

# Az informatika logikai alapjai

## 10. előadás

Vaszi György

[vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu](mailto:vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu)

I. emelet 110-es szoba

# A múlt órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

## nulladrendű nyelv

$$L^0 = \langle L, Con, Form \rangle$$

- szemantikai szabályok
- interpretáció,  $\mathcal{I}$
- modell

## elsőrendű nyelv

$$L^{(1)} = \langle L, Var, Con, Term, Form \rangle$$

- szemantikai szabályok
- interpretáció  $\langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$   
+  
változó értékelés:  $v$
- modell

- kiellégíthető formula
- kiellégíthetetlen formula
- logikai következmény
- értékes formula
- logikai ekvivalencia:

# A múlt órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

nyilatkozati nyelv  
 $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

első rendű nyelv  
 $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthetőség formula halmaz  
minden részhatárra  
kielégíthetőség
- kielégíthetetlen formula halmaz  
minden bővítésre kielégíthet-  
etlen.
- A követelemény reláció átfogalmazása  
formula halmaz kielégíthetetlen  
észt egyenlőségével
- Egyenlőség formula minden formula halmaz  
következménye
- kielégíthetetlen formula halmazok  
minden formula következménye
- Következményreláció és  
implikáció  
– deduktív levezetés  
és megfordítás
- Logikai ekvivalencia és  
"≡" (materiális ekvivalencia)

# A múlt órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv**,  $A \in Form$  egy formula és  $x \in Var$  egy változó.

Ekkor

$$1. \neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$$

$$2. \neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$$

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv**,  $A \in Form$  egy formula és  $x \in Var$  egy változó.

Ekkor

$$1. \exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$$

$$2. \forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$$

## Bizonyítás

Ha a **kvantifikáció De Morgan törvényeinek** mindkét oldalát negáljuk, akkor a **kettős negáció törvényének** alkalmazásával megkapjuk a kifejezhetőségre vonatkozó logikai ekvivalenciákat.

$$1. \neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$$

$$2. \neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$$

# Továbbá/1

- $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$   
 $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$
- $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$

Visszafelé nem igaz, hiszen tudunk mutatni olyan interpretációt, amikor a jobb oldal teljesül, de a bal nem. Például:

$U = \{a, b\}$  igen, ha  $A(a, b)$  igaz,  $A(b, a)$  igaz, és az összes többi kombináció hamis.

## Továbbá/2

- $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$   
 $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$   
 $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

Visszafelé nem igaz, hiszen tudunk választani olyan interpretációt, amikor a jobb oldal teljesül, de a bal nem. Például:

$U = \{a, b\}$  igaz, hogy  $A(a)$  igaz,  $A(b)$  hamis,  
és  $B(a)$  hamis,  $B(b)$  igaz.

(miért is?)

# Azaz, összefoglalva

- $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$   
 $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$
- $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$
- $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$   
 $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$   
 $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

# A mai órán

- A kvantifikáció törvényei, folytatás
- Prenex normálforma
- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra

Az alábbi törvényeket gyakran a kvantorok mozgatására vonatkozó törvényeknek nevezik. A tényleges tartalmukhoz közelebb állna, ha a kvantorok hatókörének bővítésére vonatkozó törvényeknek neveznénk ezeket.

Kvantorok és konjunkció

Kvantorok és diszjunkció

Univerzális kvantor és

implikáció

Egzisztenciális kvantor és implikáció

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv**,  $A, B \in Form$  két formula és  $x \in Var$  egy változó.

Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

$$1. A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B)$$

$$2. A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B)$$

## Megjegyzés

- A konjunkció kommutativitása miatt a tétel közvetlen következménye az alábbi két logikai ekvivalencia:

◦ Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

$$\blacksquare \forall x B \wedge A \Leftrightarrow \forall x (B \wedge A)$$

$$\blacksquare \exists x B \wedge A \Leftrightarrow \exists x (B \wedge A)$$

Az alábbi törvényeket gyakran a kvantorok mozgására vonatkozó törvényeknek nevezik. A tényleges tartalmukhoz közelebb állna, ha a kvantorok hatókörének bővítésére vonatkozó törvényeknek neveznénk ezeket.

Kvantorok és konjunkció   Kvantorok és diszjunkció   Univerzális kvantor és implikáció   Egzisztenciális kvantor és implikáció

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv**,  $A, B \in Form$  két formula és  $x \in Var$  egy változó.

Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

1.  $A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B)$
2.  $A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B)$

Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

1.  $A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$
2.  $A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$

## Megjegyzés

- A konjunkció kommutativitása miatt a tétel közvetlen következménye az alábbi két logikai ekvivalencia:

◦ Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

- $\forall x B \wedge A \Leftrightarrow \forall x (B \wedge A)$
- $\exists x B \wedge A \Leftrightarrow \exists x (B \wedge A)$

◦ Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

- $\forall x B \vee A \Leftrightarrow \forall x (B \vee A)$
- $\exists x B \vee A \Leftrightarrow \exists x (B \vee A)$

Kvantorok és konjunkció   Kvantorok és diszjunkció   Univerzális kvantor és  
implikáció   Egzisztenciális kvantor és implikáció

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv**,  $A, B \in Form$  két formula és  $x \in Var$  egy változó.

Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

1.  $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \supset B)$
2.  $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x (B \supset A)$

Kvantorok és konjunkció

Kvantorok és diszjunkció

Univerzális kvantor és

implikáció

Egzisztenciális kvantor és implikáció

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv**,  $A, B \in Form$  két formula és  $x \in Var$  egy változó.

Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

1.  $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \supset B)$
2.  $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x (B \supset A)$

Ha  $x \notin FreeVar(A)$ , akkor

1.  $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \supset B)$
2.  $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x (B \supset A)$

# A mai órán

- A kvantifikáció törvényei, folytatás
- Prenex normálforma
- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra

Behelyettesíthetőség

Átnevezés

Kongruens formulák

Változótiszta alak

Prenex

alak

## Definíció

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv** és  $A \in Form$  egy formula.

Az  $A$  formulát változóiban tisztának nevezünk, ha

1. szabad és kötött változói diszjunkt halmazt alkotnak, azaz

$$FreeVar(A) \cap BoundVar(A) = \emptyset ,$$

2. minden kötött változó pontosan egyszer fordul elő kvantort közvetlenül követő pozícióban (minden kötött változó pontosan egy kvantornak a változója).

# Korábban már láttuk:

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy **elsőrendű nyelv** és  $A \in Form$  egy formula.

Ekkor létezik olyan  $B \in Form$  formula, hogy

1. a  $B$  formula változóiban tiszta,
2. a  $B$  formula kongruens az  $A$  formulával,

## Megjegyzés

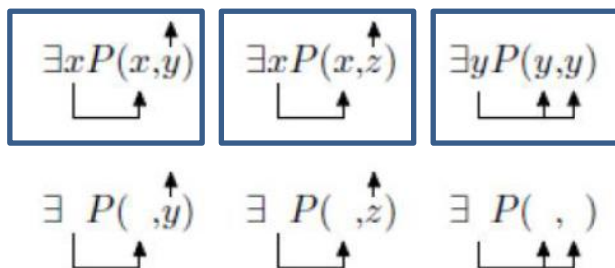
- A tételben szereplő  $B$  formula a kongruencia miatt logikailag ekvivalens az  $A$  formulával.

Mit jelent, hogy két formula „kongruens” egymással?

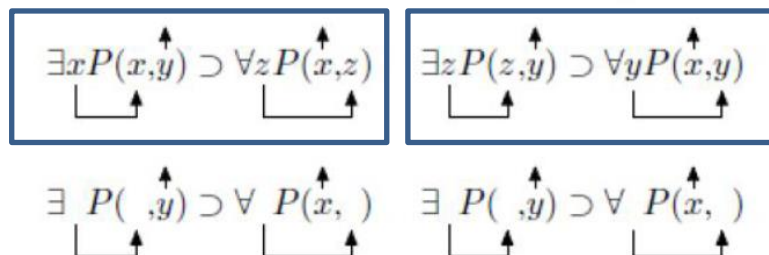
# Kongruens formulák, variáns (korábban láttuk)

Két formula **kongruens** egymással, más néven a formulák **egymás variánsai**, ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek.

(a) A formulák nem egymás variánsai, mivel vázuk különbözik:



(b) A két formula egymás variánsa, mivel vázuk megegyezik:



## Definíció

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy tetszőleges **elsőrendű nyelv**.

Az  $A \in Form$  formulát **prenex alakúnak nevezzük**, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

1. az  $A$  formula kvantormentes, azaz sem a  $\forall$  sem a  $\exists$  kvantor nem szerepel benne;
2. az  $A$  formula  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) alakú, ahol
  - a.  $B \in Form$  kvantormentes formula;
  - b.  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Var$  különböző változók;
  - c.  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$  kvantorok.

## Megjegyzés

- A definíció értelmében ha az  $A$  formula kvantormentes, azaz egyetlen kvantor sem szerepel benne, akkor az  $A$  formula prenex alakú.

Például: Prenexformulák:  $\neg P(x, x), \forall x \forall y (Q(x, y) \supset \neg P(x))$

Nem prenexformula:  $\forall x \forall y Q(x, y) \supset \neg P(x)$

## Tétel

Legyen  $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$  egy tetszőleges **elsőrendű nyelv** és  $A \in Form$ .

Ekkor létezik olyan  $B \in Form$ , hogy

1. a  $B$  formula prenex alakú,
2.  $A \Leftrightarrow B$ .

## A prenex alakra hozás lépései

1. A  $(A \equiv B) \Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$  ekvivalencia segítségével a **(materiális) ekvivalencia** műveletét fel kell oldani.
2. Változótiszta alakra hozás, azaz meg kell határozni az eredeti formulával kongruens **változóiban tiszta formulát**.
3. A **kvantifikáció De Morgan törvényeivel** és az **állításlogikában megtanult ekvivalenciákkal** el kell érni, hogy egyetlen negáció hatókörében se szerepeljen kvantor.
4. **Kvantormozgatási ekvivalenciák** alkalmazásával a kvantorok a formula elejére vihetők.

## Például:

Hozzuk a

$$\forall x(\forall yQ(x, y) \supset \neg \exists xP(x)) \supset \forall yQ(x, y)$$

formulát prenex alakúra.

- ❶ Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall wQ(v, w) \supset \neg \exists zP(z)) \supset \forall yQ(x, y)$$

- ❷ De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall wQ(v, w) \supset \forall z\neg P(z)) \supset \forall yQ(x, y)$$

- ❸ Kvantorkiemelés:

$$\forall v\exists w\forall z(Q(v, w) \supset \neg P(z)) \supset \forall yQ(x, y)$$

- ❹ Kvantorkiemelés:

$$\exists v\forall w\exists z\forall y((Q(v, w) \supset \neg P(z)) \supset Q(x, y))$$

$$1. \neg \exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$$

$$2. \neg \forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$$

## Például:

Hozzuk a

$$\forall x(\forall y Q(x, y) \supset \neg \exists x P(x)) \supset \forall y Q(x, y)$$

formulát prenex alakúra.

- ① Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall w Q(v, w) \supset \neg \exists z P(z)) \supset \forall y Q(x, y)$$

- ② De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall w Q(v, w) \supset \forall z \neg P(z)) \supset \forall y Q(x, y)$$

- ③ Kvantorkiemelés:

$$\forall v \exists w \forall z (Q(v, w) \supset \neg P(z)) \supset \forall y Q(x, y)$$

- ④ Kvantorkiemelés:

$$\exists v \forall w \exists z \forall y ((Q(v, w) \supset \neg P(z)) \supset Q(x, y))$$

Ha  $x \notin \text{FreeVar}(A)$ , akkor

$$1. A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \supset B)$$

$$2. \forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x (B \supset A)$$

## Például:

Hozzuk a

$$\forall x(\forall yQ(x, y) \supset \neg \exists xP(x)) \supset \forall yQ(x, y)$$

formulát prenex alakúra.

- 1 Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall wQ(v, w) \supset \neg \exists zP(z)) \supset \forall yQ(x, y)$$

- 2 De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall wQ(v, w) \supset \forall z\neg P(z)) \supset \forall yQ(x, y)$$

- 3 Kvantorkiemelés:

$$\forall v\exists w\forall z(Q(v, w) \supset \neg P(z)) \supset \forall yQ(x, y)$$

- 4 Kvantorkiemelés:

$$\exists v\forall w\exists z\forall y((Q(v, w) \supset \neg P(z)) \supset Q(x, y))$$

Ha  $x \notin \text{FreeVar}(A)$ , akkor

$$1. A \supset \forall xB \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$$

$$2. \forall xB \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$$

# A mai órán

- A kvantifikáció törvényei, folytatás
- Prenex normálforma
- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra

# Emlékeztető: szemantikus táblák nulladrendű logikában

Kielégíthető-e :

$$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

$$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

↓

$$p, \neg q \vee \neg p$$

↙

↘

$$p, \neg q$$

$$p, \neg p$$

nyitott

zárt

Kielégíthető, ha  $\{p, \neg q\}$  vagy  $\{p, \neg p\}$  kielégíthető.

# Emlékeztető: szemantikus táblák nulladrendű logikában

Kielégíthető?

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

↓

$$p \vee q, \neg p \wedge \neg q$$

↓

$$\underline{p \vee q}, \underline{\neg p}, \underline{\neg q}$$

↙

↘

$$\underline{p}, \underline{\neg p}, \underline{\neg q}$$

$$\underline{q}, \underline{\neg p}, \underline{\neg q}$$

zárt

zárt

Kielégíthető, ha  $\{p, \neg p, \neg q\}$  vagy  $\{q, \neg p, \neg q\}$   
kielégíthető.

# Emlékeztető: szemantikus táblák nulladrendű logikában

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$\neg\neg A_1$	$A_1$				
$A_1 \wedge A_2$	$A_1$	$A_2$	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	$B_1$	$B_2$
$\neg(A_1 \supset A_2)$	$A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	$B_2$

- $\boxed{\alpha}$  tipusú formula esetén bővíthető a formula halmazont
- $\boxed{\beta}$  tipusú formula esetén elágaztatható, és alternatívák közül bővíthető a formula halmazont
- A levezetés végénél mindig igazolható (vagy hamis/zárt)  $\neg$

# Próbálkozzunk hasonlóval elsőrendű formulák esetén

Kezdjünk egy ismert formulával:

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$$

Vizsgáljuk a negációja állítását lehet-e igazítani:

$$\neg (\forall x (P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x)))$$

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)), \neg (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$$

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)), \neg \forall x P(x), \neg \forall x Q(x)$$

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x), \exists x \neg Q(x)$$

↑  
Igaz, ha van olyan  $a \in U$ , hogy  $\neg Q(a)$  teljesül

Aber:

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x), \quad \exists x \neg Q(x)$$

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)), \downarrow \forall x P(x), \quad \neg Q(a) \quad \leftarrow a \in U, \neg Q(a) \text{ gilt}$$

↑  
U könnte elemente  
enthalten, wo

$$\forall x (P(x) \supset Q(x)) \downarrow P(a), \neg Q(a) \quad \leftarrow a \in U - \emptyset \text{ ist}$$

$$P(a) \supset Q(a), \downarrow P(a), \neg Q(a)$$

$$\neg P(a), P(a), \neg Q(a) \quad \leftarrow \text{Zirkel} \quad Q(a), P(a) \supset Q(a)$$

Zirkel

Zirkel

## Tamla's

1. Az egzistenciális kvantifikált formula  
paramétereit levozték a keresendő

# Másik példa - Azt nem illyen egyszerű a dolog

Vegyük egy tetszőleges  $P$ -t, de nem érvegy  
formát és vizsgáljuk a negáció  
tetszőleges tétel levezetéseit.

$P(a_1)$   $Q(a_2)$

$$\neg (\forall x(p(x) \vee q(x)) \supset (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg (\forall x p(x) \vee \forall x q(x))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg \forall x p(x), \neg \forall x q(x)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \exists \neg x p(x), \exists \neg x q(x)$$

$\exists x \neg q(x)$

$$\downarrow$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \exists \neg x p(x), \neg q(a_1)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(a_1), \neg q(a_1)$$

$$\downarrow$$

$$p(a_1) \vee q(a_1), \neg p(a_1), \neg q(a_1)$$

$$\swarrow$$

$$p(a_1), \neg p(a_1), \neg q(a_1)$$

X

$$\searrow$$

$$q(a_1), \neg p(a_1), \neg q(a_1)$$

X

## Taulsa'g

1. Az egzistenciális kvantifikátorok paraméterek levezetését követően
2. Kibővítő egzistenciális kvantifikátorok kibővítő paramétereket kell használni.

Ar előző tétel ~~teljesen~~  
még egyszerű

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \exists \neg xp(x), \exists \neg xq(x)$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \exists \neg xp(x), \neg q(a_1)$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(a_2), \neg q(a_1).$$

$$p(a_1) \vee q(a_1), \neg p(a_2), \neg q(a_1).$$

$$p(a_1), \neg p(a_2), \neg q(a_1)$$

nem van

$$q(a_1), \neg p(a_2), \neg q(a_1)$$

szint

Ar elõ'ri' pilda kehtesin - Meis nem  
lunzie eymeni

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(a_2), \neg q(a_1)$$

↓

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), p(a_1) \vee q(a_1), \neg p(a_2), \neg q(a_1)$$

↓

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), p(a_2) \vee q(a_2), p(a_1) \vee q(a_1), \neg p(a_2), \neg q(a_1).$$

↙

↘

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \underline{p(a_2)}, \underline{p(a_1) \vee q(a_1)}, \neg p(a_2), \neg q(a_1)$$

↙

↘

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \underline{p(a_2)}, \underline{p(a_1)}$$
  
$$\neg p(a_2), \neg q(a_1)$$
  
zärt

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \underline{q(a_2)}, \underline{p(a_1) \vee q(a_1)}, \neg p(a_2), \neg q(a_1)$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \underline{q(a_2)}, \underline{p(a_1)}$$
  
$$\neg p(a_2), \neg q(a_1)$$
  
nem zärt

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \underline{p(a_2)}, \underline{q(a_1)}$$
  
$$\neg p(a_2), \neg q(a_1)$$
  
zärt

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \underline{q(a_2)}, \underline{q(a_1)}$$
  
$$\neg p(a_2), \neg q(a_1)$$
  
zärt

# Tanulási

1. Az egzisztenciális kvantifikált formula parameterrel levezethető
2. Kvantifikátor egzisztenciális kvantifikált formulaiban kvantifikátor paramétereket kell használni.
3. Az univerzális formulaat az összes levezethető parameterrel kell írni:

geg. es pilda - Schreibe  
wegsetzen a<sub>1</sub> gar

$$\forall x \exists y p(x, y)$$

↓

$$\forall x \exists y p(x, y), \exists y p(a_1, y)$$

$a_1 \in U$

↓

$$\forall x \exists y p(x, y), p(a_1, a_2)$$

↓

$$\forall x \exists y p(x, y), \exists y p(a_2, y), p(a_1, a_2)$$

↓

$$\forall x \exists y p(x, y), p(a_2, a_3), p(a_1, a_2).$$

↓

$\dots \exists y p(a_3, y) \dots$  *... sich wählen ...*

Universalquantifikation des Prädikats  
ergänzen mit der a'g

$$\begin{aligned} & \{\forall x p(a, x)\} \\ & \quad \downarrow \\ & \{\underline{p(a, a)}, \forall x p(a, x)\} \\ & \quad \downarrow \\ & \{p(a, a), \forall x p(a, x)\}. \end{aligned}$$

Meig esen delay...

$$\begin{aligned} & \boxed{\forall x \exists y p(x, y) \wedge \forall x (q(x) \wedge \neg q(x))} \\ & \downarrow \\ & \boxed{\forall x \exists y p(x, y)} \cdot \boxed{\forall x (q(x) \wedge \neg q(x))} \\ & \downarrow \\ & \boxed{\forall x \exists y p(x, y)} \cdot \boxed{\exists y p(a_1, y)} \cdot \boxed{\forall x (q(x) \wedge \neg q(x))} \\ & \downarrow \\ & \forall x \exists y p(x, y), \boxed{p(a_1, a_2)}, \boxed{\forall x (q(x) \wedge \neg q(x))} \\ & \downarrow \\ & \forall x \exists y p(x, y), \boxed{\exists y p(a_2, y)}, \boxed{p(a_1, a_2)}, \boxed{\forall x (q(x) \wedge \neg q(x))} \\ & \downarrow \\ & \forall x \exists y p(x, y), \boxed{p(a_2, a_3)}, \boxed{p(a_1, a_2)}, \boxed{\forall x (q(x) \wedge \neg q(x))} \end{aligned}$$

||| Aber in diesem Fall, kann man nicht formulaal  
feststellen, ob eine formula wahr ist.

## Tanulsa'g

1. Az egzisztenciális kvantifikált formula'k paramétereit levezetési szabályokkal lehet levezetni.
2. Kibővítő egzisztenciális kvantifikált formula'khoz kibővítő paramétereket kell használni.
3. Az univerzális formula'kat az  $\exists$ -szabály levezetési paraméterrel kell levezetni.
4. Az ágar nem feltétlenül vezet
5. Figyelni kell a natúr algaluorai és kompozícióra.

Tela'4 : A saha' lya

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\neg\neg A_1$	$A_1$	
$A_1 \wedge A_2$	$A_1$	$A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \supset A_2)$	$A_1$	$\neg A_2$

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	$B_1$	$B_2$
$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	$B_2$

$\gamma$	$\gamma(a)$
$\forall x A(x)$	$A(a)$
$\neg \exists x A(x)$	$\neg A(a)$

$\delta$	$\delta(a)$
$\exists x A(x)$	$A(a)$
$\neg \forall x A(x)$	$\neg A(a)$

## Teliat : Az algoritmus

A dett :  $\phi$  formula  $\swarrow$  fa

Érdemes : Egy gráf (nemativus felek), ahol az ágyak  
lehetnek gyilkos, zaitak és megselelt.

- A fa egy csúcsa  $l$ ,  $U(l)$ ,  $C(l)$   $\xleftarrow{\text{constant}}$

Kérdéses  $\phi$  is a lenne  
lind constant.

$\xleftarrow{\text{formula}}$

## Ar algant tuis / lalg lates

Veegmii 2 eeg llooleet, ami uic yiffner uen  
2istner jeli lue. Fi'gelle a comadre  
teegni 4 an adalhiat:

1. • Ha  $U(l)$ -her uen uenpallmenter literalfoer,  
jeli'fii l-et 2ai tral
2. • Ha  $U(l)$ -her uener ojan famla'4, ami'4 uen  
literalfoer, uegmii'4 les  $\alpha, \beta, \gamma$  famla'4, A-t  
- Ha  $A\alpha$  famla, jaijin el no'raisan  
- Ha  $A\beta$  famla, jaijin  $k$  el no'raisan  
2 a uastander  
hulueris  
u uaiter tene

## Ar algan'hus / fady latesi 2

- Ha  $A$   $\sigma$  faula, allas  $l'$  esy iij crics, alant

$$U(l') = U(l) - \{A\} \cup \{\sigma(a')\}$$

$$C(l') = C(l) \cup \{a'\}$$

•  $a'$  iij  
kastus

• Ar  $U(l)$  ulli  $\gamma$  faula's leezere

$$\{\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_m}\} \text{ ei } C(l) = \{c_{l_1}, \dots, c_{l_m}\}$$

•  $\sigma(a)$  a  
nabaila  
semit

$$U(l') = U(l) \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k \gamma_{l_i}(c_{l_j}) \right\}$$

$$C(l') = C(l)$$

- Ha  $\gamma$  ar  $\gamma$  faula's nemea, ei  $U(l') = U(l)$ , allas  
 $l$ -et jelo'epi'it yitettua.

vor utar & on ag:

- zait, la zait leni'len ne'grö'di'
- zibott, la yizibott leni'len ne'grö'di',  
wen wögtelen

on lähla:

- zait, la mi der a'ga zait
- yizibott, mi lö'chen.

# Például: Vizsgáljunk meg egy kielégíthető formulát

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$\neg \left[ \forall x (P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \right]$$

↓

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$$

↓

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg \forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x)$$

↓

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg P(x), \exists x \neg Q(x)$$

↓

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg P(x), \neg Q(a_1)$$

↓

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)), \neg P(a_2), \neg Q(a_1)$$

↓

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)), P(a_1) \vee Q(a_1), P(a_2) \vee Q(a_2) \\ \neg P(a_2), \neg Q(a_1)$$

# A mai órán

- A kvantifikáció törvényei, folytatás
- Prenex normálforma
- Egy bizonyítási módszer: a szemantikus táblák módszerének adaptációja elsőrendű formulákra
- Helyesség? Teljesség?