# Az informatika logikai alapjai
# 6. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

# Az első zárthelyi dolgozatról

- **Október 20-án kedden** (a jövő héten) **16.30 – 17.30**
- **Két helyszín** van:
  - **IK épület 201**-es terem: Azoknak, akiknek a **vezetékneve A – K betűvel** kezdődik
  - **TEOKJ épület fszt. 108**-as terem (IV. előadó): Azoknak, akiknek a **vezetékneve L-Z betűvel** kezdődik
- **<u>Téma: az 1-5. előadás anyaga</u>**
- Aki a fenti időpontban **nem tud személyesen megjelenni**, annak a **félév végén** lesz alkalma a ZH-t **bepótolni**.

Gyakorló feladatsor, Neptun Meet  Street?

# A múlt órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

# Szekvent kalkulus – Mi az, hogy szekvent

**Szintaxis:** Ha $\Gamma$ és $\Delta$ két (esetleg üres) formulahalmaz, akkor a $\Gamma \vdash \Delta$ egy **szekvent**.

**Szemantika:** Az $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \{B_1, \ldots, B_m\}$ szekvent **érvényes**, ha minden olyan $\varrho$ interpretáció esetén, ahol $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$ van olyan i, hogy $|B_i|_\varrho = 1$.

Vagyis: Ha egy szekvent **nem érvényes – azaz cáfolható** –, akkor van olyan $\varrho$ interpretáció, melyre $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$, míg $|B_1|_\varrho = \ldots = |B_m|_\varrho = 0$.

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

# A múlt órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

# Szekvent kalkulus – Axiómák és levezetési szabályok

- A szekvent kalkulus **axiómái** a következő alakúak (axiómaséma):

  $$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

  ahol A egy atomi formula, Γ és Δ pedig formulahalmazok.
- A szekvent kalkulus **levezetési szabályai**:

konjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

diszjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

implikáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

negáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

(premissza és konklúzió) Vegyük észre: Ezek mind „szintaktikai fogalmak”

# A levezetési szabályok megőrzik a szekventek érvényességét

**Tétel.** Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Azaz: Ha egy ϱ interpretáció cáfolja a levezetési szabály konklúzióját, akkor cáfolja a levezetési szabály valamely premisszáját is.

Vegyük észre: A tétel a szemantikai fogalmak (érvényesség) és a szintaktikai fogalmak (szabályok) kapcsolatáról szól

# Még egy tétel

**Tétel.** Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

**Tétel.** A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

# A mechanikus eljárás (a szabályalkalmazás) és a szemantikai fogalmak közötti kapcsolat

**Tétel.** Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

**Tétel.** A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

**A mechanikus eljárás**: Ha axiómákból kiindulva a szabályok alkalmazásával le tudunk vezetni egy szekventet, akkor az érvényes.

**Milyen axiómákból induljunk ki?** Nem tudjuk, haladjunk tehát „visszafelé”, a szekventtől az axiómák felé.

# A múlt órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

# Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- Legyen F eg … a Γ⊢Δ szekvent. T … si szabály, melynek a … 1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szek …

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

- Bővítsük az … a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szek … t, melynek a gyökere az … mínusz Γ⊢Δ) és a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szekventek alkotják

$$\cfrac{A \vdash A \qquad \cfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

# Például

Próbáljuk ki: http://logitext.mit.edu/main

X->Y, ~Y|- ~X

$$X \supset Y,\ \neg Y \vdash \neg X$$

Jelölések:

-> (implikáció),
~ (negáció),
|- (levezethetőség)
/\ (konjunkció)
\/ (diszjunkció

# A szekvent kalkulus mechanikus (szintaktikai szabályokon alapuló) eljárás bizonyítások konstruálására

- Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Például:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \to Y \vdash Y}\,(\to l)}{X, X \to Y, \neg Y \vdash}\,(\neg l)}{X \to Y, \neg Y \vdash \neg X}\,(\neg r)$$

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \lor B}\,(\lor r)}{A \vdash A \land (A \lor B)}\,(\land r)$$

Vegyük észre, hogy itt a „bizonyítás” szintaktikai fogalom:
A gyökér egy szekvent, a fa a szintaktikai szabályoknak megfelelően épül fel, a levelek axiómák.

# A múlt órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

| | |
|---|---|
| **Szintaktikai** fogalmak:<br>• szekvent<br>• axióma<br>• levezetési szabályok, levezetési fa, levezetési fa bővítése<br>• **bizonyítás** (gyökérszekvent, minden levél axióma) | **Szemantikai** fogalmak:<br>• szekvent érvényessége<br>• az axiómák érvényessége<br>• a levezetési szabályok alapján átalakított szekventek érvényességének megmaradása<br>• **teljesség, helyesség** (ha egy szekvent érvényes, akkor van bizonyítása illetve ha egy fa bizonyítás, akkor a gyökérszekventje érvényes |

A „$\vdash$” egy szintaktikai reláció („szintaktikai következményreláció”, „bizonyíthatóság”), míg „$|=$” egy szemantikai reláció („szemantikai következményreláció”)

# A szekvent kalkulus mint bizonyítási eljárás **helyessége** és **teljessége**

Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

**Tétel.** ← Helyesség

Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

**Tétel.** ← Teljesség

Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

# Mit is bizonyítottunk: A szekvent kalkulus **helyessége** és **teljessége**

**Tétel.**
Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

**Tétel.**
Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

**Azaz:** Ha egy szekvent érvényes, akkor be lehet bizonyítani, továbbá ha egy szekventnek van bizonyítása, akkor az érvényes.
**Azaz:** A szekvent pontosan akkor érvényes, ha bizonyítható.

Ismét: A „$\vdash$” egy szintaktikai reláció („bizonyíthatóság”), míg „|=” egy szemantikai reláció („érvényesség”)

# Megjegyzés: Cáfoló modell létezése

**Tétel.** Ha az S szekvent nem bizonyítható, akkor létezik egy interpretáció, mely cáfolja.

**Bizonyítás.**

- Készítsük el S egy olyan levezetési fáját ami a leveleken csak atomi formulákat tartalmaz.
- Mivel S nem bizonyítható, létezik egy nem axióma levélszekvent: $A_1,\ldots,A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, ahol $A_i \neq B_j$ bármely i, j esetén.
- Definiáljuk a ϱ interpretációt úgy, hogy legyen $|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$.
- ϱ cáfolja a levél szekventjét, s így a gyökérszekventet is.

# Például

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, A, B \vdash C, B}{A, B \vdash C, \neg A, B}(\neg r) \qquad \dfrac{\boxed{A, A, B \vdash C, C}}{A, B \vdash C, \neg A, C}(\neg r)}{A, B \vdash C, \neg A, B \land C}(\land r) \qquad \dfrac{\dfrac{A, A, B, B \vdash B}{A, B, B \vdash \neg A, B}(\neg r) \qquad \dfrac{\boxed{A, A, B, B \vdash C}}{A, B, B \vdash \neg A, C}(\neg r)}{A, B, B \vdash \neg A, B \land C}(\land r)}{A, B, C \to B \vdash \neg A, B \land C}(\to l)$$

A leveleket cáfoló interpretáció:

$|A|_\varrho=1$

$|B|_\varrho=1$

$|C|_\varrho=0$

cáfolja a gyökeret is

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \land B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \lor B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

# A múlt órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

# Normálformák

## Bevezető példa:

- Dolly fehér és Max fekete.
- Ha Dolly nem fehér, akkor Max fekete
- Nem igaz, hogy ha Dolly fehér, akkor Max nem fekete.

# Normálformák

## Bevezető példa:

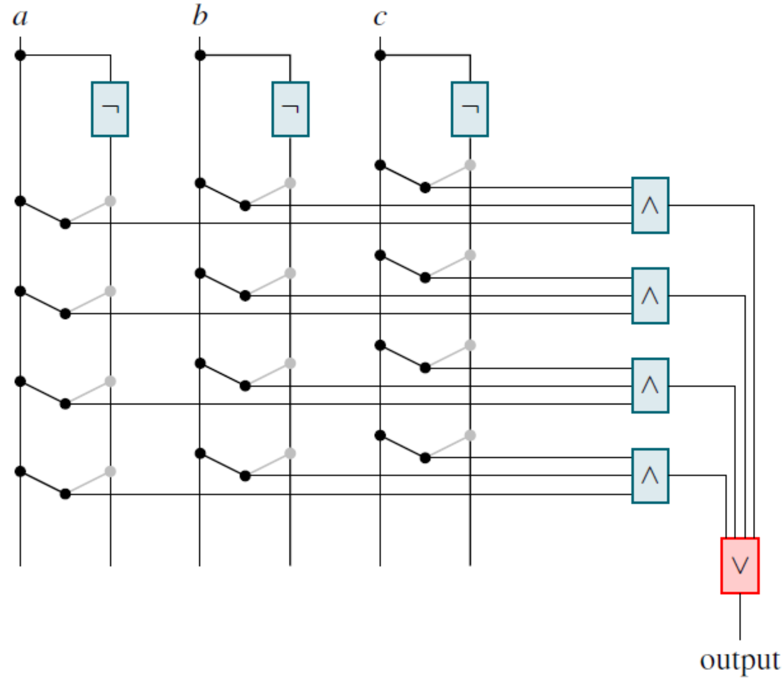
- Dolly felvér és Max ferete.
- Dolly fehér vagy Max fekete.
- Dolly fehér és Max fekete.

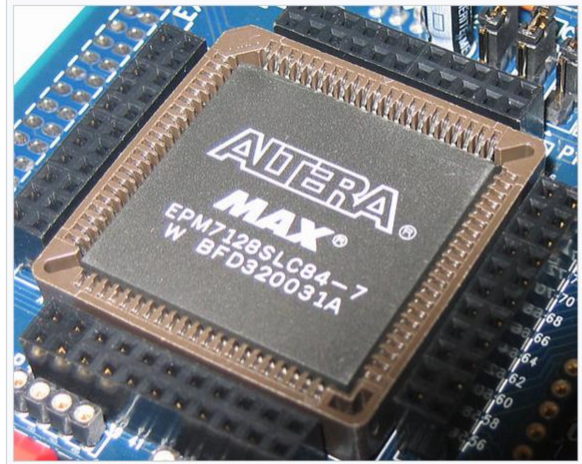
# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

# Normálformák

**Második példa:** CPLD – Complex Programmable Logic Device



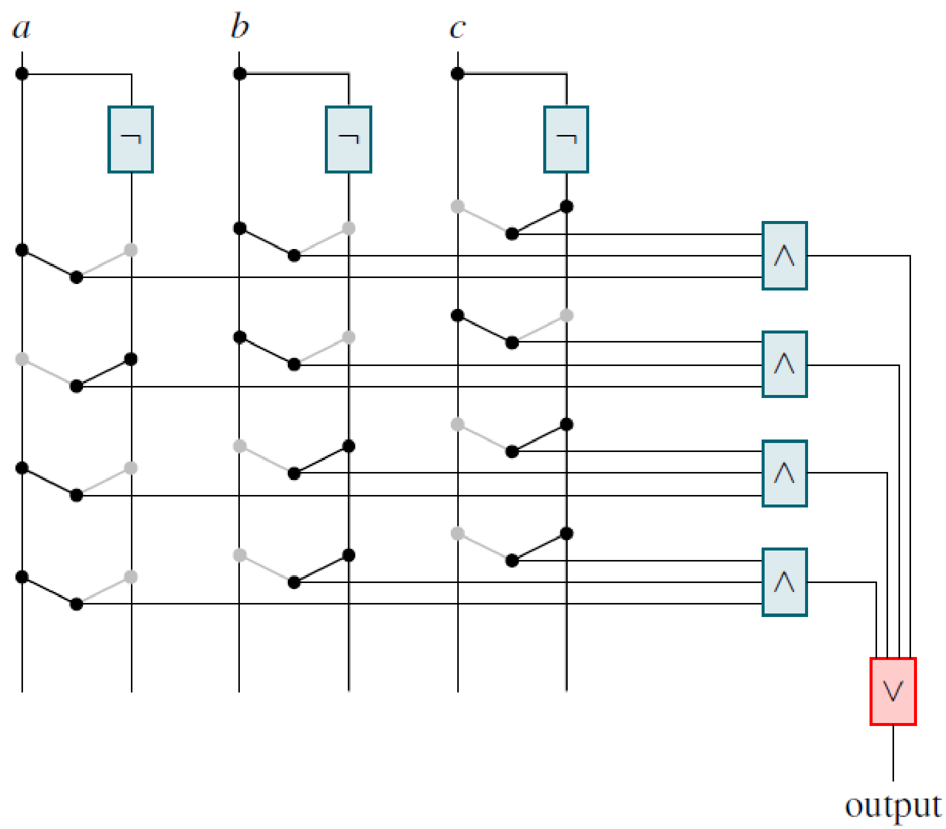




An Altera MAX 7000-series CPLD with 2500 gates.

Milyen logikai kifejezések programozhatók egy ilyen architektúrával?

(wikipédia)

# Disjunktiv normalform




$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

# Miért diszjunktív és miért normálforma?

- literál: atomi formula vagy atomi formula negáltja
- elemi diszjunkció / elemi konjunkció: literálok diszjunkciója / konjunkciója
- diszjunktív normálformájú formula: elemi konjunkciók diszjunkciója

  konjunktív normálformájú formula: elemi diszjunkciók konjunkciója

- **Normál**forma: minden formula átalakítható ilyen alakba

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

# Például

## diszjunktív normálforma

$A$

$A \vee B$

$A \vee \neg B$

$A \wedge \neg B$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

## Nem diszjunktív normálforma

$\neg(A \wedge B) \vee C,$

$(A \vee B) \wedge C,$

$(A \vee B) \rightarrow C,$

## De:

$\neg A \vee \neg B \vee C$

$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

$(\neg A \wedge \neg B) \vee (C)$

## Hogyan alakítható át egy formula diszjunktív normálalakra?

Kiindulás: $(\neg a \supset b) \wedge (b \wedge c)$

| $\beta(a)$ | $\beta(b)$ | $\beta(c)$ | $\hat{\beta}((\neg a \to b) \wedge (b \wedge c))$ | Monom |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 0 | 1 | 0 | 0 | – |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $\neg a \wedge b \wedge c$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | – |
| 1 | 0 | 1 | 0 | – |
| 1 | 1 | 0 | 0 | – |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $a \wedge b \wedge c$ |

Eredmény: $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

(A „→" implikációt jelöl) (miért „normál"?)

# Vegyük észre!

Az előző részben nemcsak az átalakításra adott eljárást, de bizonyítást is arra, hogy minden formula átalakítható ekvivalens formulává, amelyik diszjunktív normálformában van.

(Mi az, „hogy ekvivalens"?) 8

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

# Konjunktív normálforma

| konjunktív normálforma | nem konjunktív normálforma: | de: |
|---|---|---|
| $A \vee B$ | $\neg(A \vee B) \wedge C$ , | $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ |
| $A \vee \neg B$ | $(A \wedge B) \vee C$ , | $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ |
| $A \wedge \neg B$ | $(A \vee B) \rightarrow C$ | $(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ |
| $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ | | |

Az elemi diszjunkciókat klózoknak is nevezik.

Világos a következő:

Minden formulához hozzárendelhető vele ekvivalens konjunktív normálformában leíró formula.

Valóban: Adott $\varphi$. Vegyük $\neg\varphi$ diszjunktív normálalakját és alkalmazzuk a De Morgan szabályokat: $\varphi = \neg(\neg\varphi)$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

# Konstrukció az előzőek alapján

$\varphi : \neg(a \wedge \neg c) \vee \neg((\neg c \supset b) \vee a)$

$\neg\varphi : (a \wedge \neg c) \wedge ((\neg c \supset b) \vee a)$

| $\beta(a)$ | $\beta(b)$ | $\beta(c)$ | $\hat{\beta}(\neg\varphi)$ | Monom |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 0 | 1 | 0 | 0 | – |
| 0 | 1 | 1 | 0 | – |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | – |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $(a \wedge b \wedge \neg c)$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | – |

$$\neg\varphi \equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

$$\neg\neg\varphi$$

$$\neg((a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c))$$

$$\neg(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge \neg c)$$

$$\boxed{(\neg a \vee \neg\neg b \vee \neg\neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg\neg c)}$$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Második módszer

konjunktív / diszjunktív normálformára alakításra :

1. Az implikációs részformulák helyére a logikai jelek közötti összefüggések alapján diszjunkciós formulákat írunk.

2. De Morgan törvényei és a kétszeres tagadás törvénye segítségével elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon.

3. Végül a disztributivitás törvényei segítségével addig alakítjuk a formulát, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást.

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Harmadik módra, példa:

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Beispiel: Die Formel
$\varphi = (a \wedge \neg c) \vee \neg(\neg c \to b)$.

Beispiel: Die Schritte

1. Zunächst werden wir den Implaktions-Junktor los:

$$(a \wedge \neg c) \vee \neg(\neg c \to b) \equiv (a \wedge \neg c) \vee \neg(\neg\neg c \vee b)$$

2. Jetzt treiben wir die Negationen zu den Variablen:

$$(a \wedge \neg c) \vee \neg(\neg\neg c \vee b) \equiv (a \wedge \neg c) \vee (\neg\neg\neg c \wedge \neg b)$$

3. Jetzt entfernen wir die doppelten Negationen:

$$(a \wedge \neg c) \vee (\neg\neg\neg c \wedge \neg b) \equiv (a \wedge \neg c) \vee (\neg c \wedge \neg b)$$

4. Jetzt treiben wir die Und-Junktoren nach außen.

$$\begin{aligned}
& (a \wedge \neg c) \vee (\neg c \wedge \neg b) \\
\equiv\ & (a \vee (\neg c \wedge \neg b)) \wedge (\neg c \vee (\neg c \wedge \neg b)) \\
\equiv\ & ((a \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b)) \wedge ((\neg c \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee \neg b)) \\
\equiv\ & (a \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee \neg b)
\end{aligned}$$

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

# Formulák mint klózhalmazok

- <u>klóz</u>: literálok halmaza (implicit diszjunkció)
- <u>üres klóz</u>: literálok üres halmaza
  jele: $\square$
- <u>formula</u>: klózok halmaza (implicit konjunkció)
- <u>üres klózhalmaz</u>: $\emptyset$

---

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q \vee p \vee \neg p) \wedge (r \vee p)$$

$$\{\{p, r\}, \{\neg q, \neg p, q\}, \{p, \neg p, q\}\}.$$

---

(jelölés: $p, \neg p, \bar{p}$ )

Vegyük észre:

Van olyan interpretáció, amiben legalább egy literál igaz

- Az üres klóz $\square$ nem kielégíthető
- Az üres klózhalmaz kielégíthető

Minden klóz igaz minden interpretációban

Miért?



(piros labdás példa)

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

# <u>Rezolúciós szabály</u>

• Ha $C_1 = \{ \dots l \dots \}$ és $C_2 = \{ \dots l^c \dots \}$

komplemens literálpár

klóz ek komplemens literálpárt tartalmaznak, akkor ~~az~~ <u>rezolválhatók</u>.

• Az „eredmény" a <u>rezolvens</u> klóz:

$$C = C_1 - \{l\} \cup C_2 - \{l^c\}$$

# Például :

• Ha $$C_1 = ab\bar{c} \text{ and } C_2 = bc\bar{e}$$

komplemens
literálpár

klózhalmaznak
komplemens literálpárt tartalmaznak,
akkor ~~az~~ rezolválhatók.

• Az „eredmény" a rezolvens klóz :

$$C = (ab\bar{c} - \{\bar{c}\}) \cup (bc\bar{e} - \{c\}) = ab \cup b\bar{e} = ab\bar{e}.$$

# Vegyük észre:

Ha a klózok 2 komplemens literálpárt tartalmaznak, akkor a rezolvens azonosan igaz (érvényes).

Például: $C_1 \cup \{l_1, l_2\}$, $C_2 \cup \{l_1^c, l_2^c\}$

rezolválhatók: vegyük pl. $l_1$-et!

a rezolvens

$$\longrightarrow \quad C_1 \cup \{l_2\} \cup C_2 \cup \{l_2^c\}$$

Miért ilyen egy klóz érvényes?

# Miért érdekes ez az egész?

Mert formulák / klózhalmazok kielégíthetőségét fogjuk vizsgálni, és:

Állítás: A rezolvens akkor és csak akkor kielégíthető, ha rezolválandók is azok.

Valóban:

1. Ha a rezolválandók kielégíthetők, akkor a rezolvens is.
2. Ha a rezolvens kielégíthető, akkor a rezolválandók is

$C_1 = \{\ldots, l_1 \ldots l \ldots\}$ $\quad$ $C_2 = \{\ldots l_2 \ldots l^c \ldots\}$ ← rezolválandó

$C = \{\ldots l_1, \ldots l_2 \ldots\}$ ← rezolvens

(1) Legyen $\mathcal{S}$ olyan interpretáció, hogy $|C_1|_\mathcal{S} = |C_2|_\mathcal{S} = 1$. Ekkor:

$|l|_\mathcal{S} = 1$ és $|l^c|_\mathcal{S} = 0$ vagy $|l|_\mathcal{S} = 0$ és $|l^c|_\mathcal{S} = 1$

- Ha $|l^c|_\mathcal{S} = 0$, akkor van $l_2 \in C_2$, hogy $|l_2|_\mathcal{S} = 1$ és $l_2 \in C$.
- Ha $|l|_\mathcal{S} = 0$, akkor van $l_1 \in C_1$, hogy $|l_1|_\mathcal{S} = 1$ és $l_1 \in C$.

→ Akárhogy is van, $|C|_\mathcal{S} = 1$.

(miért is?)

$C_1 = \{\dots, l_1 \dots l \dots\}$ $\quad$ $C_2 = \{\dots l_2 \dots l^c \dots\}$ ← rezolválandó

$C = \{\dots l_1, \dots l_2 \dots\}$ ← rezolvens

(2) Ha $|C|_g = 1$ ($g$-ben $C$ igaz), akkor van olyan $l' \in C$ literál, hogy $|l'|_g = 1$.

- Mivel $C$-t $C_1, C_2$-ből kaptuk, $l' \in C_1$ vagy $l' \in C_2$.
- Mivel $C_1, C_2$-t rezolváltuk, létezik $l, l^c \notin C$, hogy $l \in C_1$, $l^c \in C_2$

→ Ha $l' \in C_1$, akkor $g$-t terjesszük ki úgy, hogy $|l^c|_g = 1$ és $|l|_g = 0$. Ha $l' \in C_2$, akkor pedig $|l^c|_g = 0$ és $|l|_g = 1$.

→ Ekkor $|C_1|_g = |C_2|_g = 1$, azaz $C_1$ és $C_2$ kielégíthető. (Miért is?) ?,

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

# A rezolúciós eljárás

Egy klózhalmazról (formuláról) eldönti, hogy kielégíthető-e. Legyen a halmaz S.

- Vegyünk S-ből két rezolválható klózt.
- Képezzük el a rezolvenst.
- Ha a rezolvens az üres klóz (□)

  → a formula kielégíthetetlen

  különben

  → adjuk hozzá ~~[illegible]~~ a rezolvenst a klózhalmazhoz
- Álljunk meg, ha nincs több rezolválható klóz.

# Például:

$S_1.$ $\{p,\ \bar{p}q,\ \bar{r},\ \bar{p}\bar{q}r\}$

$S_2.$ $\{p,\ \bar{p}q,\ \bar{r},\ \bar{p}\bar{q}\bar{r},\ \bar{p}\bar{q}\}$

$S_3.$ $\{p,\ \bar{p}q,\ \bar{r},\ \bar{p}\bar{q}\bar{r},\ \bar{p}\bar{q},\ \bar{p}\}$

$S_4.$ $\{p,\ \bar{p}q,\ \bar{r},\ \bar{p}\bar{q}\bar{r},\ \bar{p}\bar{q},\ \bar{p},\ \square\}$

az üres klóz

Mivel $\square$ nem kielégíthető, $S_4$ sem kielégíthető. A rezolúciós szabályt használtuk, tehát $S_1$ sem kielégíthető.

(Nem műk. maga eleje, ha 1. kielégíthetetlen!)

# A rezolúció mint bizonyítási módszer –
## – mechanikus eljárás

- $\varphi$ formula érvényes, ha $\neg\varphi$ klózhalmaz alapján levezethető $\square$
- $\Gamma \models C$, ha a $\Gamma \cup \neg C$-t reprezentáló klózhalmaz nem kielégíthető.

Ez mit jelent? $\rightarrow$ A $C_i$-ket reprezentáló klózhalmazok uniója és a $\neg C$-t reprezentáló klózhalmaz uniója

$$\boxed{C_1, C_2 \dots C_k \quad \neg C}$$

## Például:

igazoljuk, hogy:

$$x, y, z \supset u, z \models x \wedge y \wedge u$$

Azaz azt, hogy:

$x, y, z \supset u, z, \neg(x \wedge y \wedge u)$ nem kielégíthető.

Lássuk: $\underline{x, y, \neg z \vee u, z, \neg x \vee \neg y \vee \neg u}$

1. $x, y, \bar{z}u, z, \bar{x}\bar{y}\bar{u}$
2. $x, y, \bar{z}u, z, \bar{x}\bar{y}\bar{u}, u$
3. $x, y, \bar{z}u, z, \bar{x}\bar{y}\bar{u}, u, \bar{x}\bar{y}$
4. $x, y, \bar{z}u, z, \bar{x}\bar{y}\bar{u}, u, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}$
5. $x, y, \bar{z}u, z, \bar{x}\bar{y}\bar{u}, u, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}, \square$

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  – Diszjunktív normálforma
  – Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  – Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  – A rezolúciós szabály
  – A rezolúciós eljárás
  – Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)

## A rezolúció tehát egy bizonyítási módszer (ismét)

$\boxed{\text{logikai következmény} \Longleftrightarrow \text{bizonyíthatóság}}$

(1) A rezolúció **helyes**:
Ha S klózhalmazból levezethető az üres klóz, akkor S nem kielégíthető.

(2) A rezolúció **teljes**:
Ha S klózhalmaz nem kielégíthető, akkor a rezolúció előállítja az üres klózt.

((1) látjuk, (2)-t nem bizonyítjuk.)

# A mai órán

- Formulák normál alakja (normálformája), normálformára alakítás
  - Diszjunktív normálforma
  - Konjunktív normálforma
- Egy újabb bizonyítási eljárás: Rezolúció
  - Konjunktív normálformában lévő formulák mint klózhalmazok
  - A rezolúciós szabály
  - A rezolúciós eljárás
  - Helyesség (könnyű), teljesség (nem bizonyítjuk)