Az informatika logikai alapjai
4. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
  - Formulahalmazok és az „és” művelet
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazokról

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Forrás: Mihálydeák Tamás, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A múlt órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
  - Formulahalmazok és az „és” művelet
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Egy korábbi óráról:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje B-nek is.

A következményreláció tulajdonságai - 1

Adott $L^{(0)} = \langle LC, \langle Con, Form \rangle \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

A következményreláció tulajdonságai - 2

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ \ egy **nulladrendű nyelv**, $A \in Form$.
Ha A **érvényes formula** ($\vDash A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

A következményreláció tulajdonságai - 3

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ \ egy **nulladrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..

Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

A múlt órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
  - Formulahalmazok és az „és” művelet
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

- **Különböző nyelvi „szintek**”:
  - Az **implikáció** logikai operátor, logikai formulákban jelenik meg, a **logikai formulák nyelvének** része
  - A **következményreláció** logikai formulák (formulahalmazok) közötti viszonyt ír le, nem a logikai formulák nyelvének, ha nem a **logikai formulákról beszélő „metanyelvnek”** a része

(papír 39)

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

Tétel (Dedukció tétel)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$, akkor $\Gamma \vDash (A \supset B)$.

Speciális eset: Ha $A \vDash B$, akkor $\vDash (A \supset B)$.

Tétel (Dedukció tétel megfordítása)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Speciális eset: Ha $\vDash (A \supset B)$, akkor $A \vDash B$.

Mi az, amikor a következmény jel egyedül van?

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Az (materiális) ekvivalencia és a logikai ekvivalencia kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \equiv B)$

(papír 46)

Formulahalmazok és az „és” művelet

Kielégíthetőség, kielégíthetetlenség

Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in$ Form!

- Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthető, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ formula kielégíthető.
- Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models A$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models A$.
- Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg A$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset A$ formula érvényes.

A múlt órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
  - Formulahalmazok és az „és” művelet
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
  - Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Aszalós László fóliái, kiemelések tőlem)

Mit is jelent az odavissza-nyíl? (Szintek.) Hogyan lehet ilyen állításokat igazolni?

Logikailag ekvivalens formulák

- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $\boxed{A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A}$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $\boxed{(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)}$

Ellenőrizzük igazságtáblával (esetleg a rossz tippet is – vagy a jobb oldalon –)

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $\boxed{A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)}$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

(Nagyjából itt hagytuk abba a múlt héten.)

Logikai következmények

- $A \supset \neg A \vDash \neg A$
- $\neg A \supset A \vDash A$
- $A \wedge B \vDash A$ és $A \wedge B \vDash B$
- $A \vDash A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \vDash B$
- $\{A \supset B, A\} \vDash B$ modus ponens: leválasztási szabály
- $\{A \supset B, \neg B\} \vDash \neg A$ modus tollens: indirekt cáfolás sémája
- $\{A \supset B, B \supset C\} \vDash A \supset C$ láncszabály
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \vDash \neg A$ redukcio ad abszurdum
- $\neg A \vDash A \supset B$
- $B \vDash A \supset B$

Gondoljuk ide a kontrapozíciót is. Miért nincs eleve itt?

Logikai következmények

- $A \supset \neg A \models \neg A$
- $\neg A \supset A \models A$
- $A \wedge B \models A$ és $A \wedge B \models B$
- $A \models A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- $\{A \supset B, A\} \models B$ modus ponens: leválasztási szabály
- $\{A \supset B, \neg B\} \models \neg A$ modus tollens: indirekt cáfolás sémája
- $\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$ láncszabály
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \models \neg A$ redukcio ad abszurdum
- $\neg A \models A \supset B$
- $B \models A \supset B$

Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$

Gondoljuk ide a kontrapozíciót is. Miért nincs eleve itt?

Érvényes formulák

- $\models \neg(A \wedge \neg A)$ az ellentmondás törvénye
- $\models A \vee \neg A$ a kizárt harmadik törvénye
- $\models A \supset A$
- $\models A \supset (\neg A \supset B)$
- $\models A \equiv A$
- $\models \neg(A \equiv \neg A)$

A múlt órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- A logikai következményreláció tulajdonságai
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
  - Formulahalmazok és az „és” művelet
- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai

Kérdés:

- A 7. héten szeretnék ZH-t íratni, ami az október 19-23-i hét (a szakmai hét előtt)
- Nagy teremben személyes jelenlét mellett szeretném a ZH-t íratni.

→**Mikor?**

- Lehetőségek:
  1. Az előadás időpontjában
  2. Más, mindenkinek alkalmas időpontban

A mai órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Kérdés

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Mit tudunk az egymással kifejezhetőség témájában még elmondani?

Például: A fentiek szerint $\supset$ és $\vee$ kifejezhető $\neg$-nel és $\wedge$-sel.

Milyen logikai műveletek vannak

(egy argumentum?)

x	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

Mi másoda ezek között?

Milyen logikai műveletek vannak

(két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Milyen logikai műveletek vannak

(két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

o_2 : diszjunkció ($\vee$)

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Milyen logikai műveletek vannak

(két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*

$\circ_2$: diszjunkció ($\vee$)

$\circ_5$: implikáció ($\supset$)

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Milyen logikai műveletek vannak

(két argumentummal ?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

o_2 : diszjunkció ($\vee$)

o_5 : implikáció ($\supset$)

o_7 : ekvivalencia ($\equiv$)

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Milyen logikai műveletek vannak (két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_2$: diszjunkció ($\vee$)

$\circ_5$: implikáció ($\supset$)

$\circ_7$: ekvivalencia ($\equiv$)

$\circ_8$: konjunkció ($\wedge$)

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Milyen logikai műveletek vannak
(két argumentummal?)

x_1	x_2	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	o_9	o_{10}	o_{11}	o_{12}	o_{13}	o_{14}	o_{15}	o_{16}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

o_2 : diszjunkció ($\vee$)
o_5 : implikáció ($\supset$)
o_7 : ekvivalencia ($\equiv$)

o_8 : konjunkció ($\wedge$)
o_{10} : kizáró vagy

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Két változós művelet

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_9$: "nand" (a konjunkció tagadása)

$\circ_{15}$: "nor" (a diszjunkció tagadása)

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Kifejezhetőség

Tétel

$\vee, \wedge, \supset, \equiv$ bármelyike kifejezhető ezek közül bármely kettővel:

- $\neg, \vee$
- $\neg, \wedge$
- $\neg, \supset$

Bizonyítás

- $\neg, \vee$: $\wedge$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel
- $\neg, \wedge$: $\vee$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel
- $\neg, \supset$: $\wedge$ kifejezhető, $\vee$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel

A többi lehetséges művelet is kifejezhető mindegyik párossal.

Ki lehet fejezni ezeket egyetlen művelettel ?

Igen: A nand vagy nor önmagában is elegendő.

Például:

Fejezzük ki $\wedge$-t nand segítségével:

- $\boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \text{ nand } B)$

$\Leftrightarrow \neg((A \text{ nand } B) \wedge (A \text{ nand } B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{(A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)}$

- $\boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ nand } A}$

Melyik lépés miért jogos ?

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A mai órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Formulák felbontása literálokra

$L^{(0)} = (LC, Con, Form)$

nemlogikai konstansok vagy atomi formulák

pozitív literál

- Literál: atomi formula
  atomi formula negáltja

negatív literál

- Komplemens literálpár: $p, \neg p$, ahol $p \in Con$

Formulák felbontása literálokra

$L^{(0)} = (LC, Con, Form)$

nemlogikai konstansok vagy atomi formulák

pozitív literál

- **Literál**: atomi formula
  atomi formula negáltja

negatív literál

- **Komplemens literálpár**: $p, \neg p$, ahol $p \in Con$

Például: $\{\neg p, q, r, \neg r\}$

pozitív literál

negatív literál

komplemens literálpár

<u>Állítás</u>: Literálok egy halmaza kielégíthető, ha nem tartalmaz komplemens párt.

<u>Bizonyítás</u>: ha a literálok halmaza L, $\mathcal{I}$ interpretáció megfelelő:

$$\mathcal{I}(p) = 1 \quad \text{ha } p \in L$$

$$\mathcal{I}(p) = 0 \quad \text{ha } \neg p \in L$$

(miért is megfelelő?)

Miért érdekes ez az egész ?
(Formulák felbontása literálokra)

Kielégíthető-e :

$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$$\begin{tikzcd}
 & p \wedge (\neg q \vee \neg p) \arrow[d] & \\
 & p, \neg q \vee \neg p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg q & & p, \neg p
\end{tikzcd}$$

nyitott zárt

Kielégíthető, ha $\{p, \neg q\}$ vagy $\{p, \neg p\}$ kielégíthető.

Másik példa

Kielégíthető?

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\downarrow$$

$$p \vee q, \neg p \wedge \neg q$$

$$\downarrow$$

$$p \vee q, \neg p, \neg q$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$p, \neg p, \neg q \qquad\qquad q, \neg p, \neg q$$

zárt — zárt

Kielégíthető, ha $\{p, \neg p, \neg q\}$ vagy $\{q, \neg p, \neg q\}$ kielégíthető.

Szemantikus táblázatok

Az előző példákban szemantikus táblázatokat készítettünk.
Nem feltétlen egyértelmű, hogy egy formulához milyen táblázat tartozik.

Például:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \arrow[d] & \\
 & p \vee q, \neg p \wedge \neg q \arrow[d] & \\
 & p \vee q, \neg p, \neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 \underset{\text{zárt}}{p, \neg p, \neg q} & & \underset{\text{zárt}}{q, \neg p, \neg q}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \arrow[d] & \\
 & p \vee q, \neg p \wedge \neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 p, \neg p \wedge \neg q \arrow[d] & & q, \neg p \wedge \neg q \arrow[d] \\
 \underset{\text{zárt}}{p, \neg p, \neg q} & & \underset{\text{zárt}}{q, \neg p, \neg q}
\end{tikzcd}
$$

Milyen szabályok szerint konstruáltuk a táblákat ?

α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$

β	β_1	β_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formulák esetén bővítettük a formulahalmazt
- $\boxed{\beta}$ típusú formulák esetén elágaztunk, és alternatívákkal bővítettük a formulahalmazt
- A leveleket megjelöltük ~~[illegible]~~ (nyitott / zárt)

A tábla konstrukciója precízebben

(algoritmus)

<u>Bemenet</u>: Φ formula, <u>Kimenet</u>: T szemantikus tábla (minden levele ~~[illegible]~~ megjelölve)

- Kezdetben T-nek egy gyökér csúcsa van, címkéje $\{\Phi\}$
- Válasszunk egy l még nem jelölt levelet (Hogyan?)
  $U(l)$ a címke formulahalmaz
  - Ha $U(l)$ literálokból áll csak, jelöljük meg.
  - Ha $A \in U(l)$ nem literál:
    - Ha A α típusú formula, A_1, A_2 részekkel: $\longrightarrow$

      $\bullet\ l,\ U(l)$
      $|$
      $\bullet\ l',\ U(l)-\{A\}\cup\{A_1, A_2\}$

    - Ha A β típusú formula, B_1, B_2 részekkel: $\longrightarrow$

      $\bullet\ l,\ U(l)$

      $U(l)-\{B\}\cup\{B_1\}$ $\quad$ $U(l)-\{B\}\cup\{B_2\}$

Vegyük észre ...

(1) • A formula kielégíthetetlen, ha a tábla minden levele zárt ($\Leftrightarrow$ A „tábla zárt")

(2) • A tábla konstrukciója véges sok számú lépés után véget ér. ← Miért?

(3) • Egy formula ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ alapján több különböző tábla is konstruálható. Általában kisebb táblát kapunk, ha először a α típusú formulákat bontjuk fel.

A mai órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  – A módszer helyessége, teljessége

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) összefüggést:

$\boxed{\text{Helyesség és teljesség}}$

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

- A módszer $\boxed{\text{helyes}}$: Ha a tábla alapján a formula kielégíthetetlen (minden levél zárt) akkor a formula kielégíthetetlen.
- A módszer $\boxed{\text{teljes}}$: Ha egy formula kielégíthetetlen, akkor a tábla is ezt az eredményt adja, azaz minden levele zárt.

(c

(1) • A formula kielégíthetetlen, ha a tábla minden levele zárt (⇔ A „tábla zárt")

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) összefüggést:

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

- A módszer **helyes**: Ha a tábla alapján a formula kielégíthetetlen (minden levél zárt) akkor a formula kielégíthetetlen.
- A módszer **teljes**: Ha egy formula kielégíthetetlen, akkor a tábla is ezt az eredményt adja, azaz minden levele zárt.

(c

A szemantikus táblák módszere a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére helyes és teljes, azaz:

<u>Tétel</u>: Legyen $A \in \text{Form}$ és $\mathcal{T}$ egy hozzá tartozó tábla. Akkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt. <u>Azaz</u>:

① <u>Ha</u> $\boxed{A \in \text{Form kielégíthetetlen}}$ <u>akkor</u> $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$

② <u>Ha</u> $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ <u>akkor</u> $\boxed{A \in \text{Form kielégíthetetlen}}$

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?) ''

Következmények

- $A \in$ Form akkor és csak akkor kielégíthető, ha T nyitott (nem zárt).

- $A \in$ Form érvényes (logikai törvény) akkor és csak akkor, ha a $T_{\neg A}$-hoz tartozó tábla zárt.

- A szemantikus tábla konstrukciójának segítségével eldönthető, hogy egy formula érvényes-e.

„eldöntési eljárás”

Helyesség és teljesség még egyszer

Ha egy eldöntési eljárás helyes az még kevés.

Bikom példa: Eljárás annak eldöntésére, hogy egy logikai formula érvényes-e.
„Helyesség" ebben az esetben: Ha az eljárás eredménye szerint logikai törvény, akkor valóban az.

Az algoritmus: bemenet: egy formula
kimenet (válasz): nem logikai törvény.

(Miért „helyes" ez?) Attila 13/13

A szemantikus táblázat módszerének helyességét és teljességét kimondó tétel ismét:

Egy formula akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha a hozzá tartozó szemantikus táblázat mindegyike zárt.

Bizonyítsuk ezt be.

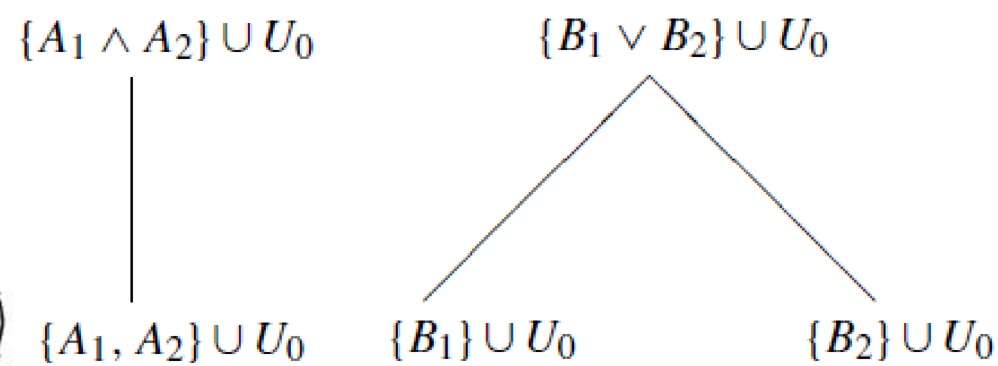
1. Helyesség: Ha a tábla zárt, akkor a formula kielégíthetetlen.

- Adott egy zárt tábla, meg kell mutatni, hogy a gyökerénél lévő formula kielégíthetetlen.

- Induljunk el a levelektől a gyökér felé. A leveleken lévő formula halmazok (literál halmazok) kielégíthetetlenek (ezért zárt a tábla).

→ A levelek szülőinél lévő formula halmazok is kielégíthetetlenek.

- És így tovább a gyökérig



Bizonyítsuk azt le

2. Teljesség: Ha a formula kielégíthetetlen, akkor minden hozzá tartozó tábla zárt.

„Minden" tábláról beszélni nehéz, ezért nézzük a kontrapozitív formát:

- Ha nem igaz, hogy minden hozzá tartozó tábla zárt, akkor a formula nem kielégíthetetlen.

kielégíthető

van a formulához tartozó táblák között nyitott.

Példák nyitott táblákra

$$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$
$$\downarrow$$
$$p,\ \neg q \vee \neg p$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$p, \neg q \qquad\qquad p, \neg p$$
$$\odot \qquad\qquad\qquad \times$$

nyitott — zárt

$$p \vee (q \wedge \neg q)$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$p \qquad\qquad q \wedge \neg q$$
$$\odot \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

nyitott

$$q, \neg q$$
$$\times$$

zárt

$U \subseteq Form$ formulahalmaz **Hintikka halmaz** akkor és csak akkor, ha:

1. Ha $A \in U$ és p atomi formulája A-nak, akkor $\{p, \neg p\} \not\subseteq U$.
2. Ha $A \in U$ α típusú formula, akkor $A_1, A_2 \in U$

α típusú részformulái

3. Ha $B \in U$ β típusú formula, akkor $B_1 \in U$ vagy $B_2 \in U$.

β típusú részformulái

Például:

$$\{p, p \vee (q \wedge \neg q)\}$$

Állítás: Ha $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Form}$ formulahalmaz Hintikka halmaz, akkor $\mathcal{U}$ kielégíthető.

Bizonyítás: $\mathcal{g}$ legyen a kö-vetkező interpretáció:

- ha p atomi formula, $p \in \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{g}(p)=1$
- ha p atomi formula, $\neg p \in \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{g}(p)=0$
- ha p atomi formula, $p \notin \mathcal{U}$ és $\neg p \notin \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{g}(p)=1$

ekkor minden $A \in \mathcal{U}$ esetén $|A|_{\mathcal{g}}=1$. Miért?

$\longrightarrow$ Strukturális indukció

<u>Mi is az a strukturális indukció</u>

1. S az U-ban lévő összes literálnak modellje
2. Nézzük azokat az α vagy β típusú formulákat, melyeknek a részformulái literálok. S ezeknek is modellje.
3. Nézzük azokat az α vagy β típusú formulákat, melyeknek a részformuláival már foglalkoztunk. S ezeknek is modellje.
4. És így tovább... Mivel az α típusú formulák mindkét részformulája, a β típusú formulák legalább egyik ~~be~~ részformulája benne van U-ban, ezért előbb utóbb minden formulával foglalkozunk.

Mi is az a strukturális indukció

1. S az U-ban lévő összes literálnak modellje

2. Nézzü … formulákat, melye … ak.
S ere …

S legyen a következő interpretáció:
- ha p atomi formula, $p \in U$, akkor $S(p)=1$
- ha p atomi formula, $\neg p \in U$, akkor $S(p)=0$
- ha p atomi formula, $p \notin U$ és $\neg p \notin U$, akkor $S(p)=1$

3. Nézzü … formulákat, melyek … alkotunk.
S ezeknek is modellje.

4. És így tovább… Mivel az α típusú formulák mindkét részformulája, a β típusú formulák legalább egyik ~~be~~ részformulája benne van U-ban, ezért előbb utóbb minden formulával foglalkozunk.

Mi is az a strukturális indukció

1. S az U-ban lévő összes literálnak modellje
2. Nézzük azokat az α vagy β típusú formulákat, melyeknek a részformulái literálok. S ezeknek is modellje. (A_1, A_2 és B_1, B_2 literálok)
3. Nézzük azokat az α vagy β típusú formulákat, melyeknek a részformuláival már foglalkoztunk. S ezeknek is modellje.
4. És így tovább... Mivel az α típusú formulák mindkét részformulája, a β típusú formulák legalább egyik ~~be~~ részformulája benne van U-ban, ezért előbb utóbb minden formulával foglalkozunk.

Állítás: Ha l egy nyílt tábla nyílt levele és U az l-től a gyökérig vezető úton lévő csúcsoknál lévő formulák halmaza, akkor U Hintikka halmaz.

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \wedge (\neg q \vee \neg p) & \\
 & \downarrow & \\
 & p,\ \neg q \vee \neg p & \\
\swarrow & & \searrow \\
p,\ \neg q & & p,\ \neg p \\
\odot & & \times
\end{array}
$$

1. Ha $A \in U$ és p atomi formulája A-nak, akkor $\{p, \neg p\} \not\subseteq U$.
2. Ha $A \in U$ α típusú formula, akkor $A_1, A_2 \in U$
3. Ha $B \in U$ β típusú formula, akkor $B_1 \in U$ vagy $B_2 \in U$.

Bizonyítás.

1. Ha egy az úton szereplő csúcsnál megjelenik egy literál, ez a literál szerepel a levélnél is.
$\Longrightarrow$ U összes literálja szerepel a levélnél.
Mivel a levél nyíltnak jelölt, semmilyen p-re nem szerepel p és $\neg p$ U-ban.
2. Ha egy csúcsnál szerepel egy A α típusú formula, akkor A_1 és A_2 szerepel az utód csúcsnál, ezért $A_1, A_2 \in U$
3. Ha egy csúcsnál szerepel egy B β típusú formula, akkor vagy B_1 vagy B_2 szerepel az utód csúcsnál, ezért B_1 vagy $B_2 \in U$.

A teljesség bizonyítása

Adott $A \in Form$ formula és T hozzá tartozó tábla, amelyik nyílt.

- A nyílt csúcstól a gyökérig vezető út mentén lévő összes formula U halmaza Hintikka halmaz, ezért U kielégíthető.
- U-nak része a gyökérnél lévő A formula is, ezért A kielégíthető.

A tétel még egyszer

<u>Tétel</u>: Legyen $A \in Form$ és T egy hozzá tartozó tábla. Akkor:

A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha T zárt. <u>Azaz</u>:

① <u>Ha</u> $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ <u>akkor</u> $\boxed{T \text{ zárt}}$

② <u>Ha</u> $\boxed{T \text{ zárt}}$ <u>akkor</u> $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?) !!

A tétel még egyszer

Tétel: Legyen $A \in Form$ és T egy hozzá tartozó tábla. Ekkor:

A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha T zárt. Azaz:

① Ha a tábla nyílt (nem zárt) akkor a formula kielégíthető (nem kielégíthetetlen)

② Ha T zárt akkor $A \in Form$ kielégíthetetlen

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?)

A mai órán

- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége