Az informatika logikai alapjai
3. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Elemi állításokat jelölő jelek és logikai jelek

Je: Juli elmegy
Ém: Éva itt marad
Ée: Éva elmegy
Jv: Juli visszajön
ÉV: Éva visszajön

és, vagy, nem, (,)

(Je és Ém) vagy ((Je és Ém) és (nem Jv) és (Év vagy (nem Év)))

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

A múlt órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Szintaxis és szemantika

Hogyan kell a szöveget megformálni?

- jólformáltság
- grammatikai szabályok

Hogyan rendelünk jelentést a szöveghez?

Szintaxis: Az állításkalkulus nyelve

Klasszikus nulladrendű nyelv:

$\boxed{L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle}$ ahol

- $LC=\{\neg,\supset,\wedge,\vee,\equiv,(,)\}$ -**logikai konstansok** halmaza
- $Con \neq \emptyset$ -**nemlogikai konstansok** (állítás- vagy kijelentés-paraméterek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza
  $Con = \{p, q, r, \ldots\}$
  $LC \cap Con = \emptyset$
- Form -**formulák** (jól formált kifejezések)

LC véges. Mi az, hogy Con megsz.-ható végtelen?

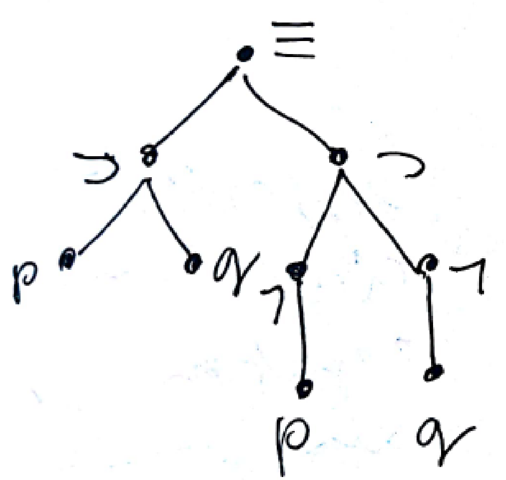
A formulák megformálásának szabályai (ez egy ún. induktív definíció)

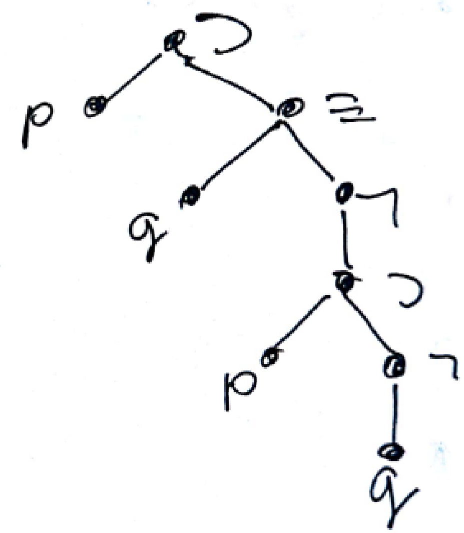
- $Con \subseteq Form$ $\quad$ $p, q, r, \ldots$ ← atomi formulák
- Ha $A, B \in Form$, akkor
  - $\neg(A) \in Form$ $\quad$ $\neg p, \neg q, \neg r, \ldots$
  - $(A \wedge B) \in Form$, $\quad$ $(p \wedge q), (\neg r \wedge p), \ldots$
  - $(A \vee B) \in Form$, $\quad$ $(p \vee \neg r), ((\neg r \wedge p) \vee p), \ldots$
  - $(A \equiv B) \in Form$ $\quad$ $((\neg r \wedge p) \vee p) \equiv (\neg r \wedge p)), \ldots$
  - $(A \supset B) \in Form$, $\quad$ $((((\neg r \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \ldots$

és így tovább, pl.:

$\ldots \neg ((((\neg r \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \quad ((\neg r \wedge p) \supset (p \vee \neg r)), \ldots$

Zárójelek nélkül a string reprezentáció nem egyértelmű





$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$((p \supset q) \equiv (\neg p \supset \neg q))$

$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$(p \supset (q \equiv (\neg (p \supset \neg q))))$

Bizonyos zárójelek azért elhagyhatók – precedencia

Például: $(a+(b*c)) \leftrightarrow a+b*c$

$$((a+b)*c) \leftrightarrow (a+b)*c$$

Kisebb a műveletek precedenciájának sorrendje: $*, +$ (A $*$ precedenciája nagyobb)

A logikai operátorok precedenciája

Csökkenő sorrendben: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

Ezek szerint, például:

- $((p \supset q) \equiv (\neg p \supset \neg q)) \iff p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$
- $(p \supset (q \equiv (\neg (p \supset \neg q)))) \iff p \supset (q \equiv \neg (p \supset \neg q))$

Tanácsolt : (példák)

- $p \vee (q \wedge r) \vee s \iff p \vee q \wedge r \vee s$
- $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \iff (p \vee q) \wedge (r \vee s)$

Továbbá: (példák)

- $\left.\begin{matrix} p \lor q \lor r \\ p \land q \land r \end{matrix}\right\}$ ~~[illegible]~~ -t úgy értjük: $(p \lor (q \lor r))$ $(p \land (q \land r))$

Ez mindegy

Ez fontos

- $p \supset q \supset r$ -t úgy értjük: $(p \supset (q \supset r))$

Két „argumentumú” operátorok, kettesével lehet őket végrehajtani

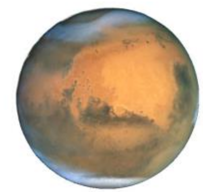
A múlt órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Interpretáció

p: „a bolygón van víz"
q: „a bolygónak van élővilága"
r: „a bolygó a nap körül kering"

Föld



Mars

egyik interpretáció →

p : igaz
q : igaz
r : igaz

pl. $p \wedge q \wedge r$: igaz

másik ← interpretáció

p : hamis
q : hamis
r : igaz

$p \wedge q \wedge r$: hamis

Interpretáció: értelmezés („interpreter")

Interpretáció – Formálisan

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv
interpretációja olyan ϱ függvény, ami:

$\varrho : Con \to \{0, 1\}$

ϱ logikai értékeket (igaz: 1, hamis: 0) rendel
az atomi formulákhoz (a nemlogikai
konstansokhoz)

Az iménti szemantikai szabályok táblázatba foglalva

$\|A\|_\varrho$	$\|B\|_\varrho$	$\|\neg A\|_\varrho$	$\|(A \supset B)\|_\varrho$	$\|(A \wedge B)\|_\varrho$	$\|(A \vee B)\|_\varrho$	$\|(A \equiv B)\|_\varrho$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$p)$
T		F			F			T
T		F		T	F			T
T		F		T	F		F	T
T		F		T	F	F	F	T
T	F	F		T	F	F	F	T
T	F	F	$\boxed{T}$	T	F	F	F	T

Azaz: Ebben az interpretációban a formula igaz

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

A múlt órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Formula és formulahalmaz modellje

Legyen adott:
- $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv
- ϱ interpretációja

Ekkor:

- ϱ interpretáció az $A \in Form$ formula modellje, ha
$$|A|_{\varrho} = 1$$
- ϱ interpretáció az $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz modellje, ha
$$|A|_{\varrho} = 1 \text{ minden } A \in \Gamma\text{-ra}$$

Interpretáció

p: „a bolygón van víz"
q: „a bolygónak van élővilága"
r: „a bolygó a nap körül kering"

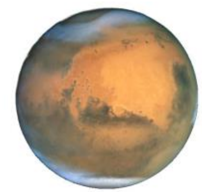
Föld

egyik interpretáció →

p: igaz
q: igaz
r: igaz

modellje $p \wedge q \wedge r$ -nek

pl. $p \wedge q \wedge r$: igaz



Mars

← másik interpretáció

p: hamis
q: hamis
r: igaz

nem modellje $p \wedge q \wedge r$ -nek

$p \wedge q \wedge r$: hamis

Kielégíthetőség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.
- Az előző állítás megfordítása nem igaz. Pl.: a {p,¬p} formulahalmaz minden eleme kielégíthető, de maga a formulahalmaz nem kielégíthető.

Megjegyzés.

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.

Kielégíthetetlenség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz, ha nincs modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formula igaz, azaz minden interpretációban a formula hamis értékű.

Megjegyzés.

- A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz mindeneleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $\underline{\underline{A \vDash B}}$, ha A minden modellje B-nek is.

- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\underline{\underline{\Gamma \vDash B}}$, ha Γ minden modellje B-nek is.

Logikai ekvivalencia – szemantikai ekvivalencia

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A, B \in Form$)

Két formula, A és B logikailag ekvivalens ha

- minden interpretációban ugyanaz a logikai értékük: $|A|_g = |B|_g$ minden $g : Con \to \{0,1\}$ esetén

első megfogalmazás

második megfogalmazás

- $A \vDash B$ és $B \vDash A$

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

Érvényesség

(Adott $L^{(0)}_F(LC, Con, Form)$, $A \in Form$)

Egy A formula érvényes, ha

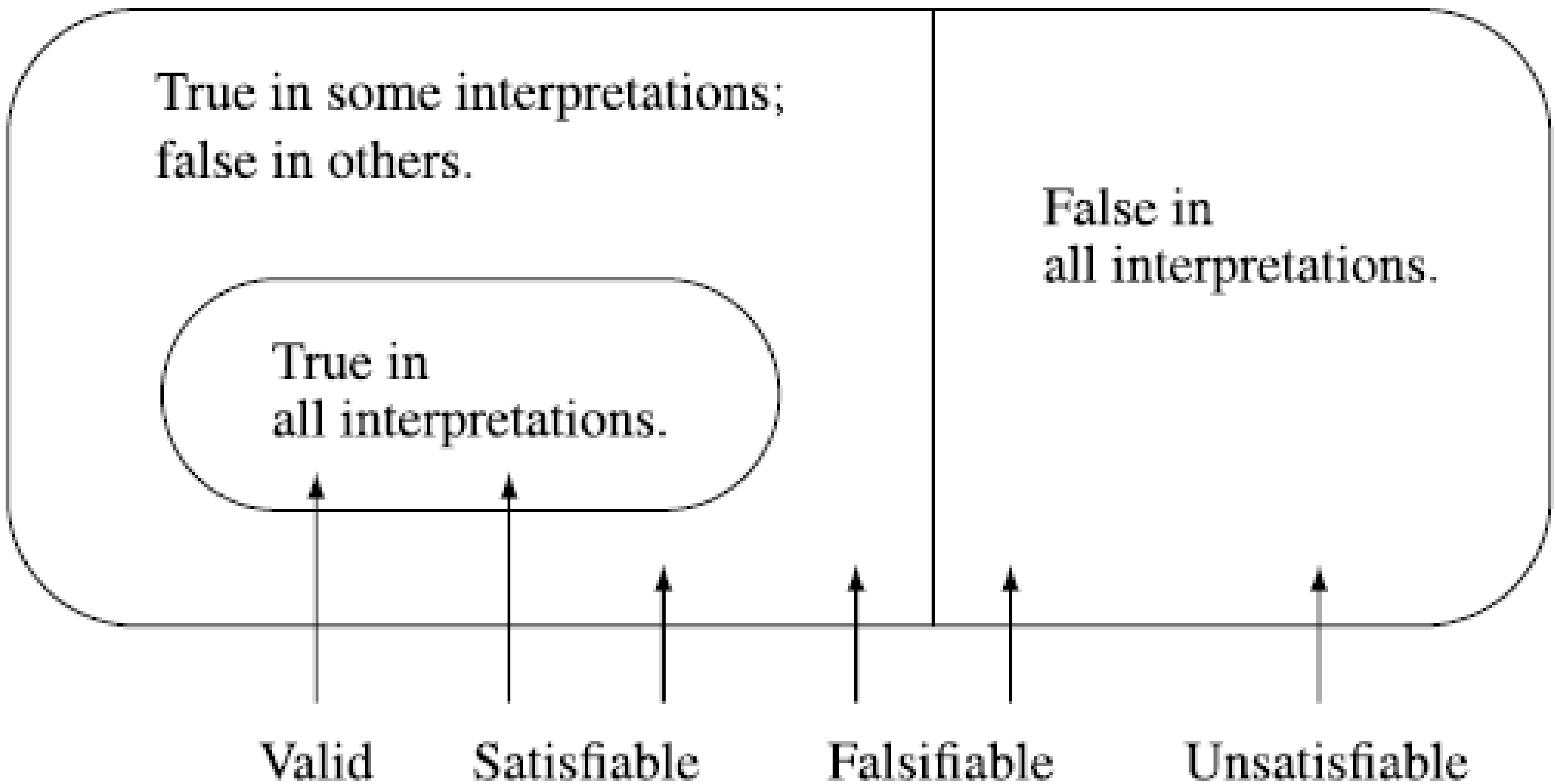
1. megfogalmazás: • minden interpretációban igaz, azaz $|A|_g = 1$ minden $g: Con \to \{0,1\}$-re

2. megfogalmazás: • $\emptyset \models A$ (Az üreshalmaz következménye.)

Ha A formula érvényes, akkor A tautológia

logikai törvény ← másik elnevezés

Érvényes, kielégíthető, kielégíthetetlen formulák halmazai



A mai órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

A kielégíthetőségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthető formulahalmaz** minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Forrás: Mihálydeák Tamás, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A kielégíthetőségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Bizonyítás

Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges **kielégíthető formulahalmaz**, és $\Delta \subseteq \Gamma$!

Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje a ϱ interpretáció.

ϱ tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_\varrho = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_\varrho = 1$. Azaz a ϱ interpretáció modellje Δ-nak, tehát Δ kielégíthető.

A kielégíthetetlenségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthetetlen formulahalmaz** minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

A kielégíthetetlenségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Delta \subseteq Form$ olyan formulahalmaz, hogy $\Gamma \subseteq \Delta$.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és Δ kielégíthető.

$\Gamma \subseteq \Delta$

A **kielégíthetőségre vonatkozó tétel** miatt Γ kielégíthető (mivel Δ kielégíthető), ez pedig ellentmondás.

(papír 30)

A mai órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

A múlt óráról:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

A következményreláció tulajdonságai - 1

Adott $L^{(0)} = \langle LC, \langle Con, Form \rangle \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen}}$.

<u>Bizonyítás</u>: ($\Rightarrow$)

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen ez a ϱ interpretáció.

Ekkor: $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_\varrho = 1$, azaz $|A|_\varrho = 0$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.

<u>Bizonyítás</u>: ($\Leftarrow$)

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \nvDash A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen g egy interpretáció. Erre $|B|_g = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_g = 0$, azaz $|\neg A|_g = 1$.

Vagyis g kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

A következményreláció tulajdonságai - 2

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle \backslash$ egy **nulladrendű nyelv**, $A \in Form$.
Ha A **érvényes formula** $(\vDash A)$, akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

A következményreláció tulajdonságai - 2

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle \setminus$ egy **nulladrendű nyelv**, $A \in Form$.

Ha A **érvényes formula** ($\vDash A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Bizonyítás

Ha A érvényes formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \vDash A$.

Így $\emptyset \cup \{\neg A\}$ $(= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a **kielégíthetetlenségre kimondott tétel** alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

A következményreláció tulajdonságai - 3

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle \setminus$ egy **nulladrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..

Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

Bizonyítás

A **már bizonyított tétel** szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

A mai órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

- Különböző „szintek”:
  - Az **implikáció** logikai operátor, logikai formulákban jelenik meg, a **logikai formulák nyelvének** része
  - A **következményreláció** logikai formulák (formulahalmazok) közötti viszonyt ír le, nem a logikai formulák nyelvének, ha nem a **logikai formulákról beszélő „metanyelvnek”** a része

(papír 39)


VIGYÁZAT!
VIGYÁZAT!
HARAPÓS
KUTYA!
TÁBLA
www.garfield.com
©2005 PAWS, INC. All Rights Reserved.
FURCSA.
Distributed by Universal Press Syndicate
VIGYÁZAT!
HARAPÓS
KUTYA!

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

Tétel (Dedukció tétel)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$, akkor $\Gamma \vDash (A \supset B)$.

Megjegyzés

$\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ helyett gyakran használjuk a következő rövidebb írásmódot:

$\Gamma, A \vDash B$

Tétel (Dedukció tétel)

$\boxed{\text{Ha } \Gamma \cup \{A\} \vDash B, \text{ akkor } \Gamma \vDash (A \supset B)}$

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ teljesül, de $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ **kielégíthető**, tehát van **modellje**. Legyen egy modellje a ϱ **interpretáció**!

A ϱ tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
2. $|\neg(A \supset B)|_\varrho = 1$

$|(A \supset B)|_\varrho = 0$, azaz $|A|_\varrho = 1$ és $|B|_\varrho = 0$. Így $|\neg B|_\varrho = 1$.

$\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a formulahalmaz **kielégíthető**, tehát $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Tétel (Dedukció tétel megfordítása)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Bizonyítás

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \vDash (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ **kielégíthető**, tehát van modellje. Legyen egy **modellje** a ϱ **interpretáció**!

A ϱ tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
- $|A|_\varrho = 1$
- $|\neg B|_\varrho = 1$, így $|B|_\varrho = 0$

Így a ϱ interpretáció szerint $|(A \supset B)|_\varrho = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_\varrho = 1$.

$\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a ϱ interpretációja modellje a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz kielégíthető. Tehát $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **dedukció tételt** és **megfordítását** abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

Az (materiális) ekvivalencia és a logikai ekvivalencia kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \equiv B)$

Tétel (Metszet tétel)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ és $\Delta \vDash A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vDash B$.

A „metszet” itt inkább „kimetszés” (``cut’’). Miért?

Indirekt bizonyítás

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ és $\Delta \vDash A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vDash B$

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ és $\Delta \vDash A$, de $\Gamma \cup \Delta \vDash B$ nem teljesül.

Ekkor $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg B\}$ **kielégíthető** (a **következményreláció** 1. tulajdonsága miatt), azaz van modellje. Legyen a formulahalmaz egy modellje a ϱ interpretáció.

A ϱ interpretáció tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
2. Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
3. $|\neg B|_\varrho = 1$

Mivel $\Delta \vDash A$ és Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban, $|A|_\varrho = 1$. Következésképpen a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ halmaz minden eleme igaz a ϱ interpretációban, ami azt jelenti, hogy a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz **kielégíthető**. Ekkor azonban a **következményreláció** 1. tulajdonsága miatt $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül. Ez pedig ellentmond indirekt feltételünknek.

A mai órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
  - Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Aszalós László fóliái, kiemelések tőlem)

Mit is jelent az odavissza-nyíl? (Szintek.) Hogyan lehet ilyen állításokat igazolni?

Logikailag ekvivalens formulák

- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Ellenőrizzük igazságtáblával (esetleg a rossz tippet is – vagy a jobb oldalon –)

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $\boxed{A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)}$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Formulahalmazok és az „és” művelet

Kielégíthetőség, kielégíthetetlenség

Legyen $A_1, A_2, ..., A_n \in$ Form!

- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthető, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ formula kielégíthető.
- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \vDash A$.
- Az $\{A_1,A_2, ..., A_n\} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \wedge \neg A$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \supset A$ formula érvényes.

Logikai következmények

- $A \supset \neg A \models \neg A$
- $\neg A \supset A \models A$
- $A \wedge B \models A$ és $A \wedge B \models B$
- $A \models A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- $\{A \supset B, A\} \models B$ modus ponens: leválasztási szabály
- $\{A \supset B, \neg B\} \models \neg A$ modus tollens: indirekt cáfolás sémája
- $\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$ láncszabály
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \models \neg A$ redukcio ad abszurdum
- $\neg A \models A \supset B$
- $B \models A \supset B$

Gondoljuk ide a kontrapozíciót is. Miért nincs eleve itt?

Érvényes formulák

- $\vDash \neg(A \wedge \neg A)$ az ellentmondás törvénye
- $\vDash A \vee \neg A$ a kizárt harmadik törvénye
- $\vDash A \supset A$
- $\vDash A \supset (\neg A \supset B)$
- $\vDash A \equiv A$
- $\vDash \neg(A \equiv \neg A)$

A mai órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai