Az informatika logikai alapjai
5. feladatsor

Szekvent kalkulus – Mi az, hogy szekvent

Szintaxis: Ha Γ és Δ két (esetleg üres) formulahalmaz, akkor a $\Gamma \vdash \Delta$ egy **szekvent**.

Szemantika: Az $\{A_1, ..., A_n\} \vdash \{B_1, ..., B_m\}$ szekvent **érvényes**, ha minden olyan ϱ interpretáció esetén, ahol $|A_1|_\varrho = ... = |A_n|_\varrho = 1$ van olyan i, hogy $|B_i|_\varrho = 1$.

Vagyis: Ha egy szekvent **nem érvényes – azaz cáfolható** –, akkor van olyan ϱ interpretáció, melyre $|A_1|_\varrho = ... = |A_n|_\varrho = 1$, míg $|B_1|_\varrho = ... = |B_m|_\varrho = 0$.

11.I.1. Definíció. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$ $(n, m \geq 0)$ ítéletlogikai formulák. Ekkor a

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

formulát *szekventnek* nevezzük. Jelölése

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B_1, B_2, \ldots, B_m$$

vagy rövidebben $\Gamma \vdash \Delta$, ahol Γ az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és Δ a $B_1, B_2, \ldots, B_m$ formulák multihalmazai.

Az érvényesség még egyszer

A szekvent érvényes, ha **minden baloldali** formula teljesülése szükségszerűen maga után vonja, hogy **valamelyik jobboldali** formula teljesül.

A szekvent érvényes, ha **nincs olyan** eset (interpretáció), hogy **egyik jobboldali formula sem** teljesül, miközben az **összes baloldali** teljesül.

Érvényes szekvent:

$A, B, C \vdash \neg A, B \wedge C$

Nem érvényes szekvent!

$A, B, C \vdash \neg A, \neg B$

(Elhagyjuk a halmazt jelölő „{ }”-ket)

11.I.1. Adjuk meg az alábbi szekventeknek megfelelő formulákat! Egyszerűsítsünk, ahol ez lehetséges!

(a) $\vdash (X \supset Y)$

(b) $X \vdash Y$

(c) $X \wedge Y \vdash Y \wedge Z$

(d) $(X \supset Y) \vdash$

(e) $X \vee Y \vdash Y \vee Z$

(f) $X, Y \vdash Y, Z$

Szekvent kalkulus – Axiómák és levezetési szabályok

- A szekvent kalkulus **axiómái** a következő alakúak (axiómaséma):

  $$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

  ahol A egy atomi formula, Γ és Δ pedig formulahalmazok.
- A szekvent kalkulus **levezetési szabályai**:

konjunkció: $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

diszjunkció: $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

implikáció: $$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

negáció: $$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

(premissza és konklúzió) Vegyük észre: Ezek mind „szintaktikai fogalmak”

A szekvent kalkulus mechanikus (szintaktikai szabályokon alapuló) eljárás bizonyítások konstruálására

- Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Például:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \to Y \vdash Y}\,(\to l)}{X, X \to Y, \neg Y \vdash}\,(\neg l)}{X \to Y, \neg Y \vdash \neg X}\,(\neg r)$$

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

Vegyük észre, hogy itt a „bizonyítás” szintaktikai fogalom:
A gyökér egy szekvent, a fa a szintaktikai szabályoknak megfelelően épül fel, a levelek axiómák.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.9. Bizonyítsuk be szekventkalkulus segítségével, hogy a

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \supset (X \wedge Y) \vee Z$$

formula logikai törvény!

11.I.17. Készítsük el a szekventkalkulus ekvivalenciajelre vonatkozó levezetési szabályait!

Ez lesz az eredmény. Hogy jött ki?

$$(\vdash\equiv) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B;\ \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \equiv B}$$

$$(\equiv\vdash) \qquad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta;\ \Gamma \vdash \Delta, A, B}{A \equiv B, \Gamma \vdash \Delta}$$

11.I.12. Bizonyítsuk be a szekventkalkulusban az alábbi ekvivalenciákat!

(d) $X \supset Y \ \sim\ \neg X \vee Y$

(e) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \ \sim\ X$

(f) $X \vee (\neg X \wedge Y) \ \sim\ X \vee Y$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.14. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák ellentmondásosak!

(a) $X \wedge \neg Y \wedge (\neg Y \supset \neg X)$

(b) $X \wedge \neg (Y \supset (X \wedge Y))$

Például

$$
\dfrac{
\dfrac{A, A, B \vdash C, B}{A, B \vdash C, \neg A, B}\,(\neg r)
\qquad
\dfrac{\boxed{A, A, B \vdash C, C}}{A, B \vdash C, \neg A, C}\,(\neg r)
}{A, B \vdash C, \neg A, B \wedge C}\,(\wedge r)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{A, A, B, B \vdash B}{A, B, B \vdash \neg A, B}\,(\neg r)
\qquad
\dfrac{\boxed{A, A, B, B \vdash C}}{A, B, B \vdash \neg A, C}\,(\neg r)
}{A, B, B \vdash \neg A, B \wedge C}\,(\wedge r)
$$

$$
\dfrac{A, B \vdash C, \neg A, B \wedge C \qquad A, B, B \vdash \neg A, B \wedge C}{A, B, C \to B \vdash \neg A, B \wedge C}\,(\to l)
$$

A leveleket cáfoló interpretáció:

$|A|_\varrho=1$

$|B|_\varrho=1$

$|C|_\varrho=0$

cáfolja a gyökeret is

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.15. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik törvény, melyik ellentmondás, és melyik kielégíthető, de nem törvény!

(a) $X \supset \neg(\neg Y \wedge (\neg Y \supset \neg X))$

(c) $(X \supset Y) \wedge X \wedge \neg Y$

(d) $(X \vee Y) \wedge (X \supset Y) \wedge \;\; Y \supset Z$

7.I.1. Mely állítás igaz, és miért?

(a) Egy formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(b) Egy formula csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(c) Egy formula csak akkor logikai törvény, ha kielégíthető.

(d) Egy formula pontosan akkor nem lesz kielégíthető, ha ellentmondásos.

(e) Annak szükséges feltétele, hogy egy formula logikai törvény legyen az, hogy a formula legyen kielégíthető.

(f) Annak elegendő feltétele, hogy egy formula ne legyen logikai törvény az, hogy a formula ne legyen ellentmondásos.

(g) Ha egy formula kielégíthető, akkor a negáltja is kielégíthető.

(h) Ha egy formula logikai törvény, akkor a negáltja nem elégíthető ki.

(i) Ha egy formula negáltja kielégíthető, akkor a formula logikai törvény.