Az informatika logikai alapjai
4. feladatsor

Ki lehet fejezni ezeket egyetlen művelettel ?

Igen: A nand vagy nor önmagában is elegendő.

Például:

Fejezzük ki $\wedge$-t nand segítségével:

- $\boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \text{ nand } B)$

$\Leftrightarrow \neg((A \text{ nand } B) \wedge (A \text{ nand } B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{(A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)}$

- $\boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ nand } A}$

Melyik lépés miért jogos ?

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

8.I.7. Vezessük be a következő jelölést (Peirce vonás):

$$A \circ B \leftrightharpoons \neg A \wedge \neg B.$$

A bevezetett $\circ$ összekötő jel neve „sem-sem”, $A \circ B$ jelentése: „sem A, sem B”. Fejezzük ki a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikai összekötő jeleket a $\circ$ jel segítségével!

Másik példa

Kielégíthető?

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) & \\
 & \downarrow & \\
 & p \vee q, \neg p \wedge \neg q & \\
 & \downarrow & \\
 & p \vee q, \neg p, \neg q & \\
\swarrow & & \searrow \\
p, \neg p, \neg q & & q, \neg p, \neg q \\
\text{zárt} & & \text{zárt}
\end{array}$$

Kielégíthető, ha $\{p, \neg p, \neg q\}$ vagy $\{q, \neg p, \neg q\}$ kielégíthető.

Milyen szabályok szerint konstruáltuk a táblázat ?

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formulák esetén bővítettük a formulahalmazt
- $\boxed{\beta}$ típusú formulák esetén elágaztunk, és alternatívákkal bővítettük a formulahalmazt
- A leveleket megjelöltük ~~[illegible]~~ (nyitott / zárt)

A tábla konstrukciója precízebben
(algoritmus)

Bemenet: Φ formula, **Kimenet**: T szemantikus tábla (minden levele ~~megjelölve~~ megjelölve)

- Kezdetben T-nek egy gyökér csúcsa van, címkéje $\{\Phi\}$
- Válasszunk egy l meg nem jelölt levelet

  $U(l)$ a címke formulahalmaz

  Hogyan?

  - Ha $U(l)$ literálokból áll csak, jelöljük meg.
  - Ha $A \in U(l)$ nem literál:
    - Ha A α típusú formula, A_1, A_2 részekkel: $\longrightarrow$

      $$\begin{array}{l} \bullet\ l,\ U(l) \\ \mid \\ \bullet\ l',\ U(l) - \{A\} \cup \{A_1, A_2\} \end{array}$$

    - Ha A β típusú formula, B_1, B_2 részekkel: $\longrightarrow$

      $$\begin{array}{ccc} & \bullet\ l,\ U(l) & \\ \swarrow & & \searrow \\ U(l) - \{B\} \cup \{B_1\} & & U(l) - \{B\} \cup \{B_2\} \end{array}$$

A tábla konstrukciója precízebben
(algoritmus)

<u>Bemenet</u>: Φ formula, <u>Kimenet</u>: $\mathcal{T}$ szemantikus tábla (minden levele ~~[illegible]~~ megjelölve)

• Kezdetben $\mathcal{T}$-nek egy gyökér csúcs... (Φ)

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\downarrow$$
$$p \vee q, \neg p \wedge \neg q$$
$$\downarrow$$
$$p \vee q, \neg p, \neg q$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$p, \neg p, \neg q \qquad\qquad q, \neg p, \neg q$$

• Vála... ...lt levelet $U(\ell)$ ...

(Hogyan?)

· H... ...cs, jelöljük meg.

· H...

... α, A_1, A_2 részekkel $\longrightarrow$

$\ell,\ U(\ell)$

$\ell',\ U(\ell) - \{A\} \cup \{A_1, A_2\}$

– Ha A β típusú formula, B_1, B_2 részekkel: $\longrightarrow$

$\ell,\ U(\ell)$

$U(\ell) - \{B\} \cup \{B_1\}$ $\qquad$ $U(\ell) - \{B\} \cup \{B_2\}$

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

2.7

Igazoljuk: $\models (A \supset B) \vee (B \supset C)$

2.9

Igazoljuk: $(A \wedge B) \supset C \models (A \supset C) \vee (B \supset C)$

8.1.6. Igazoljuk az ~~ítéletlogikai ekvivalenciák~~ segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(c) $((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$

Szemantikus tábla segítségével igazoljuk.

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(b) Premisszák:

Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.

Konklúzió:

Tehát a 2 prímszám.

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \models X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y, Z \supset \neg Y \models X \supset \neg Z$

(c) $(X \vee Y) \supset (Z \wedge U), (U \vee V) \supset W \models X \supset W$

(d) $X \supset Y, \neg Z \supset \neg Y, \neg Z \vee \neg U \models U \supset \neg X$

Ha marad idő, lehet ezeket is megbeszélni. Ha nem marad, nem baj.

7.I.1. Mely állítás igaz, és miért?

(a) Egy formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(b) Egy formula csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(c) Egy formula csak akkor logikai törvény, ha kielégíthető.

(d) Egy formula pontosan akkor nem lesz kielégíthető, ha ellentmondásos.

(e) Annak szükséges feltétele, hogy egy formula logikai törvény legyen az, hogy a formula legyen kielégíthető.

(f) Annak elegendő feltétele, hogy egy formula ne legyen logikai törvény az, hogy a formula ne legyen ellentmondásos.

(g) Ha egy formula kielégíthető, akkor a negáltja is kielégíthető.

(h) Ha egy formula logikai törvény, akkor a negáltja nem elégíthető ki.

(i) Ha egy formula negáltja kielégíthető, akkor a formula logikai törvény.