



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### *К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*

#### *НА ТЕМУ:*

### *КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД*

### *НА ЛОКАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ*

### *РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ*

### *ПЕРЕНОСА*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. И. Токарев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. В. Лукин  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2022 г.

---

## Содержание

## Введение

Одним из используемых вычислительных методов решения гиперболических уравнений является кусочно-параболический метод (с англ. Piecewise-Parabolic Method, PPM), разработанный для моделирования течения жидкостей и газов и применяемый в астрофизике [1]. Он обладает порядком аппроксимации  $O(\tau^2 + h^3)$ . Несмотря на великолепную точность, данный метод имеет несколько существенных недостатков: возникновение ощутимых осцилляций на разрывных решениях; некомпактность шаблона, что усложняет проведение параллельных расчетов и определение граничных условий.

Целью данной курсовой работы является анализ варианта метода PPM – кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML) [2]. Его основное отличие заключается в том, что граничные точки парабол внутри разностных ячеек определяются с предыдущего временного слоя по методу характеристик, что позволяет точно описывать разрывные решения и избегать накопления лишней диссипации.

В качестве анализа будет приведено сравнение на примерах одномерных задач точности методов PPM и PPML, а также поведение решений на границах, в которых происходят разрывы.

# 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное уравнение переноса [3]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Характеристикой уравнения (??) является множество точек  $(x, t)$ , удовлетворяющее уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad (2)$$

то есть множество  $x - at = b$ .

Вдоль характеристики выполняется следующее равенство:

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Как результат, получаем аналитическое решение уравнения (??) в виде:

$$y(x, t) = y_0(x - at), \quad (3)$$

где  $y_0$  – начальный профиль.

Уравнение переноса – простейший пример, применяемый для проверки алгоритма на корректность [3]. В задачах газодинамики оператор переноса является составной частью, поэтому любой численный метод для таких моделей обязан проходить проверку простейшим уравнением.

Рассмотрим задачу Коши (начальная задача) для уравнения (??) – поиск решения уравнения переноса на множестве  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t > 0$ , принимающее заданное значение в начальный момент времени  $y(x, 0) = y_0(x)$  [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

Определим сетку  $\Omega_h = \{x_i = l_1 + ih, i = 1 \dots n, h = \frac{l_2 - l_1}{n-1}\}$  – множество узлов, где  $[l_1, l_2]$  – отрезок, на котором определена сетка;  $n$  – число узлов;  $h$  – шаг. Определим  $y(x)$  ее разностным аналогом  $y_i = y(x_i)$  на этой сетке. Значения  $y_i$  будем соотносить с узлами сетки, а  $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i^R$  и  $y_{i-\frac{1}{2}} = y_i^L$  – с половинными узлами.

Определив решения  $y_i$  в момент времени  $t_j$ , можно вычислить  $\hat{y}_i$  на следующем временном слое  $t_{j+1}$ , применив интегро-интерполяционный метод к уравнению переноса в прямоугольнике  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_j, t_{j+1}]$ :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0 dt dx = 0.$$

Рассмотрим интегралы в левой части по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [y(x, t_{j+1}) - y(x, t_j)] dx = h \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_{j+1}) dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x, t_j) dx \right] = h(\bar{y}(x_i, t_{j+1}) - \bar{y}(x_i, t_j)) = h(\hat{y}_i - y_i). \end{aligned}$$

Воспользуемся особенностью переноса значений по характеристикам для интеграла, подинтегральная функция которого является потоком (рис. ??):

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(y(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - y(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a y(x, t_j) dt - \\ &\quad - \int_{x_{i-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{i-\frac{1}{2}}} a y(x, t_j) dt = a\tau(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Объединяя оба интеграла получаем:

$$h(\hat{y}_i - y_i) + a\tau(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = y_i - \frac{a\tau}{h}(a\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - a\bar{y}_{i-\frac{1}{2}}). \quad (5)$$

Таким образом, используя формулу (??), мы можем переносить средние значения ячеек.

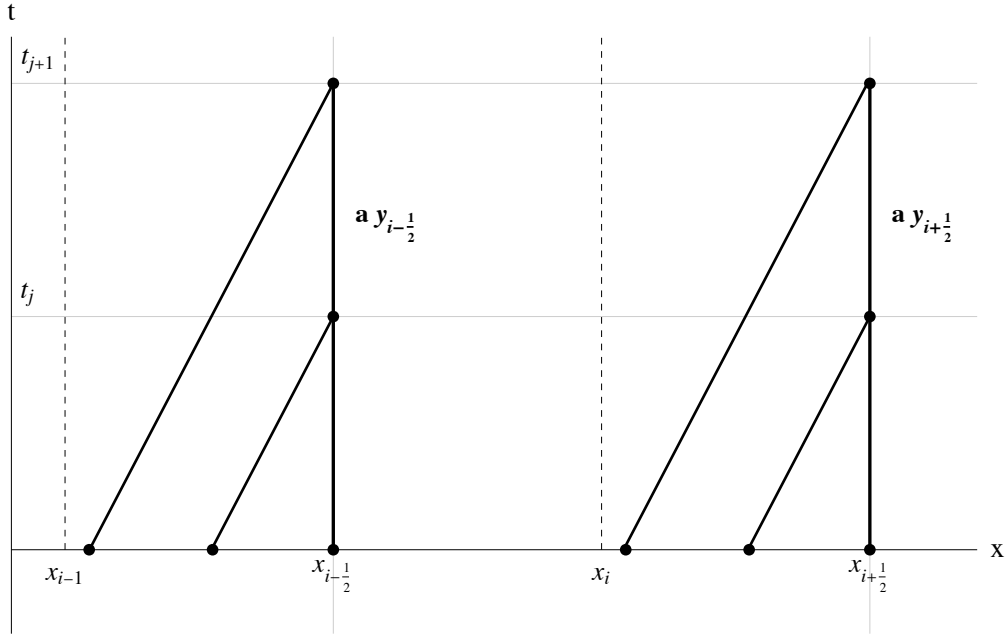


Рис. 1. Интегрирование потока по пространству, вместо времени

## 2. Методы решения

Основная идея рассматриваемых методов заключается в аппроксимации функции  $y(x)$  параболой (рис. ??) на отрезках вида  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  [1]:

$$y(x) = y_i^L + \xi(\Delta y_i + y_i^{(6)}(1 - \xi)), \quad \xi = (x - x_{i-\frac{1}{2}})h^{-1}, \quad \Delta y_i = y_i^R - y_i^L, \quad (6)$$

$$y_i^{(6)} = 6 \left[ y_i - \frac{1}{2}(y_i^R + y_i^L) \right], \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}].$$

Выражение (??) является квадратурной формулой для соотношения:

$$y(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\chi) d\chi.$$

Значение функции  $y(x)$  на границах при условиях гладкости и отсутствия экстремумов принадлежит отрезкам:

$$y_{i-\frac{1}{2}} \in [y_{i-1}, y_i], \quad y_{i+\frac{1}{2}} \in [y_i, y_{i+1}]. \quad (7)$$

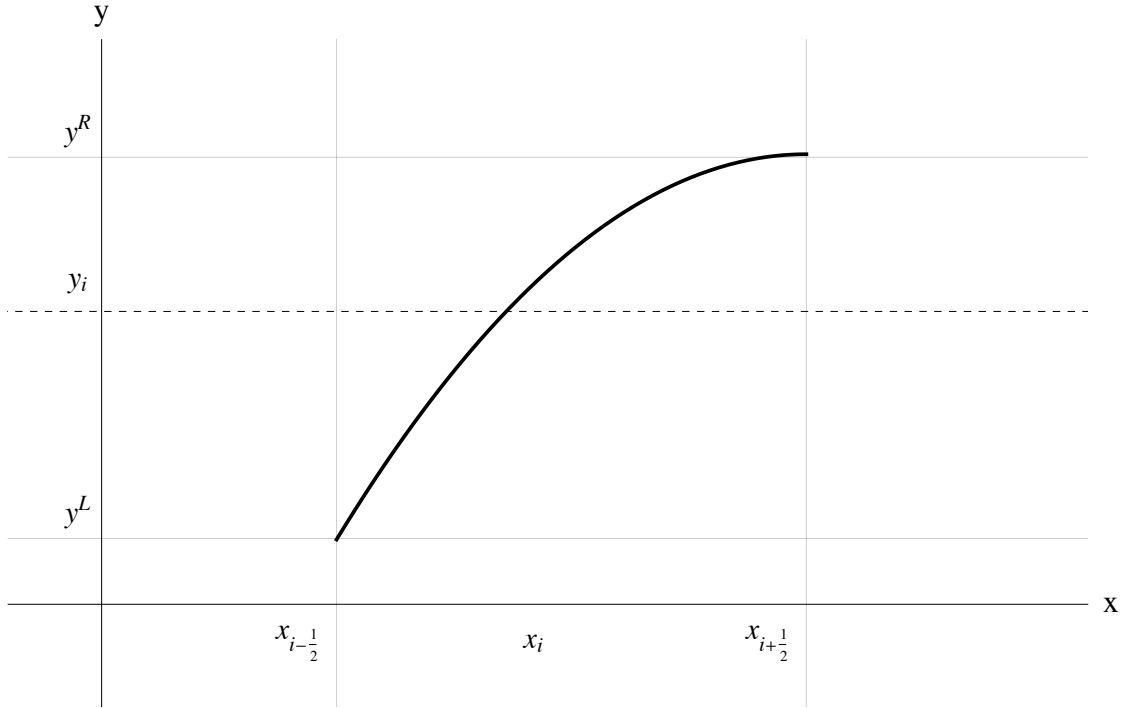


Рис. 2. Парабола внутри разностной ячейки

### 2.1. Кусочно-параболический метод, RPM

Первым шагом ищем значение  $y_{i+\frac{1}{2}}$  интерполяционной процедурой четвертого порядка, в результате получаем значения:

$$y_i^R = y_{i+1}^L = y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{6}(\delta y_{i+1} - \delta y_i),$$

где

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}).$$

Чтобы обеспечить монотонность решения и выполнить условие (??), значения  $\delta y_i$  нужно заменить на

$$\delta_m y_i = \begin{cases} \min(|\delta y_i|, 2|y_i - y_{i-1}|, 2|y_{i+1} - y_i|) \cdot \text{sign}(\delta y_i), & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) > 0, \\ 0, & (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения  $y(x)$  следует переопределять значения  $y_i^L, y_i^R$ . При этом возможны два сценария:

- $y_i$  является локальным экстремумом, тогда на всем отрезке  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  функция  $y(x)$  должна быть постоянной, а значит:

$$y_i^L = y_i^R = y_i, \quad (y_{i+1} - y_i)(y_i - y_{i-1}) \leq 0; \quad (8)$$

- $y_i$  лежит слишком близко к границе – при условии  $|\Delta y_i| < |y_i^{(6)}|$  парабола может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае  $y_i^L$  и  $y_i^R$  должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть его к границам:

$$\begin{aligned} y_i^L &= 3y_i - 2y_i^R, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} > (\Delta y_i)^2, \\ y_i^R &= 3y_i - 2y_i^L, \quad \Delta y_i \cdot y_i^{(6)} < -(\Delta y_i)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

После всех проделанных операция функцию  $y(x)$  можно считать определенной на сетке  $\Omega_h$  [1, 2].

Среднее значение данной функции на отрезке  $[x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha, x_{i+\frac{1}{2}}]$ , ( $\alpha > 0$ ) задается формулой, полученной путем аналитического интегрирования (??):

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(x) dx = y_i^R - \frac{\alpha}{2h} \left[ \Delta y_i - \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_i^{(6)} \right], \quad (10)$$

а на отрезке  $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha]$ , ( $\alpha > 0$ ):

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} + \alpha} y(x) dx = y_{i+1}^L + \frac{\alpha}{2h} \left[ \Delta y_{i+1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{3h}\right) y_{i+1}^{(6)} \right]. \quad (11)$$

## 2.2. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. PRML

Интерполяционная процедура четвертого порядка, применяемая для переопределения граничных узлов, сглаживает разрывные решения  $y(x)$ . Чтобы обойти данное ограничение, можно определять  $y_i^L$  и  $y_i^R$  с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики



линейного уравнения переноса (??). Для ясности будем рассматривать правую границу  $y_i^R = y_{i+\frac{1}{2}}$ . Для того, чтобы вычислить ее на следующем временном слое  $t_{j+1} = t_j + \tau$ , необходимо двигаться от точки  $x_{i+\frac{1}{2}}$  со значением  $y_{i+\frac{1}{2}}$  вдоль характеристики до предыдущего момента времени  $t_j$ :

1.  $a > 0$ , следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_i^L(t_j) + \xi(\Delta y_i(t_j) + y_i^{(6)}(t_j)(1 - \xi)),$$

$$\xi = 1 - \frac{a\tau}{h},$$
(12)

что соответствует красной точке на рис. ??.

2.  $a < 0$ , следовательно

$$y_{i+\frac{1}{2}}(t_{j+1}) = y_i^R(t_{j+1}) = y_{i+1}^L(t_j) + \xi(\Delta y_{i+1}(t_j) + y_{i+1}^{(6)}(t_j)(1 - \xi)),$$

$$\xi = -\frac{a\tau}{h},$$

что соответствует синей точке на рис. ??.

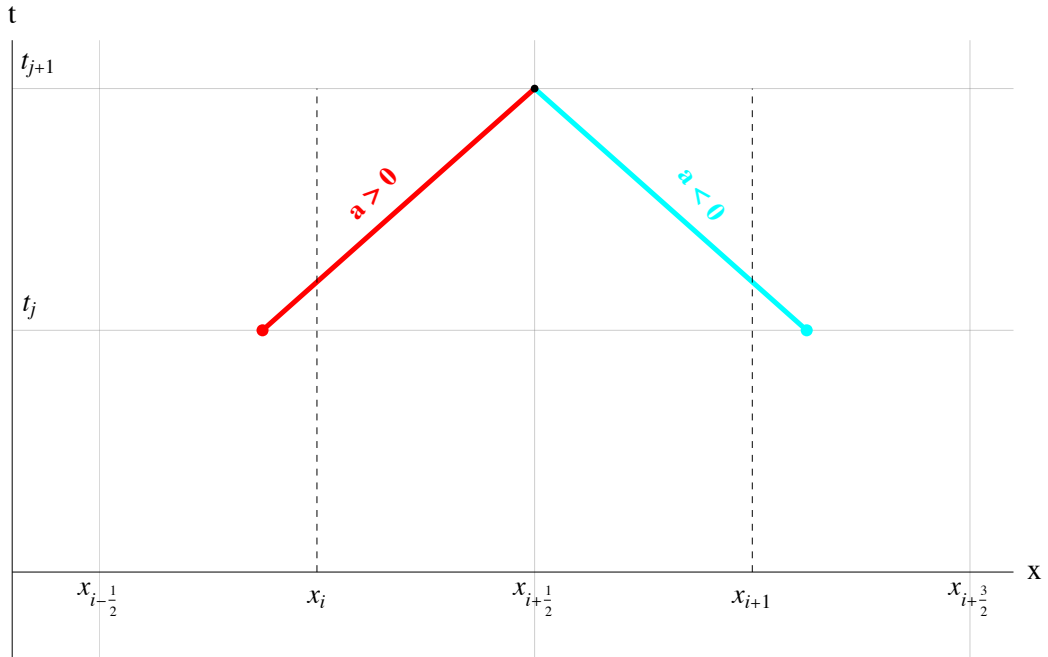


Рис. 3. Перенос значений в граничных точках вдоль характеристик в методе PPML

Алгоритм (??) реализован на локальном шаблоне, то есть для получения граничных точек при переходе на следующий временной слой не нужно использовать информацию с соседних ячеек. Нахождение среднего значения на отрезке (??), (??) и смещение экстремума (??), (??) производятся аналогично [2].

### 2.3. Потоки и усредненное значение на отрезке

При возникновении разрыва на границе двух смежных ячеек в точке  $x_{i+\frac{1}{2}}$  возникает некоторое усредненное состояние  $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$ . Одномерное уравнение переноса имеет всего одну характеристику, поэтому его решение в момент времени  $t = t_{j+1}$  будет определяться:

1. При  $a > 0$  усреднением по пространственному интервалу  $[x_{i+\frac{1}{2}} - a\tau, x_{i+\frac{1}{2}}]$  со значением  $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^L(a\tau)$ ;
2. При  $a < 0$  – усреднением по интервалу  $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + a\tau]$  со значением  $y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}}^R(-a\tau)$ .

Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется по формуле:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(y^*(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt = a^+ y_{i+\frac{1}{2}}^L + a^- y_{i+\frac{1}{2}}^R, \quad (13)$$

$$a^+ = \max(0, a), \quad a^- = \min(a, 0).$$

## 3. Анализ и сравнение

Оценивать решение будем по норме ошибки в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ :

$$\|z\|_C = \max_{\Omega_h \times [0, T]} |z|, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|;$$

$$\|z\|_{L_1} = \int_0^T \int_{\Omega_h} |z| dx dt, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|;$$

$$\|z\|_{L_2} = \left( \int_0^T \int_{\Omega_h} z^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = |y(x, t) - y_h(x, t)|,$$

для методов актуальна сходимость по норме  $L_2$ .

Рассмотрим несколько начальных профилей [3] и проанализируем точность каждого из методов в различных сценариях. Примем  $l = 200$ ,  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 30$ ,  $l_{11} = \frac{50}{3}$ ,  $l_{22} = \frac{70}{3}$ ,  $l_{12} = 20$ ,  $T = 200$ ,  $h = 1$ ,  $a = 1$ .

### 3.1. Анализ точного вычисления граничных и серединных узлов

Рассмотрим, какой прирост точности дает метод РРМЛ при числе Куранта  $\sigma = 1$ . В качестве иллюстрации приведем кусочно-линейный профиль – правый треугольник.

Правый треугольник задается уравнением:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0, & x < l_1; \\ y_0(x) = \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1}, & x \in [l_1, l_2]; \\ y_0(x) = 0, & x > l_2. \end{cases}$$

На рис. ?? показано численное решение, полученное путем применения метода РРМ.

Заметим, что на концах треугольников происходит разрыв решений в ячейках  $y_i^L$ ,  $y_i$ ,  $y_i^R$ , поэтому, например, вычисление нормы в пространстве  $C[a, b]$  неприменимо для данных методов, потому что ее значение не будет уменьшаться при измельчении шага на кусочно-линейных графиках.

Из таблицы ?? можно сделать вывод о порядке точности метода РРМ для профиля "правый треугольник":

В пространстве  $L_1$ :  $\psi_h^{(2)} = 4.05 \approx 4$ ;  $\psi_\tau^{(2)} = 1.995 \approx 2$ .

В пространстве  $L_2$ :  $\psi_h^{(2)} = 2.003 \approx 2$ ;  $\psi_\tau^{(2)} = 1.41$ .

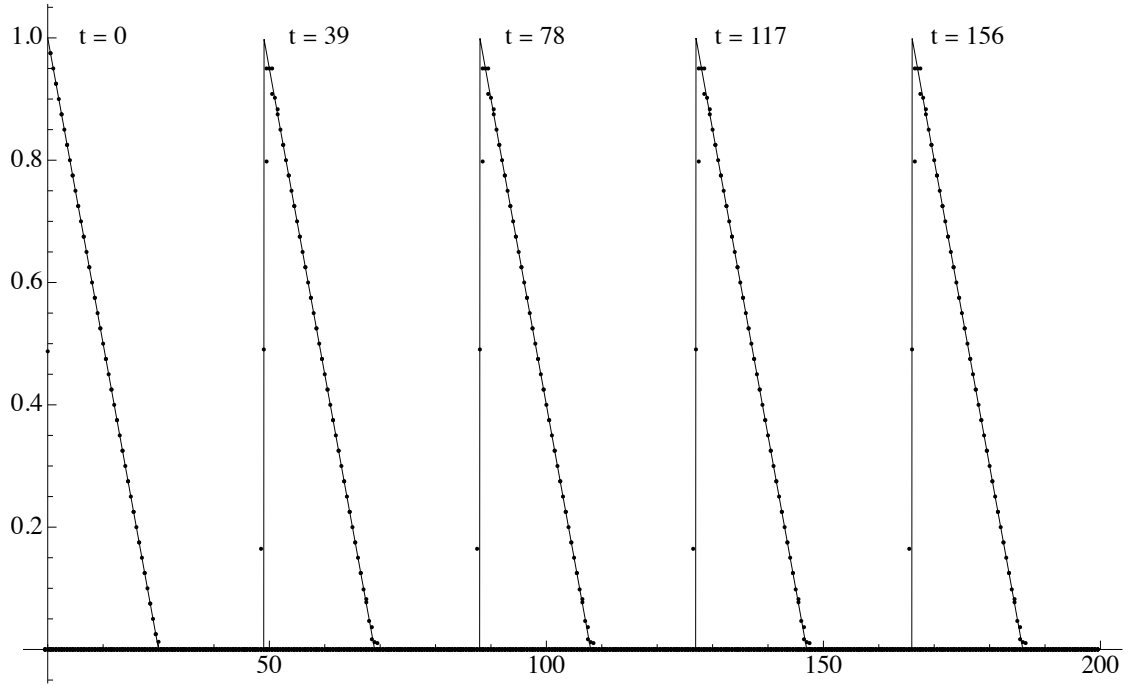
Рис. 4. Правый треугольник для РРМ при  $\sigma = 1$ 

Таблица 1. Нормы ошибок для правого треугольника в методе РРМ

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.5125	0.58	0.65	0.506	0.61	0.695	0.503	0.613	0.696
$\ \cdot\ _{L_1}$	1.038	0.519	0.26	0.255	0.13	0.064	0.063	0.0315	0.0158
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.622	0.44	0.311	0.309	0.22	0.154	0.154	0.1087	0.077

На рис. ?? показано решение, полученное с применением метода РРМЛ. На концах треугольников параболы в каждой разностной ячейке передают значения гораздо точнее, чем в методе РРМ.

Скорость стремления нормы к нулю (таблица ??) практически идентична методу РРМ, однако визуально график больше приближен к точному решению. Оценим порядок точности метода РРМЛ:

В пространстве  $L_1$ :  $\psi_h^{(2)} \approx 4$ ;  $\psi_\tau^{(2)} \approx 2$ .

В пространстве  $L_2$ :  $\psi_h^{(2)} \approx 2$ ;  $\psi_\tau^{(2)} \approx 1.4$ .

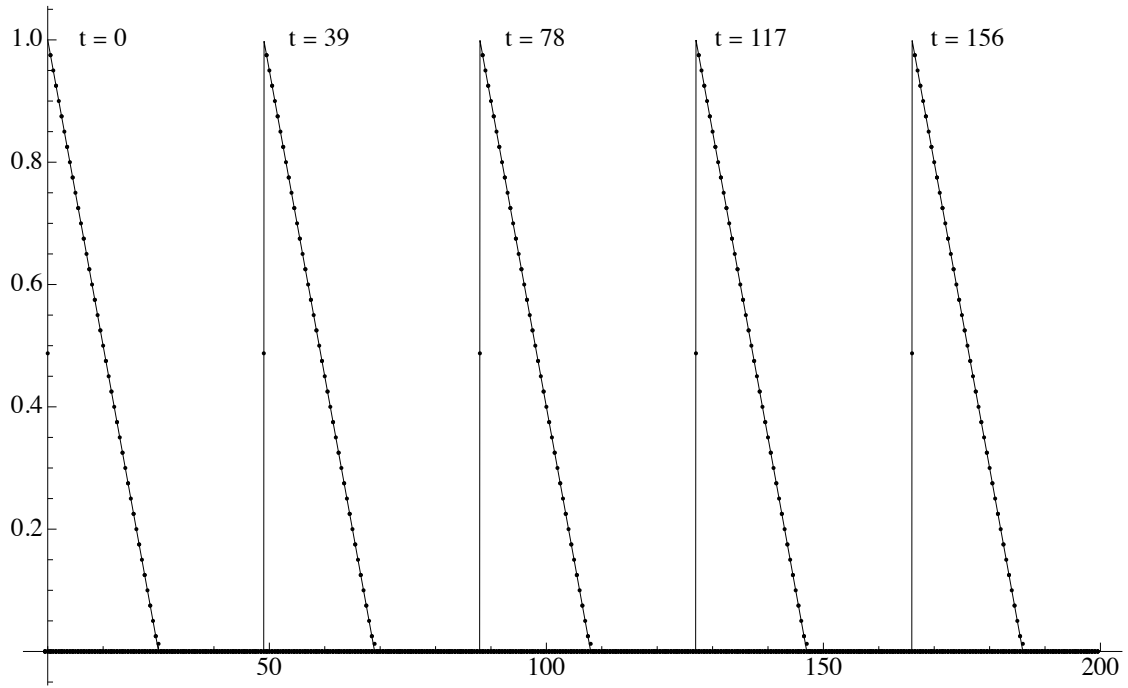
Рис. 5. Правый треугольник для PRML при  $\sigma = 1$ 

Таблица 2. Нормы ошибок для правого треугольника в методе PRML

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.5125	0.5039	0.5544	0.50625	0.502	0.5487	0.5031	0.5001	0.5458
$\ \cdot\ _{L_1}$	1.0375	0.5187	0.2593	0.255	0.1273	0.0637	0.063	0.03154	0.01577
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.6228	0.4404	0.3114	0.3087	0.2183	0.1544	0.1537	0.1087	0.0768

### 3.2. Анализ кусочно-линейного графика при уменьшенном числе Куранта

Рассмотрим  $\sigma = 0.8$ , в качестве примера рассмотрим профиль "зуб":

$$y_0(x) = \begin{cases} -\frac{2(x-l_1)}{3(l_{11}-l_1)} + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2(x-l_2)}{3(l_2-l_{22})} + 1, & x \in (l_{22}, l_2]. \end{cases}$$

На рис. ?? заметна значительная диссипация и неодинаковые высоты на зубцах.

Тем не менее, несмотря на диссипацию, сходимость по норме  $L_2$  сохраняется (таблица ??). Точность метода РРМ для профиля "зуб":

В пространстве  $L_1$ :  $\psi_h^{(2)} \approx 4$ ;  $\psi_\tau^{(2)} \approx 2$ .

В пространстве  $L_2$ :  $\psi_h^{(2)} \approx 2$ ;  $\psi_\tau^{(2)} \approx 1.4$ .

Таблица 3. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе РРМ

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.525	0.84	0.754	0.5125	0.8375	0.7501	0.50625	0.835	0.7494
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.1	1.05	0.525	0.5125	0.26	0.13	0.127	0.0633	0.032
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.9	0.63	0.45	0.44	0.311	0.22	0.22	0.154	0.11

Метод РРМЛ (рис. ??) характеризуется менее выраженной диссипацией и более ровными "горбами".

Помимо этого, анализ норм ошибок для метода РРМЛ также показывает повышенную точность во всех рассматриваемых пространствах (таблица ??). Точность метода остается такой же, как и во всех предыдущих случаях:

В пространстве  $L_1$ :  $\psi_h^{(2)} \approx 4$ ;  $\psi_\tau^{(2)} \approx 2$ .

В пространстве  $L_2$ :  $\psi_h^{(2)} \approx 2$ ;  $\psi_\tau^{(2)} \approx 1.4$ .

Таблица 4. Нормы ошибок для профиля "зуб" в методе PPML

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.525	0.6437	0.6347	0.5125	0.6343	0.6262	0.50625	0.6297	0.6219
$\ \cdot\ _{L_1}$	2.1	1.049	0.5249	0.5125	0.2563	0.1281	0.1265	0.0633	0.03164
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.895	0.633	0.4478	0.4403	0.3113	0.2202	0.2183	0.1544	0.10916

### 3.3. Анализ методов на непрерывном графике

Пусть  $\sigma = 0.5$ . Сравним методы на примере профиля:

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l_2 - l_1}(x - l_1)\right).$$

Как и следовало ожидать, несмотря на гладкость профиля, диссипация в случае метода PPM (рис. ??), ровно как и в методе PPML (рис. ??) остается, хотя и менее выраженная.

График сохраняет свою гладкость, однако происходят заметные отклонения от точного решения в окрестностях оснований профилей. Хотя таблицы с погрешностями решений ??, ?? показывают достаточно хороший результат для обоих методов, все же нельзя не отметить, что PPML стабильнее передает точное решение, а также обладает меньшей диссипацией.

Таблица 5. Нормы ошибок для косинуса в методе PPM

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.078	0.244	0.242	0.039	0.11	0.156	0.0196	0.044	0.06
$\ \cdot\ _{L_1}$	0.195	0.098	0.048	0.0245	0.012	0.006	0.003	0.0015	0.00077
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.028	0.02	0.014	0.005	0.0035	0.00245	0.00089	0.0006	0.00044

Таблица 6. Нормы ошибок для косинуса в методе PPML

	$h = 1$			$h = 0.5$			$h = 0.25$		
	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.25$
$\ \cdot\ _C$	0.00615	0.0479	0.0576	0.00154	0.0158	0.01859	0.00039	0.00515	0.00599
$\ \cdot\ _{L_1}$	0.19475	0.09738	0.0487	0.02449	0.01225	0.0061	0.00306	0.00153	0.00076
$\ \cdot\ _{L_2}$	0.0277	0.01958	0.01384	0.005	0.00351	0.00248	0.00088	0.00059	0.00044

## Заключение

Рассмотрен кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. Выбор в пользу использования решений с предыдущего временного слоя, вместо интерполяционной процедуры, оказался удачным, так как обеспечивает более точное решение и уменьшенную диссипацию. Метод PPML протестирован на ряде примеров, рассмотренных с различными шагами, числами Куранта и профилями. Точность оценивалась на основе норм разности между точным и численным решениям в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ . В пространствах  $L_1$ ,  $L_2$  PPML оказался точнее во всех случаях. Однако в пространстве  $C$  результат нельзя интерпретировать однозначно. Но как уже отмечалось, актуальной является сходимость нормы ошибки в  $L_2$ .

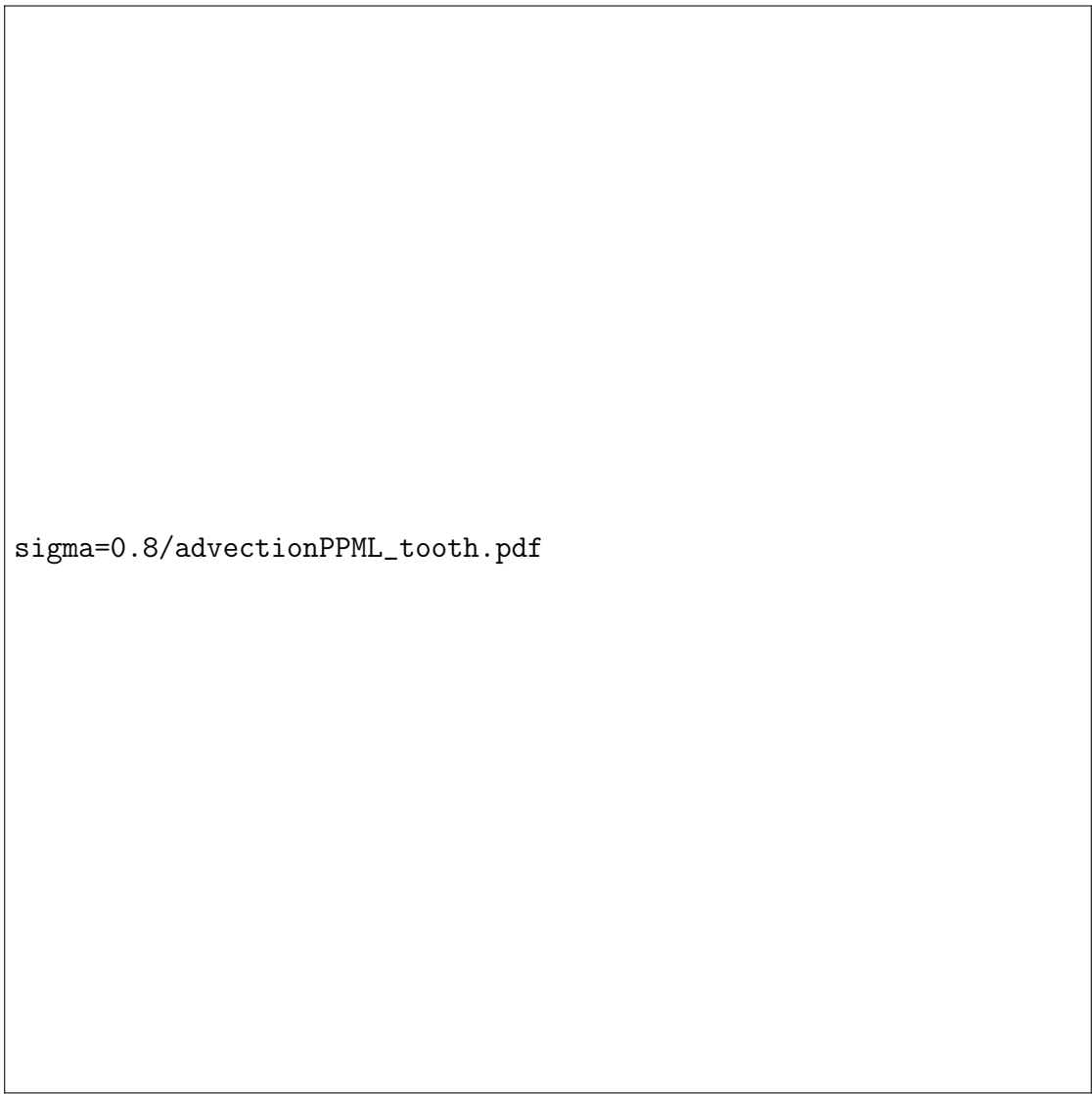


## Список литературы

1. Corella P., Woodward P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. – P. 174 – 201.
2. М. В. Попов, С. Д. Устюгов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007. – С. 2056 – 2060.
3. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 591 с.
4. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. – 424 с.
5. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.



Рис. 6. Зуб для РРМ при  $\sigma = 0.8$



`sigma=0.8/advectionPPML_tooth.pdf`

Рис. 7. Зуб для PPML при  $\sigma = 0.8$



Рис. 8. Косинус для РРМ при  $\sigma = 0.5$



Рис. 9. Косинус для PPML при  $\sigma = 0.5$