Az informatika logikai alapjai
6. feladatsor

Miért diszjunktív és miért normálforma?

- literál: atomi formula vagy atomi formula negáltja
- elemi diszjunkció / elemi konjunkció: literálok diszjunkciója / konjunkciója
- diszjunktív normálformájú formula: elemi konjunkciók diszjunkciója
- konjunktív normálformájú formula: elemi diszjunkciók konjunkciója

- **Normál**forma: minden formula átalakítható ilyen alakba

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

Példáink

diszjunktív normálforma

A

$A \vee B$

$A \vee \neg B$

$A \wedge \neg B$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

nem diszjunktív normálforma	**De:**
$\neg(A \wedge B) \vee C,$	$\neg A \vee \neg B \vee C$
$(A \vee B) \wedge C,$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
$(A \vee B) \to C,$	$(\neg A \wedge \neg B) \vee (C)$

Hogyan alakítható át egy formula diszjunktív normálalakra?

Kiindulás: $(\neg a \supset b) \wedge (b \wedge c)$

$\beta(a)$	$\beta(b)$	$\beta(c)$	$\hat{\beta}((\neg a \to b) \wedge (b \wedge c))$	Monom
0	0	0	0	–
0	0	1	0	–
0	1	0	0	–
0	1	1	1	$\neg a \wedge b \wedge c$
1	0	0	0	–
1	0	1	0	–
1	1	0	0	–
1	1	1	1	$a \wedge b \wedge c$

Eredmény: $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

(miért „normál"?)

Konjunktív normálforma

konjunktív normálforma:

$A \vee B$

$A \vee \neg B$

$A \wedge \neg B$

$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

nem konjunktív normálforma:

$\neg(A \vee B) \wedge C$,

$(A \wedge B) \vee C$,

$(A \vee B) \to C$

de:

$\neg A \wedge \neg B \wedge C$

$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

Az elemi diszjunkciókat klózoknak is nevezik.

Konstrukció az előzőek alapján

$\varphi : \neg(a \wedge \neg c) \vee \neg((\neg c \supset b) \vee a)$

$\neg\varphi : (a \wedge \neg c) \wedge ((\neg c \supset b) \vee a)$

$\beta(a)$	$\beta(b)$	$\beta(c)$	$\hat{\beta}(\neg\varphi)$	Monom
0	0	0	0	–
0	0	1	0	–
0	1	0	0	–
0	1	1	0	–
1	0	0	1	$(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$
1	0	1	0	–
1	1	0	1	$(a \wedge b \wedge \neg c)$
1	1	1	0	–

$$\neg\varphi \equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

$$\neg\neg\varphi$$

$$\neg((a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c))$$

$$\neg(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge \neg c)$$

$$\boxed{(\neg a \vee \neg\neg b \vee \neg\neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg\neg c)}$$

Második módszer
konjunktív / diszjunktív
normálformára alakításra :

1. Az implikációs részformulák helyére a logikai jelek közötti összefüggések alapján diszjunkciós formulákat írunk.
2. De Morgan törvényei és a kétszeres tagadás törvénye segítségével elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon.
3. Végül a disztributivitás törvényei segítségével addig alakítjuk a formulát, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást.

Harodik módon, példa:

$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$ és $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$

$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$

$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

Beispiel: Die Formel
$\varphi = (a \land \neg c) \lor \neg(\neg c \to b)$.

Beispiel: Die Schritte

1. Zunächst werden wir den Implaktions-Junktor los:

$$(a \land \neg c) \lor \neg(\neg c \to b) \equiv (a \land \neg c) \lor \neg(\neg\neg c \lor b)$$

2. Jetzt treiben wir die Negationen zu den Variablen:

$$(a \land \neg c) \lor \neg(\neg\neg c \lor b) \equiv (a \land \neg c) \lor (\neg\neg\neg c \land \neg b)$$

3. Jetzt entfernen wir die doppelten Negationen:

$$(a \land \neg c) \lor (\neg\neg\neg c \land \neg b) \equiv (a \land \neg c) \lor (\neg c \land \neg b)$$

4. Jetzt treiben wir die Und-Junktoren nach außen.

$$\begin{aligned}
& (a \land \neg c) \lor (\neg c \land \neg b) \\
\equiv\ & (a \lor (\neg c \land \neg b)) \land (\neg c \lor (\neg c \land \neg b)) \\
\equiv\ & ((a \lor \neg c) \land (a \lor \neg b)) \land ((\neg c \lor \neg c) \land (\neg c \lor \neg b)) \\
\equiv\ & (a \lor \neg c) \land (a \lor \neg b) \land (\neg c \lor \neg c) \land (\neg c \lor \neg b)
\end{aligned}$$

8.I.9. Melyik formulának konjunktív normálformája az $X \wedge Y$ formula?

(a) $X \wedge Y \wedge \neg Z$ (b) $\neg(\neg X \vee \neg Y)$

(c) $X \supset (Y \vee \neg X)$ (d) $(X \supset Y) \supset (\neg Y \supset \neg X)$

8.I.11. Hozzuk konjunktív és diszjunktív normálformára a következő formulákat!

(a) $\neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y)$

(b) $\neg(X \wedge (Y \vee Z)) \supset (X \wedge Y) \vee Z$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Formulák mint klózhalmazok

- **klóz**: literálok halmaza (implicit diszjunkció)
- **üres klóz**: literálok üres halmaza
  jele: $\square$
- **formula**: klózok halmaza (implicit konjunkció)
- **üres klózhalmaz**: $\emptyset$

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q \vee p \vee \neg p) \wedge (r \vee p)$$

$$\{\{p, r\}, \{\neg q, \neg p, q\}, \{p, \neg p, q\}\}.$$

(jelölés: $p, \neg p, \bar{p}$)

Például:

• Ha $$C_1 = ab\bar{c} \text{ and } C_2 = bc\bar{e}$$

komplemens
klózhalmaznak literálpár
komplemens literálpárt tartalmaznak,
akkor ~~az~~ rezolválhatók.

• Az „eredmény" a rezolvens klóz:

$$C = (ab\bar{c} - \{\bar{c}\}) \cup (bc\bar{e} - \{c\}) = ab \cup b\bar{e} = ab\bar{e}.$$

A rezolúciós eljárás

Egy klózhalmazról (formuláról) eldönti, hogy kielégíthető-e. Legyen a halmaz S.

- Vegyünk S-ből két rezolválható klózt.
- Képezzük el a rezolvenst.
- Ha a rezolvens az üres klóz (□)

  → a formula kielégíthetetlen

  különben

  → adjuk hozzá a rezolvenst a klózhalmazhoz
- Álljunk meg, ha nincs több rezolválható klóz.

Példánk:

$S_1.\ \{p,\ \bar p q,\ \bar r,\ \bar p \bar q r\}$

$S_2.\ \{p,\ \bar p q,\ \bar r,\ \bar p \bar q \bar r,\ \bar p \bar q\}$

$S_3.\ \{p,\ \bar p q,\ \bar r,\ \bar p \bar q \bar r,\ \bar p \bar q,\ \bar p\}$

$S_4.\ \{p,\ \bar p q,\ \bar r,\ \bar p \bar q \bar r,\ \bar p \bar q,\ \bar p,\ \square\}$

az üres klóz

Mivel $\square$ nem kielégíthető, S_4 sem kielégíthető.
A rezolúciós szabályt használtuk, tehát S_1 sem
kielégíthető.

(Nem mind meg elején, hogy 1. kielégíthetetlen!)

12.I.1. Rezolválhatók-e az alábbi klózpárok? Ha igen, határozzuk meg a rezolvensüket!

(a) $X \vee Y \vee \neg Z \quad$ és $\quad \neg Y \vee W$

(b) $X \vee Y \vee \neg Z \quad$ és $\quad Y \vee \neg W$

(c) $X \vee Y \vee \neg Z \quad$ és $\quad \neg Y \vee Z$

(d) $X \vee Y \vee \neg Z \quad$ és $\quad Z$

(e) $\neg Z \quad$ és $\quad Z$

12.I.8. Igazoljuk rezolúcióval, hogy

(a) $X,\ Y,\ Z \supset U,\ Z \ \vDash\ X \wedge Y \wedge U$

(b) $X \vee Y,\ X \supset Z \vee U,\ Z \supset V \wedge W,\ W \wedge \neg S \supset \neg V \ \vDash\ \neg U \supset Y$

(c) $X,\ Y,\ X \wedge Y \supset Z,\ X \supset W \ \vDash\ Z \wedge W$