Az informatika logikai alapjai
9. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- Elsőrendű nyelv:
  - interpretáció, változóértékelés
  - modell, kielégíthetőség
  - következményreláció

Interpretáció elsőrendű nyelv esetén

Interpretáció | **Értékelés** | **Elsőrendű szemantikai szabályok** | **Alaptételek**

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $\quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény ($\varrho\left(f\right): U^{(n)} \to U$);
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $\quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho\left(P\right) \subseteq U^{(n)}$.

Mihálydeák Tamás anyagai, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A múltkori példa még egyszer

<U,ρ> interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:
  a) ρ(p)=Péter, ρ(é)=én
  b) ρ(édesanyja(_)):
     én→Mari néni, Péter→Erzsi néni
  c) ρ(havazik)=0
  d) ρ(piros(_)):
     Mari néni→igaz,
     a többi objektumra → hamis
     ρ(munkatársa(_ , _)):
     (én,Zoli)→igaz,
     (Mari néni,Erzsi néni)→igaz
     a több párra→hamis

$\mathcal{F}(0) = \{ p, é \}$
$\mathcal{F}(1) = \{ \text{édesanyja}(\_) \}$

$\mathcal{P}(0) = \{ \text{havazik} \}$
$\mathcal{P}(1) = \{ \text{piros}(\_) \}$
$\mathcal{P}(2) = \{ \text{munkatársa}(\_,\_) \}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(p) édesanyja(é)

munkatársa(édesanyja(p), édesanyja(é))

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig a nyelv egy **interpretációja**. Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

1. $Dom(v) = Var$;
2. Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

Megjegyzés

- Az értékelésen egy $v{:}Var \to U$ függvényt értünk.

Definíció (A módosított értékelés fogalma)

Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v\left[x{:}u\right]\left(y\right) = \begin{cases} u, & \text{ha} \quad y = x; \\ v(y), & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Megjegyzés

- Az módosított értékelésen egy olyan $v[x{:}u]{:}Con \to U$ függvényt értünk, amely legfeljebb az x változóhoz rendelt értékben különbözik a v értékeléstől. Az x változóhoz az u értéket rendeli, azaz $v[x{:}u](x) = u$.

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:
  - a) ρ(p)=Péter, ρ(é)=én
  - b) ρ(édesanyja(_)):
    én→Mari néni, Péter→Erzsi néni
  - c) ρ(havazik)=0
  - d) ρ(piros(_)):
    - Mari néni→igaz,
    - a többi objektumra → hamis

    ρ(munkatársa(_ , _)):
    - (én,Zoli)→igaz,
    - (Mari néni,Erzsi néni)→igaz
    - a több párra→hamis

$\mathcal{F}(0) = \{ p, é \}$

$\mathcal{F}(1) = \{ édesanyja(-) \}$

$\mathcal{P}(0) = \{ havazik \}$

$\mathcal{P}(1) = \{ piros(-) \}$

$\mathcal{P}(2) = \{ munkatársa(-,-) \}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(p) édesanyja(é)

munkatársa(édesanyja(p), édesanyja(é))

ν: értékelés

- egy értékelés: ν(x)=Péter (ekkor munkatársa(é,x) hamis)
- egy másik értékelés: ν(x)=Zoli (ekkor munkatársa(é,x) igaz)

Elsőrendű modell | Kielégíthetőség | Kielégíthetetlenség | Következményreláció | Érvényesség | Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

1. $\langle U, \varrho \rangle$ egy **interpretációja** az $L^{(1)}$ nyelvnek;
2. v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**;
3. minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Megjegyzés

Az elsőrendű nyelv egy adott formulahalmazának a(z elsőrendű) modellje a nyelv egy (elsőrendű) interpretációjának és az interpretációra támaszkodó értékelésnek olyan együttese, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van **(elsőrendű) modellje**.

Megjegyzés

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.

Elsőrendű nyelvek esetén:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

Adott: $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $A, B \in Form$; $\Gamma \subseteq Form$

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula érvényes, ha $\emptyset \vDash A$, azaz ha az A formula **logikai következménye** az üres halmaznak.

- Jelölés: $\vDash A$

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \vDash B$ és $B \vDash A$.

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

nulladrendű nyelv

$L^{0} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- szemantikai szabályok

$\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ „működik"

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- szemantikai szabályok

$\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \exists, \forall$ „működik"

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- interpretáció
  - Con elemeinek értéke: logikai érték

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- interpretáció + változó értékelés
  - Univerzum
  - Con elemeinek értéke:
    1. objektumnevek:
       - konstans függvények
       - függvények
    2. állítások:
       - állítás konstansok logikai értékei
       - objektumok között fennálló relációk

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- szemantikai szabályok
- interpretáció ϱ
- modell
  - ϱ, ahol $|A|_{\varrho} = 1$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- szemantikai szabályok
- interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$

  \+

  változó értékelés: v
- modell
  - $\langle U, \varrho \rangle$ és v, ahol

    $$|A|_{v}^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• szemantikai szabályok	• szemantikai szabályok
• interpretáció ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
  - van modellje
- kielégíthetetlen formula
  - nincs modellje
- $A \models B$ ($\Gamma \models B$) A formula (Γ halmaz) minden modellje B-nek is modellje
- A formula érvényes, ha $\neg A$ kielégíthetetlen

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• szemantikai szabályok	• szemantikai szabályok
• interpretáció ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
  - van modellje
- kielégíthetetlen formula
  - nincs modellje
- $A \models B$ ($\Gamma \models B$) A formula (Γ halmaz) minden modellje B-nek is modellje
- A formula érvényes, ha $\neg A$ kielégíthetetlen

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• szemantikai szabályok	• szemantikai szabályok
• interpretáció, ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
- kielégíthetetlen formula
- logikai következmény
- érvényes formula
- logikai ekvivalencia:

$$A \Leftrightarrow B$$

akkor és csak akkor, ha

$$A \models B \text{ és } B \models A$$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• szemantikai szabályok	• szemantikai szabályok
• interpretáció: ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
- kielégíthetetlen formula
- logikai következmény
- érvényes formula
- logikai ekvivalencia:

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthető formulahalmaz** minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Bizonyítás

Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges **kielégíthető formulahalmaz**, és $\Delta \subseteq \Gamma$!

Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

$\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$. Azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezetthármas modellje Δ-nak, tehát Δ kielégíthető.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthetetlen formulahalmaz** minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges **kielégíthetetlen formulahalmaz**, $\Delta \subseteq Form$ pedig tetszőleges formulahalmaz.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető.

$\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$

A **kielégíthetőségre vonatkozó tétel** miatt Γ kielégíthető, ez pedig ellentmondás.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlensége segítségével

Következményreláció, nulladrendű nyelvek

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Következményreláció, elsőrendű nyelvek

<u>Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció</u>

$\boxed{L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle}$ $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának <u>következménye</u> a B formula, $\underline{A \vDash B}$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ <u>formulahalmaznak következménye</u> $B \in Form$ $\underline{\Gamma \vDash B}$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

<u>Bizonyítás</u>: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen ez a ϱ interpretáció.

Ekkor: $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_\varrho = 1$, azaz $|A|_\varrho = 0$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén/1

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció, v értékelés. Ekkor $|B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$.

$|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás: $(\Leftarrow)$

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \not\models A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ϱ az interpretáció.

Ekkor $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_\varrho = 0$, azaz $|\neg A|_\varrho = 1$.

Vagyis ϱ kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén/2

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Leftarrow)$

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \not\models A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ez a $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció, v értékelés. Ekkor $|B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

$|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

Vagyis ϱ kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

- A következmény reláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenségének segítségével

- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ \ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$.

Ha A **érvényes formula** $(\vDash A)$, akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

Bizonyítás

Ha A **érvényes** formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \vDash A$.

Így $\emptyset \cup \{\neg A\} \backslash (= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a **kielégíthetetlenségre kimondott tétel** alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlensége segítségével

- érvényes formula minden formulahalmaz következménye

- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle \setminus$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..
Ha a Γ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

Bizonyítás

A **már bizonyított tétel** szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.
$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlensége segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye

- Következményreláció és implikáció
  - dedukció tétel és megfordítása

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

$\boxed{\text{Ha } \Gamma \cup \{A\} \vDash B \text{, akkor } \Gamma \vDash (A \supset B).}$

Megjegyzés

$\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ helyett gyakran használjuk a következő rövidebb írásmódot: $\Gamma, A \vDash B$

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ teljesül, de $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ **kielégíthető**, tehát van **modellje**. Legyen egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ **interpretáció** és a v **értékelés** szerint.
2. $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

$|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, azaz $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$ és $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$. Így $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

$\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ **interpretáció** és a v **értékelés** szerint, azaz a formulahalmaz **kielégíthető**, tehát $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \vDash (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ **kielégíthető**, tehát van modellje. Legyen egy **modellje** az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint.
- $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$
- $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, így $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$

Így $|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

$\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ **interpretáció** és v **értékelés** szerint, azaz az $\backslash langla U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas **modellje** a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz **kielégíthető**. Tehát $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **dedukció tételt** és **megfordítását** abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenségének segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye
- Következményreláció és implikáció
  - dedukció tétel és megfordítása
- Logikai ekvivalencia és "≡" (materiális ekvivalencia)

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$\boxed{A \vDash B \text{ akkor és csak akkor, ha } \vDash (A \supset B)}$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **dedukció tételt** és **megfordítását** abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.

$\boxed{A \Leftrightarrow B \text{ akkor és csak akkor, ha } \vDash (A \equiv B).}$

nulladrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv
$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenségének segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye
- Következményreláció és implikáció
  - dedukció tétel és megfordítása
- Logikai ekvivalencia és "≡" (materiális ekvivalencia)

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

De Morgan törvények | Kifejezhetőség | Kvantorok mozgatása | Kvantorok fiktív alkalmazása

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Ekkor

1. $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Első De Morgan törvény bizonyítása **Második De Morgan törvény bizonyítása**

A törvény bizonyításához először lássuk be, hogy $\neg\exists xA \vDash \forall x\neg A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\neg\exists xA, \neg\forall x\neg A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. $|\neg\exists xA|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, és így $|\exists xA|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$
2. $|\neg\forall x\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, azaz $|\forall x\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

Az **univerzális kvantor szemantikai szabálya** szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $|\neg A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$, azaz $|A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$.

Ez pedig az **egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya** szerint azt jelenti, hogy $|\exists xA|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, ami ellentmond az első pontnak.

Első De Morgan törvény bizonyítása **Második De Morgan törvény bizonyítása**

Most lássuk be, hogy $\forall x \neg A \vDash \neg \exists x A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\forall x \neg A, \neg\neg \exists x A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. $\left| \forall x \neg A \right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$
2. $\left| \neg\neg \exists x A \right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$, azaz $\left| \exists x A \right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$

Az **egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya** szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $\left| A \right|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$, azaz $\left| \neg A \right|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 0$.

Ez pedig az **univerzális kvantor szemantikai szabálya** szerint azt jelenti, hogy $\left| \forall x \neg A \right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 0$, ami ellentmond az első pontnak.

De Morgan törvények | Kifejezhetőség | Kvantorok mozgatása | Kvantorok fiktív alkalmazása

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Ekkor

1. $\exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$
2. $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$

Bizonyítás

Ha a **kvantifikáció De Morgan törvényeinek** mindkét oldalát negáljuk, akkor a **kettős negáció törvényének** alkalmazásával megkapjuk a kifejezhetőségre vonatkozó logikai ekvivalenciákat.

1. $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Továbbá...

- $\forall x \forall y\, A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$

  $\exists x \exists y\, A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, A(x,y)$

- $\exists x \forall y\, A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, A(x,y)$

- $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

  $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

- $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$

  $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

(miért is?)

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei