从零开始学数学建模

粒子群算法

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

粒子群算法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

粒子群算法

❑案例：打排位抓射手

❑ 视野共享，团队收益

- **场景**：敌我僵持，当前**目标**是使团队收益最大化（假设gan掉射手是最优）
- **关键**：团队**视野共享**，每个人**随机**游荡，发现敌人位置后全队都能看到

图片取自b站视频，bv号：BV11h411G7Gh

- 我方边路：
- **当前**正在清兵线；**刚刚附近**发现敌方法师；**队友现在发现**射手位置，请求集合准备团战

如果你是这个边路，接下来你会怎么做？

粒子群算法

❑算法思想：鸟群觅食

❑ 共享信息的鸟群

- **场景**：一群鸟在森林**随机**寻找食物，**目标是**找到食物量**最多**的位置
- **关键**：鸟群通过叫声交流，随时**共享自己的位置**和发现的**食物量**

- 这样鸟群就知道当前在哪个位置食物的量**最多**
- 每只鸟根据自己的记录和从鸟群获取的信息**调整下一步**搜索的方向

粒子群算法

❑鸟群觅食

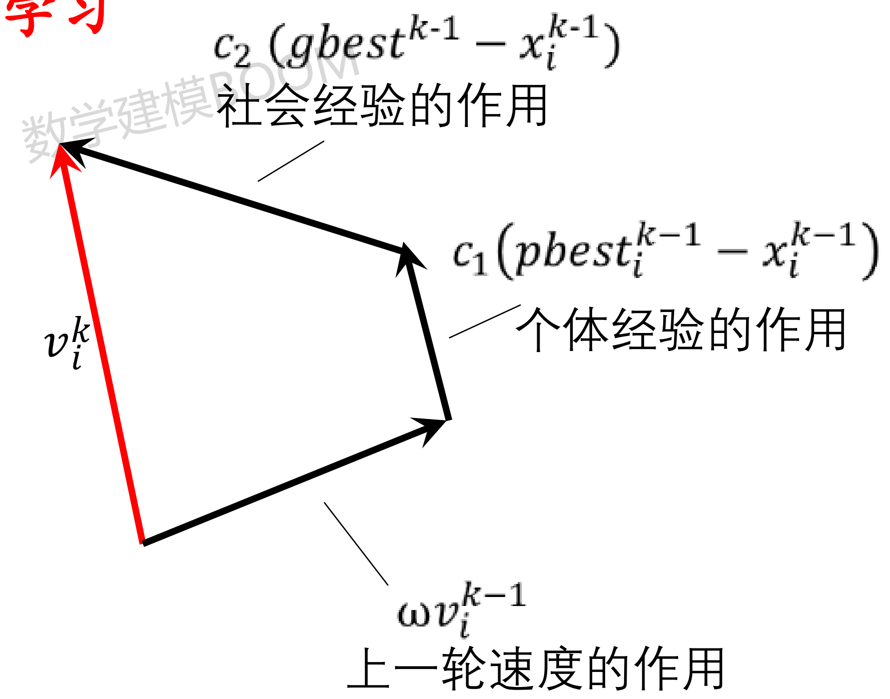
❑ 共享信息的鸟群

- 每只鸟都记录**自己**经过位置的食物量最多的位置——**个体最优解**
- 每只鸟都知道**整个鸟群**记录过的食物量最多的位置——**群体最优解**

如果你是只鸟，接下来你会怎么做？

- 鸟具有**惯性**，有保持自身**原有方向**的趋势。但鸟也会**学习**
- 鸟学习**个体经验**，有向**个体最优解**飞行的趋势
- 鸟学习**社会经验**，有向**群体最优解**飞行的趋势

★ • **惯性**、**个体经验**和**社会经验**是鸟决策需要的信息



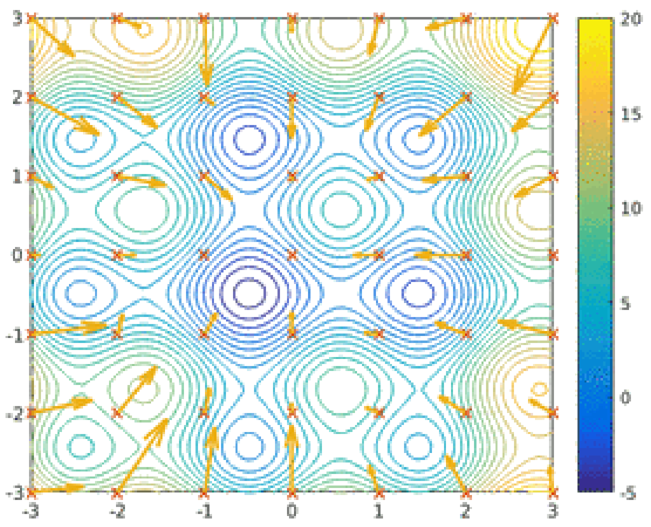
- *后面本节课第三部分会详细讲解这三个速度

粒子群算法

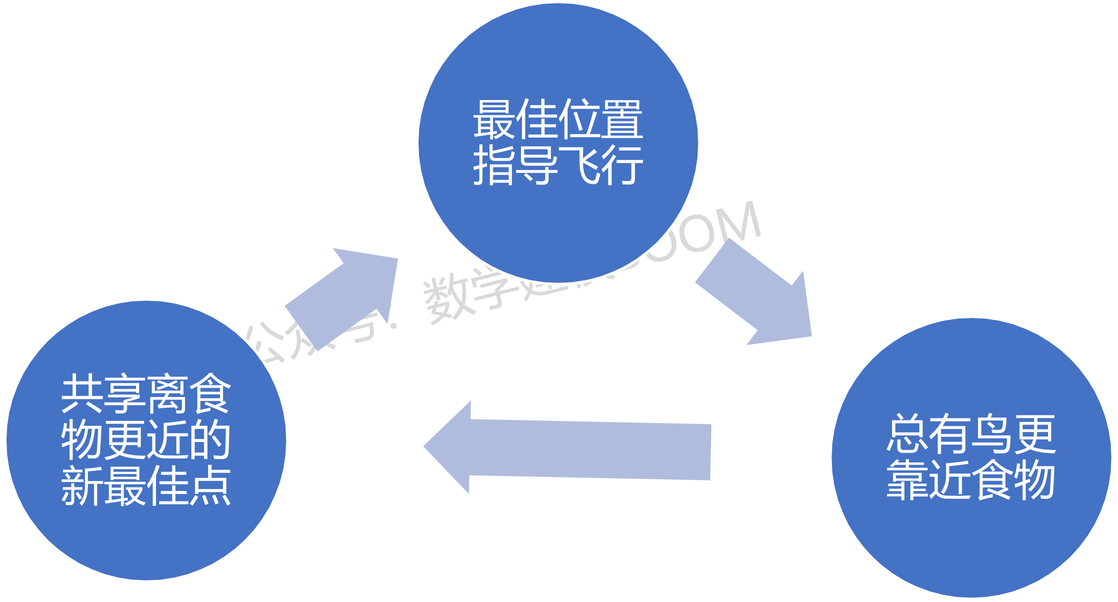
❑鸟群觅食

❑ 迭代

- 决策信息指导下一步飞行⇒总有鸟更靠近食物⇒更新信息指导再下一步飞行
- 如此**正反馈**，整个鸟群**始终在不断靠近食物**



图片取自维基百科



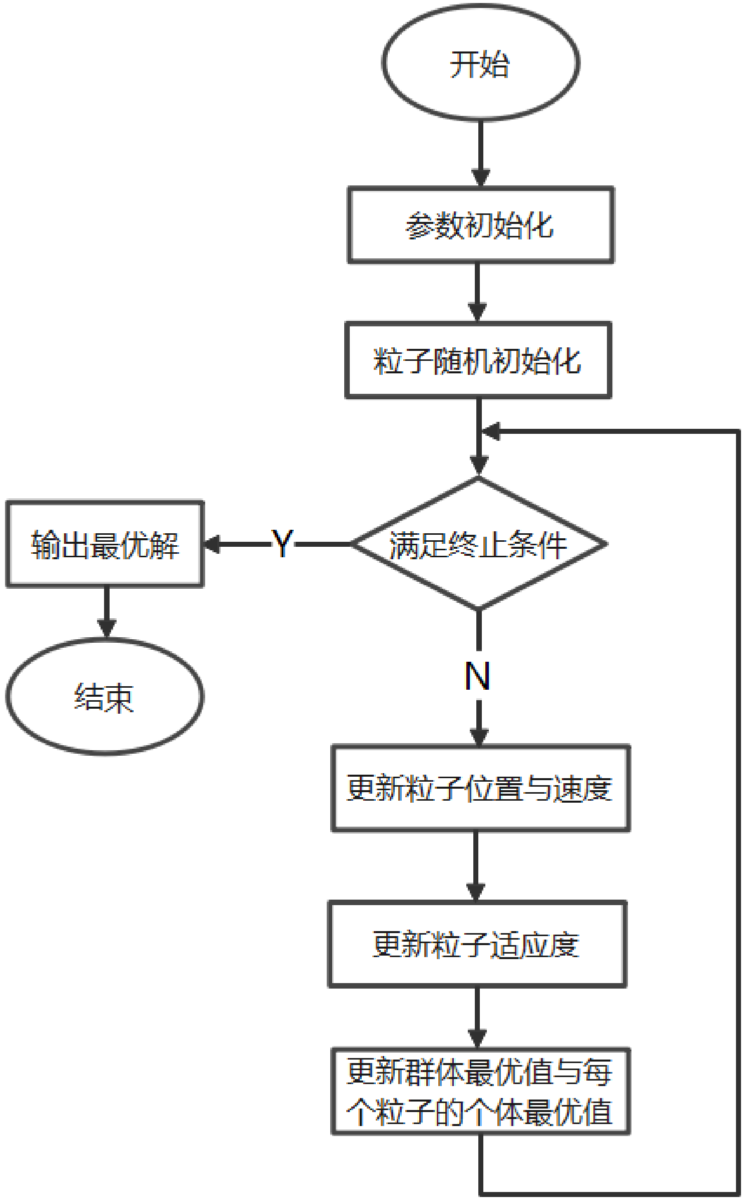
思考：鸟群太大/太小会对结果有什么影响？

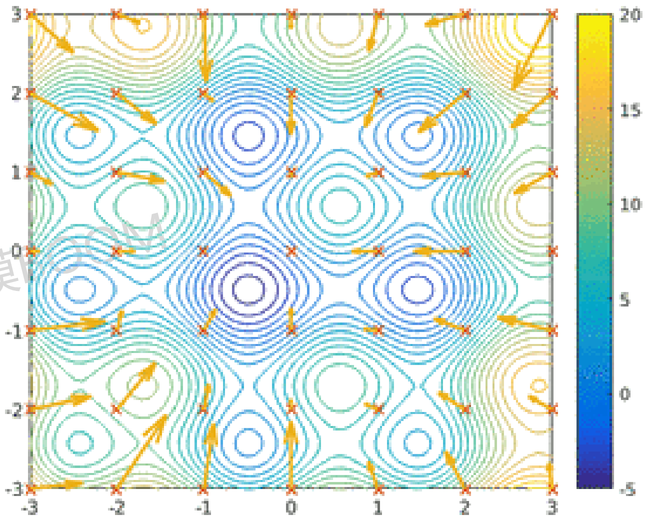
粒子群算法

❑算法思路

❑ 概念与流程图

鸟群觅食	粒子群算法
森林	解空间
鸟的当前位置	可行解
食物量	函数值（适应度）
食物最多的位置	最优解
更新鸟群位置	更新可行解





粒子群算法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

粒子群算法

❑适用赛题

❑ 多目标优化问题

- 充电站布局优化（美赛）、系泊系统的设计（国赛）、背包问题
- 当目标函数复杂、变量多（维度高），传统求解方法速度很慢
- 粒子群算法的最大优点：**快**！（尤其是高维度且目标函数复杂的优化问题）

❑ 寻优问题

- 复杂函数寻优、神经网络训练、模式分类、模糊系统控制、TSP问题等
- 直接求解，或为这些问题的模型提供初始值或参数优化

❑ 算法优缺点

- 优点：收敛快，简单易实现，几乎任何寻优问题都能用其求解
- 缺点：局部搜索能力较差，搜索精度不够高（如何改进？）

思考：粒子群算法与蚁群算法、模拟退火、遗传算法各有什么优缺点?
比赛时如何选择合适的算法?

粒子群算法

- 模型简介
- 适用赛题
- **典型例题与原理讲解**
- 代码求解

粒子群算法

❑寻优：非线性方程求解

❑ 传统算法的局限性

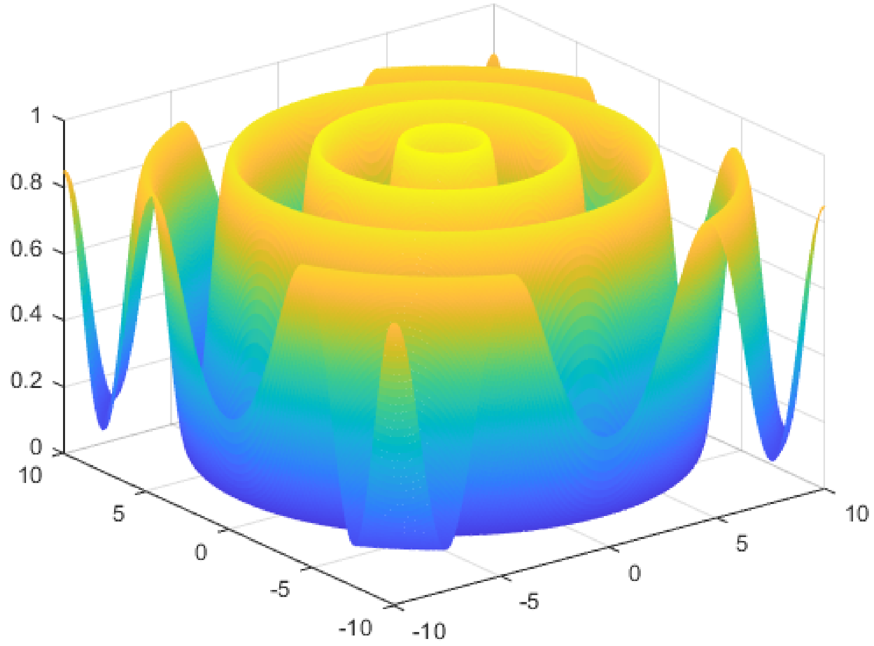
- 物理学和现实中的数学模型常常归结为求解非线性方程
- 传统Newton法等计算量大，经常求导困难，且收敛性与结果很受与初始值的影响
- 避开传统数学方法，启发式算法可以“遍地撒网，重点捞鱼”

❑ 二维复杂函数

- Schaffer函数形式简单但具有很强的复杂性
- 有着无数个极小值点，且强烈震荡

$$\min f(x_1,x_2) = 0.5 + \frac{\left(\sin\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^2 - 0.5}{[1+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2}$$

- $x_1, x_2 \in [-10,10]$



粒子群算法

❑寻优：非线性方程求解

❑ 步骤1：参数初始化

- 本题有两个变量x_1和x_2，空间维度为2
- 设鸟的数量N，在第k次迭代中，第i只鸟的位置是$x_i^k=(x_{i1}^k,x_{i2}^k)$，速度$v_i^k=(v_{i1}^k,v_{i2}^k)$，$i=1,2,\dots,N$;
- 初始位置和位移是随机的，或作为参数输入

❑ 步骤2：计算初始适应度

- 适应度就是模型的目标函数值
- 对于Chaffer函数，食物坐标为(x_1,x_2)，则适应度：

$$\boxed{f(x_1,x_2)=0.5+\frac{\left(\sin\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^2-0.5}{[1+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2}}$$

❑寻优：非线性方程求解

❑ 步骤3：求初始全局最优解

- 最优解对应适应度的最大还是最小值，取决于求解的问题
- 第i只鸟的个体最优解记作$pbest_i$（p表示personal）
- 比较全部鸟的$pbest$，找出其中最佳的，记作全局最优解$gbest$（g表示global）

- $pbest_i$：第i只鸟曾经去过的适应度最高的位置，初始时自然为初始值
- Y_i：个体最优解对应的适应度
- $gbest$：每只鸟都有个体最优解，其中对应的适应度Y_i最高的解设为全局最优解
- Y：全局最优解对应的适应度

- 适应度最高＝函数值最优＝最小化问题求得最小值/最大化问题求得最大值

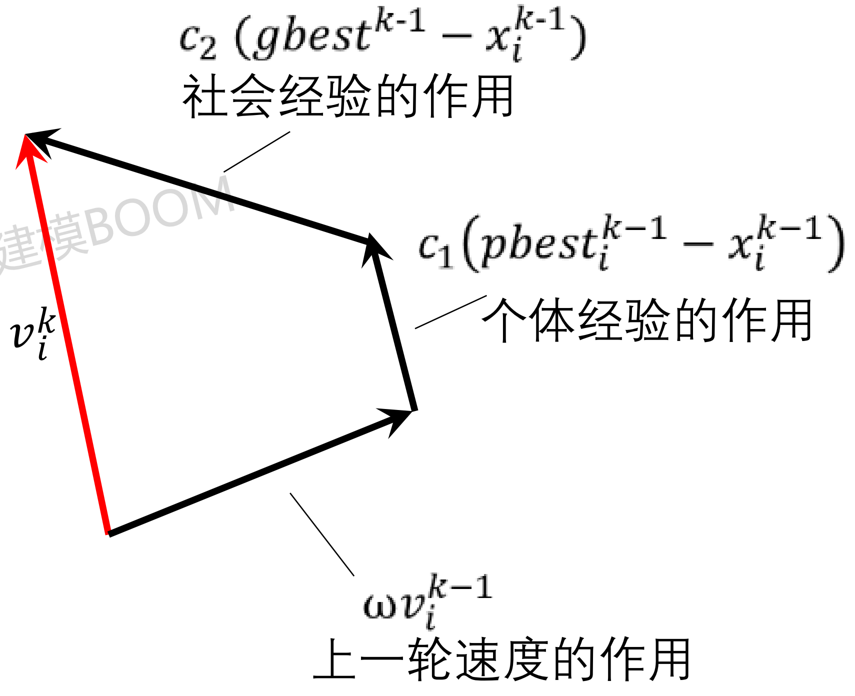
粒子群算法

❑寻优：非线性方程求解

★❑ 步骤4：更新粒子的速度

$$v_i^k = \omega v_i^{k-1} + c_1\left(pbest_i^{k\text{-}1} - x_i^{k\text{-}1}\right) + c_2\left(gbest^{k\text{-}1} - x_i^{k\text{-}1}\right)$$

- v_i^k：第k次迭代中第i只鸟的速度（位移）
- x_i^{k-1}：第$k-1$次迭代中第i只鸟的当前位置
- ω, c_1, c_2：分别表示**惯性**、**个体经验**和**社会经验**的权重
- $pbest_i^{k-1}$：第k次迭代前，第i只鸟记录的个体最优解
- $gbest^{k-1}$：第k次迭代前，鸟群的全局最优解



- 除权重系数外，各量都是**向量**，本式的本质是**向量加减**

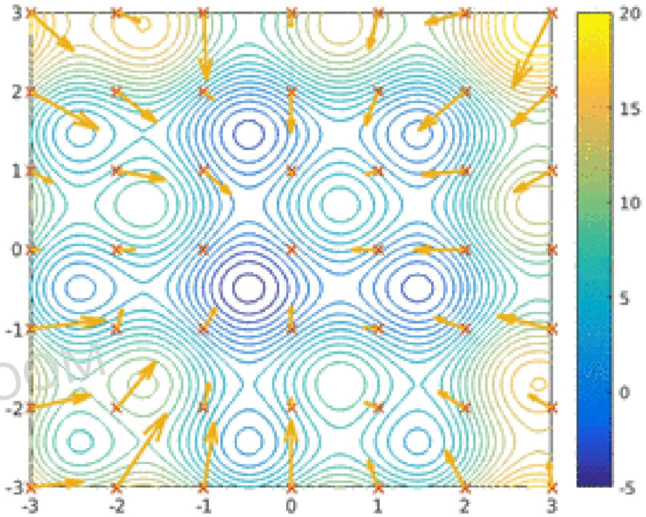
（位移=速度*时间，算法中默认时间为1，因此位移=速度）

粒子群算法

❑寻优：非线性方程求解

❑ 公式分析

$$\boxed{v_i^k = \omega v_i^{k-1} + c_1\left(pbest_i^{k\text{-}1} - x_i^{k\text{-}1}\right) + c_2\left(gbest^{k\text{-}1} - x_i^{k\text{-}1}\right)}$$



- $c_1 = 0$时鸟是盲从的，不学习自身经验
- $c_2 = 0$时鸟是自大的，不学习社会经验
- ω偏大时，有利于全局搜索，但收敛性差
- ω偏小时，有利于局部搜索，但运算更慢

❑ 理想情况

- **前期**粒子较为分散，进行**全局搜索**避免过早收敛陷入局部最优，需要ω偏大
- **后期**粒子较为集中，进行**局部搜索**，求解更精确，需要ω偏小
- 改进方法：权重线性递减、自适应权重、随机权重等（略）

粒子群算法

❑寻优：非线性方程求解

❑ 步骤5：更新位置（新可行解）并求适应度

- $x_i^k = x_i^{k\text{-}1} + v_i^k$：当前位置+位移量（时间默认为1，所以速度=位移）
- x_i^k代入目标函数计算得适应度

❑ 步骤6：更新个体最优解和全局最优解

- 和步骤3类似；最优解对应适应值的最大还是最小值取决于求解的问题
- $pbest_i^k$：x_i^k和$pbest_i^{k\text{-}1}$相比较，取最优
- $gbest^k$：所有鸟的$pbest_i^k$和$gbest^{k\text{-}1}$相比较，取最优

❑ 步骤7：迭代与终止

- 重复步骤4到6，直到满足终止条件或最大迭代次数
- 输出最终解 $gbest^k$和对应的适应度：Y^k

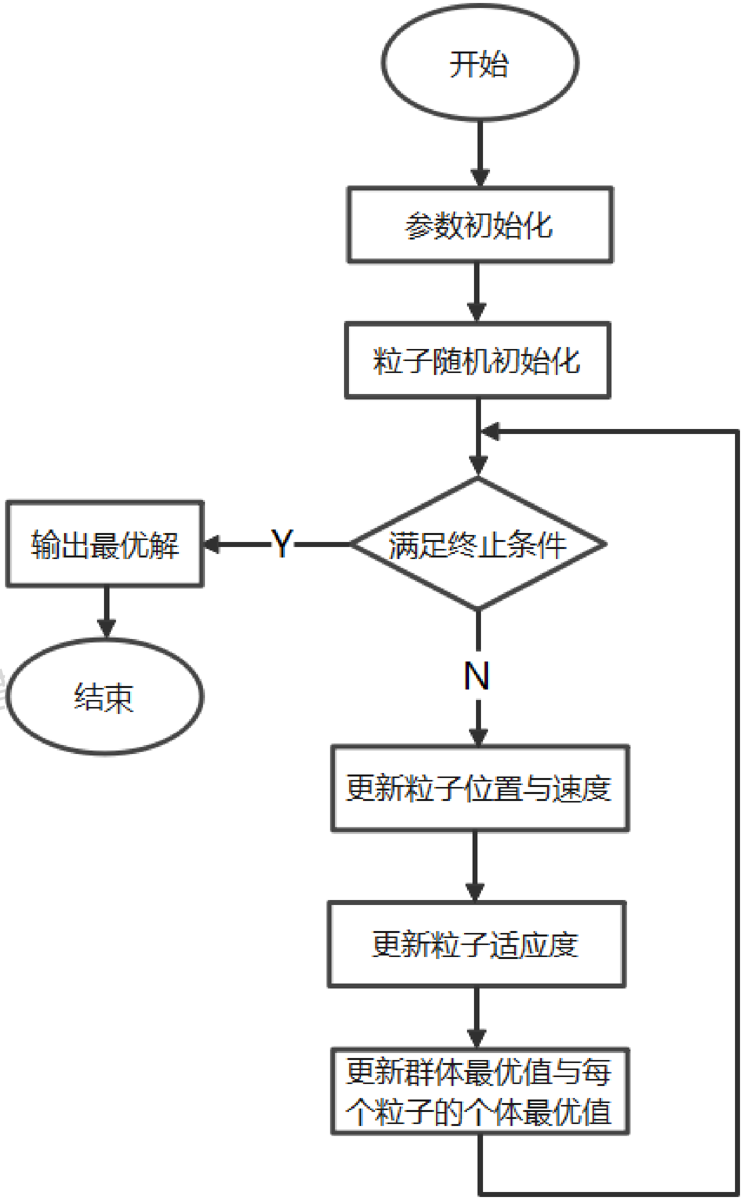
粒子群算法

❑寻优：非线性方程求解

❑ 步骤总结

- 初始化阶段，确定每个粒子的位置、速度和相应的适应度
- 进入迭代过程
  - ★ 更新粒子速度、位置
  - 更新粒子的个体最优解和群体最优解
- 满足终止条件，输出最终结果

- 注意：速度更新公式中的ω, c_1, c_2会影响整个算法的运行



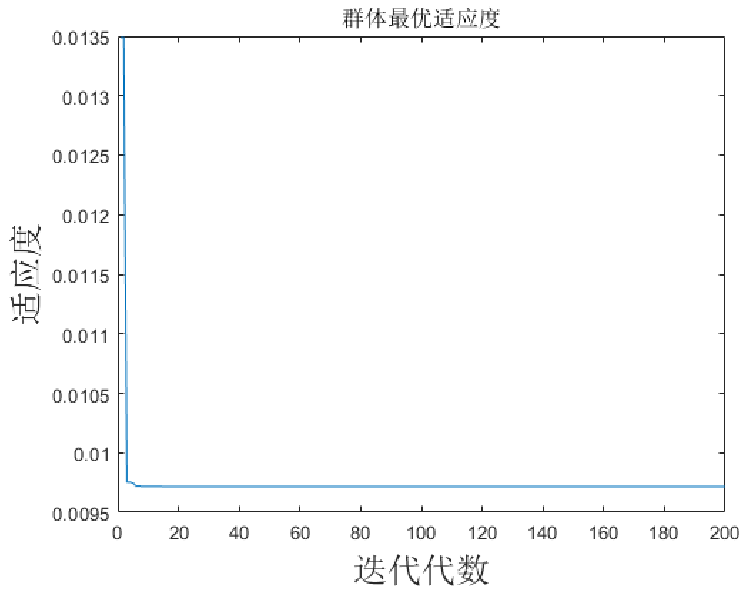
粒子群算法

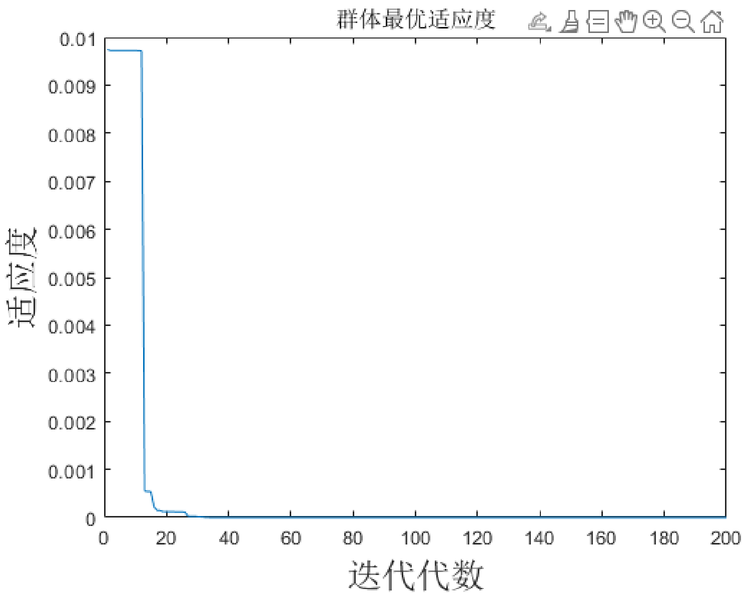
- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

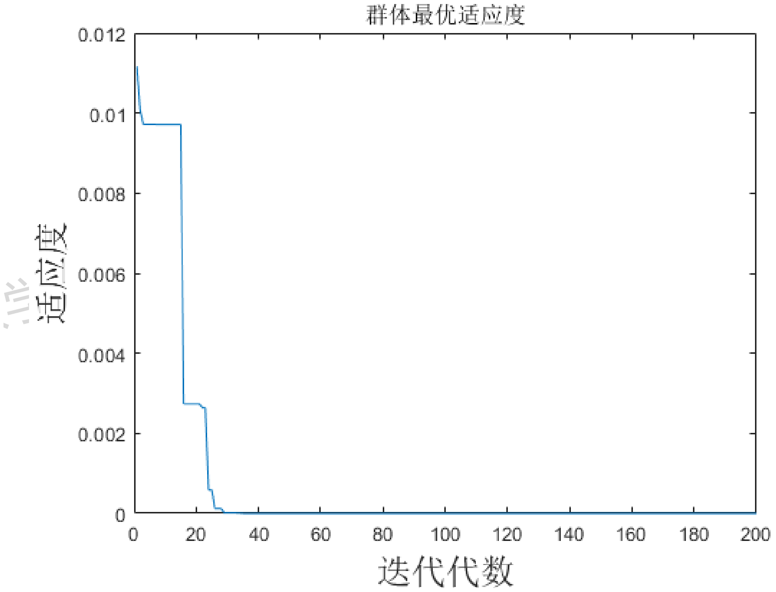
❑代码求解

❑ 接下来到MATLAB代码文件POS.mlx中讲解

- 运行三次得到的三个结果，比赛时可多跑几次，选取最优的作为最终结果
- 尝试修改粒子群数量、迭代次数，看看结果会怎么样







$$f(x_1,x_2)=0.5+\frac{\left(\sin\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^2-0.5}{[1+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2}$$

粒子群算法

❑课后题

❑ 1、用“1-3非线性规划”课程中讲的fmincon函数求解本问题

- 尝试用不同的初始值，看对结果的影响，并与粒子群算法比较
- 如果把函数定义域改为$x_1, x_2 \in [-20,20]$，fimincon函数和粒子群算法的求解结果分别会怎么样？

❑ 2、改进粒子群算法

- **前期**粒子较为分散，进行全局搜索避免过早收敛陷入局部最优，需要ω偏大
- **后期**粒子较为集中，进行局部搜索，求解更精确，需要ω偏小
- 改进方法：权重线性递减、自适应权重、随机权重等
- 学会这些改进方法，并尝试在代码中实现，把粒子数和迭代次数设小，观察改进前后结果的变化，分析原因

粒子群算法

❑写出你的笔记

❑ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

❑ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305 ）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

“从零开始学数学建模”系列课程

- 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
- 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复“课程”

END