

Az informatika logikai alapjai

9. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- Elsőrendű nyelv:
 - interpretáció, változóértékelés
 - modell, kielégíthetőség
 - következményreláció

Interpretáció elsőrendű nyelv esetén

Interpretáció

Értékelés

Elsőrendű szemantikai szabályok

Alaptételek

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ elsőrendű nyelv egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
 - a. Ha $a \in F(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
 - b. Ha $f \in F(n)$ ($n \neq 0$), akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény ($\varrho(f) : U^{(n)} \rightarrow U$);
 - c. Ha $p \in P(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
 - d. Ha $P \in P(n)$ ($n \neq 0$), akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$.

A múltkori példa még egyszer

$\langle U, \rho \rangle$ interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:

a) $\rho(p)=\text{Péter}, \rho(e)=\text{én}$

b) $\rho(\text{édesanya}(_)):$

én → Mari néni, Péter → Erzsi néni

c) $\rho(\text{havazik})=0$

d) $\rho(\text{piros}(_)):$

Mari néni → igaz,

a többi objektumra → hamis

$\rho(\text{munkatársa}(_, _)):$

(én, Zoli) → igaz,

(Mari néni, Erzsi néni) → igaz

a több párra → hamis

$$\tilde{\rho}(0) = \{ p, e \}$$

$$\tilde{\rho}(1) = \{ \text{édesanya}(-) \}$$

$$\tilde{\rho}(2) = \{ \text{havazik} \}$$

$$\tilde{\rho}(3) = \{ \text{piros}(-) \}$$

$$\tilde{\rho}(4) = \{ \text{munkatárha}(-,-) \}$$

Péter édesanya édesanyai munkatára .

édesanyai(p) édesanyai(é)

munkatára(édesanya(p), édesanya(é))

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig a nyelv egy interpretációja. Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

1. $Dom(v) = Var$;
2. Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

Megjegyzés

- Az értékelésen egy $v: Var \rightarrow U$ függvényt értünk.

Definíció (A módosított értékelés fogalma)

Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v[x:u](y) = \begin{cases} u, & \text{ha } y = x; \\ v(y), & \text{egy ébként.} \end{cases}$$

Megjegyzés

- Az módosított értékelésen egy olyan $v[x:u]: Con \rightarrow U$ függvényt értünk, amely legfeljebb az x változóhoz rendelt értékben különbözik a v értékeléstől. Az x változóhoz az u értéket rendeli, azaz $v[x:u](x) = u$.

Interpretáció és változó értékelés

$\langle U, \rho \rangle$ interpretáció:

- U a következő halmaz: {Péter, én, Zoli, Mari néni, Erzsi néni}
- ρ a következő függvény:

a) $\rho(p)=\text{Péter}, \rho(e)=\text{én}$

b) $\rho(\text{édesanyja}(_)):$

én \rightarrow Mari néni, Péter \rightarrow Erzsi néni

c) $\rho(\text{havazik})=0$

d) $\rho(\text{piros}(_)):$

Mari néni \rightarrow igaz,

a többi objektumra \rightarrow hamis

$\rho(\text{munkatársa}(_, _)):$

(én, Zoli) \rightarrow igaz,

(Mari néni, Erzsi néni) \rightarrow igaz

a több párra \rightarrow hamis

v : értékelés

- egy értékelés: $v(x)=\text{Péter}$ (akkor munkatársa(é, x) hamis)
- egy másik értékelés: $v(x)=\text{Zoli}$ (akkor munkatársa(é, x) igaz)

$$\tilde{\rho}(0) = \{ p, e \}$$

$$\tilde{\rho}(1) = \{ \text{édesanyja}(-) \}$$

$$\tilde{\rho}(2) = \{ \text{havazik} \}$$

$$\tilde{\rho}(3) = \{ \text{piros}(-) \}$$

$$\tilde{\rho}(4) = \{ \text{munkatársa}(-,-) \}$$

Péter édesanyja édesanyjának munkatársa

édesanyja(p) édesanyja(e)

munkatársainak édesanyja(p), édesanyja(e)

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

1. $\langle U, \varrho \rangle$ egy **interpretációja** az $L^{(1)}$ nyelvnek;
2. v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**;
3. minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Megjegyzés

Az elsőrendű nyelv egy adott formulahalmazának a(z elsőrendű) modellje a nyelv egy (elsőrendű) interpretációjának és az interpretációra támaszkodó értékelésnek olyan együttese, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.

Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Elsőrendű

modell Kielégíthetőség Kielégíthetetlenség Következményreláció Érvényesség Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.

A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van (elsőrendű) modellje.

Megjegyzés

- A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van olyan (elsőrendű) interpretáció és az interpretációra támaszkodó értékelés, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.

Elsőrendű nyelvek esetén:

Logikai következmény - szemantikai következmény -
reláció

A deft: $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, A, B formai Γ & Form

- A formula következménye a B formula,
 $A \models B$, ha A minden modellje modellje B-vel is
- $\Gamma \subseteq Form$ formula halmazának következménye B formula
 $\Gamma \models B$, ha Γ minden modellje modellje B-vel is.

Elsőrendű

modell Kielégíthetőség Kielégíthetetlenség Következményreláció Érvényesség Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula érvényes, ha $\emptyset \models A$, azaz ha az A formula logikai következménye az üres halmaznak.

- Jelölés: $\models A$

Elsőrendű

modell Kielégíthetőség Kielégíthetetlenség Következményreláció Érvényesség Logikai
ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula.

Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \vDash B$ és $B \vDash A$.

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

Nulladrendit

gelt

$$L^0 = \langle \text{Lc}, (\text{Con}, \text{Form}) \rangle$$

- Siemantikai eredményök

- $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$
 „minőségek“

Előrendit

$$L^{(1)} = \langle \text{Lc}, \text{Var}, (\text{Con}, \text{Term}, \text{Form}) \rangle$$

- nemantikai eredményök

- $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \exists, \forall$
 „minőségek“

Nulladrendis Yllr

$$L^0 = \langle LC, CN, Form \rangle$$

- interpretatio:

- CN elementer
objektiv: logisk
subjektiv: erklæring

Elsoendis yllr

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, CN, Term, Form \rangle$$

- interpretatio:

- + vælger et element

- Universum

- CN elementer

- objektiv:

1. objekter:

- kasten

- fiskgrøder

- fiskgrøder

2. aktører:

- aktører kartas

- logisk vælger

- objekter
vælger femalle
relativer

nulladrendii

yelv

$$L^0 = \langle Lc, Con, Form \rangle$$

- siemantikai struktúr
- interpretáció, g
- modell

$$- g, \text{ ahol } |A|_g = 1$$

elsőrendű yelv

$$L^{(1)} = \langle Lc, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- nemantikai szövegek
- interpretáció $\langle U, S \rangle$
 - + valószínűsítési elv: γ
- modell

$$- \langle U, S \rangle \models \varphi, \text{ ahol } |A|_{\langle U, S \rangle} = 1$$

nulladrendi yhr

$$\mathcal{L}^0 = \langle \text{Lc}, (\text{Can}, \text{Form}) \rangle$$

- semantikai eredményök
- interpretációi, g
- modell

elsőrendi yhr

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle \text{Lc}, \text{Var}, (\text{Can}, \text{Term}, \text{Form}) \rangle$$

- nemantikai eredményök
- interpretációi (\mathcal{U}, S)
 - + valóra 'szűr'elési :)
- modell
 - kielégíthető formula
 - van modellje
 - kielégíthetetlen formula
 - nincs modellje
- $A \models B$ ($\vdash A \models B$) A formula (mátrix)
nincs modellje B-nél is modellje
- A formula érvénytelen, ha $\neg A$ kielégíthetetlen

nulladrendi yhr

$$\mathcal{L}^0 = \langle \text{Lc}, (\text{Can}, \text{Form}) \rangle$$

- semantikai eredményök
- interpretációi, g
- modell

elsőrendi yhr

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle \text{Lc}, \text{Var}, (\text{Can}, \text{Term}, \text{Form}) \rangle$$

- nemantikai eredményök
- interpretációi (\mathcal{U}, S)
 - + valóra 'szűr'elési :)
- modell
 - kielégíthető formula
 - van modellje
 - kielégíthetetlen formula
 - nincs modellje
- $A \models B$ ($\vdash A \models B$) A formula (mátrix)
nincs modellje B-nél is modellje
- A formula érvénytelen, ha $\neg A$ kielégíthetetlen

Nulladendi Yer

$$L^0 = \langle LC, Con, Form \rangle$$

- siemantikai struktúr
- interpretáció, 3
- modell

- kiélezíthető formula
- kiellékihetetlen formula
- logikai következmény
- érvényes formula
- logikai ekvivalencia:

$$A \Rightarrow B$$

azaz es van arra, ha

Előrendeli Yer

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- rekurzív definíciók

- interpretáció (4, 5)

+ valószínűsítési eloz: v

- modell

$$A \models B \Leftrightarrow B \models A$$

Nulladendi gér

$$L^0 = \{ LC, Con, Form \}$$

- siemantikai struktúr
- interpretáció, g
- modell

Előrendeli gér

$$L^{(1)} = \{ LC, Var, Con, Term, Form \}$$

- reumatikai struktúr
- interpretáció (4, 5)
 - + valószínűsítés: v
- modell

- kielégíthető formulák
- kielégíthetetlen formulák
- logikai következmény
- eredmény formulák
- logikai eredmények:

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

unladendii yelv

$$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

erörendii yelv

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- källigthet "formula halmar
minnen resihalvara
källig'het":

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ kielégíthető formulahalmaz és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ kielégíthető formulahalmaz.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástatlanság szűkítéssel nem rontható el.

Bizonyítás

Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges kielégíthető formulahalmaz, és $\Delta \subseteq \Gamma$!

Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

$\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$. Azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezethármas modellje Δ -nak, tehát Δ kielégíthető.

unendlich viele

$$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

endlich viele

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- källgjärte "formularmer
vinden särskalmar
källgjärte"
- källgjärstetlen formularmar
vinden särskilte källgjärt -
tretsten.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ kielégíthetetlen formulahalmaz, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ kielégíthetetlen formulahalmaz.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges kielégíthetetlen formulahalmaz, $\Delta \subseteq Form$ pedig tetszőleges formulahalmaz.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető.

$$\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$$

A kielégíthetőségre vonatkozó tétel miatt Γ kielégíthető, ez pedig ellentmondás.

unladendes yelv

$$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

erörendes yelv

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Fact \rangle$$

- "illigibilité" formularmar
wenden sozialmar
"illigibilité"
- "illigibilitäten" formularmar
wenden sozialere "illigibit -
täten".
- Auslegermein relativ affogalmaria
formularmar "illigibilitäten"
sie regt beispiel

Következményreláció, nulladrendű nyelvek

Logikai következmény - szemantikai következmény -
reláció

(Adott: $L^{\text{Co}} = \langle LC, \text{Con}, \text{Form} \rangle$, $A \in \text{Form}$, $\Gamma \subseteq \text{Form}$)

- $A \in \text{Form}$ formula $\underline{\text{van következménye}}$ a B formula,
 $A \models B$, ha A minden modellje modellje B -nek is
- $\Gamma \subseteq \text{Form}$ formula-halmaznak $\underline{\text{következménye}}$ $B \in \text{Form}$
 $\Gamma \models B$, ha Γ minden modellje modellje B -nek is.

Következményreláció, elsőrendű nyelvek

Logikai következmény - nyelvészeti következmény -
zeláncid

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle \quad A \in Form, \Gamma \subseteq Form$$

- A formula Γ következménye a B formula,
 $A \models B$, ha A minden modellje modellje B-vel is
- $\Gamma \subseteq Form$ formula halmazának következménye B Form
 $\Gamma \models B$, ha Γ minden modellje modellje B-vel is.

Nulladrendben láttuk:

A dönt L^(o) = (Lc, (an, Form)), $\Gamma \subseteq \text{Form}$, $A \in \text{Form}$.

Títel :

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\}}$ kielégíthető.

Bizonyítás : (\Rightarrow)

Teogniuk jobb, hogy Γ minden meddője modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$ -nak nincs modellje. Legyen σ a \mathfrak{I} interpretáció.

Ekkor : $(B|_{\mathfrak{I}} = 1$ minden $B \in \Gamma$ -ra, de $(\neg A|_{\mathfrak{I}} = 1$, ami $|A|_{\mathfrak{I}} = 0$.

Vagyis Γ -nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén/1

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Ter_\Gamma, \models_\Gamma \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Titel :

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{A\}}$ kielégíthető.

Bizonyítás : (\Rightarrow)

Teogniir jobb, hogy Γ minden modellje modellje A -nak is, de $\Gamma \cup \{A\}$ kielégíthető. Ha $\Gamma \cup \{A\}$ -nak nincs modellje. Legyen (U, \mathcal{I}) interpretáció, \mathcal{V} ejtéreleírás. Ekkor $(B |_{\mathcal{V}}^{(U, \mathcal{I})} = 1$, minden $B \in \Gamma$ -ra, de $(A |_{\mathcal{V}}^{(U, \mathcal{I})} = 1$

Vagyis Γ -nak van olyan modellje, ami nem modellje A -nak.

Ellentmondás.

Nulladrendben láttuk:

A deit L⁽⁰⁾ = (LC, (an, Form)), $\Gamma \subseteq \text{Form}$, $A \in \text{Form}$.

Títel:

$\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.

Bilyítés: (\Leftarrow)

Tegyük fel indirekt, ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.
de $\Gamma \not\models A$, aha Γ -nál van azon modellje, ahol A -ról nem modellje. Legyen ezt az interpretációt.

Ekkor $(\exists \beta \beta = 1$ minden $\beta \in \Gamma$ esetén, de $|A|_\beta = 0$, aha $|\neg A|_\beta = 1$.

Vannak β kielégítő $\Gamma \cup \{\neg A\}$ -t,
ahe $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.

Ír ellentmondás, aha an indirekt feltétel leavisztál.

A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén/2

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Títel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ kielégíthető.

Bilagjai: (\Leftarrow)

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ kielégíthető. Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \models A$, ami A -ről azt mondja, hogy $\Gamma \models A$, azaz Γ -nál van algn modellje, ami A -ról nem modellje. Legyen ezt (M, ρ) interpretáció, vejtérelegi Γ alatt $(B) \vdash_{\forall}^{(A, S)}$, minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_{\forall}^{(A, S)} = 0$

$$|A|_{\forall}^{(A, S)} = 0$$

Vannak \exists kielégítő $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ -t, amely $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, ahol az indirekt feltétel leavisztikus.

unendlich gelv

$$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

endlich gelv

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- källgjärte "formula halmar
in den sätzungssatz
källgjärte"
- källgjärtecken formula halmar
in den sätzung "källgjärte -
kätescken".
- Ärgerformen relativ affogalmorai
formula halmar källgjärtecken
sige regt regt regt
- Eniges formula in den formula halmar
källgjärtecke

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle \setminus$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$.

Ha A érvényes formula ($\vDash A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

Bizonyítás

Ha A érvényes formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \vDash A$.

Így $\emptyset \cup \{\neg A\} \setminus (\emptyset = \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a kielégíthetetlenségre kimondott tétel alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

unendlich gelv

$$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

endlich gelv

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle L, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- Källighetet för formulahelmer
inom den respektive
källigtet.
- Källighetestilen för formulahelmar
inom den särskilda källigt-
hetestilen.
- Att formuleras relativt åtformulor är
formulahelmar källighetestilen
såga regitrégével
- Enigas formula inom formulahelmer
är intressant
- Källighetestilen för formulahelmar
inom den formulerat
är intressant

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle \setminus$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..

Ha a Γ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, akkor minden A formula esetén $\Gamma \models A$.

Megjegyzés

A téTEL szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

Bizonyítás

A **már bizonyított téTEL** szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

unladendes Welt

$$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

erländes Welt

$$\mathcal{L}^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- källgithetsformulaer minden resursharar källgithet.
- källgithetsetlen formulaer minden sönste källgithetsetlen.
- Att formning relativt affogalitma i formulaer minden källgithetsetlen sige registreringen
- Enigas formula minden formulaer minden förförkning
- Källgithetsetlen formulaer maa minden formula förförkning
- Kontraversiä & implikaciä
 - deduktiv list
 - & negation

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$, akkor $\Gamma \models (A \supset B)$.

Megjegyzés

$\Gamma \cup \{A\} \models B$ helyett gyakran használjuk a következő rövidebb írásmódot: $\Gamma, A \models B$

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ teljesül, de $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és a v értékelés szerint.
2. $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

$|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, azaz $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$ és $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$. Így $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

$\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és a v értékelés szerint, azaz a formulahalmaz kielégíthető, tehát $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy **modellje** az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint.
- $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$
- $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, így $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$

Így $|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

$\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint, azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas **modellje** a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz kielégíthető. Tehát $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vdash (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a dedukció tételeit és megfordítását abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

unladren der WELV

$$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

erländische WELV

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- Källgjithet "formula_helmer minden részhelmar källgjithet"
- Källgjithetsellen formula_helmar minden sönötre källgjithetsellen.
- Att formning relateras till galurerna i formula_helmar källgjithetsellen sige regitrégeln
- Enigas formula minden formula_helmer källgjithetsmäge
- Källgjithetsellen formula_helmar minden formula_helma källgjithetsmäge
- Kontrapositionsregla & implikaciö
 - deduktivt lärsl
 - & negationstafia
- Logiskt ekivalens &
"≡" (materialisk ekivalens)

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a dedukció tételel és megfordítását abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula.

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \equiv B)$.

unladren der WELV

$$L^{(0)} = \{LC, Con, Form\}$$

erländische WELV

$$L^{(1)} = \{LC, Var, Con, Term, Form\}$$

- Källgithetsel formula_helmer minden részhelmar källgithet.
- Källgithetsel formula_helmar minden sönste källgithetsel.
- Att formning relateras till galurerna formula_helmar källgithetsel den sige registreringen
- Enigas formula minden formula_helmer källgithetsel.
- Källgithetsel formula_helmar minden formula_helmar källgithetsel.
- Kontravariabilitet
implikation
- deduktivt läsel
- negation
- Logiken erinervit
"≡" (materialis erinervit)

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Ekkor

1. $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Első De Morgan törvény bizonyítása

Második De Morgan törvény bizonyítása

A törvény bizonyításához először lássuk be, hogy $\neg \exists x A \models \forall x \neg A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\neg \exists x A, \neg \forall x \neg A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

$$1. |\neg \exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 1, \text{ és így } |\exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 0$$

$$2. |\neg \forall x \neg A|_v^{(U, \varrho)} = 1, \text{ azaz } |\forall x \neg A|_v^{(U, \varrho)} = 0$$

Az **univerzális kvantor szemantikai szabálya** szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$,

$$\text{hogy } |\neg A|_{v[x:u]}^{(U, \varrho)} = 0, \text{ azaz } |A|_{v[x:u]}^{(U, \varrho)} = 1.$$

Ez pedig az **egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya** szerint azt jelenti, hogy $|\exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 1$, ami ellentmond az első pontnak.

Első De Morgan törvény bizonyítása

Második De Morgan törvény bizonyítása

Most lássuk be, hogy $\forall x \neg A \models \neg \exists x A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\forall x \neg A, \neg \neg \exists x A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

$$1. |\forall x \neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$$

$$2. |\neg \neg \exists x A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1, \text{ azaz } |\exists x A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$$

Az **egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya** szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $|A|_{v[x:u]}^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, azaz $|\neg A|_{v[x:u]}^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$.

Ez pedig az **univerzális kvantor szemantikai szabálya** szerint azt jelenti, hogy $|\forall x \neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, ami ellentmond az első pontnak.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Ekkor

1. $\exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$
2. $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$

Bizonyítás

Ha a **kvantifikáció De Morgan törvényeinek** minden oldalát negáljuk, akkor a **kettős negáció törvényének** alkalmazásával megkapjuk a kifejezhetőségre vonatkozó logikai ekvivalenciákat.

1. $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Továbbá...

- $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$
 $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$
- $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$
- $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
 $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$
 $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

(miért is?)

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei