Az informatika logikai alapjai
5. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

Az első zárthelyi dolgozatról

- **Október 20-án kedden** (a szakmai hét előtti hét) **16.30 – 17.30**
- **Két helyszín** van:
  - **IK épület 201**-es terem: Azoknak, akiknek a **vezetékneve A – K betűvel** kezdődik
  - **TEOKJ épület fszt. 108**-as terem (IV. előadó): Azoknak, akiknek a **vezetékneve L-Z betűvel** kezdődik
- Aki a fenti időpontban **nem tud személyesen megjelenni**, annak a **félév végén** lesz alkalma a ZH-t **bepótolni**.

A múlt órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Milyen logikai műveletek vannak
(két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_2$: diszjunkció ($\vee$)

$\circ_5$: implikáció ($\supset$)

$\circ_7$: ekvivalencia ($\equiv$)

$\circ_8$: konjunkció ($\wedge$)

$\circ_{10}$: kizáró vagy

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Két változós művelet

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_9$: "nand" (a konjunkció tagadása)

$\circ_{15}$: "nor" (a diszjunkció tagadása)

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Kifejezhetőség

Tétel

$\vee, \wedge, \supset, \equiv$ bármelyike kifejezhető ezek közül bármely kettővel:

- $\neg, \vee$
- $\neg, \wedge$
- $\neg, \supset$

Bizonyítás

- $\neg, \vee$: $\wedge$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel
- $\neg, \wedge$: $\vee$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel
- $\neg, \supset$: $\wedge$ kifejezhető, $\vee$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel

A többi lehetséges művelet is kifejezhető mindegyik párossal.

Ki lehet fejezni ezeket egyetlen művelettel?

Igen: A nand vagy nor önmagában is elegendő.

Például:

Fejezzük ki $\wedge$-t nand segítségével:

- $\boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \text{ nand } B)$
$\Leftrightarrow \neg((A \text{ nand } B) \wedge (A \text{ nand } B)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{(A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)}$

- $\boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ nand } A}$

Melyik lépés miért jogos?

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A múlt órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Formulák felbontása literálokra

- $\boxed{\text{literál}}$: atomi formula ← $\boxed{\text{pozitív literál}}$
  atomi formula negáltja ← $\boxed{\text{negatív literál}}$

$L^{(0)} = (LC, Con, Form)$

↑ nemlogikai konstansok vagy atomi formulák

- **Komplemens literálpár**: $p, \neg p$, ahol $p \in Con$

Például: $\{\neg p, q, r, \neg r\}$

pozitív literál

negatív literál

komplemens literálpár

Szemantikus táblázatok

Az előző példákban szemantikus táblázatokat készítettünk.
Nem feltétlen egyértelmű, hogy egy formulához milyen táblázat tartozik.

Például:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (p\vee q)\wedge(\neg p\wedge\neg q) \arrow[d] & \\
 & p\vee q, \neg p\wedge\neg q \arrow[d] & \\
 & p\vee q, \neg p, \neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 \underset{\text{zárt}}{p, \neg p, \neg q} & & \underset{\text{zárt}}{q, \neg p, \neg q}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (p\vee q)\wedge(\neg p\wedge\neg q) \arrow[d] & \\
 & p\vee q, \neg p\wedge\neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 p, \neg p\wedge\neg q \arrow[d] & & q, \neg p\wedge\neg q \arrow[d] \\
 \underset{\text{zárt}}{p, \neg p, \neg q} & & \underset{\text{zárt}}{q, \neg p, \neg q}
\end{tikzcd}
$$

Milyen szabályok szerint konstruáltuk a táblázat ?

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formulák esetén bővítettük a formulahalmazt
- $\boxed{\beta}$ típusú formulák esetén elágaztunk, és alternatíváikkal bővítettük a formulahalmazt
- A leveleket megjelöltük ~~[illegible]~~ (nyitott / zárt)

A tábla konstrukciója precízebben
(algoritmus)

Bemenet: Φ formula, **Kimenet**: $\mathcal{T}$ szemantikus tábla (minden levele ~~megjelölve~~ megjelölve)

- Kezdetben $\mathcal{T}$-nek egy gyökér csúcsa van, címkéje $\{\Phi\}$
- Válasszunk egy l meg nem jelölt levelet, $U(l)$ a címke formulahalmaz (Hogyan?)
  - Ha $U(l)$ literálokból áll csak, jelöljük meg.
  - Ha $A \in U(l)$ nem literál:
    - Ha A α típusú formula, A_1, A_2 részekkel: $\longrightarrow$
      - l, $U(l)$
      - l', $U(l) - \{A\} \cup \{A_1, A_2\}$
    - Ha A β típusú formula, B_1, B_2 részekkel: $\longrightarrow$
      - l, $U(l)$
      - $U(l) - \{B\} \cup \{B_1\}$ | $U(l) - \{B\} \cup \{B_2\}$

A múlt órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) észrevételt:

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

- A módszer **helyes**: Ha a tábla alapján a formula kielégíthetetlen (minden levél zárt) akkor a formula kielégíthetetlen.

- A módszer **teljes**: Ha egy formula kielégíthetetlen, akkor a tábla is ezt az eredményt adja, azaz minden levele zárt.

(c

A szemantikus táblák módszere a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére helyes és teljes, azaz:

Tétel: Legyen $A \in Form$ és T egy hozzá tartozó tábla. Akkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha T zárt. Azaz:

① Ha $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ akkor $\boxed{T \text{ zárt}}$

② Ha $\boxed{T \text{ zárt}}$ akkor $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?)

Bizonyítsuk ezt be.

1. Helyesség: Ha a tábla zárt, akkor a formula kielégíthetetlen.

- Adott egy zárt tábla, meg kell mutatni, hogy a gyökerénél levő formula kielégíthetetlen.
- Induljunk el a levelektől a gyökér felé. A leveleken levő formula halmazok (literál halmazok) kielégíthetetlenek (mert zárt a tábla).

→ A levelek szülőinél levő formula halmazai kielégíthetetlenek.

- És így tovább a gyökérig

$$\begin{array}{c} \{A_1 \wedge A_2\} \cup U_0 \\ | \\ \{A_1, A_2\} \cup U_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \{B_1 \vee B_2\} \cup U_0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \{B_1\} \cup U_0 & & \{B_2\} \cup U_0 \end{array}$$

<u>Bizonyítsuk azt le</u>

2. <u>Teljesség</u>: Ha a formula kielégíthetetlen, akkor minden hozzá tartozó tábla zárt.

„Minden" tábláról beszélni nehéz, ezért vegyük a kontrapozitív formát:

- Ha nem igaz, hogy minden hozzá tartozó tábla zárt, akkor a formula nem kielégíthetetlen.

kielégíthető

~~..~~van a formulához tartozó táblák között nyitott.

A tétel még egyszer

<u>Tétel</u>: Legyen $A \in Form$ és $\mathcal{T}$ egy hozzá tartozó tábla. Akkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt. <u>Azaz</u>:

① <u>Ha</u> $A \in Form$ kielégíthetetlen <u>akkor</u> $\mathcal{T}$ zárt

② <u>Ha</u> $\mathcal{T}$ zárt <u>akkor</u> $A \in Form$ kielégíthetetlen

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?)

A tétel még egyszer

Tétel: Legyen $A \in Form$ és $\mathcal{T}$ egy hozzá tartozó tábla. Akkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt.

Azaz:

① Ha van olyan tábla ami nyílt (nem zárt) akkor a formula kielégíthető (nem kielégíthetetlen)

② Ha $\mathcal{T}$ zárt akkor $A \in Form$ kielégíthetetlen

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?) ??

Példák nyitott táblákra

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& p \wedge (\neg q \vee \neg p) \arrow[d] & \\
& p,\ \neg q \vee \neg p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg q & & p, \neg p \\
\odot & & \times \\
\text{nyitott} & & \text{zárt}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& p \vee (q \wedge \neg q) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p & & q \wedge \neg q \arrow[d] \\
\odot & & q, \neg q \\
\text{nyitott} & & \times \\
& & \text{zárt}
\end{tikzcd}
$$

Állítás: Ha ℓ egy nyílt tábla nyílt levele és $\mathcal{H}$ az ℓ-től a gyökérig vezető úton lévő csúcsoknál lévő formulák halmaza, akkor $\mathcal{H}$ Hintikka halmaz.

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \wedge (\neg q \vee \neg p) & \\
 & \downarrow & \\
 & p,\ \neg q \vee \neg p & \\
\swarrow & & \searrow \\
p,\ \neg q & & p,\ \neg p \\
\odot & & \times
\end{array}
$$

A teljesség bizonyítása

Adott $A \in Form$ formula és T hozzá tartozó tábla, amelyik nyílt.

- A nyílt ágtól a gyökérig vezető út mentén lévő összes formula U halmaza Hintikka halmaz, azaz U kielégíthető.
- U-nak része a gyökérnél lévő A formula is, azaz A kielégíthető.

A múlt órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége

(Aszalós László tananyagának segítségével)

Born	November 24, 1909 Greifswald, Germany
Died	August 4, 1945 (aged 35) Prague, Czechoslovakia
Cause of death	Starvation
Nationality	German
Alma mater	University of Göttingen
Scientific career	
Fields	Mathematics
Doctoral advisor	Paul Bernays

Gerhard Gentzen

Gerhard Gentzen in Prague, 1945.

A Wikipediából

Szekvent kalkulus – Mi az, hogy szekvent

Szintaxis: Ha Γ és Δ két (esetleg üres) formulahalmaz, akkor a $\Gamma \vdash \Delta$ egy **szekvent**.

Szemantika: Az $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \{B_1, \ldots, B_m\}$ szekvent **érvényes**, ha minden olyan ϱ interpretáció esetén, ahol $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$ van olyan i, hogy $|B_i|_\varrho = 1$.

Vagyis: Ha egy szekvent **nem érvényes – azaz cáfolható** –, akkor van olyan ϱ interpretáció, melyre $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$, míg $|B_1|_\varrho = \ldots = |B_m|_\varrho = 0$.

Az érvényesség még egyszer

A szekvent érvényes, ha **minden baloldali** formula teljesülése szükségszerűen maga után vonja, hogy **valamelyik jobboldali** formula teljesül.

A szekvent érvényes, ha **nincs olyan** eset (interpretáció), hogy **egyik jobboldali formula sem** teljesül, miközben az **összes baloldali** teljesül.

Érvényes szekvent:

$A, B, C \vdash \neg A, B \wedge C$

Nem érvényes szekvent!

$A, B, C \vdash \neg A, \neg B$

(Elhagyjuk a halmazt jelölő „{ }”-ket)

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége

Szekvent kalkulus – Axiómák és levezetési szabályok

- A szekvent kalkulus **axiómái** a következő alakúak (axiómaséma):

  $$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

  ahol A egy atomi formula, Γ és Δ pedig formulahalmazok.
- A szekvent kalkulus **levezetési szabályai**:

konjunkció: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

diszjunkció: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$

implikáció: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$

negáció: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$

(premissza és konklúzió) Vegyük észre: Ezek mind „szintaktikai fogalmak”

A levezetési szabályok megőrzik a szekventek érvényességét

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Azaz: Ha egy ϱ interpretáció cáfolja a levezetési szabály konklúzióját, akkor cáfolja a levezetési szabály valamely premisszáját is.

Vegyük észre: A tétel a szemantikai fogalmak (érvényesség) és a szintaktikai fogalmak (szabályok) kapcsolatáról szól

Igazoljuk!

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Azaz: Ha egy ϱ interpretáció cáfolja a levezetési szabály konklúzióját, akkor cáfolja a levezetési szabály valamely premisszáját is.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

(Nézzük végig a szabályokat)

Még egy tétel

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Tétel. A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

Még egy tétel

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

Tétel. Ha a levez

érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Tétel. A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

Bizonyítás. Ha a ϱ modellje a szekvent első formulahalmazának, akkor az abban szereplő atomi formulák halmazának is modellje. Ezek közül legalább egy a definíció szerint a szekvent második formulahalmazában is szerepel, így a szekvent érvényes.

A mechanikus eljárás (a szabályalkalmazás) és a szemantikai fogalmak közötti kapcsolat

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Tétel. A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

A mechanikus eljárás: Ha axiómákból kiindulva a szabályok alkalmazásával le tudunk vezetni egy szekventet, akkor az érvényes.

Milyen axiómákból induljunk ki? Nem tudjuk, haladjunk tehát „visszafelé”, a szekventtől az axiómák felé.

Például

Próbáljuk ki: http://logitext.mit.edu/main

X->Y, ~Y|- ~X

$$X \supset Y,\ \neg Y \vdash \neg X$$

Jelölések:

-> (implikáció),
~ (negáció),
|- (levezethetőség)
/\ (konjunkció)
\/ (diszjunkció

Mi is történt

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \rightarrow Y \vdash Y}\,(\rightarrow\mathrm{l})}{X, X \rightarrow Y, \neg Y \vdash}\,(\neg\mathrm{l})}{X \rightarrow Y, \neg Y \vdash \neg X}\,(\neg\mathrm{r})$$

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- A **levezetési fa** egy olyan fa, melynek **csúcsaiban szekventek** állnak, és a **levezetési szabályok szerint** épül fel.

- Speciális esetben: Egy $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent egyben egy **levezetési fa** is, melynek ez a szekvent a **gyökere**, sőt **egyetlen levele** is.

Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- Legyen F egy **levezetési fa**, melynek egyik **levele** a Γ⊢Δ szekvent. Tegyük fel, hogy van egy olyan **levezetési szabály**, melynek a **konklúziója** „illeszthető” a Γ⊢Δ szekventre, míg a **premisszái** a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szekventek.

- **Bővítsük az F levezetési fát** a Γ⊢Δ szekvent felett a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szekventekkel (megfelelő „illesztés” és „helyettesítés” után), így kapjuk a F’ levezetési fát, melynek a **gyökere** az F gyökere, **leveleit** pedig az F levelei (mínusz Γ⊢Δ) és a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szekventek alkotják

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- Legyen F eg … a $\Gamma \vdash \Delta$
  szekvent. T … si szabály,
  melynek a … $1 \vdash \Delta 1$, ...,
  $\Gamma n \vdash \Delta n$ szek …

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

- Bővítsük az … a $\Gamma 1 \vdash \Delta 1$, ...,
  $\Gamma n \vdash \Delta n$ szek … t, melynek a
  gyökere az … mínusz $\Gamma \vdash \Delta$)
  és a $\Gamma 1 \vdash \Delta 1$, ..., $\Gamma n \vdash \Delta n$ szekventek alkotják

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

A szekvent kalkulus mechanikus (szintaktikai szabályokon alapuló) eljárás bizonyítások konstruálására

- Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Például:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \to Y \vdash Y}\,(\to l)}{X, X \to Y, \neg Y \vdash}\,(\neg l)}{X \to Y, \neg Y \vdash \neg X}\,(\neg r)$$

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \lor B}\,(\lor r)}{A \vdash A \land (A \lor B)}\,(\land r)$$

Vegyük észre, hogy itt a „bizonyítás” szintaktikai fogalom:
A gyökér egy szekvent, a fa a szintaktikai szabályoknak megfelelően épül fel, a levelek axiómák.

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

Vágjunk egy rendet még egyszer…

Szintaktikai fogalmak:

- szekvent
- axióma
- levezetési szabályok, levezetési fa, levezetési fa bővítése
- **bizonyítás** (gyökérszekvent, minden levél axióma)

Szemantikai fogalmak:

- szekvent érvényessége
- az axiómák érvényessége
- a levezetési szabályok alapján átalakított szekventek érvényességének megmaradása
- **teljesség, helyesség** (ha egy szekvent érvényes, akkor van bizonyítása illetve ha egy fa bizonyítás, akkor a gyökérszekventje érvényes

A „⊢” egy szintaktikai reláció („szintaktikai következményreláció”, „bizonyíthatóság”), míg „|=” egy szemantikai reláció („szemantikai következményreláció”)

A szekvent kalkulus mint bizonyítási eljárás **helyessége** és **teljessége**

Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Tétel.
Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Tétel.
Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Melyik melyik?

A szekvent kalkulus mint bizonyítási eljárás **helyessége** és **teljessége**

Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Tétel. ← Helyesség

Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Tétel. ← Teljesség

Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

A szekvent kalkulus helyes

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van egy bizonyítás cáfolható gyökérszekventtel.

- Strukturális indukcióval belátható, hogy egy cáfolható gyökerű levezetési fának van cáfolható levele.
- Levezetési fa cáfolható levéllel nem bizonyítás.
- Ellentmondáshoz jutottunk, így a gyökérnek érvényesnek kell lenni.

„Strukturális indukcióval belátható, hogy egy cáfolható gyökerű levezetési fának van cáfolható levele.” **Miért is?**

- Ha egy csúcsnál lévő szekvent cáfolható (nem érvényes), akkor a „felette” lévő csúcsok legalább egyike is cáfolható
- A gyökér cáfolható

Azaz: lesz olyan levél, ami cáfolható.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

A szekvent kalkulus teljes

Azaz: Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent, pontosan akkor érvényes, ha axióma.

2. Lemma. Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

3. Lemma. Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

Igazoljuk a lemmákat!

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent **pontosan akkor** érvényes, ha axióma, azaz:

- **ha axióma, akkor érvényes,** (könnyű)
- ha érvényes, akkor axióma.

Igazoljuk a lemmákat!

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent **pontosan akkor** érvényes, ha axióma, azaz:

- ha axióma, akkor érvényes,
- **ha érvényes, akkor axióma.**

Igazoljuk a lemmákat!

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent **pontosan akkor** érvényes, ha axióma, azaz:

- ha axióma, akkor érvényes,
- ha érvényes, akkor axióma, azaz **ha nem axióma, akkor nem érvényes.**

Valóban:

$A_1,\ldots,A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, ahol $A_i \neq B_j$ bármely i, j esetén.

Legyen ϱ az az interpretáció, ahol $|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$.

Igazoljuk a lemmákat!

2. Lemma. Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

Valóban: A szabályalkalmazás során „egyszerűsödnek” a formulák.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

Igazoljuk a lemmákat!

3. Lemma. Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

Valóban: Ha a konklúzió szekventje érvényes, akkor a premisszá(k) szekventje(i) is érvényes(ek).

- Azaz: ha a premisszák nem érvényesek, akkor a konklúzió sem érvényes.
- Azaz: ha van olyan interpretáció, amiben legalább az egyik premissza jobb oldalán minden formula hamis, és a bal oldalán minden formula igaz, akkor ebben az interpretációban a konklúzió baloldalán lévő formulák is igazak lesznek, míg a jobboldalon lévők hamisak.

Ha van olyan interpretáció, amiben legalább az egyik premissza **jobb oldalán minden formula hamis**, és a **bal oldalán minden formula igaz**, akkor ebben az interpretációban a konklúzió baloldalán lévő formulák is igazak lesznek, míg a jobboldalon lévők hamisak. **(Szemléletesebben: A szabályalkalmazás „megőrzi" a cáfolhatóságot.)**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

A szekvent kalkulus teljességéről

Azaz: Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent, pontosan akkor érvényes, ha axióma.

2. Lemma. Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

3. Lemma. Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

A szekvent kalkulus teljes

Azaz: Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Bizonyítás: Legyen S egy érvényes szekvent!

- Terjesszük ki ebből a gyökérből álló levezetési fát olyan fává, melynek a levelei csak atomi formulákat tartalmaznak. (A **2. lemma** szerint ez lehetséges.)
- Mivel a gyökér érvényes, a fa minden levele érvényes (a **3. lemma** szerint).
- Ha egy szekvent érvényes és csak atomi formulákat tartalmaz, akkor (az **1. lemma** szerint) axióma, így a levezetési fa minden levele axióma, tehát ez a levezetési fa bizonyítás.

Mit is bizonyítottunk: A szekvent kalkulus **helyessége** és **teljessége**

Tétel.
Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Tétel.
Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Azaz: Ha egy szekvent érvényes, akkor be lehet bizonyítani, továbbá ha egy szekventnek van bizonyítása, akkor az érvényes.
Azaz: A szekvent pontosan akkor érvényes, ha bizonyítható.

Ismét: A „⊢” egy szintaktikai reláció („bizonyíthatóság”), míg „|=” egy szemantikai reláció („érvényesség”)

Megjegyzés: Cáfoló modell létezése

Tétel. Ha az S szekvent nem bizonyítható, akkor létezik egy interpretáció, mely cáfolja.

Bizonyítás.

- Készítsük el S egy olyan levezetési fáját ami a leveleken csak atomi formulákat tartalmaz.
- Mivel S nem bizonyítható, létezik egy nem axióma levélszekvent: $A_1,\ldots,A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, ahol $A_i \neq B_j$ bármely i, j esetén.
- Definiáljuk a ϱ interpretációt úgy, hogy legyen $|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$.
- ϱ cáfolja a levél szekventjét, s így a gyökérszekventet is.

$|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$. „ϱ cáfolja a levél szekventjét, s így a gyökérszekventet is” **Miért is?**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

Például

$$
\dfrac{
\dfrac{A, A, B \vdash C, B}{A, B \vdash C, \neg A, B}\,(\neg r)
\qquad
\dfrac{\boxed{A, A, B \vdash C, C}}{A, B \vdash C, \neg A, C}\,(\neg r)
}{A, B \vdash C, \neg A, B \wedge C}\,(\wedge r)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{A, A, B, B \vdash B}{A, B, B \vdash \neg A, B}\,(\neg r)
\qquad
\dfrac{\boxed{A, A, B, B \vdash C}}{A, B, B \vdash \neg A, C}\,(\neg r)
}{A, B, B \vdash \neg A, B \wedge C}\,(\wedge r)
$$

$$
\dfrac{A, B \vdash C, \neg A, B \wedge C \qquad A, B, B \vdash \neg A, B \wedge C}{A, B, C \rightarrow B \vdash \neg A, B \wedge C}\,(\rightarrow l)
$$

A leveleket cáfoló interpretáció:

$|A|_\varrho=1$

$|B|_\varrho=1$

$|C|_\varrho=0$

cáfolja a gyökeret is

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége