Az informatika logikai alapjai
3. feladatsor

A kielégíthetőségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthető formulahalmaz** minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Forrás: Mihálydeák Tamás, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A kielégíthetetlenségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthetetlen formulahalmaz** minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

7.I.13. Igaz-e, hogy

(a) minden kielégíthetetlen formulahalmaznak van kielégíthető (nem-üres) része?

(b) minden kielégíthető formulahalmaznak van kielégíthetetlen bővítése?

(c) egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden részhalmaza kielégíthetetlen?

A múlt óráról:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

A következményreláció tulajdonságai - 1

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \vDash X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y,\ Z \supset \neg Y \vDash X \supset \neg Z$

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(a) Premisszák:
Ha reggel uszodába megyek, korán kelek. Ha viszont sok dolgozatot kell kijavítanom éjszaka, nem tudok reggel korán kelni. Ma reggel uszodában voltam.
Konklúzió:
Tegnap éjszaka nem kellett sok dolgozatot kijavítanom.

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
  - Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Aszalós László fóliái, kiemelések tőlem)

Mit is jelent az odavissza-nyíl? (Szintek.) Hogyan lehet ilyen állításokat igazolni?

Logikailag ekvivalens formulák

- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$
- $\boxed{A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \lor B)}$
- $A \land B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \lor B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \lor B \Leftrightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$
- $A \land B \Leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \land (B \supset A)$

8.I.5. Az

$$(1)\ \neg(X \wedge Y \supset Z \vee U) \quad (2)\ \neg X \vee \neg Y \vee Z \vee U \quad (3)\ X \wedge Y \wedge (\neg Z \vee \neg U)$$

formulákra mely állítások igazak? Válaszát röviden indokolja!

(a) (1) és (2) ekvivalensek.

(b) (1) és (3) ekvivalensek.

(c) Páronként bármely kettő ekvivalens egymással.

(d) Nincs a felsoroltak között ekvivalens pár.

8.I.6. Igazoljuk az ítéletlogikai ekvivalenciák segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset X$

(b) $(X \wedge Y) \supset (X \supset Y)$

(c) $((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$