{\|\vec{d}_2\|} = -\frac{1}{6}\vec{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}.$$

Тогда вектор \vec{e}_3 определим:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}.$$

$$A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Тогда получим

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \alpha \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

В случае, если $\pi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ вектор \vec{n} расположен внутри куба и плоскости $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Получим зависимость:

$$S_n(\alpha) = S_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \alpha, \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \alpha\right).$$

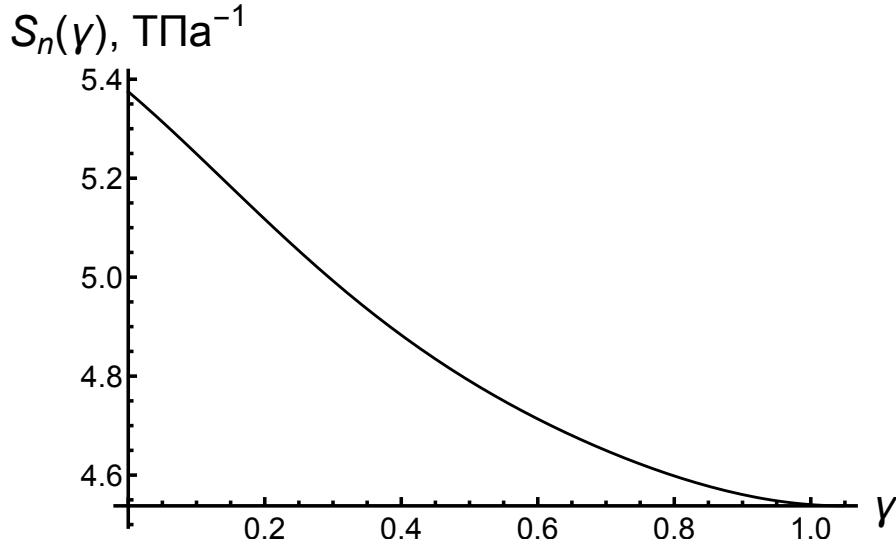


Рис. 3. График $\xi_n(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$

Получаем, что графиком функции является прямая, параллельная оси абсцисс. Полученный результат закономерен, так как $n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2 = \frac{1}{4}$.

2.4. Единичный вектор лежит в плоскости, содержащей диагонали грани и куба, имеющие общую точку

Пусть диагональ грани лежит в плоскости π_3 , диагональ куба проходит через начало координат. Векторы $\vec{b}_1 = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ лежат на этих диагоналях, а следовательно и в рассматриваемой плоскости. Но они не ортогональны, так как $\cos(\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Применим к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}), \\ \vec{d}_2 &= \vec{b}_2 - \langle \vec{e}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{e}_1 = \vec{j}, \\ \vec{e}_2 &= \vec{j}.\end{aligned}$$

Оставшийся вектор \vec{e}_3 определим из соотношения

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{k})$$

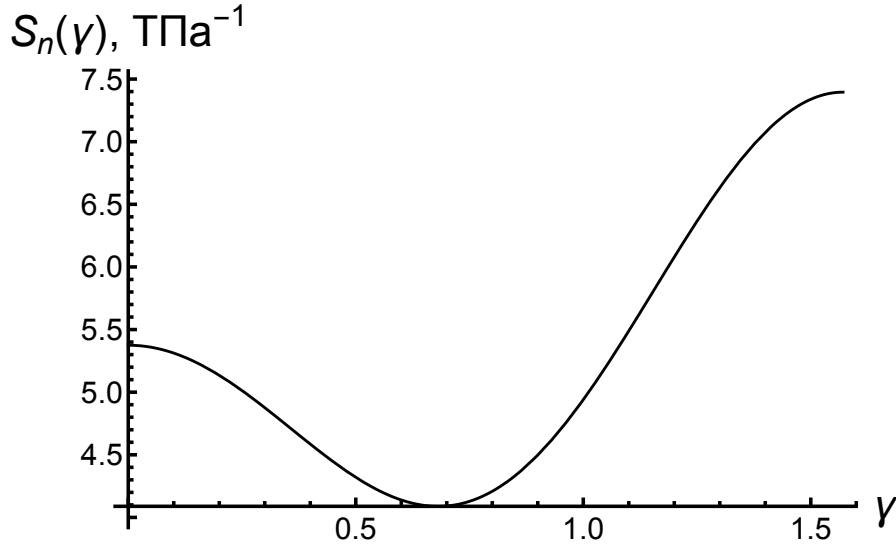
Выберем $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в качестве базиса e . Тогда

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

При $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ вектор \vec{n} расположен внутри куба в плоскости $-x_1 + x_3 = 0$. Получим зависимость

$$S_n(\alpha) = S_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha, \sin \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha\right).$$

Рис. 4. График $S_n(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

2.5. Единичный вектор лежит в плоскости, содержащей диагональ куба и ребро, имеющие общую точку

Пусть диагональ куба проходит через начало координат, ребро лежит на оси x_1 . Векторы $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{b}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ лежат на ребре и диагонали соответственно, а следовательно, и в рассматриваемой плоскости. Но они не ортогональны, так как $\cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{b}_2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Применим к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned}\vec{d}_2 &= \vec{b}_2 - \langle \vec{e}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{e}_1 = \vec{j} + \vec{k}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k}).\end{aligned}$$

Оставшийся вектор \vec{e}_3 определим из соотношения

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k}).$$

Выберем $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в качестве базиса \mathcal{E} . Тогда

$$\mathcal{A}_{B \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

При $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ вектор \vec{n} расположен внутри куба в плоскости $-x_2 + x_3 = 0$.
Получим зависимость

$$S_n(\alpha) = S_n\left(\cos \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right).$$

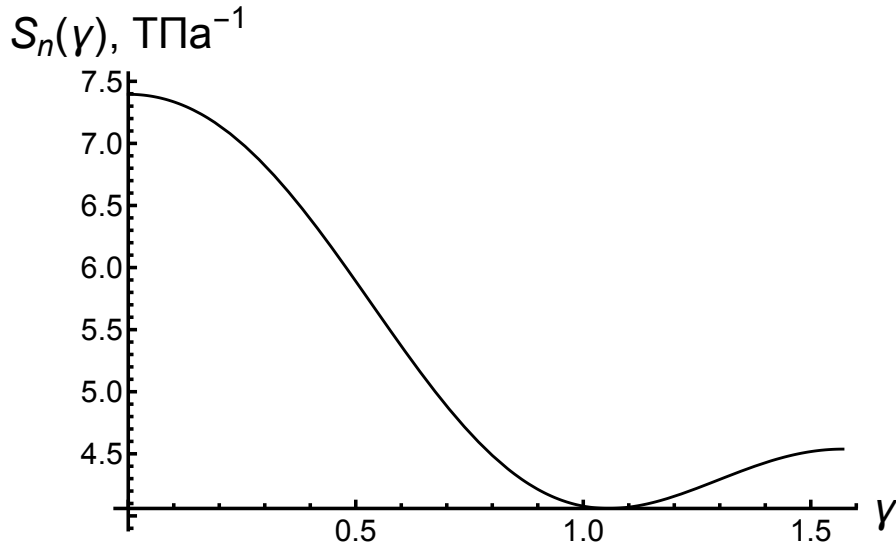


Рис. 5. График $S_n(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Рассмотренная в предыдущем разделе плоскость удовлетворяет условиям этого пункта, то есть рис. 4 подходит и для рассматриваемого в данном пункте случая. Заметим, что если повернуть плоскость рис. 5 на угол π по оси, совпадающей с осью OS_n , то с помощью преобразования параллельного переноса можно совместить кривые на рис. 5 и рис. 5.

Приведем графики, соответствующие в одной системе координат:

Заметим, что при малых значениях параметра α графики на рис. 6 практически совпадают. Объяснить результат можно следующим образом. Если преобразовать тригонометрическое выражение, которое присутствует в $S_n(\alpha) =$

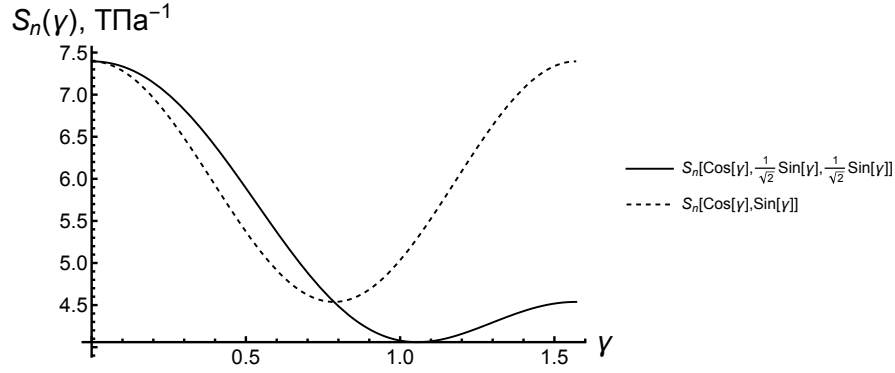


Рис. 6. График $S_n(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$S_n\left(\cos \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right)$, то получим:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right)^2 = \\ = \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{4}. \end{aligned}$$

При сравнении полученного выражения с тригонометрическим выражением из

$$S_n(\alpha) = S_n(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$$

видно, что эти выражения отличаются друг от друга на величину четвертого порядка малости при $\alpha \rightarrow 0$.

3. Верхняя и нижняя оценки параметров λ, μ, E, ν

Для изотропных сред известно:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{9}C_{iikk}^0, \quad \frac{1}{\lambda} = S_{iikk}^0, \quad i, k = 1, 2, 3, \\ \mu &= \frac{1}{10}\left(C_{ikik}^0 - \frac{1}{3}C_{iikk}^0\right), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{2}{5}\left(S_{ikik}^0 - \frac{1}{3}S_{iikk}^0\right), \quad i, k = 1, 2, 3, \\ \frac{1}{E} &= \frac{1}{9\lambda} + \frac{1}{3\mu}, \quad \nu = \frac{E}{2\mu} - 1.\end{aligned}$$

Данные выражения можно упростить, группируя парные индексы:

$$\begin{aligned}C_{iikk} &= C_{11} + C_{22} + C_{33} + 2C_{12} + 2C_{13} + 2C_{23}, \\ C_{ikik} &= C_{11} + C_{22} + C_{33} + 2C_{66} + 2C_{55} + 2C_{44}, \\ S_{iikk} &= S_{11} + S_{22} + S_{33} + 2S_{12} + 2S_{13} + 2S_{23}, \\ S_{ikik} &= S_{11} + S_{22} + S_{33} + \frac{S_{66}}{2} + \frac{S_{55}}{2} + \frac{S_{44}}{2}.\end{aligned}$$

3.1. Кубическая кристаллическая решетка

$$\begin{aligned}\lambda^+ &= \frac{1}{3}(C_{11} + C_{12}), \quad \frac{1}{\lambda^-} = 3(S_{11} + 2S_{12}), \\ \mu^+ &= \frac{1}{5}(C_{11} - C_{12} + 3C_{44}), \quad \frac{1}{\mu^-} = \frac{1}{5}(4(S_{11} - S_{12} + 3S_{44})), \\ E^+ &= \frac{1}{\frac{1}{9\lambda^-} + \frac{1}{3\mu^-}}, \quad E^- = \frac{1}{\frac{1}{9\lambda^+} + \frac{1}{3\mu^+}}, \\ \nu^+ &= \frac{E^-}{2\mu^-} - 1, \quad \nu^- = \frac{E^+}{2\mu^+} - 1.\end{aligned}$$

Для α -Fe эти величины равны соответственно:

| λ^- | λ^+ | μ^- | μ^+ | E^- | E^+ | ν^- | ν^+ |
|-------------|-------------|---------|---------|-------|-------|---------|---------|
| 168.0 | 168.0 | 74.94 | 88.2 | 195.7 | 225.2 | 0.28 | 0.305 |

Таблица 2. Оценка параметров Ламе, модуля упругости и коэффициента Пуассона для железа

3.2. ГПУ

$$\lambda^+ = \frac{1}{9}(2C_{11} + C_{33} + 2(C_{12} + 2C_{13})), \quad \frac{1}{\lambda^-} = 2(S_{11} + 2S_{12}),$$

$$\mu^+ = \frac{1}{30}(7C_{11} - 5C_{12} - 4C_{13} + 2C_{33} + 12C_{44}), \quad \frac{1}{\mu^-} = \frac{2}{15}(7S_{11} + 2S_{33} + 3S_{44} - 5S_{12} - 4S_{13}),$$

$$E^+ = \frac{1}{\frac{1}{9\lambda^-} + \frac{1}{3\mu^-}}, \quad E^- = \frac{1}{\frac{1}{9\lambda^+} + \frac{1}{3\mu^+}},$$

$$\nu^+ = \frac{E^-}{2\mu^-} - 1, \quad \nu^- = \frac{E^+}{2\mu^+} - 1.$$

Для Cd эти величины равны соответственно:

| λ^- | λ^+ | μ^- | μ^+ | E^- | E^+ | ν^- | ν^+ |
|-------------|-------------|---------|---------|-------|-------|---------|---------|
| 168.0 | 168.0 | 74.94 | 88.2 | 195.7 | 225.2 | 0.28 | 0.305 |

Таблица 3. Оценка параметров Ламе, модуля упругости и коэффициента Пуассона для железа

4. Задача Эшелби

Для оценки характеристик поликристаллического материала можно использовать решение задачи Эшелби о взаимодействии с изотропной линейно-упругой сплошной средой изотропного линейно-упругого сферического или эллипсоидального включения. Для это необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \zeta_{kkmm} = 0, \\ \zeta_{kmkm} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_{ijmn} &= \frac{C_{rsmn}^0 - C_{rsmn}}{C_{ijrs}^0 - C_{ijpq}^0(I_{pqrs} - w_{pqrs})}, \\ I_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ w_{ijkl} &= \frac{\chi + \frac{4\mu}{3}}{2(\chi + 2\mu)} \left(\frac{4\mu - 3\chi}{3\chi} \delta_{ij}\delta_{kl} + 5I_{ijkl} \right), \\ C_{11}^0 &= \chi + \frac{4\mu}{3}, \quad C_{12}^0 = \chi - \frac{2\mu}{3}, \quad C_{44}^0 = \mu. \end{aligned}$$

Необходимо представить тензор (4) в виде матрицы:

$$\begin{cases} \zeta_{kkmm} = \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} + 2(\zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{23}), \\ \zeta_{kmkm} = \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} + 2(\zeta_{44} + \zeta_{55} + \zeta_{66}), \end{cases}$$

чтобы найти его компоненты путем решения задачи минимизации:

$$\zeta_{kkmm}^2(\chi, \mu) + \zeta_{kmkm}^2(\chi, \mu) \rightarrow \min. \quad (5)$$

| Металл | λ^{min} | μ^{min} | E^{min} | ν^{min} |
|--------|-----------------|-------------|-----------|-------------|
| Fe | 168 | 83.43 | 214.8 | 0.287 |
| Cd | 168 | 83.43 | 214.8 | 0.287 |

Таблица 4. Оценка параметров Ламе, модуля упругости и коэффициента Пуассона для железа — задача Эшелби

Список литературы

1. Зарубин В.С. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. [Текст]/ В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.
2. Зарубин В.С. Прикладные задачи термopочности элементов конструкций. [Текст] – Москва: Машиностроение, 1985. – 296 с.
3. Зарубин В.С. Физические и математические модели микромеханики: учебное пособие. [Текст]/ В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева – Москва: Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. – 194 с.