Az informatika logikai alapjai
11. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- A kvantifikáció törvényei, folytatás
- Prenex normálforma
- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra

Emlékeztető: szemantikus táblák nulladrendű logikában

Kielégíthető-e:

$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \boxed{p \wedge (\neg q \vee \neg p)} \arrow[d] & \\
 & p, \neg q \vee \neg p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg q & & p, \neg p
\end{tikzcd}
$$

nyitott zárt

Kielégíthető, ha $\{p, \neg q\}$ vagy $\{p, \neg p\}$ kielégíthető.

Tanulság

1. Az egzisztenciálisan kvantált formulák paraméterek bevezetésével kezelendők
2. Különböző egzisztenciálisan kvantált formulákban különböző paramétereket kell használni.
3. Az univerzális formulákat az összes bevezetett paraméterrel fel kell írni.
4. Az ágak nem feltétlenül végesek
5. Figyelni kell a szabályalkalmazások sorrendjére.

Tehát : A szabályok

α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$

β	β_1	β_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

γ	$\gamma(a)$
$\forall x A(x)$	$A(a)$
$\neg\exists x A(x)$	$\neg A(a)$

δ	$\delta(a)$
$\exists x A(x)$	$A(a)$
$\neg\forall x A(x)$	$\neg A(a)$

Tétel: Az algoritmus

Adott: ϕ formula

Eredmény: Egy gráf (szemantikus tábla), ahol az ágak lehetnek nyíltak, zártak és végtelenek.

fa

konstansok

- A fa egy csúcsa ℓ, $U(\ell)$, $C(\ell)$

formulák

Kezdetben ϕ és a benne lévő konstansok.

Az algoritmus / futtatása

Vegyünk egy levelet, ami még nyitottnak vagy zártnak jelölve. Figyelve a sorrendre vegyük az alábbiakat:

1. • Ha $U(l)$-ben van komplementer literálpár, jelöljük l-et zárttal
2. • Ha $U(l)$-ben vannak olyan formulák, amik nem literálok, vegyünk egy α, β, δ formulát, A-t
   - Ha A α formula, járjunk el szokásosan
   - Ha A β formula, járjunk el szokásosan

a konstansok halmazát ne változtatva

Az algoritmus / folytatás 2

- Ha A δ formula, akkor l' egy új csúcs, ahol

$$U(l') = U(l) - \{A\} \cup \{\delta(a')\}$$
$$C(l') = C(l) \cup \{a'\}$$

• a' új konstans

• $\delta(a)$ a szabály szerint

• Az $U(l)$-beli γ formulák legyenek $\{\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_m}\}$, és $C(l) = \{c_{l_1}, \dots, c_{l_k}\}$

$$U(l') = U(l) \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k} \gamma_{l_i}(c_{l_j}) \right\}$$
$$C(l') = C(l)$$

- Ha csak γ formulák vannak, és $U(l') = U(l)$, akkor l-et jelöljük nyitottnak.

Ezek után egy <u>ág</u>:

- zárt, ha zárt levélben végződik
- nyitott, ha nyitott levélben végződik, vagy végtelen

Egy <u>tábla</u>:

- zárt, ha minden ága zárt
- nyitott, különben.

Például: Vizsgáljunk meg egy kielégíthető formulát

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$\neg\left[\forall x (P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))\right]$$

$$\downarrow$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) , \neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) , \neg\forall x P(x) , \neg\forall x Q(x)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) , \exists x \neg P(x) , \exists x \neg Q(x)$$

$$\forall x\,(P(x) \lor Q(x)),\ \exists x\,\neg P(x),\ \exists x\,\neg Q(x)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\,(P(x) \lor Q(x)),\ \exists x\,\neg P(x),\ \neg Q(a_1)$$

A múlt órán

- A kvantifikáció törvényei, folytatás
- Prenex normálforma
- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra

- Helyesség? Teljesség?

Nulladrendű logika

állításlogika, azaz
kijelentéslogika

Elsőrendű logika

- A gyökérnél lévő formula (halmaz)-nak nincs modellje, ha a tábla minden ága zárt

- Egy ág zárt: zárt levélben végződik

van a formulák között komplemens literálpár

Egy ág nyitott: különben

„különben":
- nincs a formulák között komplemens literálpár

„különben":
- nincs komplemens literálpár
- végtelen az ág

A nulladrendű logikában is pontosan így volt

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

- A módszer **helyes**: Ha a tábla alapján a formula kielégíthetetlen (minden levél zárt) akkor a formula kielégíthetetlen.
- A módszer **teljes**: Ha egy formula kielégíthetetlen, akkor a tábla is ezt az eredményt adja, azaz minden levele zárt.

(c

„kielégíthetetlen" = „nincs modellje"

A nulladrendű logikában is pontosan így volt

A szemantikus táblázatok módszere a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére helyes és teljes, azaz:

Tétel: Legyen $A \in Form$ és $\mathcal{T}$ az hozzá tartozó tábla. Ekkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt. Azaz:

① Ha $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ akkor $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ ← teljesség

② Ha $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ akkor $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ ← helyesség

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?)

„kielégíthetetlen" = „nincs modellje"

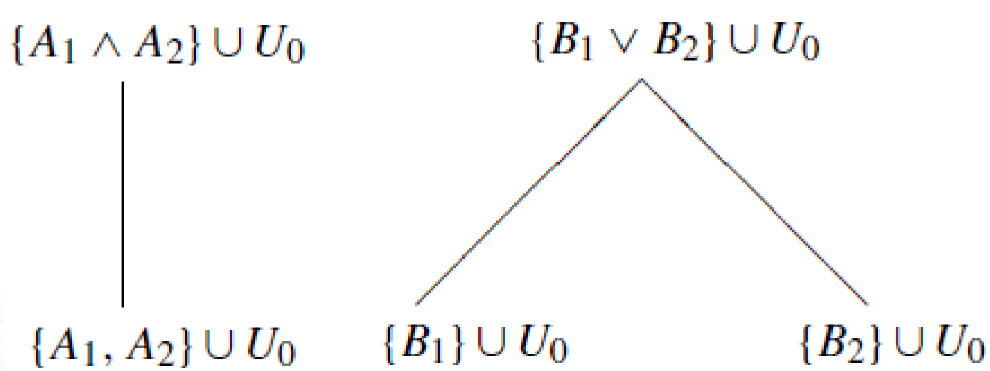
A nulladrendű logikában így volt (alfa és béta típusú formulák esetén)

Bizonyítsuk ezt be.

1. Helyesség: Ha a tábla zárt, akkor a formula kielégíthetetlen.

- Adott egy zárt tábla, meg kell mutatni, hogy a gyökérnél lévő formula kielégíthetetlen.
- Induljunk el a levelektől a gyökér felé. A leveleken lévő formula halmazok (literál halmazok) kielégíthetetlenek (ezért zárt a tábla).

  → A levelek szülőinél lévő formula halmazai kielégíthetetlenek.



- És így tovább a gyökérig

„kielégíthetetlen" = „nincs modellje"

gamma típusú formulák esetén

Bizonyítsuk ezt be.

1. Helyesség: Ha a tábla zárt, akkor a formula kielégíthetetlen.

- Adott egy zárt tábla, meg kell mutatni, hogy a gyökerénél levő formula kielégíthetetlen.
- Induljunk el a levelektől a gyökér felé. A leveleken levő formulahalmazok (literál halmazok) kielégíthetetlenek (mert zárt a tábla).

→ A levelek szülőinél levő formulahalmazai kielégíthetetlenek.

- És így tovább a gyökérig

$$U_0 \cup \{\forall x\, A(x)\}$$

$$U_0 \cup \{\forall x\, A(x),\ A(a)\}$$

„kielégíthetetlen" = „nincs modellje"

delta típusú formulák esetén

Bizonyítás ötlete.

1. Helyesség: Ha a tábla zárt, akkor a formula kielégíthetetlen.

- Adott egy zárt tábla, meg kell mutatni, hogy a gyökerénél lévő formula kielégíthetetlen.
- Induljunk el a levelektől a gyökér felé. A leveleken lévő formulahalmazok (literálhalmazok) kielégíthetetlenek (mert zárt a tábla).

  → A levelek szülőinél lévő formulahalmazok is kielégíthetetlenek.
- És így tovább a gyökérig.

$$U_0 \cup \{\exists x\, A(x)\}$$

$$|$$

$$U_0 \cup \{A(a)\}$$

„kielégíthetetlen” = „nincs modellje”

A nulladrendű logikában is pontosan így volt

Bizonyítsuk azt le

2. **Teljesség**: Ha a formula kielégíthetetlen, akkor minden hozzá tartozó tábla zárt.

„Minden" tábláról beszélni nehéz, ezért vegyük a kontrapozitív formát:

- Ha nem igaz, hogy minden hozzá tartozó tábla zárt, akkor a formula nem kielégíthetetlen.

kielégíthető

Van a formulához tartozó táblák között nyitott.

„kielégíthetetlen” = „nincs modellje”

A következő lépések:

- Hintikka halmaz, a Hintikka halamzoknak van modellje
- A nyílt táblák nyílt ágain lévő formulák halmaza Hintikka halmaz
- A nyílt táblák gyökerénél lévő formulának/formulahalmaznak van modellje

Nulladrendű esetben így volt

$U \subseteq Form$ formulahalmaz <u>Hintikka halmaz</u> akkor és csak akkor, ha:

1. Ha $A \in U$ és p atomi formulája A-nak, akkor $\{p, \neg p\} \not\subseteq U$.

α típusú részformulái

2. Ha $A \in U$ α típusú formula, akkor $A_1, A_2 \in U$

3. Ha $B \in U$ β típusú formula, akkor $B_1 \in U$ vagy $B_2 \in U$.

β típusú részformulái

<u>Például</u>:

$$\{p, p \vee (q \wedge \neg q)\}$$

Elsőrendű esetben:

$U \subseteq Form$ formulahalmaz Hintikka halmaz akkor és csak akkor, ha:

1. Ha $A \in U$ és A egy literál, akkor vagy A nincs benne U-ban, vagy A komplementere nincs benne U-ban

α típusú részformulái

2. Ha $A \in U$ α típusú formula, akkor $A_1, A_2 \in U$
3. Ha $B \in U$ β típusú formula, akkor $B_1 \in U$ vagy $B_2 \in U$.

β típusú részformulái

4. Ha A egy gamma formula, akkor $\gamma(c) \in U$ minden U-beli formulában előforduló c konstansra
5. Ha A egy delta formula, akkor $\delta(c) \in U$ valamilyen c konstansra

Nulladrendű esetben így volt

Állítás: Ha $\mathcal{U} \subseteq Form$ formulahalmaz Hintikka halmaz, akkor $\mathcal{U}$ kielégíthető.

Bizonyítás: $\mathfrak{I}$ legyen a következő interpretáció:

- ha p atomi formula, $p \in \mathcal{U}$, akkor $\mathfrak{I}(p)=1$
- ha p atomi formula, $\neg p \in \mathcal{U}$, akkor $\mathfrak{I}(p)=0$
- ha p atomi formula, $p \notin \mathcal{U}$ és $\neg p \notin \mathcal{U}$, akkor $\mathfrak{I}(p)=1$

ekkor minden $A \in \mathcal{U}$ esetén $|A|_{\mathfrak{I}} = 1$. Miért?

$\longrightarrow$ Strukturális indukció

„kielégíthető" = „van modellje"

Elsőrendű esetben

Állítás: Ha $\mathcal{U} \subseteq Form$ formulahalmaz Hintikka halmaz, akkor $\mathcal{U}$ kielégíthető.

Bizonyítás: Legyen $\{c_1, c_2 \dots\}$ az $\mathcal{U}$-ban előforduló konstansok halmaza, vegyünk egy interpretációt:

$\langle \{c_1, c_2, \dots\}, \mathcal{I} \rangle$ úgy, hogy:

az univerzum

- $|p(c_{i_1}, \dots, c_{i_n})| = 0$, akkor az esetben, ha $\neg p(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \in \mathcal{U}$
- $|p(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n})| = 1$ különben.

Ekkor minden $A \in \mathcal{U}$ esetén $|A| = 1$.
Miért is? (Strukturális indukció.)

„kielégíthető” = „van modellje”

Miért érdekes, hogy egy Hintikka halmaznak van modellje?

Nulladrendű esetben így volt

<u>Állítás</u>: Ha ℓ egy nyílt tábla nyílt levele és $\mathcal{H}$ az ℓ-től a gyökérig vezető úton lévő csúcsnál lévő formulák halmaza, akkor $\mathcal{H}$ Hintikka halmaz.

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \wedge (\neg q \vee \neg p) & \\
 & \downarrow & \\
 & p,\ \neg q \vee \neg p & \\
\swarrow & & \searrow \\
p,\ \neg q & & p,\ \neg p \\
\odot & & \times
\end{array}
$$

Állítás: Ha B egy nyílt tábla nyílt ága, akkor a B csúcsainál lévő formulák halmaza kielégíthető halmaz.

- nyílt levélben záruló
- végtelen

Azaz: a csúcsoknál lévő formulák halmazának van modellje

Azaz: a gyökérnél lévő formulának (formulahalmaznak) van modellje

Valóban: A tábla építése közben a nyílt ágak mentén Hintikka halmazok keletkeznek

$U \subseteq Form$ formulahalmaz <u>Hintikka halmaz</u> akkor és csak akkor, ha:

1. Ha $A \in U$ és A egy literál, akkor vagy A nincs benne U-ban, vagy A komplementere nincs benne U-ban akkor

α típusú részformulái

2. Ha $A \in U$ α típusú formula, akkor $A_1, A_2 \in U$
3. Ha $B \in U$ β típusú formula, akkor $B_1 \in U$ vagy $B_2 \in U$.

β típusú részformulái

4. Ha A egy gamma formula, akkor $\gamma(c) \in U$ minden U-beli formulában előforduló c konstansra
5. Ha A egy delta formula, akkor $\delta(c) \in U$ valamilyen c konstansra

Azaz:

Ha a táblának van nyílt ága, akkor a gyökérnél lévő formulának/formulahalmaznak van modellje.

A nulladrendű logikában így volt. Érvényesek ezek a pontok most is?

Következmények

- $A \in Form$ akkor és csak akkor kielégíthető, ha T nyitott (nem zárt).
- $A \in Form$ érvényes (logikai törvény) akkor és csak akkor, ha a $T\neg A$-hoz tartozó tábla zárt.
- A szemantikus tábla konstrukciójának segítségével eldönthető, hogy egy formula érvényes-e.

„eldöntési eljárás” →

Következmények

- $A \in Form$ akkor és csak akkor kielégíthető, ha T nyitott ($\Leftrightarrow$ nem zárt).
- $A \in Form$ érvényes (logikai törvény) akkor és csak akkor, ha a $\neg A$-hoz tartozó tábla zárt.
- ~~A szemantikus tábla konstrukciójának segítségével eldönthető, hogy egy formula érvényes-e.~~

~~„eldöntési eljárás”~~

Következmények elsőrendű logika esetén

- $A \in Form$ akkor és csak akkor van modellje ha $\mathcal{T}$ nyitott (nem zárt).
- $A \in Form$ érvényes (logikai törvény) akkor és csak akkor, ha a $\mathcal{T}_{\neg A}$-hoz tartozó tábla zárt.

- A tábla nem feltétlen konstruálható meg véges sok lépésben (a konstrukciós eljárás nem feltétlen fejeződik be), azaz a módszer **általánosan nem alkalmazható** formulák **érvényességének eldöntésére.**

Miért akadálya az „eldöntésnek”, hogy végtelen ágak is előfordulhatnak?

- Mert az eldöntésnek véges sok lépésben be kell fejeződni.
  - Ha a **formula érvényes**, akkor negáltnak nincs modellje, azaz a **negálthoz tartozó tábla** minden ága **zárt** lesz
    →ez véges sok lépésben kiderül
  - Ha a **formula ellentmondás**, akkor nincs modellje, azaz a **formulához tartozó tábla** minden ága **zárt** lesz
    →ez véges sok lépésben kiderül
  - Ha a **formula nem érvényes** ugyan, de **van modellje**, akkor a **formulának és a negáltjának a táblájában** is van **nyitott** ág
    →ha a nyitott ág végtelen, akkor ez nem feltétlen derül ki véges sok lépésben. Nem mindig világos hogy egy adott ágat „növelő” lépések egy idő után nem „fogynak-e el”, vagyis az, hogy az ág esetleg mégis lezárul-e.

Van esetleg más módszer elsőrendű formulák érvényességének eldöntésére?

Nincs.
Bizonyítás ötlet: Ha lenne, akkor eldönthető volna a „két regiszteres gépek” megállási problémája, ami pedig nem eldönthető.

Az ötlet tehát: A megállási probléma eldönthetetlen (ezt elhisszük, ebből indulunk ki)

Két regiszteres gép:

- x,y regiszterek
- P= $\{L_0, \ldots, L_n\}$ program, ahol az utasítások lehetnek:
  - `x = x + 1;`
  - `y = y + 1;`
  - `if (x == 0) goto` L_j`; else x = x - 1;`
  - `if (y == 0) goto` L_j`; else y = y - 1;`
- Kezdő konfiguráció: $(L_0, m, 0)$
  megállási konfiguráció: (L_n, x, y)

Megállási probléma: döntsük el, hogy egy adott program üres regiszterekkel indítva megáll-e

$$S_M = \left(p_0(a,a) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} S_i \right) \rightarrow \exists z_1 \exists z_2 \, p_n(z_1, z_2),$$

ahol:

L_i	S_i
`x = x + 1;`	$\forall x \forall y (p_i(x,y) \rightarrow p_{i+1}(s(x),y))$
`y = y + 1;`	$\forall x \forall y (p_i(x,y) \rightarrow p_{i+1}(x,s(y)))$
`if (x == 0) goto Lj;` `else x = x - 1;`	$\forall x (p_i(a,x) \rightarrow p_j(a,x)) \wedge$ $\forall x \forall y (p_i(s(x),y) \rightarrow p_{i+1}(x,y))$
`if (y == 0) then goto Lj;` `else y = y - 1;`	$\forall x (p_i(x,a) \rightarrow p_j(x,a)) \wedge$ $\forall x \forall y (p_i(x,s(y)) \rightarrow p_{i+1}(x,y))$

Ez a formula akkor és csak akkor érvényes, ha a program ami alapján készült *a,a*-t tartalmazó regiszterekkel indítva megáll.

Az érvényesség eldöntése eldöntené a megállás kérdését is, azaz az érvényesség sem lehet eldönthető.

A múlt és mai órán

- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra
- Helyesség, teljesség
- Az elsőrendű logikában nem feltétlen dönthető el egy adott formuláról, hogy érvényes-e