Модель двух конкурирующих видов

Токарев А.И.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

4 июня 2021 г.

Содержание

Постановка задачи

Гипотезы

1. Пища имеется в неограниченном количестве или ее поступление регулируется.
2. В единицу времени погибает одинаковое количество особей одного вида.
3. Прирост численности вида пропорционален его текущей численности.

Модель В. Вольтерра о конкуренции двух видов

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 - b_{12} x_1 x_2 - c_1 {x_1}^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2 x_2 - b_{21} x_2 x_1 - c_2 {x_2}^2, \end{cases} \tag{1}$$

где a_i — скорость роста популяции; b_{ij} — межвидовая борьба; c_i — внутривидовая борьба.

Стационарные состояния

Приравниваем каждое из уравнений системы (1) к нулю:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 - c_1{x_1}^2 = x_1(a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1) = 0, \\ a_2x_2 - b_{21}x_2x_1 - c_2{x_2}^2 = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Из системы (2) получаем уравнения четырех прямых-сепаратрис:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a_1 - c_1x_1}{b_{12}}$$

$$x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{a_2 - b_{21}x_1}{c_2}$$

Попарные пересечения прямых, полученных из системы (2), дают четыре стационарные точки.

Стационарные точки

I $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ — вымирание обоих видов.

II $x_1 = \dfrac{a_1}{c_1},\ x_2 = 0$ — противоположная ситуация, то есть достижение первым видом численности $\dfrac{a_1}{c_1}$ и вымирание второго вида.

III $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{a_2}{c_2}$ — вымирание первого вида, достижение вторым видом конечной численности $\dfrac{a_2}{c_2}$.

IV $x_1 = \dfrac{a_1c_2 - a_2b_{12}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}},\ x_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1c_2 - b_{12}b_{21}}$ — выживание обоих видов.

Система (1) является нелинейной. Линеаризуем ее в окрестности особых точек, чтобы определить их тип.

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_{12}x_2 - 2c_1x_1 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - b_{21}x_1 - 2c_2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{J}_I = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = a_1,\ \lambda_2 = a_2.$$

$$\mathbb{J}_{II} = \begin{pmatrix} -a_1 & -\dfrac{a_1b_{12}}{c_1} \\[2ex] 0 & \dfrac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -a_1,\ \lambda_2 = \frac{a_2c_1 - a_1b_{21}}{c_1}.$$

$$\mathbb{J}_{III} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2} & 0 \\ -\dfrac{a_2b_{21}}{c_2} & -a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{a_1c_2 - b_{12}a_2}{c_2},\ \lambda_2 = -a_2.$$

$$\mathbb{J}_{IV} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1(a_1c_2 - a_2b_{12})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} & \dfrac{b_{12}(a_1c_2 - a_2b_{12})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} \\ \dfrac{b_{21}(a_2c_1 - a_1b_{21})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} & \dfrac{c_2(a_2c_1 - a_1b_{21})}{b_{12}b_{21} - c_1c_2} \end{pmatrix}.$$

Все стационарные точки являются простыми, поэтому их тип определяется собственными числами матриц $\mathbb{J}_{I-IV}$.

Сосуществование двух видов

Выживание обоих видов означает наличие неподвижной точки, обе координаты которой положительны, а также при условии, что:

$$\begin{cases} a_1 c_2 > a_2 b_{12}, \\ a_2 c_1 > a_1 b_{21}, \\ c_1 c_2 > b_{12} b_{21} \end{cases}$$

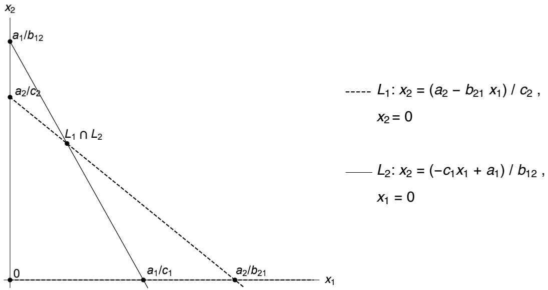

Рис. 1. Расположение прямых при указанных коэффициентах

I $\lambda_1 = a_1 > 0,\ \lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$ точка I — неустойчивый узел.

II $\lambda_1 = -a_1 < 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} > 0 \Rightarrow$ точка II — седло.

III $\lambda_1 = \dfrac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} > 0,\ \lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$ точка III — седло.

IV $\lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow$ точка IV — устойчивый узел.

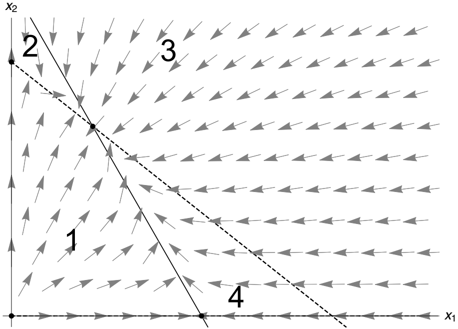

Рис. 2. Поле направлений

Построим окончательный фазовый портрет:

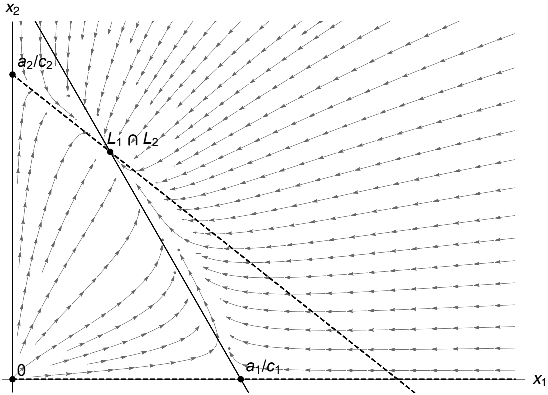

Рис. 3. Сосуществование двух видов

Из полученной картины можно сделать вывод, что сосуществование двух видов гарантировано, потому что все траектории стремятся к 4-ой точке.

Также необходимо наличие особой точки, обе координаты которой положительны, но уже при других условиях:

$$\begin{cases} a_1 c_2 < a_2 b_{12}, \\ a_2 c_1 < a_1 b_{21}, \\ c_1 c_2 < b_{12} b_{21} \end{cases}$$

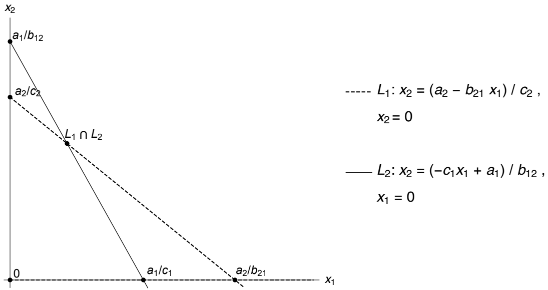

Рис. 4. Расположение прямых при указанных коэффициентах

1. $\lambda_1 = a_1 > 0,\ \lambda_2 = a_2 > 0 \Rightarrow$ точка I — неустойчивый узел.
2. $\lambda_1 = -a_1 < 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_2 c_1 - a_1 b_{21}}{c_1} < 0 \Rightarrow$ точка II — устойчивый узел.
3. $\lambda_1 = \dfrac{a_1 c_2 - b_{12} a_2}{c_2} < 0,\ \lambda_2 = -a_2 < 0 \Rightarrow$ точка III — устойчивый узел.
4. $\det \mathbb{J}_{IV} < 0 \Rightarrow$ собственные значения имеют разные знаки, а значит точка IV — седло.

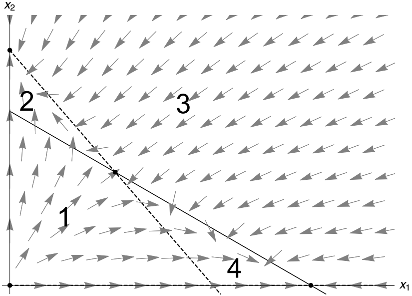

Рис. 5. Поле направлений

Значит, фазовый потрет выглядит следующим образом:

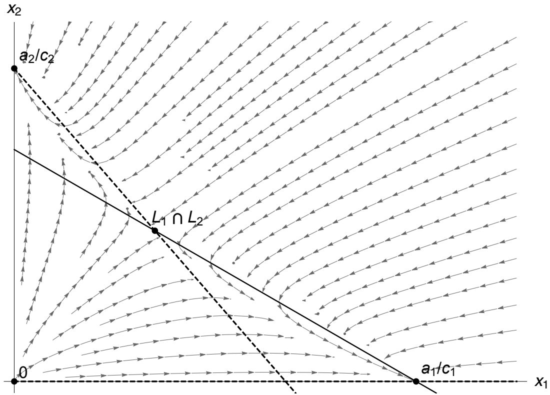

Рис. 6. Выжывание одного из видов

Большинство траекторий стремятся либо ко 2-ой, либо к 3-ей точке. А они соответствуют выживанию лишь одного из видов. Сосуществование крайне маловероятно.

Заключение

Имея экспериментально выведенные коэфициенты размножения, а также коэфициенты межвидовой и внутривидовой конкуренции, мы можем построить модель взаимодействия между особями двух видов и понять, способны ли они сосуществовать или же один из них вымрет. Анализ особых точек (иными словами — стационарных состояний) дает нам возможность построить график траекторий, чтобы определить, к какому из четырех стационарных состояний стремится система.

Список использованных источников

- Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. — 2-е изд. испр. и доп. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 560 с.
- Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 336 с.
- Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1970. 280 с.
- Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1970. 332 с.
- Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука: Физматлит, 1989. 416 с.