

## Chapitre 1 : Les lois fondamentales de l'électricité

**Un conducteur d'électricité** est un matériau caractérisé par la présence d'électrons libres mobilisables pour créer un courant électrique.

### 1-1 Notion de courant- Densité de courant

#### 1-1.1 Notion de courant

Comme il est possible d'électrifier un matériau conducteur, par exemple par frottements (cf. électrostatique). Si l'on met ensuite ce conducteur en contact avec un autre, le deuxième devient à son tour électrisé, c'est-à-dire qu'il a acquis une certaine charge  $Q$ . Cela signifie que lors du contact des charges se sont déplacées de l'un vers l'autre. On définit alors le courant électrique par ce déplacement de charges libres qui nécessitera l'existence d'une force capable de les entraîner. L'**intensité de courant  $I$**  (A) est la quantité de charges  $\Delta Q$  traversant une section d'aire  $S$  dans un intervalle de temps  $\Delta t$  :  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$  (A ou  $C \cdot s^{-1}$ )

#### 1-1.2 Densité de courant

La densité de courant notée  $\vec{J}$  ( $A \cdot m^{-2}$ ) est la quantité de charges traversant une section d'aire unitaire dans un intervalle de temps unitaire. Cette densité de courant est proportionnelle (dans la plupart des conducteurs) au champ électrique local, selon la loi d'Ohm locale :

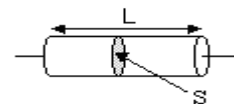
$$\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

- **La conductivité  $\gamma$**  d'un matériau est donnée par l'expression :

$$\gamma = n \cdot e \cdot \mu \quad (\Omega^{-1} \cdot m^{-1}, \text{ ou } S \cdot m^{-1}) ; \text{ avec } \vec{v} = \mu \cdot \vec{E}$$

Où :  $n$  est la **densité** (concentration par unité de volume, en  $m^{-3}$ ) des charges libres dans ce matériau ;  $\mu$ , leur **mobilité** (en  $m^2 V^{-1} s^{-1}$ ) dans ce matériau et  $e$  est la **charge unitaire** (en C, Coulomb) :  $e = |-e|$

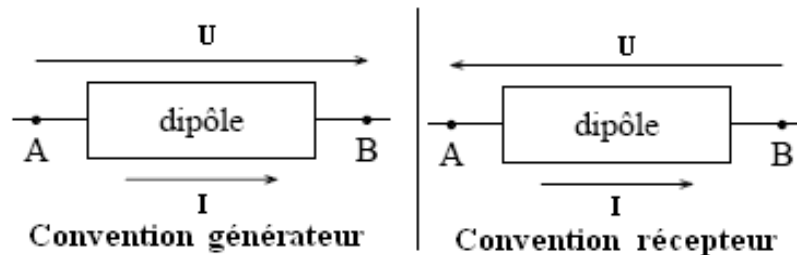
- **Résistance d'un conducteur**



La résistance  $R$  d'un tube de longueur  $L$ , de section  $S$ , fabriqué dans un matériau de résistivité  $\rho$  est :  $R = \rho \frac{L}{S} = \frac{L}{\gamma S}$  ( $\Omega$ ) ;  $\rho$  ( $\Omega \cdot m$ ).

## 1-2 Conventions de signe

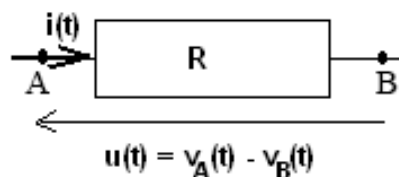
Par convention on dit que dans un circuit orienté, le courant est positif si des charges positives se déplacent dans le sens positif. Pour les différences de potentiel (ddp), il existe deux possibilités de choix : la convention récepteur et celle générateur. Par la convention récepteur un courant positif provoque une chute de tension dans le dipôle placée entre A et B. On représente la tension par une flèche orientée des potentiels faibles vers les potentiels élevés.



**NB :** dans un récepteur, les charges (électrons) s'écoulent des potentiels faibles vers les potentiels élevés : les flèches représentatives de la tension et du courant sont de sens contraires.

## 1-3 Loi d'Ohm

La tension aux bornes d'une résistance est donnée par la loi d'Ohm :  $u(t) = R i(t)$  (en convention récepteur). La résistance s'exprime en Ohm ( $\Omega$ ).



## 1-4 Loi de Joule

L'énergie dissipée par effet Joule dans une résistance  $R$  est pratiquement sous forme de chaleur, ce qui est à l'origine de l'échauffement de tout composant électrique possédant une résistance. Si le composant est parcouru par un courant  $I$  au bout d'un temps  $t$ , l'énergie dissipée a pour expression :  $W = RI^2t$  (Joule) ; c'est la loi de Joule.

## 1-5 Puissance électrique

Si un dipôle est parcouru par un courant d'intensité  $I$  constante, et soumis à une tension  $U$  constante, alors la puissance reçue par ce dipôle est donnée par la relation :  $P = UI$  (Watt)

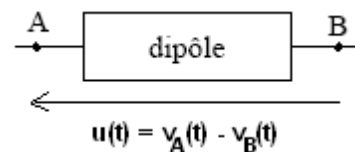
En particulier pour un résistor, la puissance dissipée par effet joule dans la résistance (toujours positive) a pour expression :  $P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

## 1-6 Dipôles électriques

### 1-6.1 Définition

On appelle dipôle électrocinétique tout système relié à l'extérieur par deux conducteurs uniquement. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant.

La tension aux bornes d'un dipôle représente la différence de potentiel  $u(t)$  entre les deux bornes du dipôle.



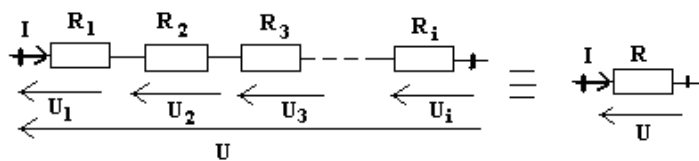
### 1-6.2 Association de résistances

#### 1-6.2-1 Association en série

Le courant qui traverse des résistances associées est le même ; il y a additivité des tensions (loi des mailles) aux bornes des celles-ci :

$$U = \sum_i U_i = \sum_i R_i \cdot I$$

La résistance du dipôle équivalent :  $R = \sum_i R_i$



#### 1-6.2-2 Diviseur de tension

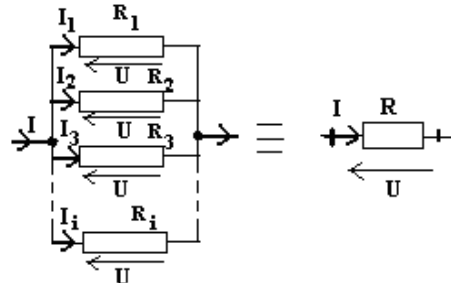
Lorsque plusieurs résistances sont en série, la tension aux bornes de l'une d'entre elle peut être déterminée par la relation :  $U_i = \frac{U \cdot R_i}{\sum_i R_i}$

**Exemple :** pour trois résistances en série, la tension aux bornes du dipôle 1 est :  $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} U$

### 1-6.2-3 Association en parallèle

La tension aux bornes des  $i$  résistances est la même ; il y a additivité des courants (loi des nœuds) qui les traversent :

$$I = \sum_i I_i = \sum_i G_i \cdot U = \sum_i \frac{U}{R_i} \Rightarrow \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \Rightarrow G = \sum_i G_i ; G_i \text{ est la conductance du résistor } i$$



### 1-6.2-4 Diviseur de courant

Lorsque plusieurs résistances sont en parallèle, le courant qui traverse l'une d'entre elle peut être calculé par la relation :

$$I_i = I \frac{G_i}{\sum_i G_i} = I \frac{\frac{1}{R_i}}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

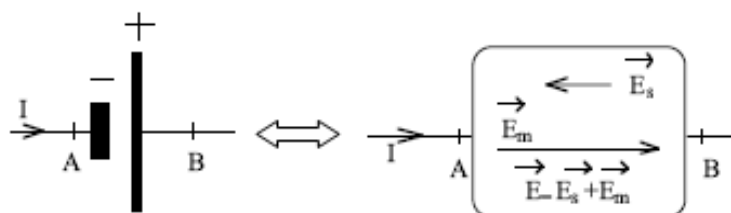
**Exemple** : pour deux résistances en parallèle :  $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$  ;

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

### 1-6.3 Générateurs

Un générateur est un dipôle actif où toute l'énergie électrique mise en jeu n'est pas dissipée sous forme de chaleur. Il y a transformation d'énergie non calorifique (mécanique, chimique, optique) en énergie électrique. A ses bornes on mesure une tension appelée force électromotrice (f.é.m.). Exemples piles, turbines, batteries, génératrices,...

L'élément responsable de la circulation du courant dans un circuit est le générateur.

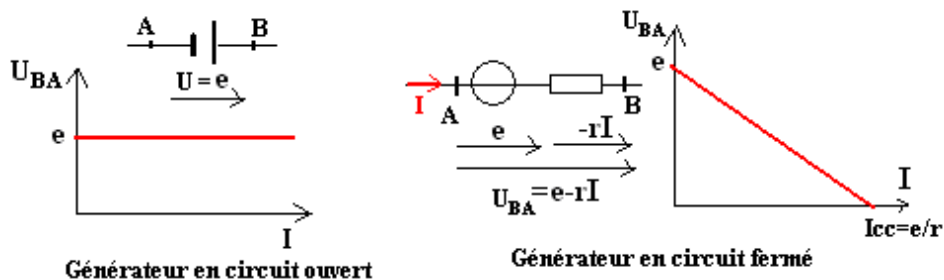


- **Si le générateur est en circuit ouvert ( $I=0$ ) :** Le fait qu'une différence de potentiel se maintienne entre ses bornes implique nécessairement la présence d'une autre force compensant l'attraction coulombienne. Ainsi, la force totale s'exerçant sur une charge  $q$  doit s'écrire  $\vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{E}_m)$ . Or à l'équilibre et en l'absence de courant, on doit donc avoir  $\vec{E}_s + \vec{E}_m = \vec{0}$ . Cela signifie donc que la d.d.p. ou tension mesurée aux bornes d'un générateur en circuit ouvert vaut :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

On appelle force électromotrice (f.é.m.) du générateur notée  $e$ , la grandeur positive :  $e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$

- **Si le générateur est en circuit fermé :** il y aura circulation d'un courant et la tension aux bornes du générateur sera :  $V_A - V_B = rI - e$ , où  $r$  est la résistance interne du générateur.



### 1-6.3-1 Groupement des générateurs en série

Un groupement de générateurs en série équivaut à un générateur unique dont :

- la f.é.m. est la somme des f.é.m. des générateurs associés  $e = \sum_i e_i$
- la résistance interne est la somme des résistances internes des générateurs.  $r = \sum_i r_i$

### 1-6.3-2 Groupement parallèle de générateurs identiques

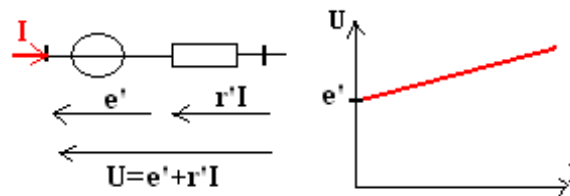
Des générateurs sont en parallèle lorsque leurs bornes homologues sont reliées entre elles. Le générateur équivalent a pour f.é.m., la f.é.m. de l'un des générateurs.

Sa résistance interne est donnée par la relation :  $\frac{1}{r} = \sum_i \frac{1}{r_i}$

**Remarque :** il existe également le groupement mixte qui consiste à mettre en parallèle  $p$  séries ayant chacune  $q$  éléments. Les caractéristiques sont obtenues en appliquant les deux règles ci-dessus.

### 1-6.4 Récepteurs

Un récepteur actif est un dipôle où toute l'énergie électrique mise en jeu n'est pas dissipée sous forme de chaleur. Il y a transformation de l'énergie électrique en énergie non calorifique (mécanique, chimique, optique). A ses bornes on mesure une tension appelée force contre électromotrice  $e'$  (f.c.é.m.). Exemples moteurs, transformateurs... La caractéristique courant tension  $U = f(I)$  d'un récepteur de f.c.é.m.  $e'$ , de résistance interne  $r'$  est :  $U = e' + r'I$

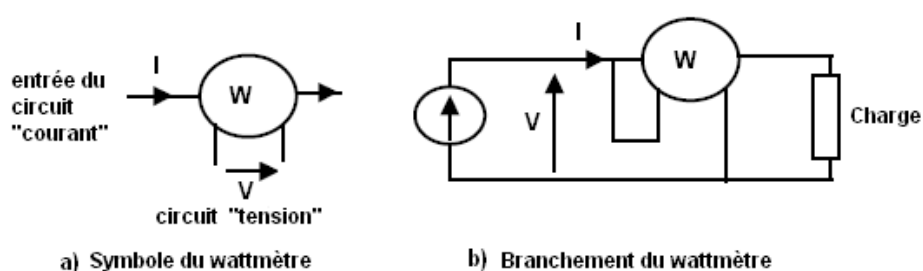


### 1-6.5 Puissances électriques

#### 1-6.5-1 Le wattmètre

Le wattmètre permet de mesurer la puissance moyenne ou active  $P$  en monophasé ou triphasé. Il possède au moins quatre bornes : deux bornes pour mesurer la tension et deux bornes pour mesurer le courant. Il y a donc deux branchements à réaliser : un branchement en parallèle (comme un voltmètre) pour mesurer la tension, et un branchement en série (comme un ampèremètre) pour mesurer le courant. Il n'y a pas de distinction de Wattmètre alternatif (AC) ou continu (DC), étant donné que celui-ci mesure systématiquement la puissance moyenne (ou active).

Le wattmètre tient compte du déphasage (en AC). Le symbole et branchement du wattmètre sont schématisés comme suit.



### 1-6.5-2 Puissance consommée par un générateur linéaire

Un générateur de f.é.m.  $e$  et de résistance interne  $r$ , a une tension à ses bornes donnée par :  $U = e - rI$ .

En multipliant par  $I$  les deux membres de cette équation on obtient :

$$UI = eI - rI^2 \Rightarrow eI = UI + rI^2.$$

- ✓  $eI$  est la puissance transformée par le générateur et qui apparaît sous forme électrique ;
- ✓  $UI$  est la puissance électrique fournie à la charge ;
- ✓  $rI^2$  est la puissance dissipée en chaleur (effet joule) dans le générateur (dans les éléments conducteurs de résistance ohmique  $r$ ).

### 1-6.5-3 Puissance consommée par un récepteur linéaire

Pour un récepteur de f.c.é.m.  $e'$  et de résistance interne  $r'$ , la tension  $U$  à ses bornes est :  $U = e' + r'I$ .

En multipliant par  $I$  les deux membres de cette équation on obtient :  $UI = e'I + r'I^2$

- ✓  $e'I$  est la puissance électrique transformée par le récepteur en une autre forme d'énergie ;
- ✓  $UI$  est la puissance électrique absorbée par le récepteur ;
- ✓  $r'I^2$  est la puissance dissipée en chaleur (effet joule) dans le récepteur (dans les éléments conducteurs de résistance ohmique  $r'$ )

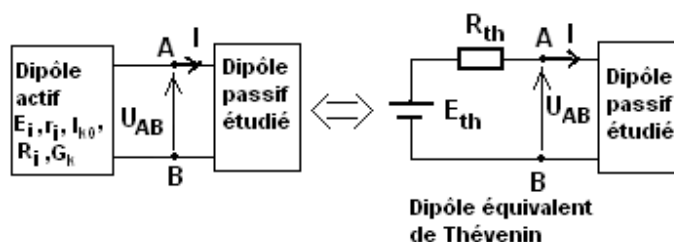
## 1-7 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Toute portion d'un circuit ne comportant que des dipôles actifs et passifs linéaires peut être remplacée par un dipôle actif linéaire équivalent. Le modèle équivalent choisi peut être celui de Thévenin ou celui de Norton.

### 1-7.1 Théorème de Thévenin

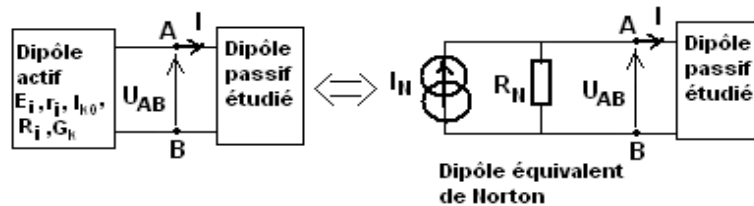
Tout réseau linéaire compris entre deux bornes, aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur unique de f.é.m.  $E_{th}$  et de résistance interne  $R_{th}$  telles que :

- \*  $E_{th}$  est la tension mesurée entre les deux bornes en circuit ouvert ;
- \*  $R_{th}$  est la résistance équivalente du réseau, obtenue en posant que toutes les f.é.m., f.c.é.m. et c.é.m. sont nulles, (on dit que toutes les sources sont éteintes).



### 1-7.2 Théorème de Norton

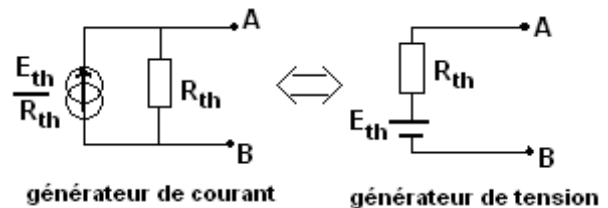
Tout réseau linéaire, ne comportant pas de sources commandées, pris entre deux de ses bornes se comporte comme une source de courant  $I_N$  en parallèle avec une résistance  $R_N$ . L'intensité  $I_N$  est égale au courant de court-circuit (les deux bornes sont reliées par un conducteur parfait). La résistance  $R_N$  est celle du circuit vu des deux bornes lorsque toutes les sources sont éteintes (générateurs et récepteurs court-circuités, sources de courant débranchées).



### 1-7.3 Equivalence entre les deux théorèmes

Il est possible d'établir une équivalence entre les modèles équivalents de Thévenin et de Norton. Aussi les générateurs de Thévenin et de Norton équivalents déterminés par les deux théorèmes sont identiques si :

$$\begin{cases} E_{th} = R_N I_N \\ R_{th} = R_N \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} I_N = \frac{E_{th}}{R_N} \\ R_{th} = R_N \end{cases}$$



### 1-8 Théorème de Millmann

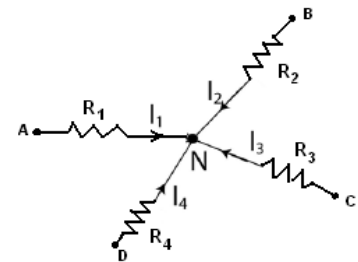
Soit le circuit ci-contre :

Au nœud N on a :  $\sum_i I_i = 0$  ; Donc  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

$$\text{D'où } \frac{V_N - V_A}{R_1} + \frac{V_N - V_B}{R_2} + \frac{V_N - V_C}{R_3} + \frac{V_N - V_D}{R_4} = 0$$

$$\text{Enfin } V_N = \frac{G_1 V_A + G_2 V_B + G_3 V_C + G_4 V_D}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

Où  $G_i$  la conductance de la branche.



**Enoncé du théorème :** si un certain nombre de branches se joignent en un nœud N et si  $R_i$  (ou  $G_i$ ) sont les résistances (ou conductances) de ces branches dont les potentiels aux extrémités sont  $V_i$ , alors le potentiel au

$$\text{nœud N a pour expression : } V_N = \frac{\sum_i \frac{V_i}{R_i}}{\sum_i \frac{1}{R_i}} = \frac{\sum_i G_i V_i}{\sum_i G_i}$$



## Chapitre 2 Circuits électriques

### 2-1 Réseaux de dipôles linéaires

#### 2-1.1 définitions

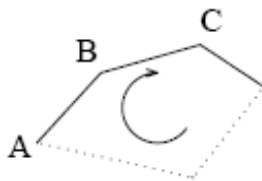
- Un **circuit** ou **réseau** électrique est un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs parfaits.
- Un **nœud** est un point du circuit relié à au moins trois dipôles.
- Une **branche** de réseau est la partie de circuit comprise entre deux nœuds.
- Une **maille** est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un nœud donné.

#### 2-1.2 Lois de Kirchhoff

On doit à **Kirchhoff** deux lois qui permettent l'analyse des réseaux électriques.

##### 2-1.2-1 Loi des mailles

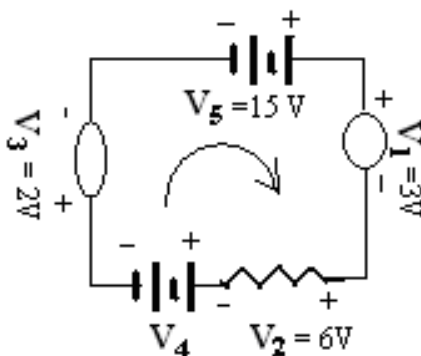
Le long de toute maille d'un réseau électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle (conservation de l'énergie).



$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + \dots + (V_{?} - V_A) = 0$$

Soit une maille d'un circuit constituée de  $n$  branches. L'équation aux branches pour la  $k$ -ième branche s'écrit :  $U_k = R_k \cdot I_k \pm e_k$  où  $R_k$ ,  $I_k$  et  $e_k$  sont respectivement la résistance totale, le courant et la f.é.m. relatifs à cette branche. La loi des mailles (ou équation de maille) s'exprime tout simplement par : 
$$\sum_{i=1}^n (R_k I_k + \epsilon e_k) = 0$$

**Exemple** : Soit le circuit ci-dessous, déterminer la valeur de la tension  $V_4$ .



**Solution :**

$$\sum_i V_i = -V_1 - V_2 - V_3 - V_4 + V_5 = 0$$

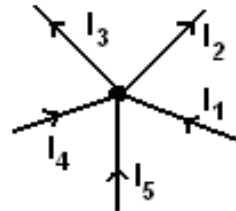
$$V_4 = V_5 - V_1 - V_2 - V_3$$

$$V_4 = 4V$$

### 2-1.2-2 Loi des nœuds

En tout nœud d'un circuit, et à tout instant, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique (conservation du courant):  $\sum I_{\text{arrivent}} = \sum I_{\text{partent}}$

Exemple : sur le schéma suivant on a :  $I_1 + I_4 + I_5 = I_2 + I_3$



Avec la convention qui stipule que tout ce qui arrive au nœud est positif et tout ce qui en part est négatif. La loi des nœuds peut encore s'écrire sous la forme suivante : En tout nœud d'un réseau la somme algébrique des courants est nulle. L'exemple ci-après donne :  $I_1 + I_4 + I_5 - I_3 - I_2 = 0$

## 2-2 Analyse d'un circuit

### 2-2.1 Analyse par les lois de Kirchhoff

En général, on cherche à calculer les courants  $I_k$  qui circulent dans chacune des branches d'un circuit, étant donné ses résistances  $R_k$  et ses générateurs (ou récepteurs, selon le sens de branchement)  $e_k$ . Du fait des lois de conservation ci-dessus, un circuit comportant  $n$  branches n'a pas  $n$  courants  $I_k$  indépendants les uns des autres. Le nombre réel d'inconnues est en fait :  $M = B - N + 1$ .

Où  $B$  est le nombre de branches du circuit et  $N$  le nombre de nœuds. Pour résoudre ce problème on utilisera la méthode suivante :

1) Choisir  $M$  mailles **indépendantes**, c'est à dire ayant au moins une branche non partagée avec une autre maille.

2) Sur chacune de ces mailles, définir un sens de parcours arbitraire pour le **courant de maille**  $J_m$ .

3) Ecrire les  $M$  équations de maille  $\sum_{m=1}^M (R_k J_m + \varepsilon e_k) = 0$ , en suivant le sens

de parcours choisi pour  $J_m$ . Pour être en accord avec la convention de la loi d'Ohm généralisée, le signe de chaque f.é.m.  $e_k$  doit dépendre de la polarité rencontrée en suivant le sens du courant. Ainsi, si l'on rencontre la borne +,  $\varepsilon = 1$  ; tandis que si l'on rencontre la borne -,  $\varepsilon = -1$ .

**N.B.** : Si, après calculs, un courant de maille est positif, cela signifie qu'il est effectivement dans le sens choisi initialement. On détermine enfin les courants réels  $I_k$  circulant dans chaque branche (*courants de branches*),

en choisissant arbitrairement leur sens, puis en exprimant ceux-ci en fonction des  $M$  courants de maille  $J_m$ .

Si le courant de branche est négatif et :

- si la branche ne contient pas de récepteur polarisé, alors le sens réel du courant est le sens contraire au sens choisi ;
- si la branche contient un récepteur polarisé, changer le sens arbitraire du courant et reprendre les équations des nœuds et mailles où intervient cette branche. Si la nouvelle résolution conduit à un courant négatif dans cette branche (sans autres incompatibilités dans le circuit), alors le courant est nul. Cela implique que la d.d.p. est inférieure à la f.é.m. ; dans ce cas il faut reprendre un nouveau schéma sans la branche concernée et déterminer les autres courants.

**Remarques : 1)** On peut résoudre le problème en utilisant les courants des branches ou les courants fictifs de mailles ( $j_m$ ) ;

**2)** Par la résolution de ce système avec la méthode matricielle, on note que :

$R_{ii}$  est la somme algébrique des résistances de la maille  $i$ .

$R_{ij}$  est la somme algébrique des résistances communes aux mailles  $i$  et  $j$ . Elle est affectée du signe  $+$  si les courants des deux mailles sont de même sens et du signe  $-$  sinon,  $R_{ij} = R_{ji}$

### 2-2.2 Analyse par le principe de superposition

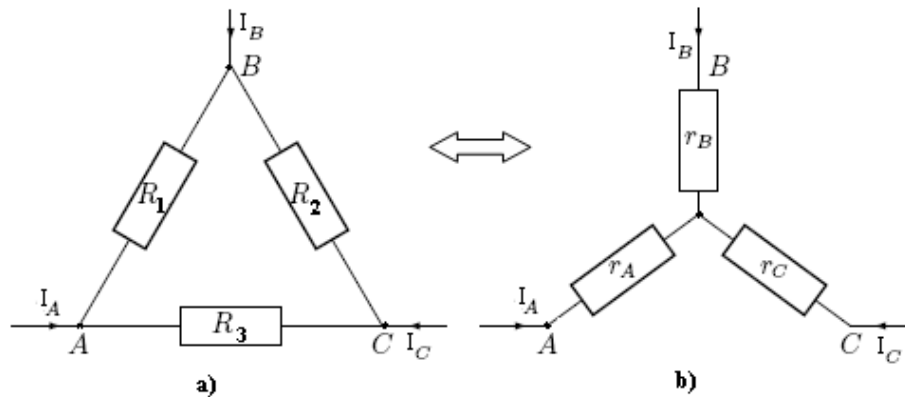
Pour pouvoir appliquer le principe ou théorème de superposition aux courants et tensions, tous les conducteurs d'un circuit doivent être linéaires (proportionnalité du courant à la tension).

Selon le principe de superposition, dans un réseau linéaire comportant plusieurs sources de tension, le courant ou la tension, en tout point du circuit est égal à la somme algébrique des courants ou des tensions produits indépendamment par chaque source agissant seule.

**NB :** Pour pouvoir analyser le fonctionnement indépendant d'une source, toutes les autres sources doivent impérativement être retirées. Pour ce faire les sources de tension doivent être remplacées par des courts-circuits et les sources de courant par des circuits ouverts.

### 2-2.3 Théorème de KENNELY

Les circuits suivants, sont appelés à cause de leurs formes, réseaux de conducteurs en triangle ou en encore en  $\pi$  ou en  $\Delta$  (a) ; réseaux en étoile, ou encore en T ou en Y. Il existe toujours un équivalent en étoile d'un réseau en triangle et réciproquement. Les expressions qui permettent de faire ces conversions sont directement issues des lois de Kirchhoff.



#### ➤ Transformation triangle-étoile

$$r_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} ; r_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} ; r_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

#### ➤ Transformation étoile-triangle

$$R_1 = \frac{r_A r_B + r_B r_C + r_A r_C}{r_C} ; R_2 = \frac{r_A r_B + r_B r_C + r_A r_C}{r_A} ; R_3 = \frac{r_A r_B + r_B r_C + r_A r_C}{r_B}$$

## Chapitre 3 : Régime alternatif monophasé

### 3-1 Grandeurs périodiques

Une grandeur physique  $g(t)$  (courant, tension, etc.) est dite périodique si elle reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux :  $g(t)=g(t+T)$

- **Période  $T$**  : c'est le temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction.

- **Fréquence  $f$**  : c'est l'inverse de la période :  $f = \frac{1}{T}$

- **Valeur moyenne** :  $\langle g \rangle = G_{\text{moy}} = \bar{G} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \frac{1}{T} \int_T g(t) dt$

- **Valeur efficace** :  $g_{\text{eff}}^2 = \langle g^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_T g^2(t) dt \Rightarrow g_{\text{eff}} = G = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T g^2(t) dt}$

### 3-2 Grandeurs sinusoïdales

Une grandeur physique est sinusoïdale lorsque l'évolution temporelle des signaux correspond à des sinusoïdes. La forme générale d'un signal sinusoïdal est donc :

$$g(t) = G_m \sin(\omega t + \varphi) .$$

Cette grandeur  $g(t)$  peut s'écrire sous la forme :  $g(t) = \bar{G} + g_a(t)$

Ou  $g(t) = \bar{G} + G_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + G_2 \sqrt{2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + G_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$

-  $\bar{G}$  : valeur moyenne de la grandeur  $g$  ;

-  $g_a(t)$  : l'ondulation ou composante alternative de  $g$  ;

-  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  : la pulsation ( $\text{rad.s}^{-1}$ ).

- l'harmonique fondamental de  $g(t)$  :  $g_1(t) = G_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1)$

- l'harmonique de rang  $n$  de  $g(t)$  :  $g_n(t) = G_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \varphi_n)$

**Exemple** : soit le courant variant sinusoïdalement :  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

-  $I_m$  : intensité maximale ;

-  $\omega t + \varphi$  : phase instantanée ;

-  $\varphi$  : phase à l'origine ou déphasage ;

-  $\omega$  : pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

**Valeur moyenne** :  $I_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m \sin(\omega t + \varphi) dt = 0$

**Valeur efficace** : on appelle **valeur efficace** de  $i(t)$  la grandeur  $I$  ( $I_{\text{eff}}$ ), intensité du courant continu qui dissiperait la même puissance que  $i(t)$  à travers une résistance. Elle est donnée par :  $I^2 = \frac{1}{T} \int_T i^2 dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T i^2 dt}$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{I_m^2}{2} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

### 3-3 Représentation d'une grandeur sinusoïdale

#### 3-3.1 Représentation de Fresnel

Le vecteur de Fresnel associé à un signal sinusoïdal est un vecteur tournant dont la vitesse angulaire est égale à la pulsation du signal. La norme de ce vecteur est égale à l'amplitude du signal et l'angle polaire est à tout instant égal à la phase instantanée du signal. La valeur algébrique du signal est donnée par la projection du vecteur tournant sur l'axe vertical.

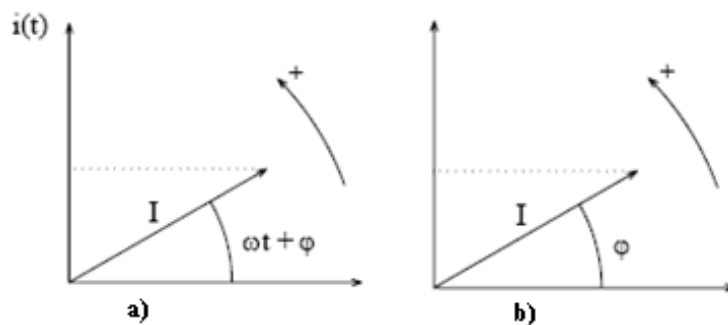


Figure 1 : Représentation de Fresnel

Lorsqu'on ne compose que des signaux de même période, on ne s'intéresse en fait qu'aux déphasages relatifs. Il n'est donc pas nécessaire de faire tourner la figure. On se contente d'un vecteur fixe ayant pour norme l'amplitude du signal et pour angle polaire son déphasage.

**Exemple : Somme de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence**

Soit  $Y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ,

Avec :  $y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_1 (\sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1)$  ;

$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_2 (\sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2)$

Alors le calcul de la somme donne :

$Y(t) = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t$

Introduisant deux paramètres réels  $A > 0$  et  $\phi$ , tels que :

$$\begin{cases} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \phi \\ A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \phi \end{cases} \text{ Avec } \begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \tan \phi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

En reportant dans l'expression de  $\underline{Y}(t)$  nous obtenons :

$$\underline{Y}(t) = A(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) = A \sin(\omega t + \phi)$$

**Remarque :** Nous aurions pu raisonner directement sur la figure 2 et à partir de celle-ci retrouver l'amplitude  $A$  et le déphasage  $\phi$  du vecteur somme des deux vecteurs représentant les fonctions  $y_1$  et  $y_2$ .

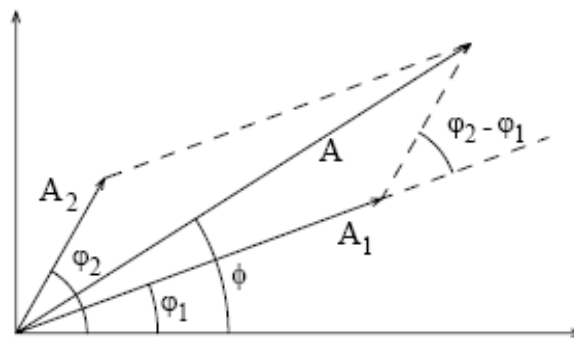


Figure 2 : Déphasage entre deux grandeurs sinusoïdales

### 3-3.2 Représentation complexe

A toute fonction sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de phase instantanée  $\omega t + \varphi$ , nous pouvons faire correspondre un nombre complexe défini par :

$$\underline{Y}(t) = A[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

Où  $j$  représente le nombre imaginaire pur tel que :  $j^2 = -1$  (notation de physicien).

La dérivée de cette fonction complexe par rapport à  $t$  donne :

$\frac{d\underline{Y}(t)}{dt} = j\omega A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{Y}(t)$ . La dérivation correspond à une *multiplication* par  $j\omega$ .

L'intégration donne :  $\int \underline{Y}(t) dt = \frac{1}{j\omega} A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{j\omega} \underline{Y}(t)$ . L'intégration se transforme en une *division* par  $j\omega$ .

## 3-4 Puissance électrique en régimes variables

### 3-4.1 Cas général.

Soit  $p(t)$  la puissance instantanée consommée par un dipôle à l'instant  $t$ . En régime périodique, on définit par  $P$  la puissance moyenne ou puissance active :

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(t) dt$$

Pour un dipôle linéaire :  $P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u \cdot i dt' = \frac{1}{T} \int_T u \cdot i dt'$

**Cas d'une Résistance :**

$$u=Ri \Rightarrow P = \frac{R}{T} \int_t^{t+T} i^2 dt' \text{ ou encore } P = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2 dt' = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_T u^2 dt' = \frac{U^2}{R}$$

### 3-4.2 Puissance apparente et facteur de puissance.

#### 3-4.2-1 Puissance apparente

La puissance apparente consommée par un dipôle est définie par :  $S=U \cdot I=U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ . C'est le produit des valeurs efficaces. L'unité correspondante est le Voltampère (V.A.) et non pas le Watt. C'est une grandeur un peu artificielle, qui est utile pour le dimensionnement des installations.

#### 3-4.2-2 Facteur de puissance

Noté  $f_P$  (ou  $\cos\varphi$  pour le régime sinusoïdal), il est défini par le rapport :

$$f_P = \frac{P}{S}$$

### 3-4.3 Puissances en régime sinusoïdal

#### 3-4.3-1 Puissance active et puissance fluctuante.

L'expression de la puissance instantanée lorsque la tension et le courant sont des fonctions sinusoïdales du temps conduit à :

$$p = 2UI \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

En utilisant la relation trigonométrique :

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)], \text{ on obtient :}$$

$$p = UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + UI \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

Cette expression est la somme de deux termes :

- le premier terme de la formule représente **la puissance fluctuante**. C'est une grandeur sinusoïdale de fréquence  $2f$  et de valeur moyenne nulle.
- le deuxième terme est **la puissance active**, qui est d'ailleurs égale à la moyenne de  $p$  :  $P = UI \cos\varphi$ , car  $\varphi$  correspond au déphasage de la tension par rapport au courant ( $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ ).

### 3-5 Puissance complexe

Aux grandeurs  $i(t)$  et  $u(t)$ , on associe les valeurs complexes :

$$\underline{i}(t) = I_{\text{max}} \cdot e^{j\omega t} = I_{\text{max}} (\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$\underline{u}(t) = U_{\text{max}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = U_{\text{max}} [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$



La puissance instantanée n'étant pas une fonction sinusoïdale sa représentation complexe n'est pas autorisée. Nous introduisons toutefois une puissance complexe définie par :  $\underline{p} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = UI \cdot e^{j\varphi} = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Cet abus nous permet de retrouver la puissance active et la puissance apparente. On note généralement P et Q les parties réelle et imaginaire de la puissance complexe :  $\underline{p} = P + jQ = S \cdot e^{j\varphi}$

Avec  $P = \text{Re}(\underline{p}) = UI \cos \varphi$  : puissance active (W)

$Q = \text{Im}(\underline{p}) = UI \sin \varphi$  : puissance réactive (Volt-Ampère-Réactive : VAR) ;

$S = |\underline{p}| = UI$  : puissance apparente (VA).

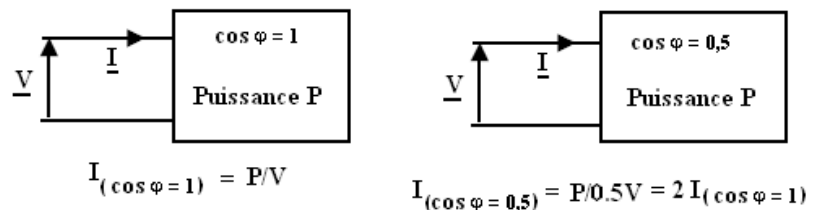
On en déduit que :  $S^2 = P^2 + Q^2$

### 3-6 Facteur de puissance

Dans le cas des régimes sinusoïdaux, le facteur de puissance est égal au cosinus du déphasage de la tension par rapport à l'intensité ( $\cos \varphi$ ).

#### 3-6.1 Problème du facteur de puissance

La présence d'un facteur de puissance  $< 1$  dans une installation a une conséquence très négative : Le courant fourni pour produire cette puissance est surélevé par rapport au cas où le facteur de puissance est égal à 1. L'exemple de deux récepteurs suivants en donne une illustration parfaite.



La tarification de l'énergie comptabilise uniquement la puissance active consommée. De ce fait, les deux utilisateurs ci-dessus payent la même facture, alors que le récepteur dont le  $\cos \varphi = 0.5$  consomme deux fois plus de courant efficace.

Ainsi, les sociétés de production d'énergie électrique surfacturent les utilisateurs dont le  $\cos \varphi < 0.8$ , de manière à pénaliser le surdimensionnement du réseau qu'implique la nécessité d'un courant trop grand, (norme en France est  $\cos \varphi = 0.93$ ).

### 3-6.2 Compensation de la puissance réactive

Quand une installation, ou un réseau électrique présente un  $\cos\varphi < 0.8$ , il est nécessaire de modifier l'installation de manière à élever ce facteur. Etant donné que la grande majorité des installations sont plutôt inductives, ( $\cos\varphi < 1$  est dû à la présence d'inductances dans les circuits), la manière la plus simple d'élever le  $\cos\varphi$  est de placer une batterie de condensateurs en tête de l'installation. On appelle ça la compensation de l'énergie réactive.

Considérons l'impédance  $\underline{Z} = r.e^{j\varphi} = R + jX$ , représentant une charge inductive ( $X > 0$ ), suivante. La puissance réactive correspondante est  $Q = X.I^2$

L'ajout d'un condensateur C en tête du circuit ne modifie pas la charge et ne rajoute aucune puissance active. En revanche, C produit de la puissance réactive et va donc donner un nouveau facteur de puissance :

$\cos\varphi'$ .

Or la puissance réactive produite par un condensateur est :  $Q_C = -C\omega V^2$ , (le signe – signifie la production).

Aussi, d'après le théorème de Boucherot ( $Q_{\text{total}} = \sum Q_i$ ) :  $Q_{\text{tot}} = Q + Q_C$ .

La compensation de la puissance réactive consiste à annuler la puissance réactive totale et avoir un facteur de puissance égal à 1, d'où  $Q = Q_C$  et  $\cos\varphi' = 1$ . Ainsi la capacité du condensateur à choisir vaut alors :  $C = XI^2 / \omega V^2 = Q / \omega V^2$

**Remarques :** - Il est important de connaître la formule générale qui donne la valeur de la capacité en fonction des  $\cos\varphi$  et  $\cos\varphi'$ . Cette formule est fournie par les tangentes comme suit :  $C = P(\tan\varphi - \tan\varphi') / \omega V^2$

- Pour ne pas sur-dimensionner inutilement les condensateurs, on a tendance à calculer leurs valeurs pour aboutir à  $\cos\varphi = 0.9$ .

Cette façon de compenser l'énergie réactive s'appelle "compensation statique".

### 3-7 Circuits en courant alternatif

Lorsque la fréquence du courant n'est pas très élevée ( $f < 1\text{MHz}$ ), on peut considérer que l'intensité du courant est la même, à chaque instant, en tout point d'un circuit. Dans ces conditions les lois de Kirchhoff s'appliquent aux grandeurs instantanées des courants et tensions alternatives.

### 3-7.1 Circuit purement résistif

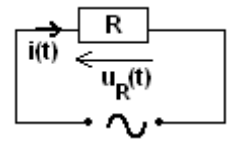
Soit le circuit ci-contre dans lequel la résistance  $R$  est traversée par un courant alternatif :  $i(t) = I_m \cos \omega t$ .

La loi d'Ohm appliquée aux bornes de la résistance  $R$  donne :

$$u_R(t) = RI_m \cos \omega t.$$

Pour un circuit purement résistif, l'intensité et la tension sont en phase ( $\varphi = 0$ )

L'impédance du circuit est :  $Z_R = R$ .



### 3-7.2 Circuit purement capacitif

Soit le circuit ci-contre parcouru par un courant alternatif :

$$i(t) = I_m \cos \omega t.$$

Aux bornes du condensateur, on a :  $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ , avec  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

Par intégration on :  $q(t) = \int_0^t i(t') dt' = \frac{I_m}{\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{D'où } u_C(t) = \frac{I_m}{C\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La tension aux bornes du condensateur est en retard de phase de  $\pi/2$  par rapport à l'intensité. On dit qu'elle est en quadrature retard sur l'intensité.

L'impédance du circuit est :  $Z_C = \frac{1}{C\omega}$

### 3-7.3 Circuit purement inductif

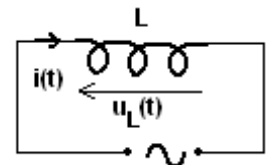
Soit le circuit ci-contre parcouru par un courant alternatif :

$$i(t) = I_m \cos \omega t.$$

La tension aux bornes de la bobine est :  $u_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ .

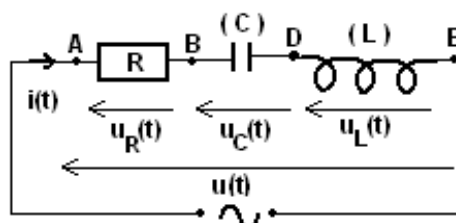
La tension aux bornes de la bobine est en avance de phase de  $\pi/2$  par rapport à l'intensité. On dit qu'elle est en quadrature avance sur l'intensité.

L'impédance du circuit est :  $Z_L = L\omega$



### 3-7.4 Dipôle RLC en série

Soit le circuit ci-dessous constitué d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ , d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une bobine d'inductance  $L$ , branchés en série et traversés par un courant alternatif :  $i = I_m \cos \omega t$ .



La loi d'additivité des tensions permet d'écrire :  $u(t) = u_{AE}(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$ .

D'après les sections (4-6.1, 4-6.2 et 4-6.3), on obtient :

$$u(t) = RI_m \cos \omega t + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

### - Caractéristiques du dipôle

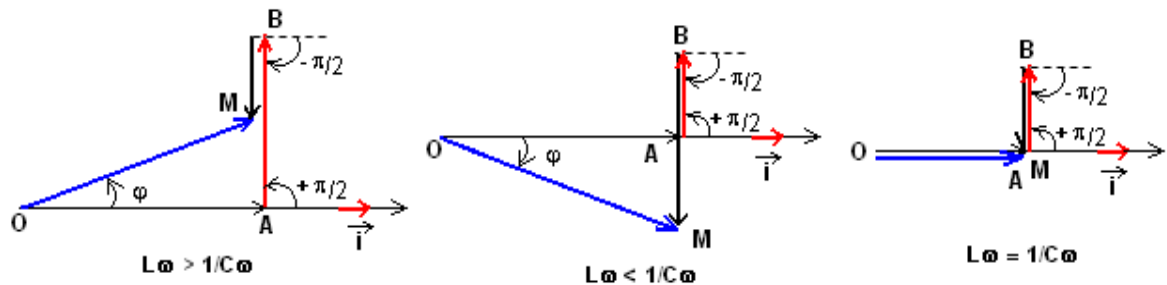
$u(t)$  est une tension sinusoïdale de la forme :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

Pour la construction de Fresnel, posons :  $OA = RI_m$  ;  $AB = L\omega I_m$  ;

$BM = I_m/C\omega$  et  $OM = U_m$ .

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

Trois cas peuvent être envisagés selon les valeurs de  $L\omega$  et  $1/C\omega$ , tel que indiqués sur la figure suivante.



D'après la construction de Fresnel, le déphasage est donné par la relation :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{RI_m} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}, \quad (\varphi > 0) \text{ et } \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

- $L\omega < \frac{1}{C\omega}$  : **La tension est en retard de phase  $\varphi$  sur l'intensité.**

On aura toujours d'après la construction :  $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$  ; avec ici  $\varphi < 0$

et

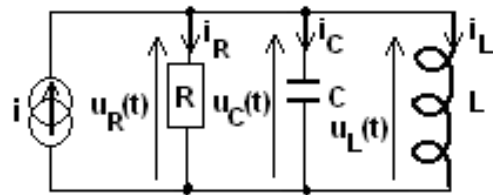
$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

- $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  : **La tension est phase avec l'intensité,  $\varphi = 0$ .** Le dipôle se comporte comme s'il n'était constitué que du conducteur ohmique de résistance  $R$ .

### 3-7.5 Dipôle RLC en parallèle

Soit un dipôle RLC alimenté en courant sinusoïdal  $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Ce courant peut être délivré par un générateur de courant d'intensité sinusoïdale dont la valeur maximale est maintenue constante et la fréquence  $f$  variable. A défaut le générateur de courant peut être remplacé par un générateur de tension en série avec une résistance  $R_P$  de très grande valeur devant la résistance interne du générateur et la résistance  $R_0$  du résistor placé en parallèle avec la bobine et le condensateur. Ainsi la valeur de la résistance  $R$  du dipôle RLC parallèle sera égale à :

$$R = \frac{R_P \cdot R_0}{R_P + R_0}$$



Si on prend une tension  $u(t)$  de la forme  $u(t) = U_m \cos \omega t$

L'intensité  $i(t)$  sera déphasé de  $\varphi$  par rapport à la tension et pourrait se mettre sous la forme :  $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

La loi des nœuds donne :  $i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$

La loi des tensions donne :  $u(t) = u_R(t) = u_C(t) = u_L(t)$

D'après les sections précédentes, on connaît les relations existantes entre les intensités et les tensions aux bornes des différents composants.

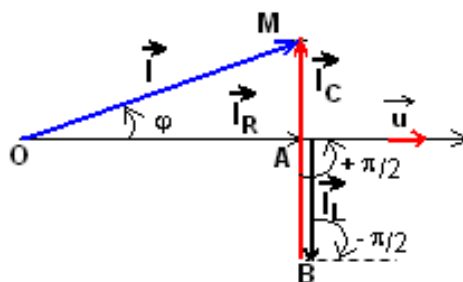
$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \cos \omega t ; \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{U_m}{L\omega} \cdot \cos(\omega t - \pi/2) ;$$

$$i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C\omega U_m \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$\text{D'où : } i(t) = \frac{U_m}{R} \cdot \cos \omega t + C\omega U_m \cdot \cos(\omega t + \pi/2) + \frac{U_m}{L\omega} \cdot \cos(\omega t - \pi/2)$$

#### 3-7.5-1 Caractéristiques du dipôle

Pour la construction de Fresnel, posons :  $OA = U_m/R$  ;  $AB = U_m/L\omega$  ;  $BM = C\omega U_m$  et  $OM = I_m$ . On a la relation vectorielle :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$



▪ **Impédance du circuit Z :**

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OAM donne :  
 $OM^2 = OA^2 + (BM - AB)^2 \rightarrow I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2$

$\rightarrow \left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$ , on déduit ainsi l'impédance Z du circuit :

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

On peut utiliser l'admittance du circuit ( $\underline{y} = G + jB$ , G : conductance, B : susceptance) tel que :  $Y = \frac{1}{Z}$ , avec  $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \rightarrow I_m = YU_m$  et faire l'analogie avec le circuit RLC série :  $U_m = ZI_m$ .

▪ **Déphasage  $\varphi$**

Le déphasage de i par rapport à la tension est déterminé par la construction :

$$\tan \varphi = -R \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

### 3-7.5-2 Etude de la résonance

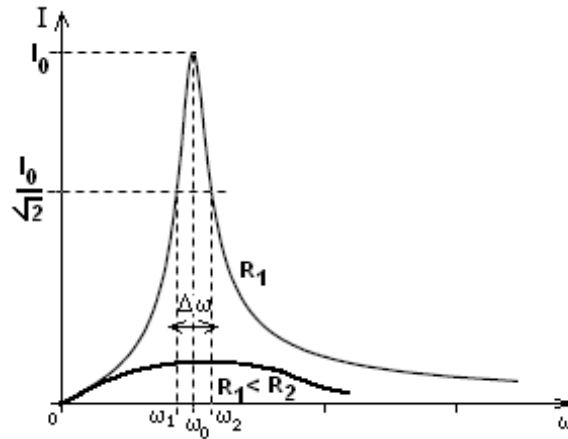
Lorsque, dans un dipôle RLC,  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ , l'impédance du circuit vaut R et l'intensité efficace  $I = \frac{U}{R} = I_0$  passe par un maximum. La tension et l'intensité sont en phase ; on dit qu'il y a **résonance d'intensité**.

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

**A la résonance, la fréquence f (ou pulsation  $\omega$ ) de la tension imposée est la égale à la fréquence propre  $f_0$  (ou pulsation propre  $\omega_0$ ) du circuit.**

**- courbe de résonance**

L'étude expérimentale permet de tracer la courbe de résonance  $I = f(\omega)$ , dont l'allure est donnée pour deux valeurs différentes de la résistance R. Pour une résistance de valeur faible  $R_1$ , la résonance est **aiguë** et pour une valeur très grande  $R_2$ , la résonance est **floue**.



### - Bande passante à « 3décibels »

La bande passante dite à « trois décibels » (ou encore « à -3db ») d'un circuit correspond aux pulsations pour lesquelles  $I(\omega) \geq \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ,  $I_0$  étant l'intensité efficace à la résonance. Les pulsations limites  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de cette bande sont telles que :  $I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ .

### Calcul des pulsations de coupures

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{U}{Z(\omega_1)} = \frac{U}{Z(\omega_2)} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \Rightarrow Z^2(\omega_1) = Z^2(\omega_2) = 2R^2$$

$$\text{Or } Z^2(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R \Rightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

Cette équation a pour discriminant :  $\Delta = R^2C^2 + 4LC > 0$ , donc les racines sont réelles et de la forme :  $\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{\Delta}}{2LC}$ .

La pulsation étant une grandeur positive, on ne conserve donc que les racines positives, qui sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \\ \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \end{cases} \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

La grandeur  $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$  représente la **largeur de la bande passante** du circuit.

### - Facteur de qualité

Il caractérise la largeur de la résonance ; celle-ci est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand. Il est défini par la relation :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

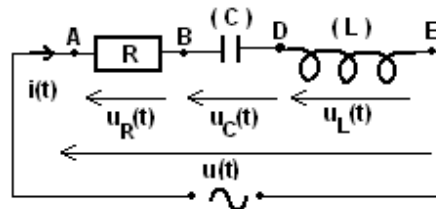
### - Surintensité à la résonance

Si la résistance du dipôle est faible, l'intensité efficace est grande. Les tensions efficaces aux bornes du condensateur et de la bobine peuvent être supérieures à la tension efficace appliquée aux bornes du circuit : **c'est la surintensité.**

**N.B. :** Les surintensités doivent être évitées en courant de basse fréquence car elles peuvent entraîner des électrocutions ou claquage des condensateurs.

### 3-6.7 Etude d'un circuit RLC par les nombres complexes

Soit le dipôle RLC série suivant ; en notation complexe l'impédance de chaque dipôle linéaire passif (résistance, inductance et capacité) est notée  $\underline{z}(j\omega)$  et relie la différence de potentielle au courant par :  $\underline{u}(t) = \underline{z}(j\omega) \cdot \underline{i}(t)$



- Pour la résistance pure :  $\begin{cases} \underline{u}(t) = U_m \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{u}(t) = R \cdot \underline{i}(t) \end{cases} \Rightarrow \underline{z}_R(j\omega) = R$

- Pour l'inductance pure :

$$\begin{cases} \underline{u}(t) = L \frac{d\underline{i}}{dt} \\ \underline{i}(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases} \Rightarrow \underline{u}(t) = jL\omega \cdot \underline{i}(t) \Rightarrow \underline{z}_L(j\omega) = jL\omega = L\omega \cdot e^{j\pi/2}$$

- Pour la capacité pure :

$$\begin{cases} \underline{i}(t) = \frac{d\underline{q}(t)}{dt} \\ \underline{q}(t) = C \cdot \underline{u}(t) \end{cases} \Rightarrow \underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = jC\omega \cdot \underline{u}(t) \Rightarrow \underline{z}_C(j\omega) = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega} \cdot e^{-j\pi/2}$$

- **Impédance du circuit**

La loi des mailles  $u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$ , donne en notation complexe :

$$\underline{u}(t) = \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \cdot \underline{i}(t) = \underline{z}(j\omega) \cdot \underline{i}(t) \Rightarrow \underline{z}(j\omega) = \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]$$

L'impédance peut être notée :  $\underline{z}(j\omega) = R + jX$ , avec  $X(\omega) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$  appelé réactance du circuit.



Le module de l'impédance du circuit est donc :

$$|z(j\omega)| = Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Puisque  $\underline{u}(t) = U_m \cdot e^{j\omega t}$ , l'intensité peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{i}(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

Alors la loi des mailles devient :

$$U_m \cdot e^{j\omega t} = (R + jX)I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow U_m^2 = (R^2 + X^2)I_m^2 \Rightarrow Z = \frac{U_m}{I_m}$$

- **Déphasage  $\varphi$**

$$U_m \cdot e^{j\omega t} = (R + jX)I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{-j\varphi} = Z(\cos \varphi - j\sin \varphi) = R + jX$$

$$\text{Ainsi : } \tan \varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ et } \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

- **Résonance**

Lorsque, dans un dipôle RLC,  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ , l'impédance du circuit vaut **R** et

l'intensité efficace  $I = \frac{U}{R} = I_0$  passe par un maximum. La tension et l'intensité sont en phase ; on dit qu'il y a **résonance d'intensité**.

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'allure de la courbe de résonance d'intensité est identique à celle trouvée précédemment.

## Chapitre 4 : Systèmes triphasés

Les réseaux triphasés sont très répandus dans le monde industriel en raison de leurs nombreuses propriétés favorables à la production, au transport et à l'utilisation des grandeurs électriques.

### 4-1 Présentation

Un **système triphasé** (souvent abrégé 3~) est une catégorie particulière de **réseau polyphasé** à trois grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de même fréquence.

#### 4-1.1 Avantages par rapport au monophasé

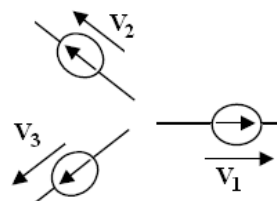
- Les machines triphasées ont des puissances de plus de 50% supérieures aux machines monophasées de même masse et donc leurs prix sont moins élevés (le prix est directement proportionnel à la masse de la machine) ;
- La distribution en lignes triphasées est économique en terme de poids de conducteur ( $Vol_{Cutri} = Vol_{Cumono}/2$ ) ;
- Lors du transport de l'énergie électrique, les pertes sont moindres en triphasé (puissance instantanée est constante = puissance moyenne) ;
- Les machines électriques qui produisent et utilisent le courant triphasé fonctionnent de façon optimale.

#### 4-1.2 Inconvénient

La représentation du schéma électrique, n'est pas évidente. Si on considère les trois phases indépendantes, il apparaît deux problèmes :

- il n'y a pas de référence de tension commune
- le système se ramène à six fils et non trois, ce qui supprime les avantages cités précédemment.

Il est alors nécessaire de relier certains fils, c'est ce qu'on appelle coupler les phases.



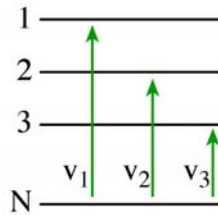
#### 4-1.3 Distribution

La distribution se fait à partir de quatre bornes :

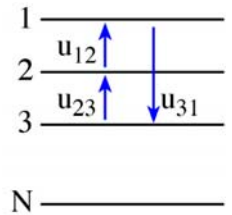
- Trois bornes de **phase** repérées par 1, 2, 3 ou A, B, C ou R, S, T ;
- Une borne **neutre** N.

#### 4-1.4 Symbolisation

$v_1, v_2, v_3$  : tensions simples ou étoilées entre les phases et le neutre.



$u_{12}, u_{23}, u_{31}$  : tensions composées entre les phases.

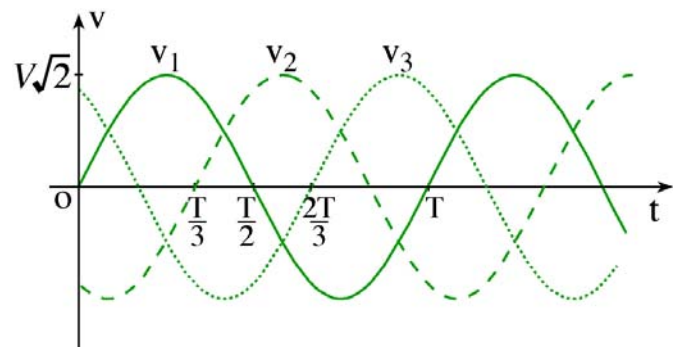


### 4-2 Etude des tensions simples

#### 4-2.1 Observation à l'oscilloscope

- Les tensions sont déphasées de  $2\pi/3$  l'une par rapport à l'autre ;
- Elles ont la même valeur efficace.

On dit que le système est équilibré.



#### 4-2.2 Définition

Un système triphasé est équilibré (ou symétrique) lorsque les trois tensions possèdent la même valeur efficace et qu'elles sont déphasées de  $2\pi/3$  l'une par rapport à l'autre. Il est **direct** si les phases sont ordonnées dans le sens trigonométrique inverse et **inverse** dans l'autre cas.

#### 4-2.3 Equations horaires

##### Écriture temporelle

$$v_1(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad \rightarrow$$

$$v_2(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \quad \rightarrow$$

$$v_3(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \quad \rightarrow$$

##### Écriture complexe

$$\underline{v}_1(t) = V\sqrt{2}.e^{j\omega t}$$

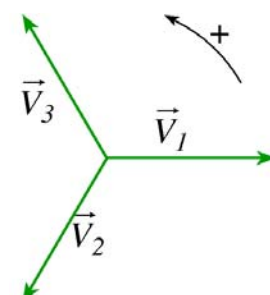
$$\underline{v}_2(t) = V\sqrt{2}.e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})}$$

$$\underline{v}_3(t) = V\sqrt{2}.e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})}$$

#### 4-2.4 Vecteurs de Fresnel associés

On déduit des équations horaires les vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1(V, 0); \vec{V}_2(V, -\frac{2\pi}{3}); \vec{V}_3(V, -\frac{4\pi}{3})$$

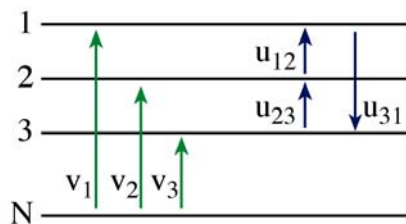


Le système est **équilibré direct** car la construction de Fresnel montre que  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0$  et un observateur immobile verrait les vecteurs défiler devant lui dans l'ordre 1, 2, 3.

## 4-3 Etude des tensions composées

### 4-3.1 Définition

En retranchant deux tensions simples consécutives, on établit l'expression des **tensions composées**, notées  $\underline{u}$  (en complexe) ou  $U$  (valeur efficace), entre deux phases. Les tensions composées ont même fréquence que les tensions simples.



$$\begin{aligned} u_{12} &= v_1 - v_2 \Rightarrow \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\ u_{23} &= v_2 - v_3 \Rightarrow \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3 \\ u_{31} &= v_3 - v_1 \Rightarrow \vec{U}_{31} = \vec{V}_3 - \vec{V}_1 \end{aligned}$$

### 4-3.2 Equations horaires et oscillogrammes

Calcul de  $u_{12}$  :

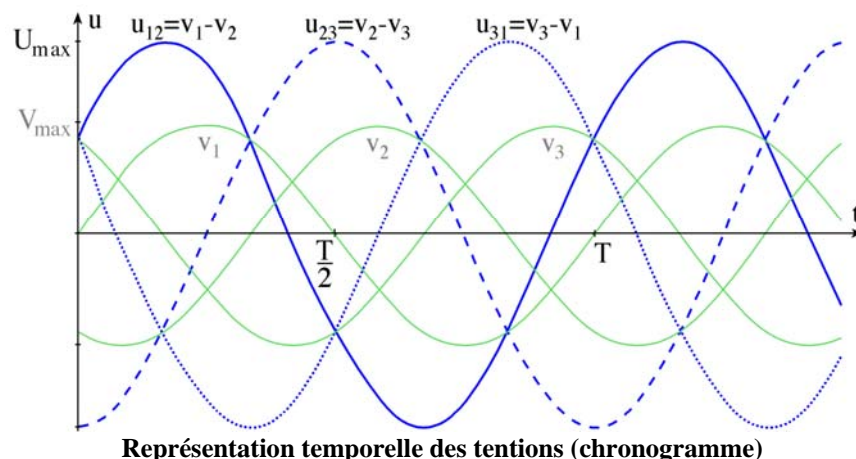
Partant de la notation complexe, on aura :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{12} &= \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = V\sqrt{2}(e^{j\omega t} - e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})}) = V\sqrt{2}.e^{j\omega t}(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = V\sqrt{2}e^{j\omega t}(1 - \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}) \\ &= V\sqrt{2}.e^{j\omega t}(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = V\sqrt{2}\sqrt{3}.e^{j(\omega t + \frac{\pi}{6})} = \underline{V}_1\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \rightarrow u_{12} = V\sqrt{2}\sqrt{3}\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

On montrera de la même manière que :

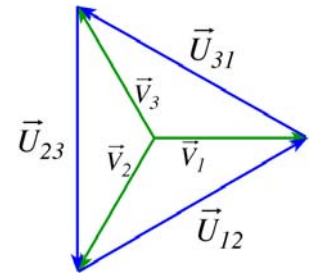
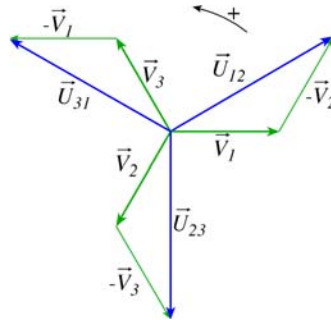
$$\underline{u}_{23} = \underline{V}_2\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}} \rightarrow u_{23} = V\sqrt{2}\sqrt{3}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\underline{u}_{31} = \underline{V}_3\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}} \rightarrow u_{31} = V\sqrt{2}\sqrt{3}\cos(\omega t - \frac{7\pi}{6})$$



### 4-3.3 Vecteurs de Fresnel associés

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 & \left( \frac{U}{6} \right) \\ \bar{U}_2 & \left( \frac{-3\pi}{6} \right) \\ \bar{U}_3 & \left( \frac{-7\pi}{6} \right)\end{aligned}$$



Le réseau est équilibré :  $\bar{U}_{12} + \bar{U}_{23} + \bar{U}_{31} = \vec{0} \Leftrightarrow \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{23} + \mathbf{u}_{31} = 0$

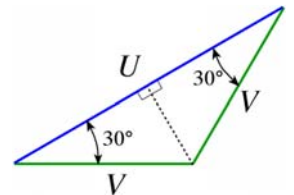
### 4-4 Relation entre U et V

Ces trois tensions forment un système triphasé symétrique en avance de  $\pi/6$  sur celui des tensions simples. Le rapport des modules des tensions composées et simples est  $\sqrt{3}$ , d'où :  $U = V\sqrt{3}$ .

Autrement, partant de la construction de Fresnel, on obtient :

$$U = 2V \cos 30^\circ \rightarrow U = 2V \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow U = V\sqrt{3}$$

Cette relation est toujours vraie quelque soit la charge.



**NB :** Les couples de tensions sont notés sur les plaques signalétiques des systèmes triphasés tension simple/tension composée (V/U). Ceux couramment rencontrés dans l'industrie sont : 220/380 ; 230/400 V et 380/660 V

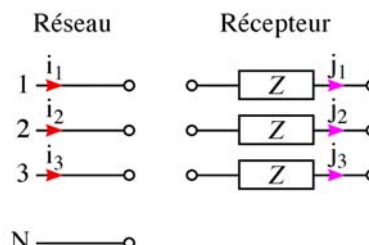
### 4-5 Récepteurs triphasés équilibrés

#### 4-5.1 Définitions

**Récepteurs triphasés équilibrés :** ce sont des récepteurs constitués de trois dipôles identiques, d'impédance  $\underline{Z}$ .

**Courants par phase :** ce sont les courants qui traversent les éléments  $\underline{Z}$  du récepteur triphasé (Symbole J)

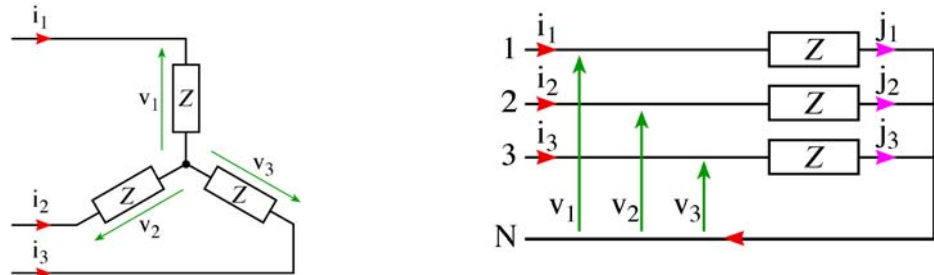
**Courants en ligne :** ce sont les courants qui passent dans les fils du réseau triphasé (Symbole I)



Le réseau et le récepteur peuvent se relier de deux façons différentes : en étoile ou en triangle.

## 4-5.2 Couplage étoile

### 4-5.2-1 Montage

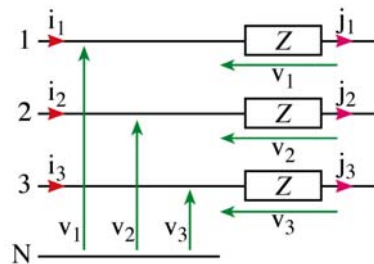


Même branchement représenté de deux façons différentes.

Le premier schéma explique le terme « étoile » (symbole **Y** ou  $\star$ )

Comme il s'agit des mêmes impédances, de ce fait :  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ , donc

$i_n = 0$ . Le courant dans le fil neutre est nul. **Le fil neutre n'est donc pas nécessaire**, d'où la représentation ci-dessous.

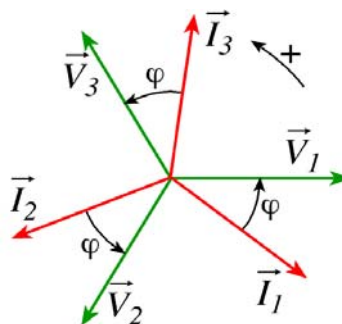


### 4-5.2-2 Relations entre les courants

On constate sur les schémas que les courants en ligne sont égaux aux courants par phase :  $i_1 = j_1$  ;  $i_2 = j_2$  ;  $i_3 = j_3$

De plus la charge et le réseau sont équilibrés, donc :  $I_1 = I_2 = I_3 = I = J$

On retiendra pour le couplage étoile :  $I = J$



### 4-5.2-3 Puissances

#### ✓ Théorème de Boucherot

Les puissances active et réactive absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances actives (P) et réactives (Q) absorbées par chaque élément du groupement.

Donc d'après ce théorème :  $P = P_1 + P_2 + P_3$  et  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

Pour un récepteur équilibré :  $P_1 = P_2 = P_3$  et  $Q_1 = Q_2 = Q_3$

Finalement :  $P = 3.P_1$  et  $Q = 3.Q_1$

Facteur de puissance :  $k = P / S$ .

#### ✓ Puissances consommées

Pour une phase du récepteur :  $P_1 = VI \cos \varphi$  avec  $\varphi = (\vec{I}, \vec{V})$

Pour le récepteur complet :  $P = 3.P_1 = 3VI \cos \varphi$  de plus  $v = \frac{U}{\sqrt{3}}$

Finalement pour le couplage étoile :  $P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$

De la même façon, la puissance réactive :  $Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$

Puissance apparente :  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}UI$

Facteur de puissance :  $k = \cos \varphi$

#### ✓ Pertes par effet Joule

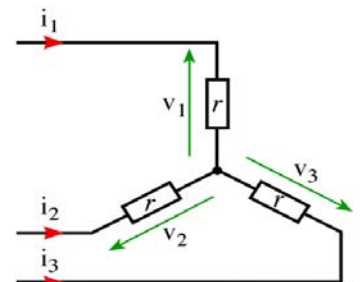
Considérons uniquement la partie résistive du récepteur.

Pour une phase du récepteur :  $P_{J1} = rI^2$

La résistance vue entre deux bornes est :  $R = 2r$

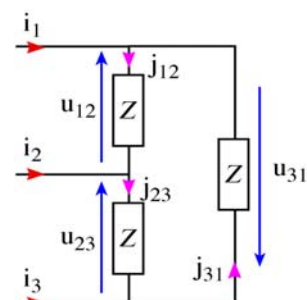
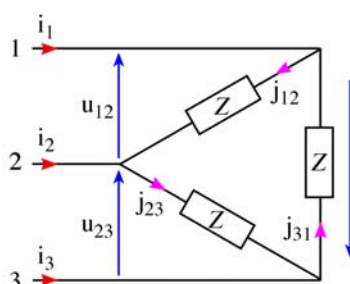
Pour le récepteur complet :  $P = 3.P_{J1} = 3rI^2 = \frac{3}{2}RI^2$

Finalement pour le couplage étoile :  $P = \frac{3}{2}RI^2$



### 4-5.3 Couplage triangle

#### 4-5.3-1 Montage



Le montage ci-dessus représente le même branchement représenté de trois façons différentes. Le premier schéma explique le terme « triangle» ( $\Delta$ ) et le second ( $\mathbf{D}$ )

Comme il s'agit des mêmes impédances,  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  et  $j_{12} + j_{23} + j_{31} = 0$

#### 4-5.3-2 Relations entre les courants

D'après les schémas ci-dessus, la loi des nœuds donne :

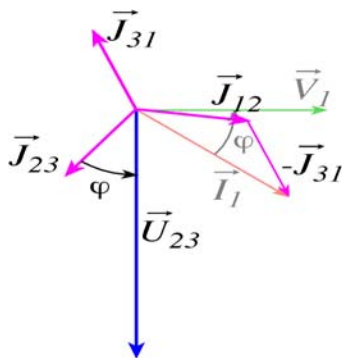
$$i_1 = j_{12} - j_{31} \Rightarrow \vec{I}_1 = \vec{J}_{12} - \vec{J}_{31}$$

$$i_2 = j_{23} - j_{12} \Rightarrow \vec{I}_2 = \vec{J}_{23} - \vec{J}_{12}$$

$$i_3 = j_{31} - j_{23} \Rightarrow \vec{I}_3 = \vec{J}_{31} - \vec{J}_{23}$$

Le système triphasé est équilibré :  $I_1 = I_2 = I_3 = I$  et  $J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$ .

Pour le couplage triangle, la relation entre I et J est la même que celle entre V et U du couplage étoile. D'où :  $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$



#### Remarque :

Les déphasages pour les deux montages étoile et triangle sont les mêmes. Il s'agit du déphasage provoqué par le dipôle  $\underline{Z}$  du montage :  $\varphi_{\Delta}(\vec{J}, \vec{U}) = \varphi_Y(\vec{I}, \vec{V})$

#### 4-5.3-3 Puissances

##### Puissances consommées

Pour une phase du récepteur :  $P_1 = UJ \cos \varphi$  avec  $\varphi = (\vec{J}, \vec{U})$

Pour le récepteur complet :  $P = 3.P_1 = 3UJ \cos \varphi$  de plus  $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$

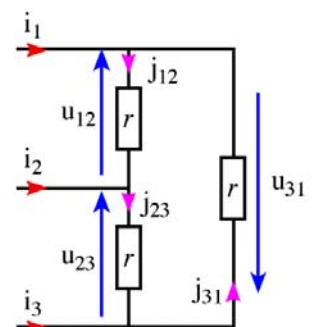
Finalement pour le couplage triangle :  $P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$

De même façon :  $Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$  et  $S = \sqrt{3}UI$

Facteur de puissance :  $k = \cos \varphi$

##### Pertes par effet Joule

Considérons uniquement la partie résistive du récepteur.





La résistance équivalente vue entre deux bornes du récepteur est donné par :

$$R = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3}r \quad (2r \text{ en parallèle avec } r).$$

Pour une phase du récepteur :  $P_{J1} = rJ^2$

Résistance vue entre deux bornes :  $R = \frac{2}{3}r$

Pour le récepteur complet :  $P = 3 \cdot P_{J1} = 3rJ^2 = 3 \frac{3}{2} R \left( \frac{I}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{3}{2} RI^2$

Finalement pour le couplage triangle :  $P = \frac{3}{2} RI^2$

**Remarque : Quel que soit le couplage, les puissances s'expriment de la même façon en fonction :**

- de la tension composée U ;
- du courant en ligne I.

Ces deux grandeurs sont les seules qui soient toujours mesurables quel que soit le couplage, même inconnu, du récepteur utilisé.

## 4-6 Récepteurs triphasés déséquilibrés

### 4-6.1 Définition

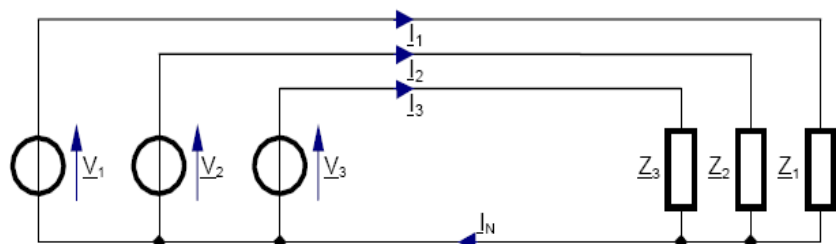
Un récepteur est déséquilibré s'il est constitué de trois impédances différentes  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  et  $\underline{Z}_3$ , couplées en étoile ou en triangle. Les courants de ligne ne sont alors pas tous égaux. La conséquence la plus immédiate est que le potentiel du neutre de la charge est décalé par rapport à celui de l'équilibre.

### 4-6.2 Influence du déséquilibre

Lorsqu'il y a déséquilibre, le fait que le neutre soit relié ou pas est primordial.

#### 4-6.2-1 Neutre relié

Soit le système triphasé déséquilibré à neutre relié au réseau par les charges suivantes :



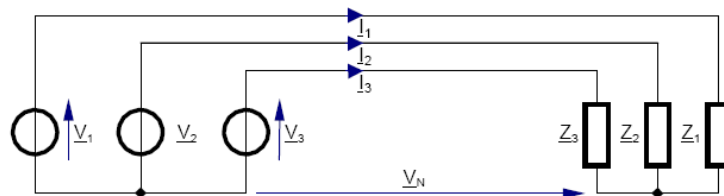
On détermine la somme des trois courants en ligne, c'est à dire le courant dans le neutre, dans la charge étoile déséquilibrée :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3} = I_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t - \varphi_1)} + I_2 \sqrt{2} e^{j(\omega t - \varphi_2 - \frac{2\pi}{3})} + I_3 \sqrt{2} e^{j(\omega t - \varphi_3 - \frac{4\pi}{3})}$$

Cette somme n'est plus nécessairement nulle : Un courant circule dans le conducteur de neutre. Ce principe est utilisé dans certains dispositifs de détection de défauts : le défaut (parfois dû à un contact humain) occasionne un déséquilibre, le courant de neutre est détecté dans le but d'agir en conséquence (coupure, pour protéger les personnes ou signalisation).

#### 4-6.2-2 Neutre non relié

Si le neutre n'est pas relié, on détermine son potentiel par rapport au neutre qui existerait si la charge était équilibrée.



Cette tension est déterminée grâce au théorème de Millmann :

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_2 \underline{V}_2 + \underline{Y}_3 \underline{V}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Dans le cas général, cette tension n'est pas toujours nulle. Le potentiel de neutre est décalé par rapport au neutre de la source. Ce dernier est souvent relié à la terre, on observe donc  $\underline{V}_N$  près de la charge. Cela peut présenter un danger pour certains régimes de neutre, en cas de défaut dans la charge.

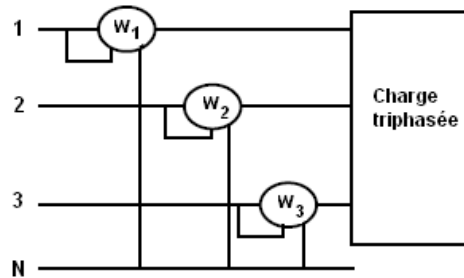
### 4-6 Mesure de puissances en triphasé

#### 4-6.1 Mesure de la puissance active dans le cas général

##### (« méthode des trois wattmètres »)

Comme le système présente trois phases qui consomment chacune sa puissance propre, il est nécessaire de disposer de 3 wattmètres pour mesurer la puissance totale. Dans ces conditions la présence du fil neutre est nécessaire, donc cette méthode ne permet pas la mesure de la puissance dans le cas d'une charge montée en triangle (inconvenient !).

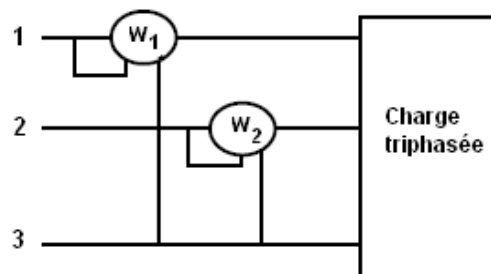
La puissance totale est la somme des puissances consommées par les trois phases, mesurées par les trois wattmètres :  $P = P_1 + P_2 + P_3$



Méthode des 3 wattmètres

#### 4-6.2 Mesure de la puissance dans le cas où le neutre n'est pas relié (« méthodes des deux wattmètres »)

On dispose les 2 wattmètres, comme l'indique le schéma ci-dessous.



Méthode des 2 wattmètres

La puissance totale est donnée par la somme des indications des deux wattmètres :  $P = P_1 + P_2$

Cette méthode n'est valable que si le système est équilibré (ou déséquilibré) sans neutre, car la valeur moyenne d'une somme de signaux est la somme des valeurs moyennes.

#### Démonstration :

$$W_1 + W_2 = \langle (v_1 - v_3)(t) \cdot i_1(t) + (v_2 - v_3)(t) \cdot i_2(t) \rangle = \langle v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t) + v_3(t) \cdot (-i_1(t) - i_2(t)) \rangle$$

Si le système est équilibré ou déséquilibré sans neutre,  $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ .

$$\text{Ainsi : } W_1 + W_2 = \langle (v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 + v_3 \cdot i_3)(t) \rangle = P_{\text{total}}$$

De plus, on sait que :

$$W_1 = \langle (v_1 - v_3) \cdot i_1(t) \rangle = UI \cdot \cos(\varphi - \pi/6)$$

$$W_2 = \langle (v_2 - v_3) \cdot i_2(t) \rangle = UI \cdot \cos(\varphi + \pi/6)$$

On montre également qu'on peut déterminer la puissance réactive par la différence :  $W_1 - W_2 = -2 \cdot UI \cdot \sin\varphi \cdot \sin(-\pi/6) = UI \cdot \sin\varphi = Q/\sqrt{3} \rightarrow$

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$$

**NB :** Cette puissance peut être fournie à l'aide d'un seul wattmètre muni d'un commutateur.

#### 4-6.5 Applications

##### 4-6.5-1 Calcul de puissances en triphasé équilibré

Soit le système triphasé équilibré suivant. Calculer les courants de lignes, la puissance totale absorbée ainsi que le facteur de puissance.

Données :  $V = 230V$  ;  $f = 50Hz$  ;  $\underline{z} = R + jL\omega$

Le système étant équilibré, les courants de lignes sont identiques, ( $I_1 = I_2 = I_3$ ), on a :

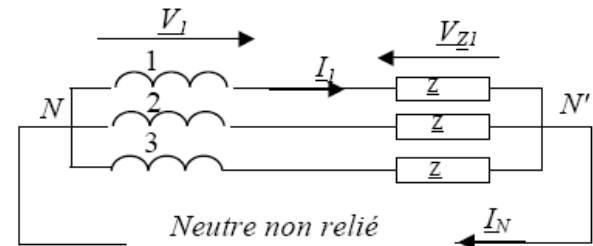
$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\text{Puissance active : } P = 3VI \cos \varphi = 3RI^2 = 3R \frac{V^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{Puissance réactive : } Q = \sum VI \sin \varphi = 3L\omega I^2 = 3L\omega \frac{V^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{Puissance apparente : } S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3VI = 3 \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\text{Facteur de puissance : } \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$



##### 4-6.5-2 Calcul de puissances en triphasé déséquilibré

Soit le système triphasé déséquilibré suivant. Déterminer les courants de lignes, la puissance totale absorbée ainsi que le facteur de puissance.

Données :  $V = 230V$  ;  $f = 50Hz$  ;  $\underline{z}_1 = R_1 + jL_1\omega = 10 + j.10$  ;  $\underline{z}_2 = 10 + j.20$  ;  $\underline{z}_3 = 20 + j.10$

Le système étant déséquilibré, les courants de lignes ne sont pas les mêmes, on a :

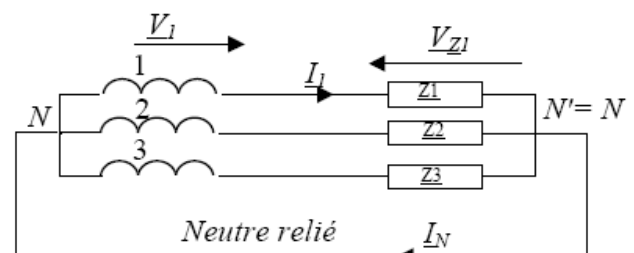
$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{V}{\sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2}} = \frac{230}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = 16,3A$$

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{V}{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}} = \frac{230}{\sqrt{10^2 + 20^2}} = 10,3A$$

$$\underline{V}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{V}{\sqrt{R_3^2 + (L_3\omega)^2}} = \frac{230}{\sqrt{20^2 + 10^2}} = 10,3A$$

$$P = \sum VI \cos \varphi = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 5814,2 \text{ W}$$

$$Q = \sum VI \sin \varphi = L_1 \omega I_1^2 + L_2 \omega I_2^2 + L_3 \omega I_3^2 = 5814,2 \text{ Vars}$$

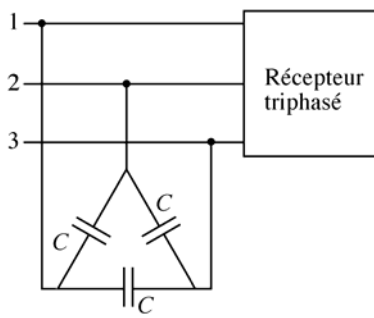


## 4-7 Relèvement du facteur de puissance en triphasé

La présence d'un facteur de puissance  $< 1$  dans une installation a une conséquence très négative : Le courant fourni pour produire cette puissance est surélevé par rapport au cas où le facteur de puissance est égal à 1. Comme dans le cas du régime alternatif monophasé, le relèvement du facteur de puissance de puissance s'effectue par la mise en place d'une batterie de condensateurs en tête de l'installation.

### 4-7.1 Couplage des condensateurs en triangle

Montage :



Tension aux bornes d'un condensateur :  $U$

Puissance réactive absorbée par un condensateur :

$$Q_{C1} = -C\omega U^2$$

Puissance réactive absorbée par les trois condensateurs :

$$Q_C = 3Q_{C1} = -3C\omega U^2$$

	Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Charge seule	$P$	$Q = P \cdot \tan \varphi$	On a $\cos \varphi$
les trois condensateurs seuls	0	$Q_C = -3C\omega U^2$	0
Charge + condensateurs	$P$	$Q' = Q + Q_C = P \cdot \tan \varphi'$	On veut $\cos \varphi'$

On en déduit la capacité du condensateur de la manière suivante :

$$Q_C = -3C\omega U^2 = Q' - Q$$

$$\text{D'où } -3C\omega U^2 = P \cdot \tan \varphi' - P \cdot \tan \varphi \quad \text{Finalement : } C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega U^2}$$

### 4-7.2 Couplage des condensateurs en étoile

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que la capacité du condensateur est donnée par la relation :

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

Le couplage en étoile est donc moins intéressant puisque la capacité des condensateurs nécessaires est trois fois plus grande que pour le couplage en triangle. Plus la capacité est grande, plus le condensateur est volumineux et onéreux.

Résumé	Couplage étoile	Couplage triangle
Relation entre U et V	$U = V\sqrt{3}$	$U = V\sqrt{3}$
Relation entre I et J	$I = J$	$I = J\sqrt{3}$
Déphasage	$\varphi(\vec{I}, \vec{V})$	$\varphi(\vec{J}, \vec{U})$
Puissance active	$P = 3.P_1 = 3VI \cos \varphi$ $P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$	$P = 3.P_1 = 3UJ \cos \varphi$ $P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$
Pertes joules	$P = 3rI^2$ $P = \frac{3}{2}RI^2$	$P = 3rJ^2$ $P = \frac{3}{2}RJ^2$
Résistance équivalente	$R = 2r$	$R = \frac{2}{3}r$
Puissance réactive	$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$	$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$
Puissance apparente	$S = \sqrt{3}UI$	$S = \sqrt{3}UI$
Facteur de puissance	$k = \cos \varphi$	$k = \cos \varphi$