



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ

ДИНАМИКИ

Студент _____
ФН2-72Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

В. В. Лукин

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
1.1. Одномерный случай	4
1.2. Двумерный случай	5
1.3. Численная схема	8
1.4. Вычисление граничных значений кусочных парабол	8
Заключение	11
Список литературы	12

Введение

В рамках предыдущей работы проводилось сравнение кусочно-параболического метода (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM) и его модификации – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML). Его отличительными особенностями являются сохранение инвариантов Римана, уменьшение осцилляций на разрывных решениях, простота распараллеливания алгоритма.

Целью данной курсовой работы является решение задач газовой динамики с применением метода PPML. В общем случае такая система имеет 3 характеристики, вдоль которых сохраняются решения. В задаче на одномерное уравнение переноса характеристика в каждой точке всего одна, каждая из них параллельна всем остальным. Однако в случае с газовой динамикой, характеристики, выпущенные из 2 разных точек, могут пересечься. В таком случае образуется либо контактный разрыв, либо ударная волна. Таким образом, нужно будет решать задачу Римана на границах каждой разностной ячейки.

Кроме того, система уравнений газовой динамики нелинейная. Для применения метода PPML необходимо будет определять базис собственных векторов на каждом отрезке. Этот подход дает возможность линеаризовать систему в окрестности каждой такой ячейки.

Тестирование метода PPML будет проводиться на одномерных и двумерных задачах газовой динамики.

1. Постановка задачи

1.1. Одномерный случай

Запишем систему газовой динамики:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, e)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + P, (e + P)u)^T,$$

$$e = \rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2}$$

Систему (1) нужно дополнить уравнением состояния идеального газа:

$$P(\gamma - 1) = \rho \varepsilon, \quad \gamma = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{7}{5} \right\} \quad (2)$$

Для более простого вывода собственных чисел и векторов системы (1), перейдем к неконсервативным (физическим) переменным:

$$\mathbf{v} = (\rho, u, P)^T, \quad (3)$$

1. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$
2. $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u^2 + P]}{\partial x} = 0 \Rightarrow$
 $\frac{\partial \rho u}{\partial t} = u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{(1)}{=} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial \rho u}{\partial x},$
 $\frac{\partial [\rho u^2 + P]}{\partial x} = \frac{\partial [\rho u \cdot u + P]}{\partial x} = u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}$
 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0;$
3. $\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial [(e + P)u]}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \frac{\partial \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} P + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u \right]}{\partial x} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^2}{\partial t} &= \frac{1}{2} u \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u \frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{(1,2)}{=} -\rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} - u \frac{\partial P}{\partial x} \\
\frac{\partial \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} P + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u \right]}{\partial x} &= \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{\gamma-1} u \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} \\
\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} &= 0,
\end{aligned}$$

откуда получается матрица, собственные числа и соответствующие им векторы которой являются собственными значениями и векторами системы (1)

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma P & u \end{pmatrix}, \quad \Lambda = (u - c, u, u + c)^T, \\
R &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{c}{\rho} & 0 & \frac{c}{\rho} \\ c^2 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix}, \tag{4}
\end{aligned}$$

1.2. Двумерный случай

Система газовой динамики в случае движения не только по оси Ox , но и Oy :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (\rho, \rho u, \rho v, e)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, (e + p)u)^T, \\
\mathbf{G} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, (e + P)v)^T, \quad e = \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2 + v^2}{2}.
\end{aligned}$$

Уравнение состояния (2) актуально и для системы (5), физические переменные представим в виде вектора:

$$\mathbf{v} = (\rho, u, v, P)^T. \tag{6}$$

Выведем собственные числа и собственные векторы (5):

$$1. \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$2. \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u^2 + P]}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} \stackrel{(1)}{=} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial \rho u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0;$$

$$3. \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u v]}{\partial x} + \frac{\partial [\rho v^2 + P]}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial \rho u}{\partial x} - v \frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0;$$

$$4. \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial [(e + P)u]}{\partial x} + \frac{\partial [(e + P)v]}{\partial y} = 0, \quad e = \frac{P}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [\rho u^2]}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [\rho v^2]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} P + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) u \right]}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} P + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v \right]}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho u \cdot u}{\partial t} = u \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{(1)}{=} \rho u \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho v}{\partial y} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho v^2}{\partial t} = \rho v^2 \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} P + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) u \right]}{\partial x} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} u \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} uv \frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\partial u}{\partial x} \\
\frac{\partial \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} P + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v \right]}{\partial y} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} v \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} uv \frac{\partial \rho u}{\partial y} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

тогда

$$\begin{aligned}
A_x &= \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma P & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \Lambda_x = (u - c, 0, u, u + c)^T, \\
R_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{c}{\rho} & 0 & 0 & \frac{c}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho}{2c} & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{\rho}{2c} & 0 & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix}, \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_y &= \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma P & v \end{pmatrix}, \quad \Lambda_y = (v - c, 0, v, v + c)^T, \\
R_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{\rho} & 0 & 0 & \frac{c}{\rho} \\ c^2 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}$$

1.3. Численная схема

В соответствии с формулой (5) можно записать численную схему следующего вида:

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{u}_{i,j}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\tau}{\Delta y} \left(\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \tag{9}$$

где полуцелые пространственные индексы указывают, к какой границе ячейки они относятся, а временные – усредненное значение потоков за шаг τ .

Решение внутри каждой разностной ячейки аппроксимируется параболой вдоль каждой координатной оси. Для получения приближенного решения будем использовать метод RPML. Граничные точки определяются из свойства сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик исходной линеаризованной системы.

Так как RPML – модификация кусочно-параболического метода (PPM), то и подходы к построению решения у них в некотором смысле идентичны. Например, парабола внутри каждой разностной ячейки строится с использованием физических переменных (3, 6).

1.4. Вычисление граничных значений кусочных парабол

Для простоты далее будем рассматривать одномерную систему (1). Для этого в разностной схеме (9) достаточно обнулить последнее слагаемое и ис-

пользовать один пространственный индекс – i .

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0,$$

домножим на матрицу L слева и получим (матрицы A, L, R, Λ берутся из (4)):

$$L \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda L \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Разложим вектор \mathbf{v} по собственным векторам \mathbf{r}^p :

$$\mathbf{v} = \sum_p \alpha^p \mathbf{r}^p,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial \alpha^p}{\partial t} + \lambda^p \frac{\partial \alpha^p}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты α^p сохраняются вдоль каждой характеристики x^p :

$$\frac{dx^p}{dt} = \lambda^p,$$

то есть каждое из уравнений (10) является инвариантом Римана. Его значение на границах разностной ячейки определяется в момент времени $t + \tau$ определяется через его значение в момент времени t :

$$\alpha^p(x_{i \pm \frac{1}{2}}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i \pm \frac{1}{2}} - \lambda^p \tau, t). \quad (11)$$

На рис. 1 показаны две смежные ячейки i и $i + 1$. Пусть набор характеристик ячейки i обозначен за p_1 , а точка 1 – снос значения в точке 3 в момент времени $t + \tau$ на предыдущий временной слой вдоль прямой, отвечающей положительному собственному значению λ_{p_1} . Аналогично p_2 – набор характеристик ячейки $i + 1$, а точка 2 – снос значения в точке 3 вдоль прямой, отвечающей отрицательному собственному значению λ_{p_2} .

Состояние в точке 3 в ячейке i , вычисленное путем суммирования по собственным векторам, отвечающим положительным значениям, будем обозначать как \mathbf{v}_L , а состояние в ячейке $i + 1$, вычисленное путем суммирования собственных векторов, отвечающих отрицательным собственным значениям – \mathbf{v}_R . На рис. 2 показана одна из возможных аппроксимаций вектора \mathbf{u} , стрелками показаны значения слева и справа границы, причем $\mathbf{v}_L \neq \mathbf{v}_R$. Пунктиром показаны средние значения, вычисляемые по формуле:

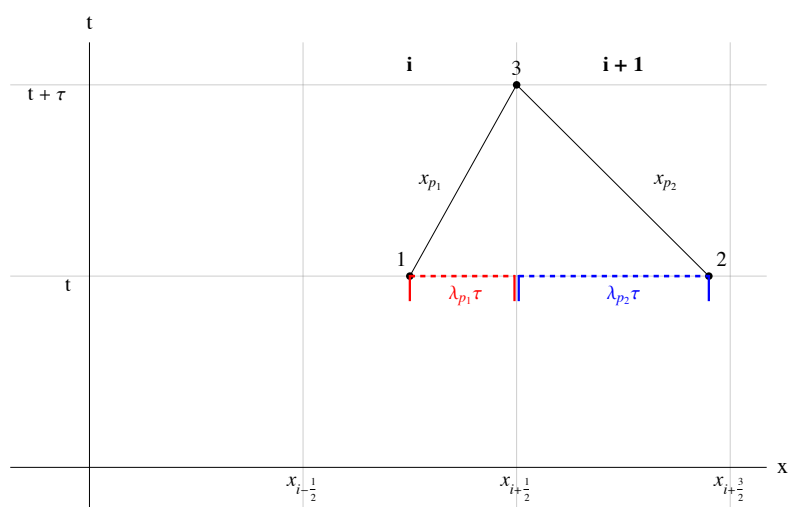
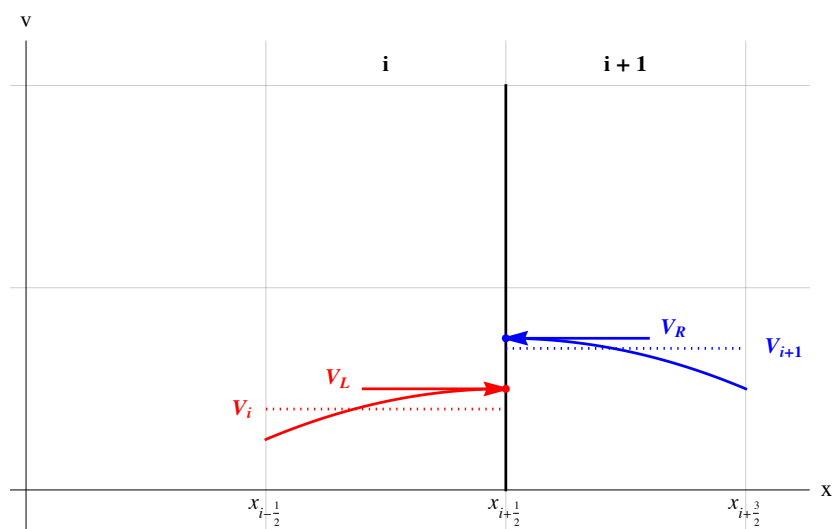


Рис. 1. Снос значений по характеристикам на границах разностных ячеек

Рис. 2. Аппроксимация v в смежных ячейках

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) dx.$$

В методе РРМ значения $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_R$, то есть решения сшиваются, так как используется интерполяционная процедура четвертого порядка. В нашем случае необходимо решать задачу о распаде разрыва между этими состояниями. Для ее решения можно использовать, например, метод Роу:

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{v}_L + \mathbf{v}_R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda_{*p} > 0} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{v}^*) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda_{*p} < 0} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{v}^*), \quad (12)$$

где граничные значения $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R$ вычисляются в соответствии с выбранным базисом в ячейках $i, i+1$. Значения правых собственных векторов \mathbf{r}^p вычисляются по состоянию \mathbf{v}^* :

$$\rho^* = \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad \xi^* = \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}, \quad \xi = u, \quad \frac{e + P}{\rho}.$$

Заклучение

Рассмотрен кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. Выбор в пользу использования решений с предыдущего временного слоя, вместо интерполяционной процедуры, оказался удачным, так как обеспечивает более точное решение и уменьшенную диссипацию. Метод РРМЛ протестирован на ряде примеров, рассмотренных с различными шагами, числами Куранта и профилями. Точность оценивалась на основе норм разности между точным и численным решениям в пространствах C, L_1, L_2 . В пространствах L_1, L_2 РРМЛ оказался точнее во всех случаях. Однако в пространстве C результат нельзя интерпретировать однозначно. Но как уже отмечалось, актуальной является сходимость нормы ошибки в L_2 .

Список литературы

1. Corella P., Woodward P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. – P. 174 – 201.
2. М. В. Попов, С. Д. Устюгов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007. – С. 2056 – 2060.
3. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 591 с.
4. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. – 424 с.
5. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.