

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»

---

*Кафедра «Прикладная математика»*



## *Домашнее задание №2*

по дисциплине «Математические модели прикладной  
механики»

**Раскрытие статической неопределимости балки при  
поперечном изгибе**

**15 вариант**

*Выполнил* студент группы ФН2-72Б

*Токарев А. И.*

# Оглавление

Задание . . . . .	3
Обозначения . . . . .	3
1. Схема нагружения в соответствии с индивидуальным заданием . .	4
2. Степень статической неопределимости балки . . . . .	4
3. Переход к статически определимой балке . . . . .	4
4. Балка под действием только реакции $R_0$ . . . . .	5
5. Прогиб балки только при реакции $R_0$ . . . . .	7
6. Статически определимая балка без реакции $R_0$ . . . . .	8
7. Прогиб статически определимой балки без $R_0$ . . . . .	9
8. Определение силы реакции $R_0$ . . . . .	10
9. Расчёт статически неопределимой балки . . . . .	10
9.1. Изгибающий момент и перерезывающая сила . . . . .	10
9.2. Прогиб исходной балки . . . . .	11
10. Наибольшее растягивающее напряжение . . . . .	12
Заключение . . . . .	13
Список литературы . . . . .	13

## Задание

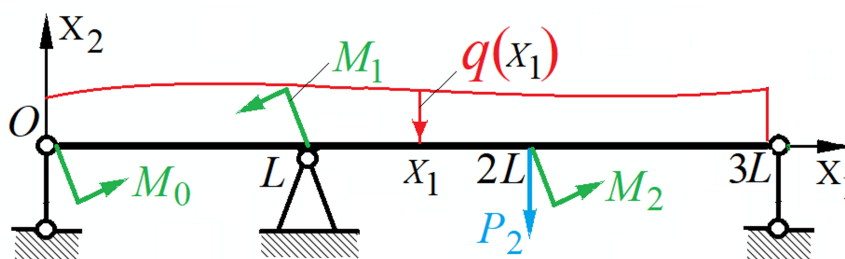


Рис. 1. Общая схема нагружения статически неопределимой балки

В соответствии с индивидуальным заданием необходимо использовать тип связи  $R_0$ . Это означает, что при раскрытии статической неопределённости шарнирную опору балки при  $x_1 = 0$  следует заменить подлежащей определению реакцией  $R_0$  с положительным направлением вдоль положительного направления координатной оси  $Ox_2$ . Положительные направления нагружающих силовых факторов соответствуют их направлениям, отмеченным на рис. 1 стрелками.

Для индивидуального варианта заданы моменты  $M_0 = M$ ,  $M_1 = -M$ ,  $M_2 = 0$ , прикладываемая сила  $P_2 = -P$  и распределённая нагрузка  $q(x_1) = q^\circ$ ,  $x_1 \in (0, 2L)$ .

При этом  $M = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $P = 1000 \text{ Н}$ ,  $q^\circ = 1000 \text{ Н/м}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ . Прямоугольное поперечное сечение балки имеет основание  $b = 30 \text{ мм}$  и высоту  $h = 65 \text{ мм}$ . Балка выполнена из малоуглеродистой стали с продольным модулем упругости (модулем Юнга)  $E = 210 \text{ ГПа}$ .

## Обозначения

$L$  — длина трети балки, м;

$b$  — основание прямоугольного поперечного сечения балки, м;

$h$  — высота прямоугольного поперечного сечения балки, м;

$E$  — продольный модуль упругости (модуль Юнга), Па;

$J_3$  — осевой момент инерции относительно нейтральной оси,  $\text{м}^4$ ;

$W_3$  — момент сопротивления сечения при изгибе,  $\text{м}^3$ ;

$R_0$  — сила реакции, приложенная вместо отброшенной связи, Н;

$M_i$  — момент,  $\text{Н}\cdot\text{м}$ ;

$P_i$  — сила или реакция, Н;

$q^\circ$  — равномерно распределённая нагрузка,  $\text{Н/м}$ ;

$M_3$  — изгибающий момент,  $\text{Н}\cdot\text{м}$ ;

$Q$  — перерезывающая сила, Н;

$w$  — величина прогиба балки, м;

$\sigma_{11}^{max}$  — максимальное растягивающее напряжение, Па.

## 1. Схема нагружения в соответствии с индивидуальным заданием

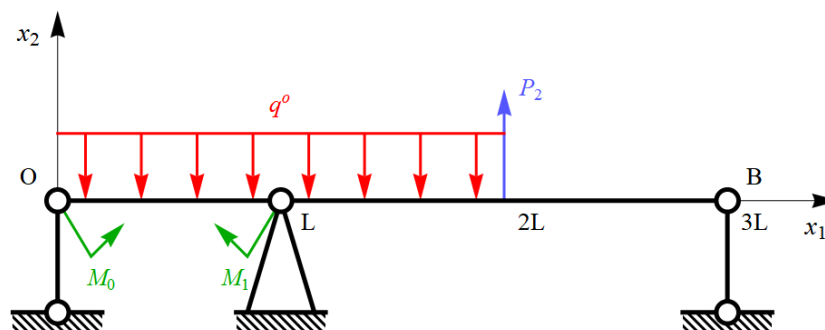


Рис. 2. Схема нагружения балки для заданного варианта

## 2. Степень статической неопределимости балки

Для полученной системы неизвестными являются 3 реакции в шарнирах. Однако можем записать всего 2 уравнения равновесия, а именно уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось и уравнение равновесия моментов относительно точки. Значит, система является 1 раз статически неопределимой, то есть для определения всех возникающих реакций недостаточно только уравнений статики.

## 3. Переход к статически определимой балке

В соответствии с индивидуальным вариантом отбросим указанную в задании наложенную связь  $P_0$  и заменим её соответствующей реакцией  $R_0$ . Таким образом осуществим переход к статически определимой балке.

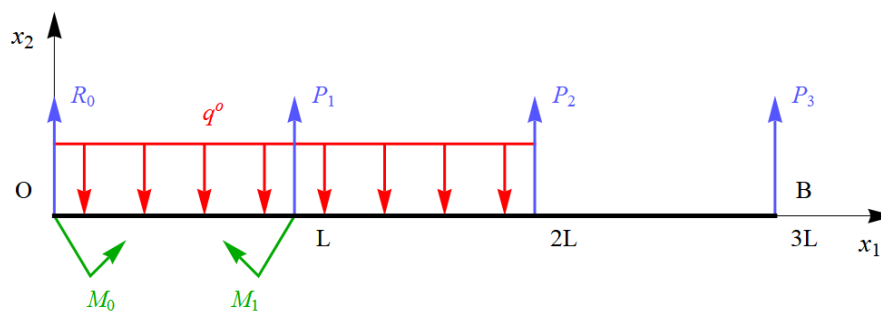


Рис. 3. Нагружение для статически определимой балки

Уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось  $Ox_2$  имеет вид

$$\sum P = 0 \Rightarrow R_0 + P_1 + P_2 + P_3 - 2L \cdot q^\circ = 0.$$

Аналогично уравнение равновесия моментов относительно точки  $O$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_0 - M_1 + L \cdot P_1 + 2L \cdot P_2 + 3L \cdot P_3 - L \cdot 2L \cdot q^\circ = 0.$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2L} (M_0 - M_1) - \frac{3}{2}R_0 - \frac{1}{2}P_2 + 2L \cdot q^\circ, \\ P_3 = \frac{1}{2L} (M_1 - M_0) + \frac{1}{2}R_0 - \frac{1}{2}P_2. \end{cases} \quad (1)$$

#### 4. Балка под действием только реакции $R_0$

Будем считать, что на балку действует только реакция  $R_0$ , приложенная вместо отброшенной связи, а все остальные нагружающие силовые факторы отсутствуют.

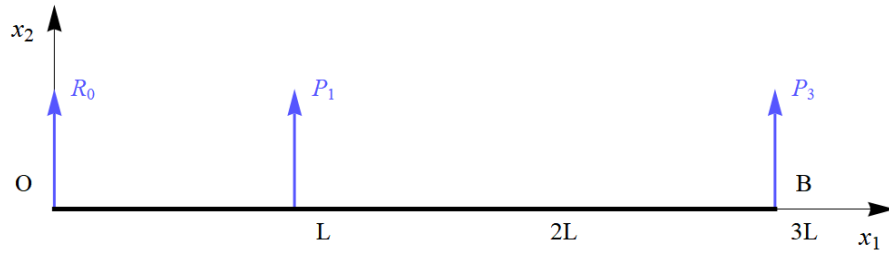


Рис. 4. Нагружение балки только реакцией  $R_0$

Уравнения равновесия сил в проекции на вертикальную ось  $Ox_2$  и моментов относительно точки  $O$  в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} R_0 + P_1 + P_3 = 0, \\ L \cdot P_1 + 3L \cdot P_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{3}{2}R_0, \\ P_3 = \frac{1}{2}R_0. \end{cases} \quad (2)$$

Для упрощения выкладок введём функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Эти функции для  $a \geq 0$  обладают свойствами:

1)  $f'_n(x - a) = f_{n-1}(x - a)$  для  $n \in \mathbb{N}$ , причём  $f'_0(x - a) = 0$ .

2)  $\int_0^x f_n(\xi - a) d\xi = f_{n+1}(x - a)$  для  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Тогда можно записать выражение для изгибающего момента

$$M_3(x_1) = R_0 f_1(x_1) + P_1 f_1(x_1 - L).$$

Перерезывающая сила связана с изгибающим моментом следующим образом:

$$Q(x_1) = \frac{dM_3(x_1)}{dx_1}. \quad (3)$$

Тогда

$$Q(x_1) = R_0 f_0(x_1) + P_1 f_0(x_1 - L).$$

С учётом (2) имеем

$$\begin{cases} M_3(x_1) = R_0 \left( f_1(x_1) - \frac{3}{2} f_1(x_1 - L) \right), \\ Q(x_1) = R_0 \left( f_0(x_1) - \frac{3}{2} f_0(x_1 - L) \right). \end{cases} \quad (4)$$

Построим в безразмерных переменных эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы в случае, когда действует только сила реакции  $R_0$ , приложенная вместо отброшенной связи.

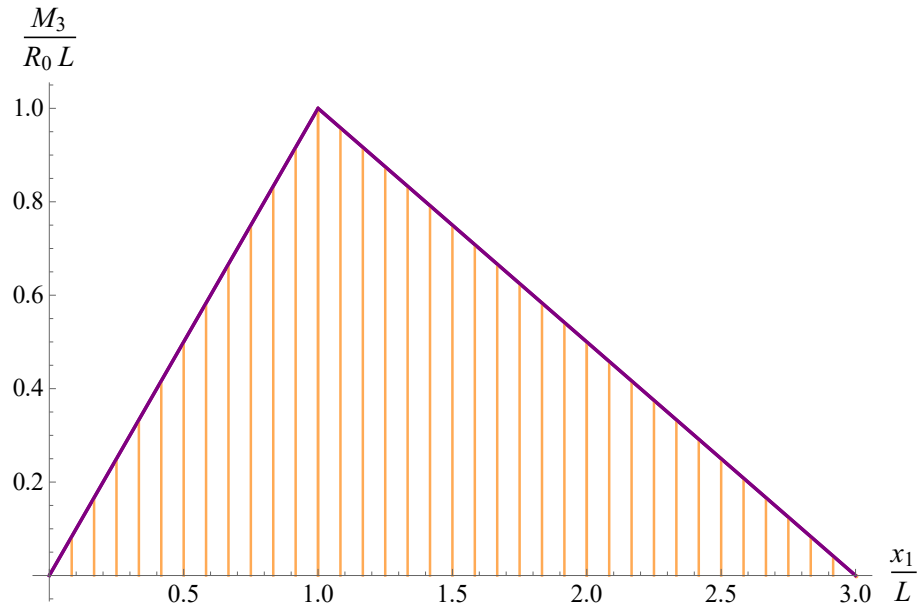
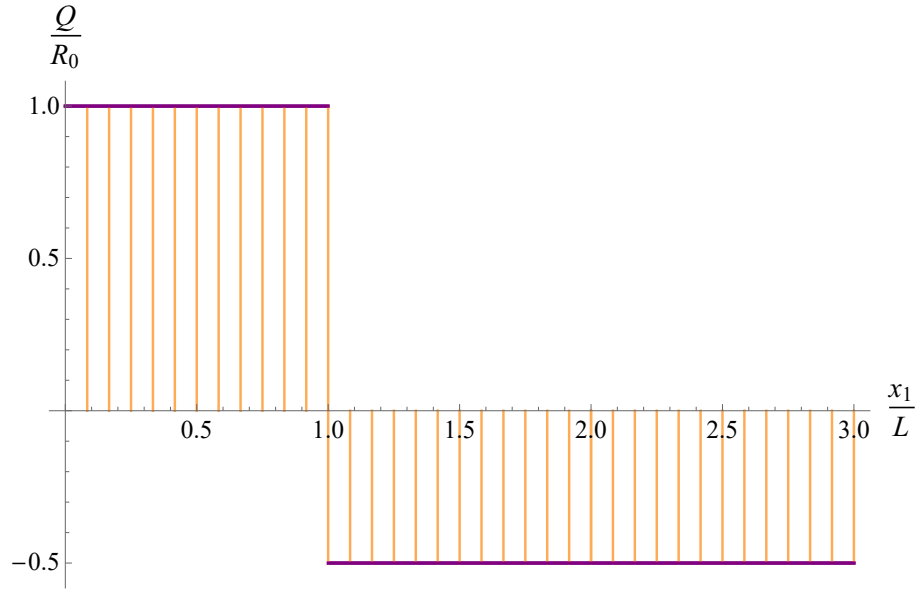


Рис. 5. Эпюра изгибающего момента при действии только  $R_0$

Рис. 6. Эпюра перерезывающей силы при действии только  $R_0$ 

## 5. Прогиб балки только при реакции $R_0$

Дифференциальное уравнение для прогиба балки

$$\frac{d^2 w(x_1)}{dx_1^2} = \frac{M_3(x_1)}{EJ_3}.$$

Общее решение имеет вид

$$w(x_1) = w(0) + w'(0)x_1 + \int_0^{x_1} dt \int_0^t \frac{M_3(\xi)}{EJ_3} d\xi. \quad (5)$$

Ранее была отброшена одна связь в точке  $x_1 = 0$ . Тогда остаётся 2 закрепления в точках  $x_1 = L$  и  $x_1 = 3L$ , в которых балка не должна прогибаться. В этом случае имеем следующие граничные условия:

$$w(L) = 0, \quad w(3L) = 0. \quad (6)$$

С учётом (4) прогиб балки под действием только реакции  $R_0$

$$w(x_1) = \frac{R_0}{EJ_3} \left( f_3(x_1) - \frac{3}{2}f_3(x_1 - L) + L^3 - \frac{7}{6}L^2x_1 \right). \quad (7)$$

В точке  $x_1 = 0$

$$w_{R_0} = w(0) = \frac{L^3}{EJ_3} R_0. \quad (8)$$

## 6. Статически определимая балка без реакции $R_0$

Будем считать, что на балку действуют все силовые факторы, кроме реакции  $R_0$ , приложенной вместо отброшенной связи.

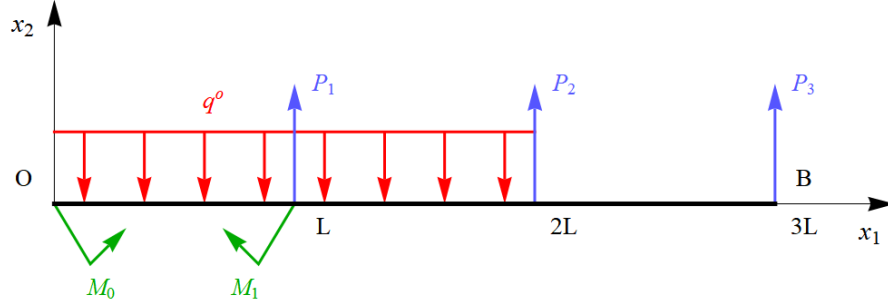


Рис. 7. Нагружение балки без учёта реакции  $R_0$

Уравнения равновесия сил в проекции на вертикальную ось  $Ox_2$  и моментов относительно точки  $O$  в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 - 2L \cdot q^\circ = 0, \\ M_0 - M_1 + L \cdot P_1 + 2L \cdot P_2 + 3L \cdot P_3 - L \cdot 2L \cdot q^\circ = 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2L} (M_0 - M_1) - \frac{1}{2} P_2 + 2L \cdot q^\circ, \\ P_3 = \frac{1}{2L} (M_1 - M_0) - \frac{1}{2} P_2. \end{cases} \quad (9)$$

В этом случае выражение для изгибающего момента имеет вид

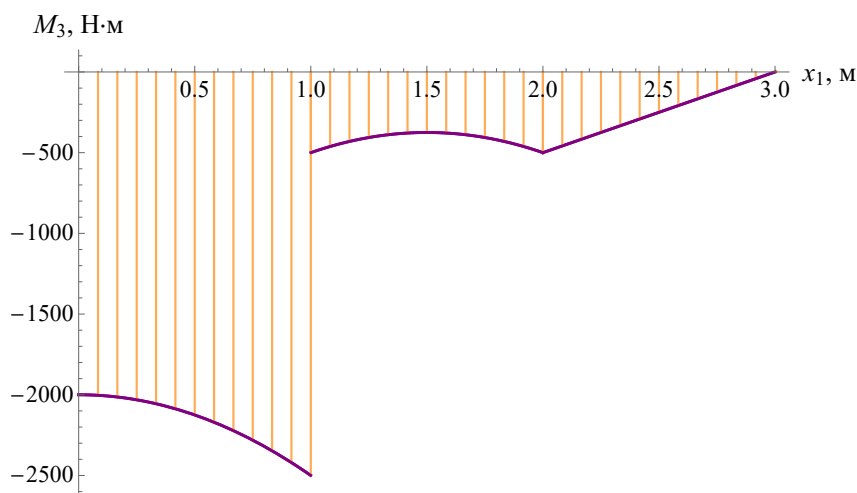
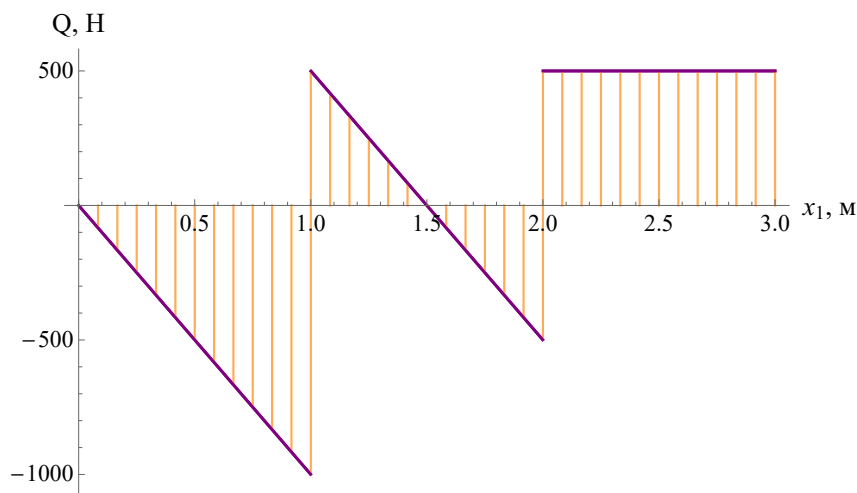
$$M_3(x_1) = M_1 f_0(x_1 - L) - M_0 f_0(x_1) + P_1 f_1(x_1 - L) + P_2 f_1(x_1 - 2L) - q^\circ f_2(x_1) + q^\circ f_2(x_1 - 2L). \quad (10)$$

С учётом (3) перерезывающая сила

$$Q(x_1) = P_1 f_0(x_1 - L) + P_2 f_0(x_1 - 2L) - q^\circ f_1(x_1) + q^\circ f_1(x_1 - 2L). \quad (11)$$

Построим эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы для статически определимой балки в случае, когда действуют все силовые факторы, кроме реакции  $R_0$ , приложенной вместо отброшенной связи, с учётом (9) при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.



Рис. 8. Эпюра изгибающего момента без учёта реакции  $R_0$ Рис. 9. Эпюра перерезывающей силы без учёта реакции  $R_0$ 

## 7. Прогиб статически определимой балки без $R_0$

С учётом (5), (6) и (10) прогиб статически определимой балки без реакции  $R_0$

$$w(x_1) = \frac{1}{EJ_3} \left[ M_1 f_2(x_1 - L) - M_0 f_2(x_1) + P_1 f_3(x_1 - L) + P_2 f_3(x_1 - 2L) - \right. \\ \left. - q^\circ f_4(x_1) + q^\circ f_4(x_1 - 2L) + \frac{L^2}{48} (32M_1 - 56M_0 - 12LP_2 - 13L^2 q^\circ) + \right. \\ \left. + \frac{L}{48} (80M_0 - 32M_1 + 12LP_2 + 15L^2 q^\circ) x_1 \right]. \quad (12)$$

В точке  $x_1 = 0$

$$w_0 = w(0) = \frac{L^2}{48EJ_3} (32M_1 - 56M_0 - 12LP_2 - 13L^2 q^\circ). \quad (13)$$

## 8. Определение силы реакции $R_0$

Для статически неопределимой балки в точке  $x_1 = 0$  имеем закрепление, поэтому прогиб в этой точке отсутствует. Тогда для определения силы реакции  $R_0$  можно воспользоваться условием

$$w_{R_0} + w_0 = 0.$$

С учётом (8) и (13) имеем

$$R_0 = \frac{13}{48}Lq^\circ + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{6L}(7M_0 - 4M_1).$$

Тогда из (1) получим силы реакции для статически неопределимой балки

$$\begin{cases} P_1 = \frac{51}{32}Lq^\circ - \frac{7}{8}P_2 + \frac{1}{12L}(14M_0 + M_2), \\ P_3 = \frac{13}{96}Lq^\circ - \frac{3}{8}P_2 + \frac{1}{12L}(M_0 + 2M_1). \end{cases}$$

При значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием

$$R_0 = 1520,8 \text{ Н}, \quad P_1 = -781,25 \text{ Н}, \quad P_3 = 260,42 \text{ Н}.$$

## 9. Расчёт статически неопределимой балки

### 9.1. Изгибающий момент и перерезывающая сила

Выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы статически неопределимой балки можно получить путём сложения соответствующих выражений для балки под действием только силы реакции  $R_0$ , приложенной вместо отброшенной связи, а также статически определимой балки без учёта силы реакции  $R_0$ .

После сложения (4) с (10) и (11) соответственно с учётом (9) получим

$$\begin{aligned} M_3(x_1) = M_1f_0(x_1 - L) - M_0f_0(x_1) + R_0f_1(x_1) + \left(P_1 - \frac{3}{2}R_0\right)f_1(x_1 - L) + \\ + P_2f_1(x_1 - 2L) - q^\circ f_2(x_1) + q^\circ f_2(x_1 - 2L). \end{aligned}$$

С учётом (3) перерезывающая сила

$$Q(x_1) = R_0f_0(x_1) + \left(P_1 - \frac{3}{2}R_0\right)f_0(x_1 - L) - P_2f_0(x_1 - 2L) - q^\circ f_1(x_1) + q^\circ f_1(x_1 - 2L).$$

Построим эпюры полученных изгибающего момента и перерезывающей силы для статически неопределимой балки при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

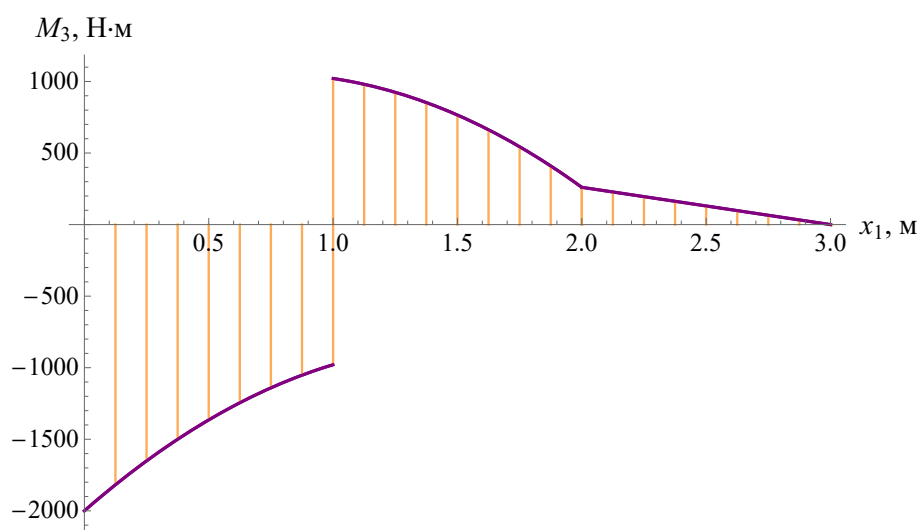


Рис. 10. Эпюра изгибающего момента статически неопределимой балки

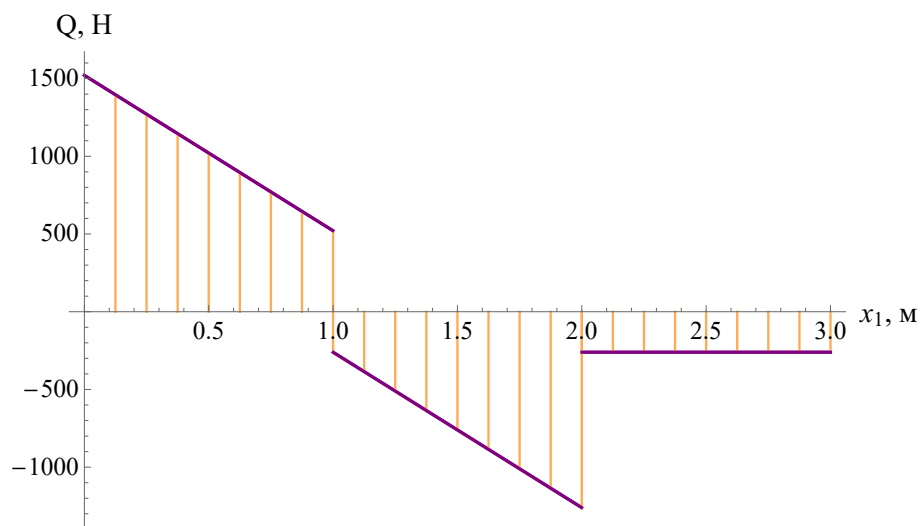


Рис. 11. Эпюра перерезывающей силы статически неопределимой балки

## 9.2. Прогиб исходной балки

Выражения для прогиба статически неопределимой балки также можно получить путём сложения соответствующих выражений для балки под действием только силы реакции  $R_0$ , а также статически определимой балки без учёта силы реакции  $R_0$ .

После сложения (7) и (13) с учётом (9) получим

$$w(x_1) = \frac{1}{EJ_3} \left[ M_1 f_2(x_1 - L) - M_0 f_2(x_1) + R_0 f_3(x_1) + \left( P_1 - \frac{3}{2} R_0 \right) f_3(x_1 - L) + \right. \\ \left. + P_2 f_3(x_1 - 2L) - q^\circ f_4(x_1) + q^\circ f_4(x_1 - 2L) + \frac{L^2}{48} (32M_1 - 56M_0 - 12LP_2 - 13L^2 q^\circ) + \right. \\ \left. + \frac{L}{48} (80M_0 - 32M_1 + 12LP_2 + 15L^2 q^\circ) x_1 \right].$$

Для балки с прямоугольным поперечным сечением с основанием  $b$  и высотой  $h$  осевой момент инерции относительно нейтральной оси имеет вид

$$J_3 = \frac{bh^3}{12}.$$

Построим график зависимости прогиба для статически неопределимой балки при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

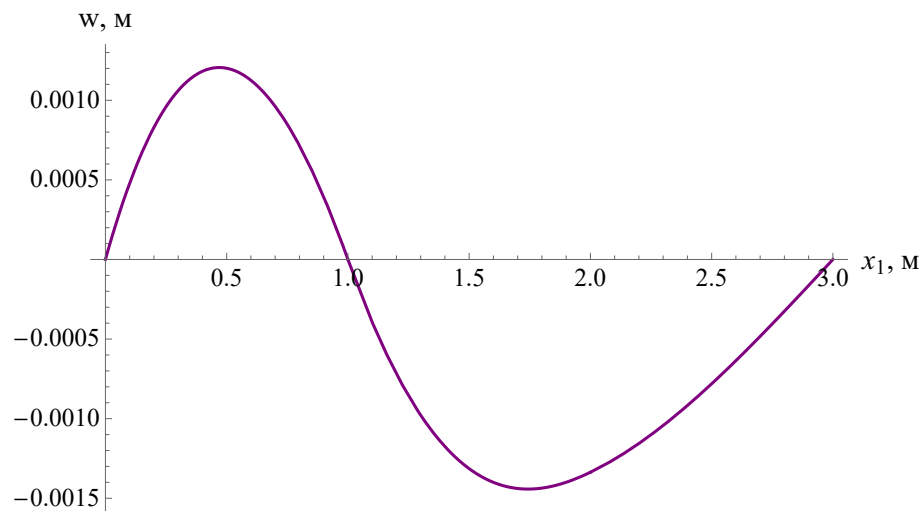


Рис. 12. Прогиб статически неопределимой балки

## 10. Наибольшее растягивающее напряжение

Максимальное растягивающее напряжение в поперечном сечении, симметричном относительно нейтральной оси, можно определить по формуле

$$\sigma_{11}^{max} = \frac{M_3}{W_3}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления сечения при изгибе имеет вид

$$W_3 = \frac{bh^2}{6}.$$

Наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента  $M_0$  достигается при  $x_1 = 0$ . Тогда

$$\sigma_{11}^{max} = 6 \frac{|M_0|}{bh^2}.$$

При значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием

$$\sigma_{11}^{max} \approx 94,675 \text{ МПа.}$$

## Заклучение

В процессе выполнения работы для заданной схемы нагружения балки были получены следующие результаты:

- 1) Изображена схема нагружения статически неопределимой балки в соответствии с индивидуальным заданием.
- 2) Проверена степень статической неопределимости балки.
- 3) В соответствии с индивидуальным вариантом осуществлён переход к статически определимой балке путём отбрасывания указанной в задании наложенной связи  $P_0$  и замены её соответствующей реакцией  $R_0$ .
- 4) Построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы только от действия указанной выше реакции, приложенной вместо отброшенной связи (шарнирной опоры).
- 5) Найдена однозначная аналитическая зависимость величины прогиба балки под действием только реакции  $R_0$ .
- 6) Построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы для статически определимой балки без учёта отброшенной связи и её силы реакции.
- 7) Для статически определимой балки найдена аналитическая зависимость величины прогиба от продольной координаты.
- 8) Из равенства нулю алгебраической суммы полученных в пп. 5 и 7 прогибов балки в сечении, соответствующем отброшенной опоре, получена зависимость реакции  $R_0$  в этом сечении от остальных заданных параметров.
- 9) Для исходной статически неопределимой балки построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы, а также определена зависимость прогиба балки от продольной координаты и построен график этой зависимости.
- 10) Для поперечного сечения балки с наибольшим по абсолютному значению изгибающим моментом найдено наибольшее растягивающее напряжение.

## Список литературы

1. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Станкевич И. В. Математические модели прикладной механики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 282 с.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. 15-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 590 с.