Az informatika logikai alapjai
10. feladatsor

1. Igazoljuk az implikációval kapcsolatos „kvantorkiemelés”-es szabályokat.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \supset B)$
2. $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x(B \supset A)$

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges **elsőrendű nyelv**.

Az $A \in Form$ formulát $\boxed{\text{prenex alakúnak nevezzük}}$, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

1. az A formula kvantormentes, azaz sem a $\forall$ sem a $\exists$ kvantor nem szerepel benne;
2. az A formula $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alakú, ahol
   a. $B \in Form$ kvantormentes formula;
   b. $x_1, x_2 \ldots x_n \in Var$ különböző változók;
   c. $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ kvantorok.

Megjegyzés

- A definíció értelmében ha az A formula kvantormentes, azaz egyetlen kvantor sem szerepel benne, akkor az A formula prenex alakú.

Például: Prenexformulák: $\neg P(x, x)$, $\forall x \forall y (Q(x, y) \supset \neg P(x))$

Nem prenexformula: $\forall x \forall y Q(x, y) \supset \neg P(x)$

$$1.\ \neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$$
$$2.\ \neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

$$1.\ A\supset\forall xB \Leftrightarrow \forall x(A\supset B)$$
$$2.\ \forall xB\supset A \Leftrightarrow \exists x(B\supset A)$$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

$$1.\ A\supset\exists xB \Leftrightarrow \exists x(A\supset B)$$
$$2.\ \exists xB\supset A \Leftrightarrow \forall x(B\supset A)$$

Hozzuk a

$$\forall x(\forall yQ(x,y)\supset\neg\exists xP(x))\supset\forall yQ(x,y)$$

formulát prenex alakúra.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

$$1.\ A\wedge\forall xB \Leftrightarrow \forall x(A\wedge B)$$
$$2.\ A\wedge\exists xB \Leftrightarrow \exists x(A\wedge B)$$

1. Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall wQ(v,w)\supset\neg\exists zP(z))\supset\forall yQ(x,y)$$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

$$1.\ A\vee\forall xB \Leftrightarrow \forall x(A\vee B)$$
$$2.\ A\vee\exists xB \Leftrightarrow \exists x(A\vee B)$$

2. De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall wQ(v,w)\supset\forall z\neg P(z))\supset\forall yQ(x,y)$$

3. Kvantorkiemelés:

$$\forall v\exists w\forall z(Q(v,w)\supset\neg P(z))\supset\forall yQ(x,y)$$

4. Kvantorkiemelés:

$$\exists v\forall w\exists z\forall y((Q(v,w)\supset\neg P(z))\supset Q(x,y))$$

2.13. FELADAT. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját!

a) $\forall x P(x) \supset \neg \exists x P(x) \vee Q(x,c)$

b) $\exists x \forall y Q(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$

h) $\forall x(\exists y Q(x,y) \supset \forall x P(x)) \supset \neg(\forall x P(x) \vee \forall x R(x))$

7.P.5. Logikai törvények-e az alábbi formulák?

(a) $\neg\exists x \neg P(x) \vee \forall x \neg P(x)$

(b) $\exists x P(x) \wedge \neg\forall x P(x)$

(c) $\exists x \forall y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$

(d) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$

(e) $\forall x P(x) \vee \exists x R(x) \supset \forall x (P(x) \vee R(x))$

A c) és az e) formulákat vizsgáljuk meg a szemantikus tablók módszerével.

7.P.17. Ellenőrizzük, hogy helyesek-e az alábbi következtetések!

(d) Premisszák:
Minden hegymászó bátor. Minden hegymászó óvatos.
Konklúzió:
Van, aki bátor, de óvatos.

7.P.17. Ellenőrizzük, hogy helyesek-e az alábbi következtetések!

(e) Premisszák:
A vizsgán volt olyan feladat, amelyiket minden hallgató megoldott.
Konklúzió:
Tehát minden hallgató meg tudott oldani legalább egy feladatot.