Az informatika logikai alapjai
2. feladatsor

Szintaxis: Az állításkalkulus nyelve

Klasszikus nulladrendű nyelv:

$\boxed{L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle}$ ahol

- $LC=\{\neg,\supset,\wedge,\vee,\equiv,(,)\}$ -**logikai konstansok** halmaza
- $Con \neq \emptyset$ -**nemlogikai konstansok** (állítás- vagy kijelentés-paraméterek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza
  $Con = \{p, q, r, \ldots\}$
  $LC \cap Con = \emptyset$
- Form -**formulák** (jól formált kifejezések)

LC véges. Mi az, hogy Con megsz.-ható végtelen?

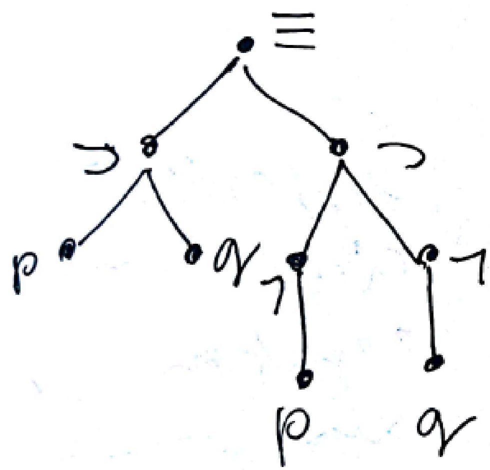
A formulák megformálásának szabályai (ez egy ún. induktív definíció)

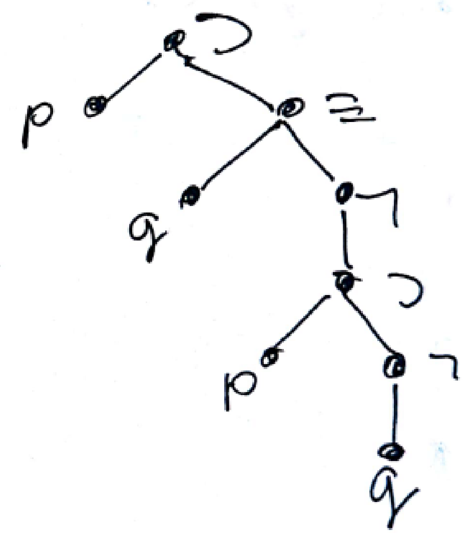
- Con⊆Form $\quad$ p, q, r,... ←atomi formulák
- Ha A,B∈Form, akkor
  - $\neg A \in$ Form $\quad \neg p, \neg q, \neg r, \ldots$
  - $(A \wedge B) \in$ Form, $\quad (p \wedge q), (\neg r \wedge p), \ldots$
  - $(A \vee B) \in$ Form, $\quad (p \vee \neg r), ((\neg r \wedge p) \vee p), \ldots$
  - $(A \equiv B) \in$ Form $\quad ((\neg r \wedge p) \vee p) \equiv (\neg r \wedge p)), \ldots$
  - $(A \supset B) \in$ Form, $\quad ((((\neg r \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \ldots$

és így tovább, pl.:

$\ldots \neg ((((\neg r \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \quad ((\neg r \wedge p) \supset (p \vee \neg r)), \ldots$

Zárójelek nélkül a szintaktikai reprezentáció nem egyértelmű





$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$((p \supset q) \equiv (\neg p \supset \neg q))$

$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$(p \supset (q \equiv (\neg (p \supset \neg q))))$

A logikai operátorok precedenciája

Csökkenő sorrendben: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

Egyszerűsít:

- $((p \supset q) \equiv (\neg p \supset \neg q)) \Longleftrightarrow p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$
- $(p \supset (q \equiv (\neg(p \supset \neg q)))) \Longleftrightarrow p \supset (q \equiv \neg(p \supset \neg q))$

Továbbá:

- $p \vee (q \wedge r) \vee s \Longleftrightarrow p \vee q \wedge r \vee s$
- $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee s)$

Továbbá:

- $\left.\begin{array}{l} p \lor q \lor r \\ p \land q \land r \end{array}\right\}$ ~~[illegible]~~ t így értjük: $\begin{array}{l} (p \lor (q \lor r)) \\ (p \land (q \land r)) \end{array}$

ez mindegy

ez fontos

- $p \supset q \supset r$ – t így értjük: $(p \supset (q \supset r))$

1.I.3 Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ ahol Con={X,Y,Z}. Teljesen zárójelezett formulák-e az alábbiak? Ha nem, akkor zárójelek elhagyásával megkaphatók-e egy teljesen zárójelezett formulából? Ha igen rajzoljuk fel a szerkezeti fát is.

(a) $(X \wedge Y) \neg Z$

(b) $((X \wedge Y) \supset Z)$

(c) $(Z \vee X \wedge \neg Y)$

(d) $(((\neg X) \supset Y) \supset \neg(X \vee Z))$

(e) $\neg(X \vee Y \supset \neg\neg Z)$

(f) $\neg(X \vee Y \wedge \neg Z$

1.I.5. Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelpárt a formulákból!

(a) $((X \vee Y) \supset Z)$

(b) $(\neg(X \vee Y) \supset Z)$

(c) $\neg((X \vee Y) \supset Z)$

(d) $((\neg(\neg X \vee Y) \wedge Z) \supset (X \vee Z))$

(e) $(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (\neg X \vee Z))$

(f) $\neg(((X \supset Y) \supset (Y \vee Z)) \supset (\neg X \vee Z))$

(g) $((X \supset Y) \equiv (\neg X \vee Y))$

(h) $(((X \vee Y) \supset \neg Z) \equiv (X \wedge \neg Z))$

(i) $\neg((\neg(X \vee Y) \supset \neg Z) \equiv \neg(X \wedge \neg Z))$

1.I.15. Rajzoljuk fel az alábbi formulák szerkezeti fáját!

(a) $\neg\neg\neg(X \supset Y)$

(b) $(X \supset Y) \vee (X \supset Y \wedge Z)$

(c) $X \vee Y \supset \neg Z \wedge \neg(X \supset \neg Z)$

(d) $(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$

(e) $(X \supset Y \wedge \neg Z) \supset (\neg X \supset \neg Y \wedge Z)$

(f) $\neg(X \vee Z \supset \neg Y) \supset \neg X \vee (\neg Y \wedge Z)$

Formula szemantikai értékének (igaz, hamis) meghatározása

Szemantikai szabályok:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$,

$\varrho : Con \to \{0, 1\}$

Ha $A \in Form$ („A" egy formulát jelöl), akkor $\varrho(A)$-t jelöljük $|A|_\varrho$-val.

- Ha $p \in Con$, akkor $|p|_\varrho = \varrho(p)$
- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_\varrho = 1 - |A|_\varrho$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor
  - $|(A \supset B)|_\varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_\varrho = 1 \text{ és } |B|_\varrho = 0 \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$
  - $|(A \wedge B)|_\varrho = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_\varrho = 1 \text{ és } |B|_\varrho = 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
  - $|(A \vee B)|_\varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_\varrho = 0 \text{ és } |B|_\varrho = 0 \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$
  - $|(A \equiv B)|_\varrho = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_\varrho = |B|_\varrho \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Az iménti szemantikai szabályok táblázatba foglalva

$\lvert A \rvert_\varrho$	$\lvert B \rvert_\varrho$	$\lvert \neg A \rvert_\varrho$	$\lvert (A \supset B) \rvert_\varrho$	$\lvert (A \wedge B) \rvert_\varrho$	$\lvert (A \vee B) \rvert_\varrho$	$\lvert (A \equiv B) \rvert_\varrho$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

5.I.6. Adjuk meg az $X \vee \neg Y \supset Z$ formula igazságértékét az alábbi interpretációkban!

(a) $\mathcal{I}(X) = 1$
$\mathcal{I}(Y) = 1$
$\mathcal{I}(Z) = 0$

(b) $\mathcal{I}(X) = 0$
$\mathcal{I}(Y) = 0$
$\mathcal{I}(Z) = 1$

5.I.8. Határozzuk meg az alábbi formulák igazságértékét, ha $\mathcal{I}(X) = 0$, és $\mathcal{I}(Y) = 1$:

(a) $X \supset (Y \supset X)$

(b) $\neg(Y \supset X) \wedge (X \vee \neg Y)$

(c) $\neg(\neg Y \vee \neg X \supset \neg X \wedge Y)$

(d) $((\neg X \supset Y) \supset X) \supset \neg Y$

5.I.9. Tudunk-e valamit mondani a $\neg X \supset (\neg Y \wedge X) \vee Z$ formula igazságértékéről az $\mathcal{I}$ interpretációban, ha csak annyit tudunk, hogy $|Z|_{\mathcal{I}} = 1$?

5.I.10. Tudunk-e valamit mondani az alábbi formulák igazságértékéről, ha csak bizonyos más formulák igazságértékeit ismerjük az $\mathcal{I}$ interpretációban!

(a) $(X \supset Y) \supset (\neg Y \supset \neg X)$, ha $|Y|_{\mathcal{I}} = 1$

(b) $\neg X \wedge Y \supset X \vee Y$, ha $|X \supset Y|_{\mathcal{I}} = 1$

Formula és formulahalmaz modellje

Legyen adott:
- $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv
- ϱ interpretáció

Ekkor:

- ϱ interpretáció az $A \in Form$ formula modellje, ha
$$\underline{\underline{|A|_\varrho = 1}}$$

- ϱ interpretáció a $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz modellje, ha
$$\underline{\underline{|A|_\varrho = 1 \text{ minden } A \in \Gamma\text{-ra}}}$$

Kielégíthetőség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.
- Az előző állítás megfordítása nem igaz. Pl.: a {p,¬p} formulahalmaz minden eleme kielégíthető, de maga a formulahalmaz nem kielégíthető.

Megjegyzés.

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje B-nek is.

Érvényesség

(Adott $L^{(0)}_F(LC, Con, Form)$, $A \in Form$)

Egy A formula érvényes, ha

1. megfogalmazás
- minden interpretációban igaz, azaz $|A|_g = 1$ minden $g: Con \to \{0,1\}$-re

2. megfogalmazás
- $\emptyset \models A$ (Az üreshalmaz következménye.)

Ha A formula érvényes, akkor A tautológia

másik elnevezés

7.I.3. Igazoljuk, hogy az alábbi formulák kielégíthetőek!

(a) $\neg(X \supset \neg X)$

(b) $(X \supset Y) \supset (Y \supset X)$

(c) $(X \supset Y \wedge Z) \wedge \neg(X \vee Z \supset Y)$

Kezdjük a (b)-vel (közösen?).

7.I.7. Döntsük el, mely formulák nem logikai törvények? Indokoljunk!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset \neg Y$

(b) $\neg(X \supset Y) \supset X$

(c) $X \supset \neg(X \supset Y)$

(d) $\neg X \supset (X \supset Y)$

(e) $(X \supset Z) \supset ((X \supset Y) \supset (Y \supset Z))$

(f) $\neg X \wedge (Y \supset Z) \wedge X \supset \neg Y \vee X$

7.I.11. Döntsük el az alábbi formulahalmazokról, hogy kielégíthetőek-e!

(a) $\{\neg X, X \supset Y, X \vee \neg Y\}$

(b) $\{X \supset Y, X, \neg Y\}$

7.I.17. Az $X \supset (Y \supset Z), Y, \neg Z$ premisszáknak melyik formula logikai következménye? Indokoljunk!

(a) $\neg X$ (b) $Y \supset Z$

(c) X (d) $X \wedge Y \wedge \neg Z$

7.I.18. A $\neg X \supset \neg Y \vee Z, Y, \neg Z$ premisszáknak mely formula logikai következménye? Indokoljunk!

(a) $X \wedge Z$ (b) $Z \supset \neg X$

(c) $X \wedge Y$ (d) $X \wedge Y \wedge Z$