Az informatika logikai alapjai
8. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

Példa V.M. 2.p.h

$\mathcal{F}(0) = \{1,2,3,4,5\}$ ← a „számok"

$\mathcal{P}(1) = \{$ páros(–), egyjegyű(–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ nagyobb(–,–) $\}$

a nagyobb   az kisebb

a) A számok között van páros.

$\exists x$ páros(x)

b) Minden szám egyjegyű.

$\forall x$ egyjegyű(x)

c) Nincs 5-nél nagyobb szám.

$\neg(\exists x$ nagyobb$(x,5))$

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle$ LC, Var, Con, Term, Form $\rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- LC = {¬, ⊃, ∧, ∨, ≡, =, ∀, ∃, (,)} (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- Var = $\{x_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- Con = $\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú (n = 1, 2, . . .) függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú (n = 1, 2, . . .) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.
- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok (n = 0, 1, 2, . . .) páronként diszjunktak.
- A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - Var ∪ $\mathcal{F}(0)$ ⊂ Term
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, (n=1, 2, ...), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in$ Term, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ Term.
- A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0)$ ⊂ Form
  - Ha $t_1, t_2 \in$ Term, akkor $(t_1 = t_2) \in$ Form
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, (n=1, 2, . . .), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in$ Term, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ Form.
  - Ha A ∈ Form, akkor ¬A ∈ Form.
  - Ha A, B ∈ Form, akkor (A⊃B), (A∧B), (A∨B), (A≡B) ∈ Form.
  - Ha x ∈ Var, A ∈ Form, akkor ∀xA, ∃xA ∈ Form.

$\mathcal{F}(0) = \{$Péter, én$\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$édesanyja(–)$\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$havazik$\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$piros(–)$\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$unokatársa(–,–)$\}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja(Péter)}}$ $\underbrace{\text{édesanyám}}_{\text{édesanyja(én)}}$ unokatársa.

unokatársa(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Elsőrendű atomi formula

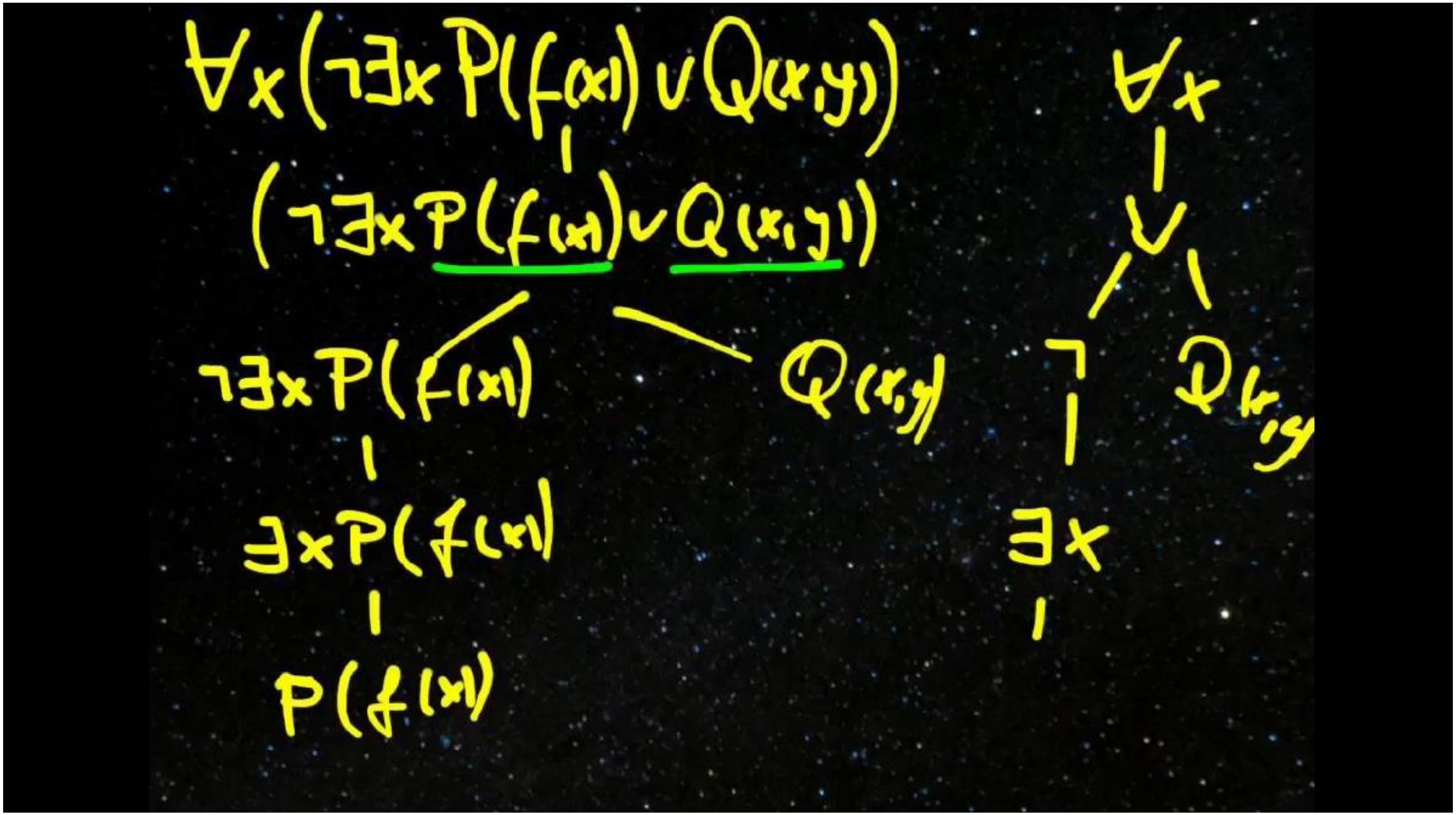
Definíció. Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$), akkor az **elsőrendű atomi formulák halmazát** (jelölés: AtForm) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq AtForm$
- Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in AtForm$
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in AtForm$.

Megjegyzés. Az elsőrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.

AtForm halmaz elemeit elsőrendű atomi formuláknak vagy **elsőrendű prímformuláknak** nevezzük.

Szerkezeti fa



Nem a kérdés az érdekes, hogy egy változó szabad vagy kötött, hanem a

szabad előfordulás vagy kötött előfordulás

· Nézzük meg az 1.8.7/d-t az előző lapon

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.8.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y,x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x,y,z)$

d) $(\exists x\, Q(x,y,x) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Változó előfordulások

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az x változó valamely A-beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú részformulájába.

Az x változó valamely A-beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

Nem a [illegible] az érdekes, hogy egy változó szabad vagy kötött, hanem a

szabad előfordulás vagy kötött előfordulás

· Nézzük meg az 1.P.7/d-t az előző lapon

Nyílt/zárt formula

· Az előző példák közül melyik milyen?

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.P.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y,x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x,y,z)$

d) $(\exists x\, Q(x,y,x) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Nyílt és zárt formula

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Ha $FreeVar(A) \neq \emptyset$, akkor az A formulát **nyílt formulának** nevezzük. Ha az A formula nem nyílt, akkor **zárt formulának** nevezzük.

Megjegyzés.

- A nyílt formulákat nyitott formuláknak is szokták nevezni.
- Ha A nyílt formula, akkor legalább egy változó legalább egy helyen szabadon fordul elő benne.
- Ha A zárt formula, akkor $FreeVar(A) = \emptyset$.
- Ha A zárt formula, akkor egyetlen változó sem fordul elő benne szabadon, minden változó minden előfordulása kötött.

Kongruens formulák, variáns

3.P.4. Definíció. A QxA formulában a Q kvantor által *kötött x változó átnevezéséről* beszélünk, amikor

- a Qx kvantoros előtagban x helyett egy vele megegyező típusú y változót nevezünk meg, majd
- A-ban az x változó minden szabad előfordulását y-ra cseréljük ki (a kapott formulát jelöljük A_y^x-nal),

és így a QyA_y^x formulát kapjuk.

3.P.5. Definíció. A QxA formulából *szabályosan végrehajtott kötött változó átnevezéssel* kapjuk a QyA_y^x formulát, ha y nem paramétere QxA-nak, és az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem.

3.P.6. Definíció. Az A' formula az A formula *variánsa* (vagy A és A' *egymással kongruens formulák*) ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek. Jelölése: $A \approx A'$.

$\boxed{3.P.4}$ $\forall x\,(P(x) \wedge R(z))$

$y \quad y$

3.P.5. Definíció. A QxA formulából *szabályosan végrehajtott kötött változó átnevezéssel* kapjuk a QyA_y^x formulát, ha y nem paramétere QxA-nak, és az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem.

3.P.6. Definíció. Az A' formula az A formula *variánsa* (vagy A és A' *egymással kongruens formulák*) ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek. Jelölése: $A \approx A'$.

$\boxed{3.P.5}$ $\forall x\,(P(x) \wedge R(y))$

! „y paramétere QxA-nak"

Nincs gond, ha:

$\forall x\,(P(x) \wedge \exists y\, R(y))$

$\forall x\,(P(x) \wedge \exists y\, R'(x,y))$

! „x változó Q által kötött előfordulása egy y-t kötő kvantor hatáskörébe tartozik"

3.P.5. Definíció. A QxA formulából *szabályosan végrehajtott kötött változó átnevezéssel* kapjuk a QyA_y^x formulát, ha y nem paramétere QxA-nak, és az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem.

3.P.3. Vizsgáljuk meg, hogy szabályos-e az univerzálisan kvantált x változó átnevezése y változóra az alábbi formulák esetén, és hajtsuk végre a szabályos átnevezést, amennyiben ez lehetséges!

(a) $\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))$

(b) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(c) $\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y))$

3.P.8. Megjegyzés. Segédeszköz annak eldöntésére, vajon két formula egymás variánsa-e:

- vonalak segítségével jelöljük meg, melyek a kötött változó-előfordulások, és mely kvantorok kötik ezeket;
- töröljük az összekötött változó-előfordulásokat a kvantoros előtagban található változó-megnevezéssel együtt.

Az így kapott alakzatot az eredeti *formula vázának* nevezzük. Két formula pontosan akkor lesz egymás variánsa, ha megegyező a vázuk.

(a) A formulák nem egymás variánsai, mivel vázuk különbözik:

$$\exists x P(x,y) \qquad \exists x P(x,z) \qquad \exists y P(y,y)$$

$$\exists\ P(\ ,y) \qquad \exists\ P(\ ,z) \qquad \exists\ P(\ ,\ )$$

3.P.8. Megjegyzés. Segédeszköz annak eldöntésére, vajon két formula egymás variánsa-e:

- vonalak segítségével jelöljük meg, melyek a kötött változó-előfordulások, és mely kvantorok kötik ezeket;
- töröljük az összekötött változó-előfordulásokat a kvantoros előtagban található változó-megnevezéssel együtt.

Az így kapott alakzatot az eredeti *formula vázának* nevezzük. Két formula pontosan akkor lesz egymás variánsa, ha megegyező a vázuk.

(b) A két formula egymás variánsa, mivel vázuk megegyezik:

$$\exists x P(x,y) \supset \forall z P(x,z) \qquad \exists z P(z,y) \supset \forall y P(x,y)$$

$$\exists \ \ P(\ \ ,y) \supset \forall \ \ P(x,\ \ ) \qquad \exists \ \ P(\ \ ,y) \supset \forall \ \ P(x,\ \ )$$

A mai órán

Mi kell még ahhoz, hogy a logikai nyelvet használni is tudjuk

nulladrendű nyelv

- nemlogikai konstansok
  - állításokat rövidítő konstansok
- a logikai konstansok "működése"
  → szemantikai szabályok

elsőrendű nyelv

- nemlogikai konstansok
  - változók → a lehetséges objektumok
  - objektumokat jelölő konstansok (0 argumentumú függvények)
  - függvények → mit mire képez
  - állításokat jelölő konstansok (0 argumentumú predikátumok)
  - predikátumok/relációk → mely objektumokra teljesül
- a logikai konstansok "működése"
  - az eddigiek
  - $\exists, \forall$ → van olyan objektum ...
    minden objektum ...

Interpretáció, bevezető példa

Interpretáció

Rögzítenünk kell, hogy „mi micsoda". Például:

$\forall x \, P(a,x)$ ← egy formula

változó

kétargumentumú predikátum (reláció)

konstans objektum (nulla argumentumú függvény)

- Milyen értékei lehetségesek az x-nek? $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$
- Melyik objektumot jelöli az a? 0, 1
- Melyik reláció a $P(\_,\_)$? $\leq$

Kérdés: mikor mit jelent a formula?

Interpretáció elsőrendű nyelv esetén

Interpretáció | **Értékelés** | **Elsőrendű szemantikai szabályok** | **Alaptételek**

Definíció

Az $\langle\, U, \varrho \,\rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle\, LC, Var, Con, Term, Form \,\rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n) \quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény ($\varrho\left(f\right): U^{(n)} \to U$);
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n) \quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho\left(P\right) \subseteq U^{(n)}$.

Mihálydeák Tamás anyagai, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A múltkori példa még egyszer

<U,ρ> interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:
  - a) ρ(p)=Péter, ρ(é)=én
  - b) ρ(édesanyja(_)):
    én→Mari néni, Péter→Erzsi néni
  - c) ρ(havazik)=0
  - d) ρ(piros(_)):
    Mari néni→igaz,
    a többi objektumra → hamis
    ρ(munkatársa(_ , _)):
    (én,Zoli)→igaz,
    (Mari néni,Erzsi néni)→igaz
    a több párra→hamis

F(0) = { p, é }
F(1) = { édesanyja(_) }

P(0) = { havazik }
P(1) = { piros(_) }
P(2) = { munkatársa(_,_) }

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(p) édesanyja(é)

munkatársa(édesanyja(p), édesanyja(é))

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig a nyelv egy **interpretációja**. Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

1. $Dom(v) = Var$;
2. Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

Megjegyzés

- Az értékelésen egy $v\colon Var \to U$ függvényt értünk.

Definíció (A módosított értékelés fogalma)

Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v\left[x:u\right]\left(y\right) = \begin{cases} u, & ha \quad y = x; \\ v(y), & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Megjegyzés

- Az módosított értékelésen egy olyan $v[x:u]\colon Con \to U$ függvényt értünk, amely legfeljebb az x változóhoz rendelt értékben különbözik a v értékeléstől. Az x változóhoz az u értéket rendeli, azaz $v[x:u](x) = u$.

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:
    a) ρ(p)=Péter, ρ(é)=én
    b) ρ(édesanyja(_)):
       én→Mari néni, Péter→Erzsi néni
    c) ρ(havazik)=0
    d) ρ(piros(_)):
          Mari néni→igaz,
          a többi objektumra → hamis
       ρ(munkatársa(_ , _)):
          (én,Zoli)→igaz,
          (Mari néni,Erzsi néni)→igaz
          a több párra→hamis

$\mathcal{F}(0) = \{$ p, é $\}$
$\mathcal{F}(1) = \{$édesanyja(_)$\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$havazik$\}$
$\mathcal{P}(1) = \{$piros(_)$\}$
$\mathcal{P}(2) = \{$munkatársa(_,_)$\}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(p)   édesanyja(é)

munkatársa(édesanyja(p), édesanyja(é))

ν: értékelés

- egy értékelés: ν(x)=Péter (ekkor munkatársa(é,x) hamis)
- egy másik értékelés: ν(x)=Zoli (ekkor munkatársa(é,x) igaz)

Szemantikai szabályok/1

Interpretáció | Értékelés | Elsőrendű szemantikai szabályok | Alaptételek

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

1. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $|a|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(a)$.
2. Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = v(x)$.
3. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor
$$|f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(f)(|t_1|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, |t_2|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U, \varrho \rangle})$$
4. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|p|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(p)$

Szemantikai szabályok/2

Interpretáció | Értékelés | **Elsőrendű szemantikai szabályok** | Alaptételek

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

5. Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor

$$\left|\left(t_1 = t_2\right)\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & ha \quad |t_1|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = |t_2|_v^{\langle U,\varrho \rangle} \\ 0, & egy \acute{e} bk \acute{e} nt. \end{cases}$$

6. Ha $P \in \mathcal{P}(n) \backslash (n \neq 0), \quad t_1, \ldots, t_n \in Term$, akkor

$$\left|P\left(t_1, \ldots, t_n\right)\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & ha \quad \langle |t_1|_v^{\langle U,\varrho \rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho \rangle} \rangle \in \varrho(P); \\ 0, & egy \acute{e} bk \acute{e} nt. \end{cases}$$

7. Ha $A \in Form$, akkor $\left|\neg A\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1 - |A|_v^{\langle U,\varrho \rangle}$.

Szemantikai szabályok/3

8. Ha $A, B \in Form$, akkor

$$\left|\left(A \supset B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ é}s \quad |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & egy\text{é}bk\text{é}nt. \end{cases}$$

$$\left|\left(A \wedge B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ é}s \quad |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & egy\text{é}bk\text{é}nt. \end{cases}$$

$$\left|\left(A \vee B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0, \text{ é}s \quad |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & egy\text{é}bk\text{é}nt. \end{cases}$$

$$\left|\left(A \equiv B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle}; \\ 0, & egy\text{é}bk\text{é}nt. \end{cases}$$

Szemantikai szabályok/4

Interpretáció | Értékelés | **Elsőrendű szemantikai szabályok** | Alaptételek

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

9. Ha $A \in Form, x \in Var$, akkor

$$|\forall x A|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 0, & ha \quad van \quad olyan \quad u \in U, hogy \quad |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 0; \\ 1, & egy\text{é}bk\text{é}nt. \end{cases}$$

$$|\exists x A|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & ha \quad van \quad olyan \quad u \in U, hogy \quad |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 1; \\ 0, & egy\text{é}bk\text{é}nt. \end{cases}$$

<U,ρ> interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:
  a) ρ(p)=Péter, ρ(é)=én
  b) ρ(édesanyja(_)):
     én→Mari néni, Péter→Erzsi néni
  c) ρ(havazik)=0
  d) ρ(piros(_)):
     Mari néni→igaz,
     a többi objektumra → hamis
     ρ(munkatársa(_ , _)):
     (én,Zoli)→igaz,
     (Mari néni,Erzsi néni)→igaz
     a több párra→hamis

$\mathcal{F}(0) = \{ p, é \}$

$\mathcal{F}(1) = \{ \text{édesanyja}(\_) \}$

$\mathcal{P}(0) = \{ \text{havazik} \}$

$\mathcal{P}(1) = \{ \text{piros}(\_) \}$

$\mathcal{P}(2) = \{ \text{munkatársa}(\_,\_) \}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja}(p)}$ $\underbrace{\text{édesanyám}}_{\text{édesanyja}(é)}$ munkatársa.

munkatársa(édesanyja(p), édesanyja(é))

v: értékelés

$v(x) = \text{Péter}: \ |\text{munkatársa}(é,x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v} = 0$

$v(x) = \text{Zoli}: \ |\text{munkatársa}(é,x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v} = 1$

<U,ρ> interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:
  a) ρ(p)=Péter, ρ(é)=én
  b) ρ(édesanyja(_)):
     én→Mari néni, Péter→Erzsi néni
  c) ρ(havazik)=0
  d) ρ(piros(_)):
     Mari néni→igaz,
     a többi objektumra → hamis
     ρ(munkatársa(_ , _)):
     (én,Zoli)→igaz,
     (Mari néni,Erzsi néni)→igaz
     a több párra→hamis

$\mathcal{F}(0) = \{ p, é \}$

$\mathcal{F}(1) = \{ \text{édesanyja}(\_) \}$

$\mathcal{P}(0) = \{ \text{havazik} \}$

$\mathcal{P}(1) = \{ \text{piros}(\_) \}$

$\mathcal{P}(2) = \{ \text{munkatársa}(\_,\_) \}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}$ $\underbrace{\text{édesanyám}}$ munkatársa.

édesanyja(p) édesanyja(é)

munkatársa(édesanyja(p), édesanyja(é))

ν: értékelés

$$|\forall x \; \text{munkatársa}(é,x)|_{\nu}^{\langle U,\rho\rangle} = 0$$

$$|\exists x \; \text{munkatársa}(é,x)|_{\nu}^{\langle U,\rho\rangle} = 1$$

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho \rangle$ egy **elsőrendű interpretáció** és v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**.
Ekkor az $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$ érték egyértelműen meghatározott.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho \rangle$ egy **elsőrendű interpretáció** és v_1, v_2 két $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**.
Ha minden $x \in FreeVar(A)$ esetén $v_1(x) = v_2(x)$, akkor
$|A|_{v_1}^{\langle U, \varrho \rangle} = |A|_{v_2}^{\langle U, \varrho \rangle}$

Következmény

- A zárt formulák értéke független az értékelés megválasztásától, azaz zárt formulák értékét az interpretáció egyértelműen meghatározza.

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

$\{x, y, z, \dots\}$

$\mathcal{F}(0) = \{nulla\}$

$\mathcal{F}(1) = \{S\}$

$\{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, \forall, \exists,), (\}$

$\mathcal{F}(2) = \{összeg, szorzata\}$

$\mathcal{P}(2) = \{egyenlő\}$

Azon Con = {nulla, S(_), összege(_,_), szorzata(_,_), egyenlő(_,_)}

függvények

predikátum

interpretáció

$\langle U, \varrho \rangle$

$U : \mathbb{N}$ (természetes számok)

$\varrho : \varrho(nulla) = 0$

$\varrho(összege(\_,\_)) = \_ + \_$

$\varrho(szorzata(\_,\_)) = \_ * \_$

$\varrho(S(\_)) = \_ + 1$

$\varrho(egyenlő(\_,\_)) = (\_ = \_)$

egyenlő (szorzata (SSnulla, SSnulla), SSSSnulla)

$\exists y$ (egyenlő (x, szorzata (y, y)))

$\forall x \exists y$ [$\exists z$ egyenlő (y, összege (x, Sz)) $\wedge$

$\wedge\ \exists z$ egyenlő (y, szorzata (z, z))]

Elsőrendű modell | Kielégíthetőség | Kielégíthetetlenség | Következményreláció | Érvényesség | Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

1. $\langle U, \varrho \rangle$ egy **interpretációja** az $L^{(1)}$ nyelvnek;
2. v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**;
3. minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Megjegyzés

Az elsőrendű nyelv egy adott formulahalmazának a(z elsőrendű) modellje a nyelv egy (elsőrendű) interpretációjának és az interpretációra támaszkodó értékelésnek olyan együttese, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van **(elsőrendű) modellje**.

Megjegyzés

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

Megjegyzés

- Az A formula kielégíthető, ha van olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.

A Γ fomulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

Megjegyzés

- A Γ fomulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formulahalmaz **minden** eleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.

Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

A nulladrendű nyelveknél láttuk:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $\underline{A \vDash B}$, ha A minden modellje modellje B-nek is

- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\underline{\Gamma \vDash B}$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Elsőrendű nyelvek esetén:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

Adott: $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $A, B \in Form$; $\Gamma \subseteq Form$

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula,
  $A \models B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$
  $\Gamma \models B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

<u>Bizonyítás</u>: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen ez a ϱ interpretáció.

Ekkor: $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_\varrho = 1$, azaz $|A|_\varrho = 0$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

A következmény reláció tulajdonságai 1
elsőrendű eset

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen ez a $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció, v értékelés.

Ekkor: $|B|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$ minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$

$|A|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 0$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Leftarrow)$

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \not\models A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ϱ egy interpretáció. Erre $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_\varrho = 0$, azaz $|\neg A|_\varrho = 1$.

Vagyis ϱ kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

A következmény reláció tulajdonságai 1
elsőrendű eset

Adott $L^{(1)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Leftarrow)$

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \not\models A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ez a $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció, v értékelés.

Ekkor $|B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, $|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$.

Vagyis ϱ kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula érvényes, ha $\emptyset \vDash A$, azaz ha az A formula **logikai következménye** az üres halmaznak.

- Jelölés: $\vDash A$

Elsőrendű modell Kielégíthetőség Kielégíthetetlenség Következményreláció Érvényesség Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula. Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \vDash B$ és $B \vDash A$.

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

Példák

Kielégíthető, kielégíthetetlen, érvényes?

- $\forall(x)\, p(x) \supset p(a)$
- $\forall x \forall y \left(p(x,y) \supset p(y,x) \right)$
- $\forall x \exists y\, p(x,y)$
- $\exists x \exists y \left(p(x) \wedge \neg p(y) \right)$
- $\forall x \left(P(x) \wedge Q(x) \right) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$