⟵ Vissza a főoldalra

1. TÉTEL

1.1. DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZLÁS FOGALMA. NEVEZETES ELOSZLÁSOK: BINOMIÁLIS, POISSON, EGYENLETES, EXPONENCIÁLIS, NORMÁLIS.

Eloszlás

Definíció: egy $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$ mintatér esetén a $p_1, ..., p_N$ valószínűségeket eloszlásnak nevezünk. Vagyis egy mintatér valószínűségeinek összessége = eloszlás.

Például: egy zsákban van 10 golyó, benne van 2 piros, 5 kék, és 3 fehér golyó. Ezeknek az eloszlása így fog kinézni:

$$p_{piros} = 0.2 \quad p_{kék} = 0.5 \quad p_{fehér} = 0.3$$

Jellemzői:

- p_i számok nem negatívak
- a valószínűségek összege 1

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

Valószínűségi változó: adott Ω eseménytér, $\mathcal{F}$ eseményhalmaz. A valószínűségi változó egy olyan függvény, amely az eseményhalmazból leképzést készít a valós számok egy megszámlálható halmazává. $X : \mathcal{F} \rightarrow D$

Diszkrét valószínűségi eloszlás

Definíció: olyan valószínűségi eloszlás, melyben a valószínűségi változók csak véges számú értékeket vehetnek fel, azaz diszkrétek.

Diszkrét valószínűségi változó: olyan valószínűségi változó, melynek értékkészlete megszámlálható

Például kockadobás:

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Nevezetes diszkrét eloszlások:

1. **Hipergeometrikus eloszlás**:
   - $X \sim Hyper(N, M, n)$
   - **Jelentése:** Összesen N golyó van a dobozban, benne M piros golyó, $N - M$ fehér golyó. Ki szeretnénk húzni n darabot belőlük **visszatevés nélkül**.
   - **Képlete:**

     $$h_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

     ahol k a kihúzni kívánt piros golyók száma.
   - **Várható értéke:** $E = \frac{Mn}{N}$
2. **Binomiális eloszlás**:
   - $X \sim Binom(n, p)$
   - **Jelentése:** Összesen N golyó van a dobozban, benne M piros golyó, $N - M$ fehér golyó. Ki szeretnénk húzni n darabot belőlük **vissza-tevéssel**. $p = \frac{M}{N}$, vagyis a piros golyók relatív gyakorisága.
   - **Képlete:**

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- **Várható értéke:** $E=n\cdot p$

3. **Poisson-eloszlás**:
   - $X\sim Poisson(\lambda)$
   - **Jelentése:** Akkor használjuk, ha egy adott időintervallumon bekövetkező események számát szeretnénk jellemezni.
   - **Például**: egy telefonközpontba átlagosan $\lambda=5$ hívás érkezik percenként. Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott percben pontosan 3 hívás érkezik?
   - **Képlete**:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

   - **Várható értéke:** $E=\lambda$

4. **Negatív binomiális eloszlás**:
   - $X\sim NB(r,p)$
   - **Jelentése**: Addig figyeljük a sorozatot, amíg r siker nem következik be. Egy siker valószínűsége p.
   - **Például**: Addig dobunk dobókockával, amíg 2 darab 6-ost nem dobunk. Itt $p=1/6, r=2$.
     - **Részesete**: Ha $r=1$, akkor **geometrikus eloszlás**ról beszélünk
     - **Képlete**: $P(X=1+k)=p(1-p)^k$
   - **Várható értéke:** $E=\frac{r}{p}$

Várható érték: egy valószínűségi változó súlyozott átlaga.

Képlete: $\sum_{k=1}^{\infty}p_k x_k$, ahol p_k a valószínűség, x_k az érték

Például: Kockadobások várható értéke: $\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=3.5$

Második momentum: a valószínűségi változó négyzetének várható értéke, szórásnégyzet kiszámításához lesz hasznos.

$$EX^2=\sum_{k=1}^{\infty}p_k x_k^2$$

Jellemzői:

- Lineáris:
  - $E(X+Y)=EX+EY$
  - $E(cX)=cE(X)$
- Ha X és Y Független, akkor $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

Szórásnégyzet (variancia): a szórásnégyzet, más néven variancia megmutatja, hogy egy valószínűségi változó milyen mértékben szóródik a várható érték körül.

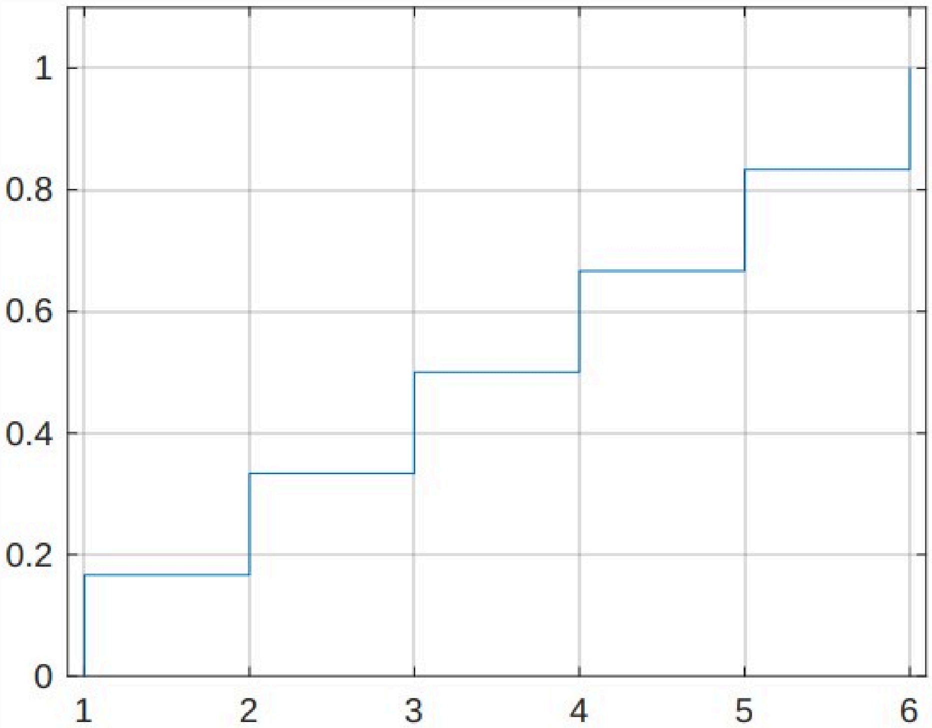
$$D^2X=\mathrm{Var}(X)=EX^2-E^2X$$

Tulajdonságai:

- $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var} X$

Eloszlásfüggvény: megadja, hogy a valószínűségi változó egy adott értékig bezárólag mekkora valószínűséggel vesz fel értéket. Diszkrét eloszlásfüggvénynél ez egy lépcsős függvény.

$$F_X(x) = P(X < x)$$



Diszkrét eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- A függvény monoton növekvő.
- A függvény bal-folytonos.
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1, \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Például:

Egy érme feldobásánál az eloszlásfüggvény:

$$F_x(x) = 0 \text{ a } x < 0 \text{ tartományban}$$

$$F_x(x) = \frac{1}{2} \text{ a } 0 \leq x < 1 \text{ tartományban}$$

$$F_x(x) = 1 \text{ a } x \geq 0 \text{ tartományban}$$

Folytonos valószínűségi eloszlás

Definíció: olyan valószínűségi eloszlás, melyben a valószínűségi változók végtelen számú értéket vehetnek fel, azaz megszámlálhatatlanok.

Folytonos valószínűségi változó: olyan valószínűségi változó, melynek értékkészlete megszámlálhatatlan

Például buszra várás:

Tegyük fel, hogy a busz pontosan 5 percenként jön (és nem késik 😄), mi véletlen időpontban érünk a megállóhoz.
Ha X a várakozási idő (percben), akkor:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{5}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{5}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{5}$$

$$P(3 \leq X \leq 4) = \frac{1}{5}$$

$$P(4 \leq X \leq 5) = \frac{1}{5}$$

Abszolút folytonos eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- $F(b) - F(a)$: Az érték [a, b] intervallumba esésének valószínűsége.
  Például: a normális eloszlást felhasználva:
  $$P(-1 \leq X \leq 1) = F_x(1) - F_x(-1)$$
- **Sűrűségfüggvény**
  Definíció: Deriváltja az eloszlásfüggvénynek:
  Legyen f a sűrűségfüggvény, F az eloszlásfüggvény
  $$f(x) = F'(x)$$
  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$
  Tulajdonságai:
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
  - $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- **Várható érték**

Itt nem alkalmazható a diszkrét várható érték képletet, mert megszámláhatatlan sok valószínűségi változó van.

Képlete:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Tulajdonságai:

- Ha $X \geq 0$, akkor $EX \geq 0$ (ha egy valószínűségi változó X nem negatív, akkor a várható értéke is nem negatív lesz.)
- Ha $X \geq Y$, akkor $EX \geq EY$ (ha X minden egyes kimenetele nagyobb vagy egyenlő, mint Y megfelelő kimenetele, akkor az X várható értéke is nagyobb vagy egyenlő lesz, mint Y várható értéke.)
- Ha $X \geq 0$ és $EX = 0$, akkor $P(X = 0) = 1$ (ha egy nem negatív valószínűségi változó várható értéke 0, akkor az esemény, hogy $X = 0$, teljes valószínűséggel megtörténik)

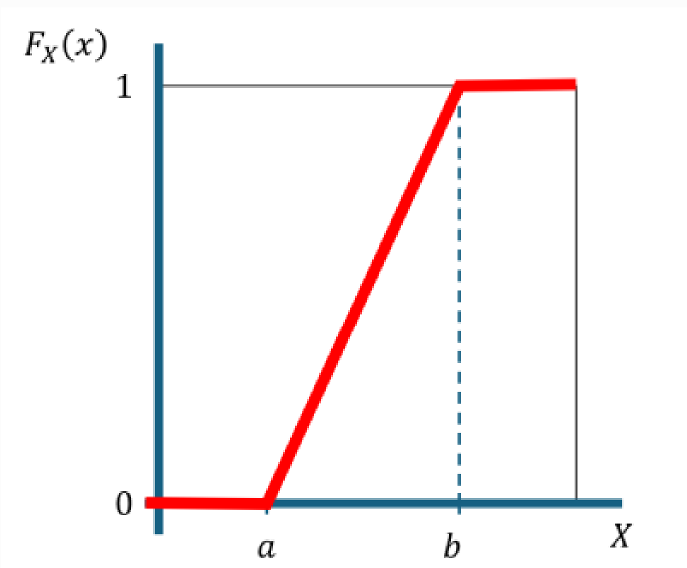
- **Nagy számok törvénye**

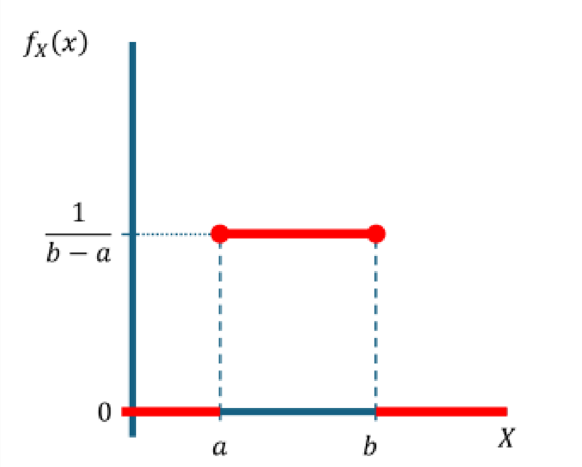
  Definíció: Egy minta átlaga nagy mintaszám esetén közelít a várható értékhez.

  Például: Tegyük fel, hogy egy érmét dobunk. Ha csak 5 alkalommal dobsz érmét, előfordulhat, hogy 4-szer fej és 1-szer írás lesz. Ha 1,000, 10,000 vagy több alkalommal dobod az érmét, az átlag egyre inkább közelíteni fog a 0.5-höz.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

1. **Egyenletes eloszlás**





- **Eloszlásfüggvény**:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{ha } a < t \leq b \\ 1 & \text{ha } b < t \end{cases}$$

- **Sűrűségfüggvény**:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } t \in [a, b] \\ 0 & \text{ha } t \notin [a, b] \end{cases}$$

- **Várható érték**:

$$EX = \int_a^b \frac{x}{b-a} = \left[\frac{x^2}{2 \cdot (b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{(b-a) \cdot (b+a)}{2 \cdot (b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

- **Második momentum:**

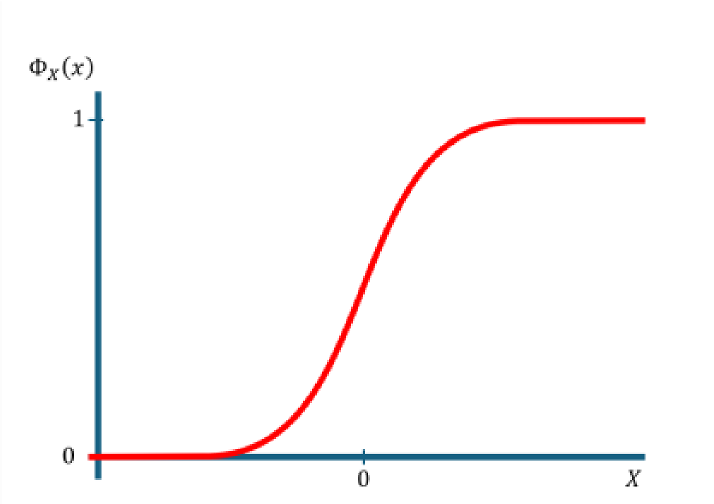
$$EX^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} = \left[\frac{x^3}{3 \cdot (b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)}$$

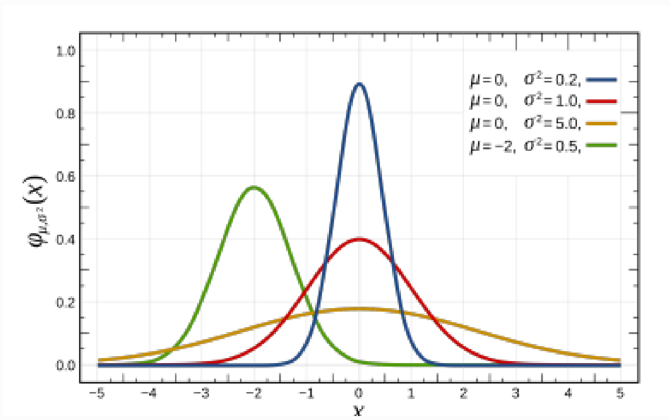
- **Szórásnégyzet**:

$$\text{Var}(X) = EX^2 - E^2X = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3 \cdot (b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Normális eloszlás (Gauss-eloszlás)**
   - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$





- **Jelentése és fontossága:** a legfontosabb eloszlás a valószínűségszámításban. A *centrális határeloszlás-tétel* miatt a természetben nagyon sok dolog (pl. testmagasság, IQ, mérési hibák) normális eloszlást követ, mert ha sok független, apró véletlen hatás adódik össze, az eredményük ehhez az eloszláshoz tart.
- **Sűrűségfüggvénye (Haranggörbe):**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

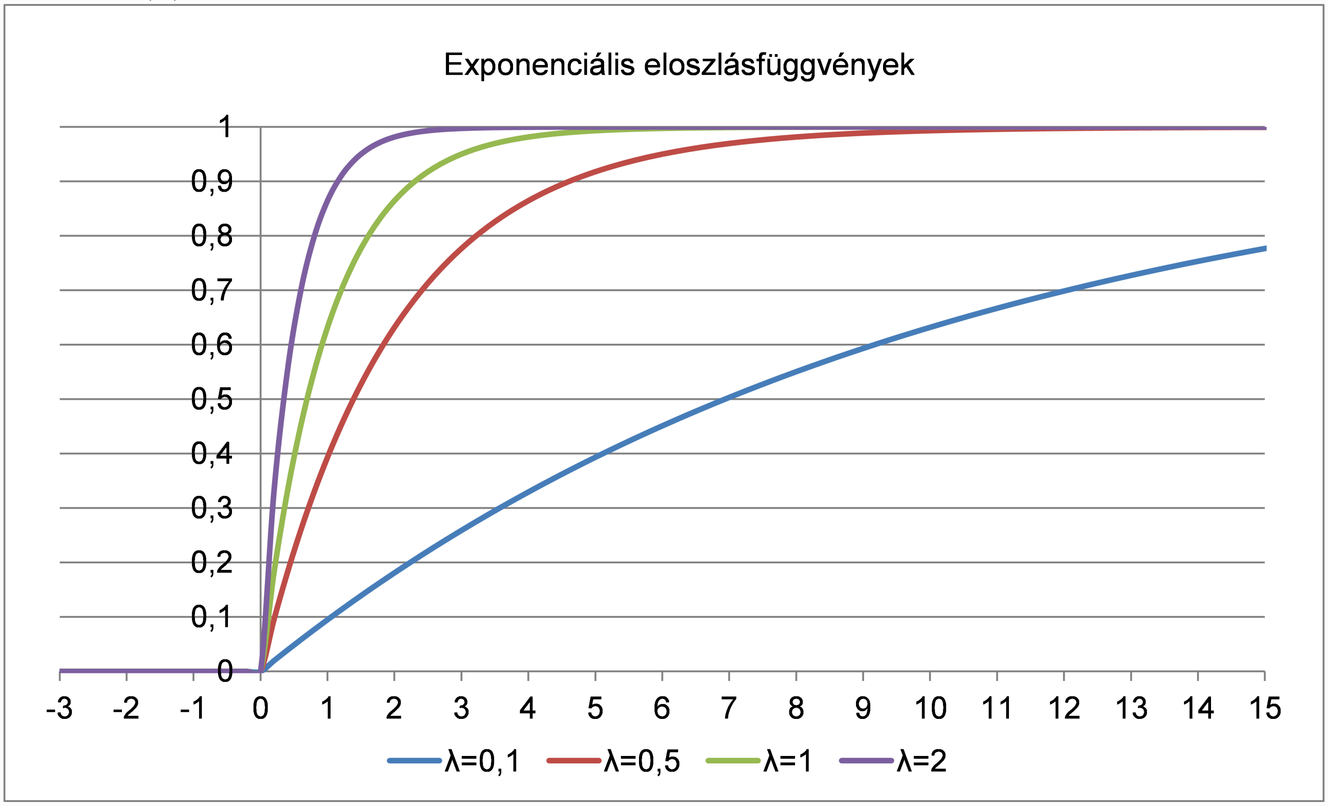
  ahol μ a várható érték, σ a szórás (σ^2 a szórásnégyzet).
  - Szimmetrikus a μ-re (itt veszi fel a maximumát).
  - A σ határozza meg a "lapultságot": kis σ esetén a harang magas és keskeny, nagy σ esetén lapos és széles.
- **Standard normális eloszlás ($N(0,1)$):**
  - Ez egy speciális eset, amikor $\mu = 0$ és $\sigma = 1$.
  - Ennek az eloszlásfüggvényét $\Phi(x)$-szel jelöljük. Mivel az integrálja nem fejezhető ki elemi függvényekkel, az értékeket hagyományosan táblázatból (vagy géppel) számolják.
- **Standardizálás:**
  - Bármilyen általános normális eloszlású változó átalakítható standard normálissá az alábbi transzformációval:

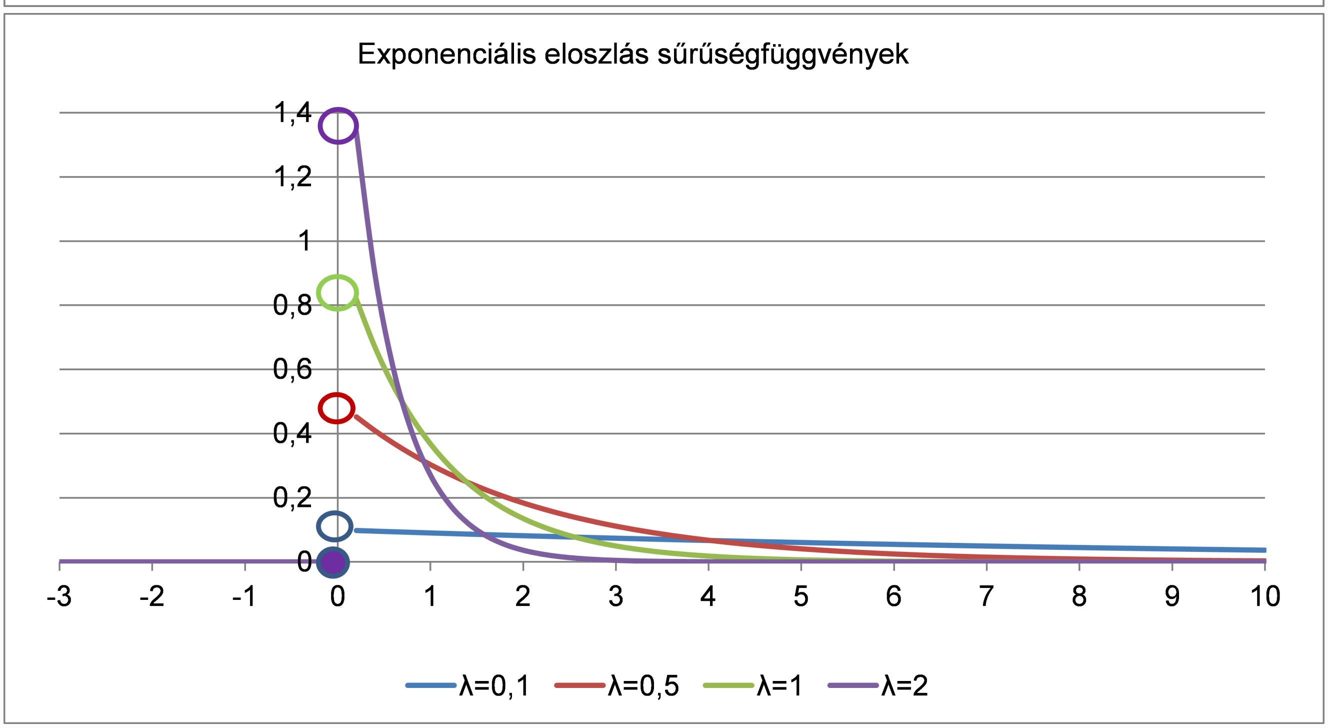
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Segítségével a valószínűségek könnyen számolhatók a $\Phi(x)$ táblázatból:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3. **Exponenciális eloszlás**
   - $X \sim Exp(\lambda)$





   - **Jelentése:** A Poisson-eloszlás folytonos "párja". Arra ad választ, hogy mennyi idő telik el két egymást követő esemény között (pl. mennyi idő múlva érkezik a következő hívás a telefonközpontba, vagy mennyi ideig működik hibátlanul egy alkatrész).
   - **Például:** tegyük fel, hogy egy ügyfélszolgálaton átlagosan $\lambda = 2$ hívás érkezik óránként. Mivel a hívások teljesen véletlenszerűen és egymástól függetlenül futnak be, a két hívás között eltelt idő exponenciális

eloszlást követ. A várható értékből kiszámítható, hogy $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ óra, vagyis átlagosan 30 percet kell várni két hívás között.

- **Sűrűségfüggvénye:**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

- **Eloszlásfüggvénye:**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

- **Várható értéke:** $EX = \frac{1}{\lambda}$
- **Szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- **Örökifjú tulajdonság (emlékezetnélküliség):**

$$P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t)$$

  - Az eloszlás "nem emlékszik" a múltra. Ha egy gép eddig s ideig nem romlott el, annak az esélye, hogy még további t ideig jó marad, pontosan ugyanannyi, mintha most vettük volna újonnan a boltban.

1.2. ADATSZERKEZETEKKEL KAPCSOLATOS ALAPFOGALMAK: ABSZTRAKCIÓ, ABSZTRAKT ADATSZERKEZETEK. ELEMI ADATSZERKEZETEK: LISTA, VEREM, SOR. HALMAZ, MULTIHALMAZ, TÖMB. FÁK ÁBRÁZOLÁSA, BEJÁRÁSOK, KERESÉS, BESZÚRÁS, TÖRLÉS.

Alapfogalmak

Adatszerkezet: adatelemek + kapcsolatok + műveletek + tárolás (reprezentáció).

Tehát az adatszerkezet adatokból, a köztük levő kapcsolatokból, a rajtuk végrehajtható műveletekből és a memóriában/háttértáron történő fizikai tárolás megvalósításából áll.

Absztakció: egy probléma vagy rendszer leegyszerűsített, általánosított logikai modellje, amely elrejti a konkrét programozási nyelvhez vagy megvalósításhoz kötődő, lényegtelen implementációs részleteket, ezáltal fókuszálva a legfontosabb tulajdonságokra és működési elvekre.

Például: egy kávéautómatánál a felhasználónak csak a gombok fontosak,mint például "Espresso kérése". Maga az automata belső működése el van rejtve, mivel ez jelentéktelen a felhasználó részére.

Az **absztrakt adattípus** az adatelemek és a köztük levő kapcsolatok logikai modellje. Független az adattarolás fizikai megvalósításától.
Az adatszerkezet mindezeken túl tartalmazza az adatok fizikai tarolásának a memóriában/háttértáron történő megvalósítását es az adatokat manipuláló műveletek megvalósítását is.

Műveletek: adatszerkezet létrehozása, módosítása (hozzáadás, csere, törlés), elérése, néha rendezés, keresés, bejárás, feldolgozás.

Adatszerkezet reprezentációja lehet: folytonos (vektorszerű), szétszórt (láncolt)

Adatszerkezet típusa lehet: homogén (azonos típusú elemek), heterogén (különböző típusú elemek)

Adatszerkezet száma lehet: dinamikus (változik az elemek száma), statikus (fix az elemek száma)

Homogén adatszerkezet kapcsolata: struktúra nélküli, asszociatív (kulcs-érték pár), szekvenciális (lista), hierarchikus (fa), hálós (gráf).

Adatszerkezet	Típus	Szám	Kapcsolat	Reprezentáció
Halmaz	Homogén	Dinamikus	Struktúra nélküli	Folytonos
Tömb	Homogén	Statikus	Asszociatív	Folytonos
Verem	Homogén	Dinamikus	Szekvenciális	Folytonos
Sor	Homogén	Dinamikus	Szekvenciális	Folytonos
Láncolt lista	Homogén	Dinamikus	Szekvenciális	Szétszórt
Táblázat	Homogén	Dinamikus	Asszociatív	Folytonos / Szétszórt
Fa	Homogén	Dinamikus	Hierarchikus	Folytonos / Szétszórt

Lista

Tulajdonságai: homogén, dinamikus, szekvenciális, szétszórt (láncolt) reprezentációval ábrázolt.

A láncolt lista minden eleme két részből áll: **érték**, **mutató (memóriacím)**

Sokféle láncolt lista készíthető, pl.: egyirányban láncolt lista, kétirányban láncolt lista, ciklikus lista, multilista.

Kétirányban láncolt lista

- Mutatója két részből áll: **next** és **prev**.

- A lista első elemére az $L.head$ mutat.
- $x.prev = \text{NIL}$ ha x a lista első eleme, $x.next = \text{NIL}$ ha x a lista utolsó eleme.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \begin{array}{ccc} prev & key & next \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & & & \\ L.head \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c|c|c} \text{NIL} & 9 & \end{array}} & \rightleftarrows & \boxed{\begin{array}{c|c|c} & 16 & \end{array}} & \rightleftarrows & \boxed{\begin{array}{c|c|c} & 4 & \end{array}} & \rightleftarrows \; \boxed{\begin{array}{c|c|c} & 1 & \text{NIL} \end{array}} \end{array}$$

- **Műveletei:**
  - A $\text{List-Search}(\text{L}, \text{k})$ művelet megkeresi a $\mathbf{k}$ érték első előfordulását az $\mathbf{L}$ listában, lineáris keresés használatával. Amennyiben a $\mathbf{k}$ érték szerepel a lista elemei között, akkor a visszatérési érték a $\mathbf{k}$ értéket tartalmazó elemre mutató mutató, egyébként pedig NIL.

```
List-Search(L, k)
x = L.head
while x ≠ NIL and x.key ≠ k
    x = x.next
return x
```

  - A $\text{List-Insert}(\text{L}, \text{x})$ művelet beszúrja az adott $\mathbf{x}$ elemet az $\mathbf{L}$ lista legelső pozíciójába.

```
List-Insert(L, x)
x.next = L.head
if L.head ≠ NIL
    L.head.prev = x
L.head = x
x.prev = NIL
```

  - A $\text{List-Delete}(\text{L}, \text{x})$ művelet eltávolítja az $\mathbf{x}$ elemet az $\mathbf{L}$ listából. Az $\mathbf{x}$ elem megadása a $\mathbf{x}$ elemre történő mutató megadásával történik. Amennyiben egy adott $\mathbf{k}$ értéket szeretnénk törölni, akkor először meg kell keresni az adott $\mathbf{k}$ érték memóriacímét a $\text{List-Search}(\text{L}, \text{k})$ művelettel.

```
List-Delete(L, x)
if x.prev ≠ NIL
    x.prev.next = x.next
else L.head = x.next
if x.next ≠ NIL
    x.next.prev = x.prev
```

Verem

Tulajdonságai: homogén, dinamikus, szekvenciális, folytonos reprezentációval ábrázolt.

Műveletek: Push (új elem hozzáadása), Pop (a verem tetején elhelyezkedő elem törlése)

A legutoljára bekerült elem először fog kikerülni, ezért a verem egy **LIFO** (last in, first out) adattípus.

Az $\mathrm{S.top}$ mondja meg, hogy hány elemet tartalmaz a verem.

A veremhez történő hozzáféréskor két probléma léphet fel:

- Ha a Pop műveletet szeretnénk alkalmazni üres verem esetén, - ekkor **alulcsordulásról** beszélünk, - illetve
- Ha az $\mathrm{S.top}$ érték nagyobbra nő az n értékénél, - ekkor pedig **túlcsordulásról** beszélhetünk.

Minden verem művelet leírható pár soros kóddal:

$\textbf{Stack-Empty}(S)$
$\quad\textbf{if } S.top == 0$
$\qquad\textbf{return } \mathrm{TRUE}$
$\quad\textbf{else return } \mathrm{FALSE}$

$\textbf{Push}(S, x)$
$\quad S.top == 0$
$\quad S[S.top] = x$

$\textbf{Pop}(S)$
$\quad\textbf{if } \text{Stack-Empty}(S)$
$\qquad\textbf{error } \text{"underflow"}$
$\quad\textbf{else } S.top = S.top - 1$
$\quad\textbf{return } S[S.top + 1]$

Művelet	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$S.top$	Return
							0	-
$\mathrm{Push}(S, 3)$	3						1	-
$\mathrm{Push}(S, 9)$	3	9					2	-
$\mathrm{Push}(S, 2)$	3	9	2				3	-
$\mathrm{Pop}(S)$	3	9					2	2
$\mathrm{Push}(S, 1)$	3	9	1				3	-
$\mathrm{Pop}(S)$	3	9					2	1
$\mathrm{Pop}(S)$	3						1	9
$\mathrm{Push}(S, 4)$	3	4					2	-
$\mathrm{Push}(S, 7)$	3	4	7				3	-

Sor

Tulajdonságai: homogén, dinamikus, szekvenciális, folytonos reprezentációval ábrázolt.

Műveletek: Enqueue (sor végére történő beszúrás), Dequeue (sor elején lévő elem hozzáférése / eltávolítása)

A legelőször bekerült elem először fog kikerülni, ezért a sor egy **FIFO** (first in, first out) adattípus.

Két természetes számot szükséges nyilvántartani: **fej**, **farok**.

Sor reprezentációi:

- **Naiv megközelítés:** Elem törlésénél az egész sort eggyel balra kell másolni. A folyamatos adatmozgatás miatt nagyon lassú és költséges.
- **Sétáló sor:** Nincs adatmozgatás. Beszúrásnál a *farok*, törlésnél a *fej* mutató lép egyet jobbra, így a sor "sétál" a tömb vége felé. Ha a farok eléri az utolsó indexet, a sor elakad, új elemet nem fogad.
- **Ciklikus sor:** A sétáló sor memóriapazarlásának megoldása. A tömb végét logikailag összekötjük az elejével: ha a farok eléri a végét, visszaugrik a 0. indexre (mint egy körgyűrű).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
Q & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{15} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{8} & \boxed{4} & \boxed{} \\
 & & & & & & & \uparrow & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & & Q.head = 7 & & & & & Q.tail = 12
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
Q & \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{15} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{8} & \boxed{4} & \boxed{17} \\
 & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & & Q.tail = 3 & & & & Q.head = 7 & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
Q & \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{8} & \boxed{4} & \boxed{17} \\
 & & & \uparrow & & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & Q.tail = 3 & & & & & Q.head = 8 & & & &
\end{array}
$$

A sor használata során problémák léphetnek fel:

- ha a Dequeue utasítást használjuk üres sor esetén, akkor **alulcsordulásról** beszélünk, illetve
- ha a $Q.head = Q.tail + 1$, azaz tele van a sor, és az Enqueue műveletet használjuk, akkor **túlcsordulásról** beszélünk.

$\textbf{Enqueue}(Q, x)$
$Q[Q.tail] = x$
$\textbf{if } Q.tail == Q.length$
$\quad Q.tail = 1$
$\textbf{else } Q.tail = Q.tail + 1$

$\textbf{Dequeue}(Q, x)$
$x = Q[Q.head]$
$\textbf{if } Q.head == Q.length$
$\quad Q.head = 1$
$\textbf{else } Q.head = Q.head + 1$
$\textbf{return } x$

Művelet	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Head	Tail	Return
$\text{Enqueue}(Q, 4)$	4						1	2	-
$\text{Dequeue}(Q)$							2	2	4
$\text{Enqueue}(Q, 7)$		7					2	3	-
$\text{Enqueue}(Q, 2)$		7	2				2	4	-
$\text{Enqueue}(Q, 9)$		7	2	9			2	5	-
$\text{Enqueue}(Q, 5)$		7	2	9	5		2	6	-
$\text{Enqueue}(Q, 3)$		7	2	9	5	3	2	1	-
$\text{Dequeue}(Q)$			2	9	5	3	3	1	7
$\text{Enqueue}(Q, 1)$	1		2	9	5	3	3	2	-

Halmaz

Tulajdonságai: homogén, dinamikus, struktúra nélküli, folytonos reprezentációval ábrázolt.

Halmazműveletek:

- **Keresés** $\mathrm{O}(n)$
- A és B **metszete** $\mathrm{O}(n^2)$
- A és B **uniója** $\mathrm{O}(n^2 + n)$
- A és B **különbsége** $\mathrm{O}(n^2)$

Halmazműveletek tulajdonságai:

- null-elem tulajdonság: $\mathrm{A} \cup \emptyset = \mathrm{A}$
- idempotencia: $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$
- kommutatívitás: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$
- asszociativitás: $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$
- disztributivitás: $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$
- elnyelés: $\mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{A}$
- De-Morgan azonosságok $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$

Az A halmaz reprezentációja:

1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A B halmaz reprezentációja:

0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Az alábbi reprezentációkban az alábbi műveletek:

- **Komplementer**: bitenkénti nem művelet (lineáris idejű)
- **Unió**: bitenkénti vagy művelet (lineáris idejű)
- **Metszet**: bitenkénti és művelet (lineáris idejű)
- **Különbség**: A és nem B (lineáris idejű)
- **Keresés**: konstants idejű

Multihalmaz: olyan halmaz, aminek elemei többször előfordulnak.

Unió: $\max(A, B)$
Metszet: $\min(A, B)$
Különbség: $\max(A - B, 0)$

Tömb

Tulajdonságai: homogén, statikus, asszociatív, folytonos reprezentációval ábrázolt.

Reprezentációja: sorfolytonos, oszlopfolytonos

Adott M mátrix:

	1	2	3	4	5
1	6	11	8	5	22
2	12	9	2	21	6
3	1	5	24	2	9

Sorfolytonos reprezentációja:

6	11	8	5	22	12	9	2	21	6	1	5	24	2	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Oszlopfolytonos reprezentációja:

6	12	1	11	9	5	8	2	24	5	21	2	22	6	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Mindkét esetben tárolni kell a mátrix méretét: $(3, 5)$

Ritka mátrix

Legyen $\mathbf{M}$ az alábbi ritka mátrix:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	9	0
3	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25	0	0	0

Ekkor az $\mathbf{M}$ ritka mátrix 3 soros reprezentációja:

sor	1	2	2	3	4
oszlop	4	7	13	2	11
érték	3	11	9	5	25

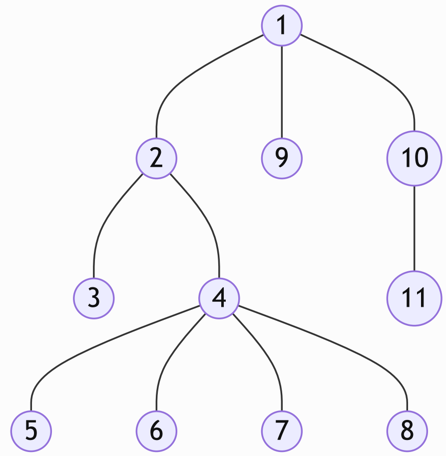
Tárolni kell továbbá a mátrix méretét: $(4, 14)$, illetve azt, hogy milyen elemekkel van feltöltve: 0

Fák

Fa: csúcsok és a csúcsokat összekötő élek halmaza alkotja. A fa bármely két csúcsa között **pontosan egy út** vezet. Van egy kijelölt csúcs, melyet **gyökérnek** hívunk.

Tulajdonsága: homogén, dinamikus, hierarchikus, folytonos/szétszórt reprezentációval ábrázolt.

Fogalmak: csúcs (gyökér, közbenső elem, levél), él, szülő, ős, a fa magassága, gyerek, leszármazott, testvér, út, részfa.



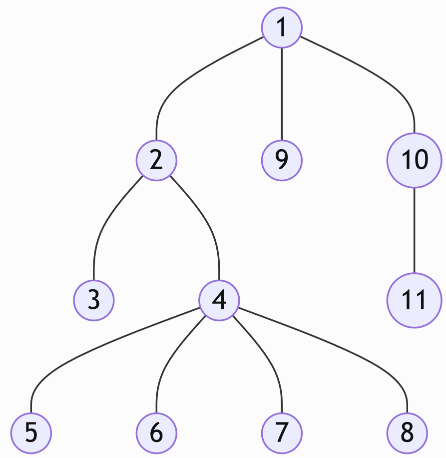
Reprezentációi:

- Folytonos: $(1(2(3)(4(5)(6)(7)(8)))(9)(10(11)))$
- Láncolt: minden csúcs esetén értéke mellett pontosan 2 mutatót használunk: egyik legbaloldalibb gyerekére mutat, másik pedig a jobboldali testvérére.
    i. $\boxed{2 \mid 1 \mid \text{NIL}}$
    ii. $\boxed{3 \mid 2 \mid 9}$
    iii. $\boxed{\text{NIL} \mid 3 \mid 4}$
    iv. $\boxed{5 \mid 4 \mid \text{NIL}}$
    v. $\boxed{\text{NIL} \mid 5 \mid 6}$
    vi. $\boxed{\text{NIL} \mid 6 \mid 7}$
    vii. $\boxed{\text{NIL} \mid 7 \mid 8}$
    viii. $\boxed{\text{NIL} \mid 8 \mid \text{NIL}}$
    ix. $\boxed{\text{NIL} \mid 9 \mid 10}$
    x. $\boxed{11 \mid 10 \mid \text{NIL}}$
    xi. $\boxed{\text{NIL} \mid 11 \mid \text{NIL}}$

Fa bejárása: olyan eljárás, ahol a fa minden csúcsát pontosan egyszer látogatjuk meg.

Kétféle bejárási algoritmus van:

- **preorder**: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ (gyökértől megyünk a baloldali gyerekhez, ha meglátogatjuk $\rightarrow$ leírjuk)
- **postorder**: $3, 5, 6, 7, 8, 4, 2, 9, 11, 10, 1$ (gyökértől megyünk a baloldali gyerekhez, csak akkor írjuk le, ha alatta az összeset leírtuk)

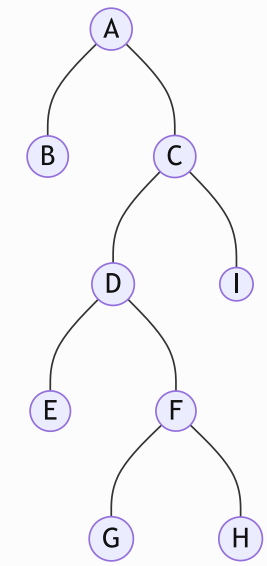


Bináris fa: olyan fa, ahol minden csúcsnak **legfeljebb** kettő gyereke lehet.

Reprezentációi:

- **Láncolt reprezentáció**: nyilvántartjuk minden csúcs értékét, és mindkét gyerekéhez egy rá mutató mutatót
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{B} & \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{NIL} & \mathrm{B} & \mathrm{NIL} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{D} & \mathrm{C} & \mathrm{I} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{E} & \mathrm{D} & \mathrm{F} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{NIL} & \mathrm{E} & \mathrm{NIL} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{G} & \mathrm{F} & \mathrm{H} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{NIL} & \mathrm{G} & \mathrm{NIL} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{NIL} & \mathrm{H} & \mathrm{NIL} \\ \hline\end{array}$
  - $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{NIL} & \mathrm{I} & \mathrm{NIL} \\ \hline\end{array}$
- **Folytonos reprezentáció:**

	kulcs	bal	jobb	szülő
1	A	2	3	0
2	B	0	0	1
3	C	4	9	1
4	D	5	6	3
5	E	0	0	4
6	F	7	8	4
7	G	0	0	6
8	H	0	0	6
9	I	0	0	3



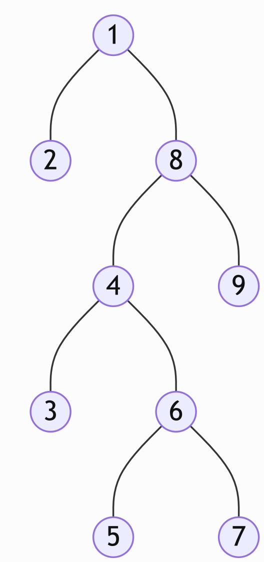
Bináris fa bejárása:

- **Preorder**: A, B, C, D, E, F, G, H, I
- **Postorder**: B, E, G, H, F, D, I, C, A
- **Inorder**: B, A, E, D, G, F, H, C, I, A (akkor írjuk le a csúcsot, ha a baloldali részfáját bejártuk)

A bejárás nem tekinthető folytonos reprezentációnak, mivel nem egyértelmű.

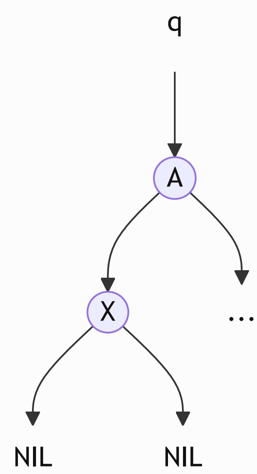
Bináris keresőfa: olyan bináris fa, melynél az összes csúcs bal oldali leszármazottjainak értéke kisebb, mint a jobb oldali leszármazottaknak.

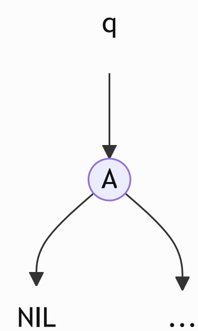
Műveletei: keresés, beszúrás, törlés, minimum, maximum, megelőző elem, rákövetkező elem. Egy teljes bináris keresőfa esetén egy művelet végrehajtásához szükséges idő a legrosszabb esetben $\mathrm{O}(\log_2 n)$.



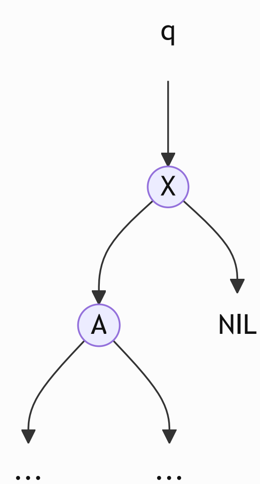
Egy bináris keresőfa elemének **törlésénél** 3 esetet különböztetünk meg:

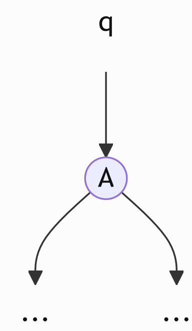
1. A törlendő csúcsnak nincs gyereke, akkor egyszerűen eltűnik.



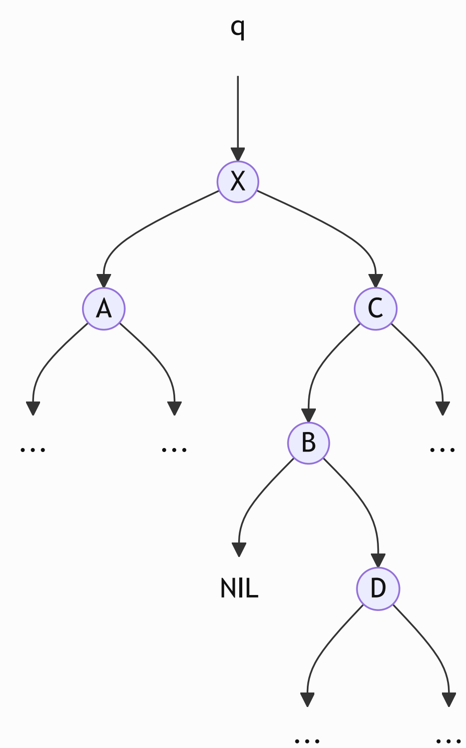


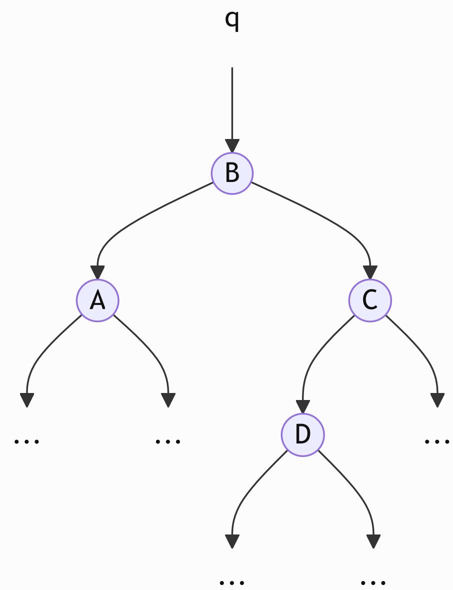
2. A törlendő csúcsnak egy gyereke van, akkor a csúcsot töröljük és létrehozzuk a kapcsolatot a szülője és a gyereke között.





3. A törlendő csúcsnak két gyereke van, akkor megkeressük a legkisebb rákövetkező elemet, és azt betesszük a törlendő csúcs helyére.




q
B
A
C
D
...
...
...
...
...