Az informatika logikai alapjai
7. feladatsor

Példa V.M. 2.p.4

$\mathcal{F}(0) = \{1,2,3,4,5\}$ ← a „számok"

$\mathcal{P}(1) = \{$ páros(–), egyjegyű(–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ nagyobb(–,–) $\}$

↑ a nagyobb ↖ az kisebb

a) A számok között van páros.

$\exists x$ páros(x)

b) Minden szám egyjegyű.

$\forall x$ egyjegyű(x)

c) Nincs 5-nél nagyobb szám.

$\neg(\exists x$ nagyobb$(x,5))$

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.
- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \ldots$) páronként diszjunktak.
- A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n=1, 2, \ldots$), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Term$.
- A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n=1, 2, \ldots$), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A, \exists x A \in Form$.

(h) *Senki sem szeret mindenkit.*

Megoldás

$$\neg\exists x \forall y \ \mathrm{szeret}(x, y) \qquad \mathrm{szeret}(x, y) - x \text{ szereti } y\text{-t}$$

2.P.6. Az alábbi állításokban vezessünk be új változókat és jelöljük ki a kvantorokat! Használjuk szükség szerint a $\neg$ negációjelet!

(a) *Mindenki szeret valakit.*

(b) *Mindenkit szeret valaki.*

(c) *Mindenki szeret mindenkit.*

(d) *Mindenki szereti önmagát.*

(e) *Van, aki mindenkit szeret.*

(f) *Van, akit mindenki szeret.*

(g) *Van, aki szereti önmagát.*

(i) *Senkit sem szeret mindenki.*

(j) *Van, aki senkit sem szeret.*

(k) *Van, akit senki sem szeret.*

2.P.7. Jelentse $f(x)$ az x természetes számot követő természetes számot (azaz $x+1$-et), $P(x)$ azt, hogy az x természetes szám páros, $Q(x,y)$ pedig azt, hogy $x \leq y$. Olvassuk fel természetes nyelven az alábbi formulákat!

(a) $\exists x P(x)$

(b) $\neg\forall x P(x)$

(c) $\exists x \neg P(x)$

(d) $\neg\neg\exists x P(x)$

(e) $\exists x \neg\forall y Q(x,y)$

(f) $\exists x \forall y Q(x,y)$

(g) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(h) $\forall y \exists x Q(x,y)$

(i) $\neg\exists y \forall x Q(x,y)$

Megoldás

Nincs olyan természetes szám, amely minden természetes számnál nagyobb vagy egyenlő lenne.

2.P.7. Jelentse $f(x)$ az x természetes számot követő természetes számot (azaz $x+1$-et), $P(x)$ azt, hogy az x természetes szám páros, $Q(x,y)$ pedig azt, hogy $x \leq y$. Olvassuk fel természetes nyelven az alábbi formulákat!

(j) $\forall x Q(x,x)$

(k) $\forall x(P(x) \vee P(f(x)))$

(l) $\forall x(P(x) \supset P(f(f(x))))$

(m) $\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \wedge Q(y,z) \supset Q(x,z))$

(n) $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \supset Q(x,y) \vee Q(y,x))$

(o) $\neg \exists x \neg Q(x, f(x))$

(p) $\neg \exists x Q(f(x), x)$

Részformula definíciója – elsőrendű nyelvben

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula **részformuláinak** halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: RF(A)], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

Szerkezeti fa definíciója elsőrendű nyelv esetén

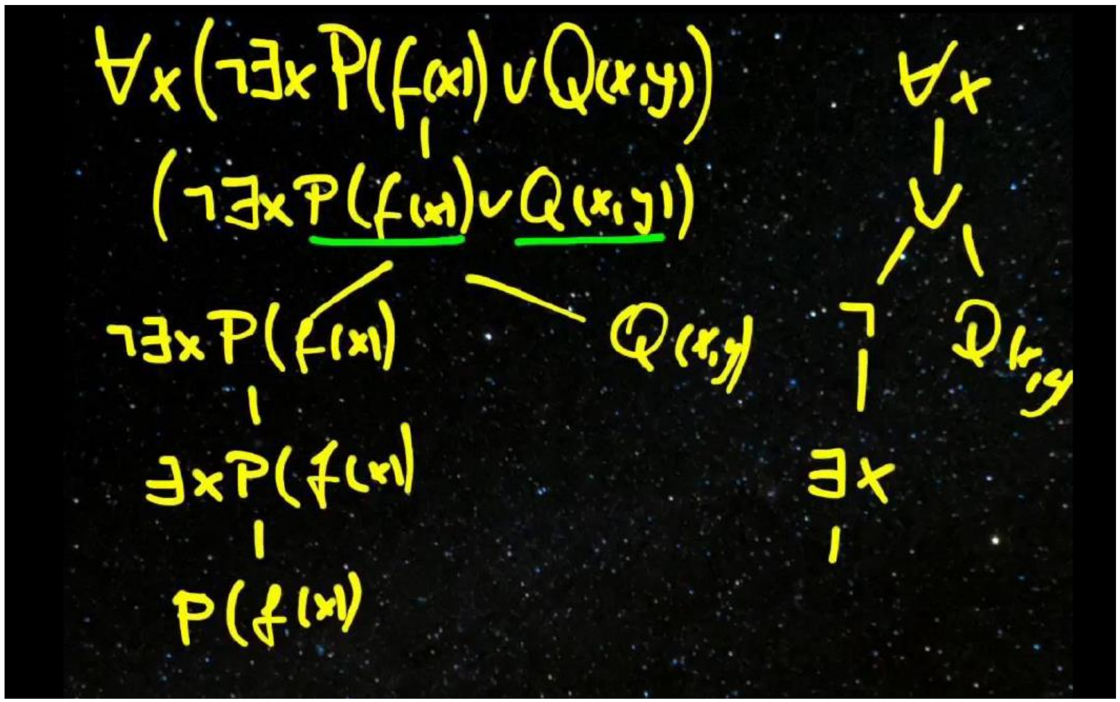
Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk,

- amelynek csúcsai formulák,
- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B, illetve a C formulák alkotják,
- $\forall x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $\exists x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- levelei prímformulák (atomi formulák).

Zárójel-elhagyási konvenciók

Az elsőrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók a nulladrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók kibővítése a következő szabályokkal:

- a kvantorok erősebbek bármely állításlogikai műveletnél,
- az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).


∀x(¬∃xP(f(x)) ∨ Q(x,y))
(¬∃xP(f(x)) ∨ Q(x,y))
¬∃xP(f(x))
Q(x,y)
∃xP(f(x))
P(f(x))
∀x
∨
¬
Q(x,y)
∃x

1.P.10. Az alábbi formulák közül melyek részformulái a

$$\exists z(\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z))$$

formulának?

(a) $\forall x P(x,z)$

(b) $\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z)$

(c) $\exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

(d) $\exists z P(x,z)$

(e) $\forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z)$

(f) $P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

(g) $P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

- Rajzoljuk meg a fenti formula szerkezeti fáját is.

1.P.8. Hagyjuk el az alábbi teljesen zárójelezett formulákból az elhagyható zárójelpárokat!

(a) $\neg(\forall x P(x) \supset (\exists x Q(x, y) \wedge R(x, x)))$

(b) $\exists z(\forall x P(x, z) \supset (\exists z \forall x P(x, z) \vee \exists x P(x, z)))$

(c) $(\forall x Q(x, y) \supset (\forall x(Q(x, y) \supset R(x)) \wedge Q(x, y)))$

(d) $(\exists z(\forall x P(x) \supset Q(z)) \equiv R(x))$

(e) $(\exists y \forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv (Q(y) \supset P(x)))$

Szabad változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula szabad változóinak FreeVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a FreeVar(A) halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B).
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B)UFreeVar(C).
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B)\{x}.

Kötött változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula kötött változóinak BoundVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a BoundVar(A)=∅.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor BoundVar(A)=BoundVar(B).
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor BoundVar(A)=BoundVar(B)UBoundVar(C).
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ S alakú, akkor BoundVar(A)=BoundVar(B)U{x}.

3.P.2. A következő formulákban állapítsuk meg a kvantorok hatáskörét, és döntsük el, mely változó-előfordulások szabadok és melyek kötöttek! Határozzuk meg a formulák paramétereinek halmazát! (x, y, z változók és c konstansszimbólum.)

(a) $\exists x P(x) \wedge P(x)$

(b) $\forall x Q(x, y) \supset \forall y Q(x, y)$

(c) $\exists x \exists y (Q(x, y) \wedge P(z))$

(d) $\forall x (Q(x, c) \supset \exists y Q(x, y))$

(e) $\forall x (\forall y R(x, y, z) \supset Q(x, y))$

(f) $\forall y \exists z (R(x, g(x, y), z) \supset \exists x Q(z, x))$

(g) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y)) \supset \forall y Q(x, y))$

3.P.5. Vannak-e az alábbi formulák között olyanok, amelyek egymás variánsai?

(a) $\forall x(P(x,y) \supset \exists z Q(x,z)) \wedge \forall y R(y,z)$

(b) $\forall x(P(z,y) \supset \exists z Q(x,z)) \wedge \forall y R(y,z)$

(c) $\forall u(P(z,y) \supset \exists u Q(u,u)) \wedge \forall u R(u,z)$

(d) $\forall z(P(z,y) \supset \exists x Q(z,x)) \wedge \forall v R(v,z)$