从零开始学数学建模

GM(1,1)灰色预测

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

GM(1,1)灰色预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

GM(1,1)灰色预测

❑GM(1,1)灰色预测模型

❑ 名词释义

- G：Grey（灰色），M：Model（模型），(1,1)：只含有一个变量的一阶微分方程模型

❑ 白色系统

- 典型例子：**电阻器件**
- 特点：**内部特征是完全已知的**，电压、电流和电阻之间的关系(**欧姆定律**)是已知的
- 知道电阻大小后，**输入电压值，就能算出电流值**
- 白色系统可**“计算”**出想要的结果

❑ 黑色系统

- 典型例子：**一辆车**
- 特点：**内部特征是完全未知的**，开车并不需要懂发动机设计和工作原理等
- 非专业人士虽然可以控制汽车，**然而内部出故障时并不会修**
- 黑色系统具有**“不可知性”**

GM(1,1)灰色预测

❑GM(1,1)灰色预测模型

❑ 灰色系统

- **典型例子：GDP**就是灰色系统
- 特点：介于黑色和白色之间，**部分已知，部分未知**，具有小样本数据的**不确定性**系统
- 我们有往年的数据和一定的理论基础（白色）
- 但无法精确计算得出下一年的值（黑色）
- 灰色无法“计算”，但并不是完全“不可知”，可以进行**“预测”**

❑ 如何进行灰色预测

- 根据原始数据，通过累加等方式削弱随机性、获得有规律的新序列
- 建立相应的微分方程模型，得到离散点处的解
- 再通过累减求得的原始数据的估计值，从而对原始数据预测

GM(1,1)灰色预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

GM(1,1)灰色预测

❑适用赛题

❑ 数列预测

- 特点：**定时求量**，已知xx年到xx年的数据，请预测下一年的数值
- 常见GDP、人口数量、耕地面积、粮食产量等问题
- 针对的问题往往短期波动小、可预测，但长期可能变化大、难以准确预测

❑ 灾变预测

- 特点：**定量求时**，已知xx年到xx年的数据和某灾变的阈值，预测下一次灾变发生的时间
- 常见洪涝灾害、虫灾等问题
- 模型中需要把超出阈值的数据（异常数据）对应的时间组成新序列

❑ 拓扑预测

- 特点：**对数据波形进行预测**，求的是多个模型构成的模型群，等于求解多个灾变预测
- 与灾变预测类似，不过有较详细的分级，例如虫灾“轻微”“中度”“重度”

❑ 注意事项

- 需要的数据量少，而且数据量太多了没意义，例如用近100年的GDP去预测下一年毫无意义
- 只能短期预测，究竟多短没有严格限制

GM(1,1)灰色预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

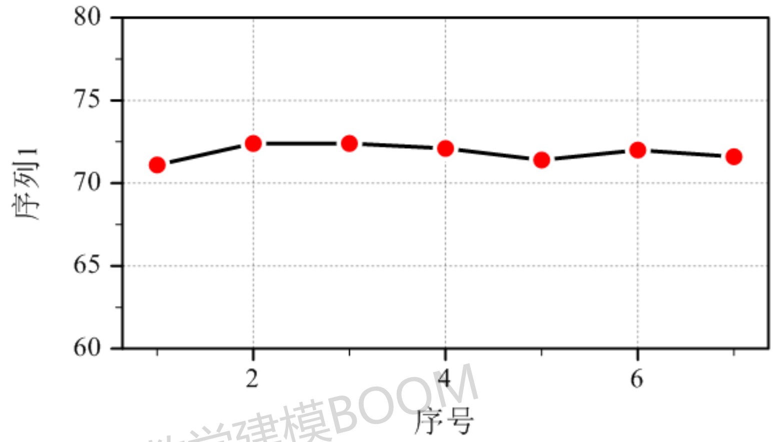
GM(1,1)灰色预测

❑典型例题

❑ 例题：某城市1986到1992年道路噪声平均声级数据见下表，请预测下一年的数据

- 某城市交通噪声数据/dB(A)

序号	1	2	3	4	5	6	7
年份	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
噪声	71.1	72.4	72.4	72.1	71.4	72.0	71.6

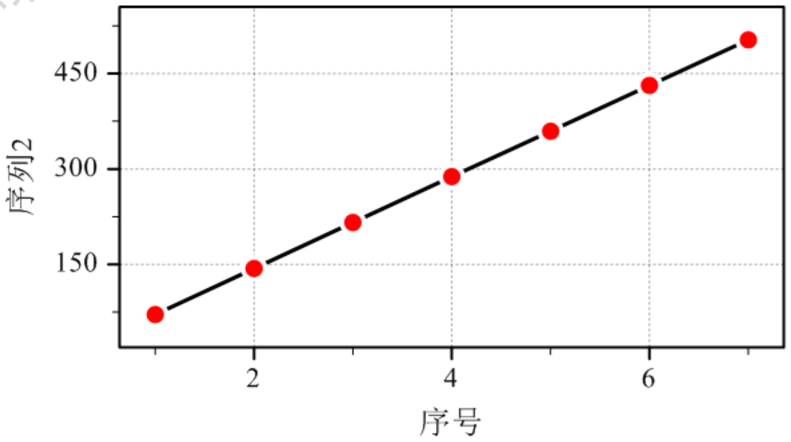


- 特点：**数据少，看不出明显规律，适合用灰色预测**

❑ 这一组数看不出规律怎么办？制造规律!

- 如何制造？累加：

序号	1	2	3	4	5	6	7
年份	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
$x^{(0)}$	71.1	72.4	72.4	72.1	71.4	72.0	71.6
$x^{(1)}$	71.1	143.5	215.9	288	359.4	431.4	503

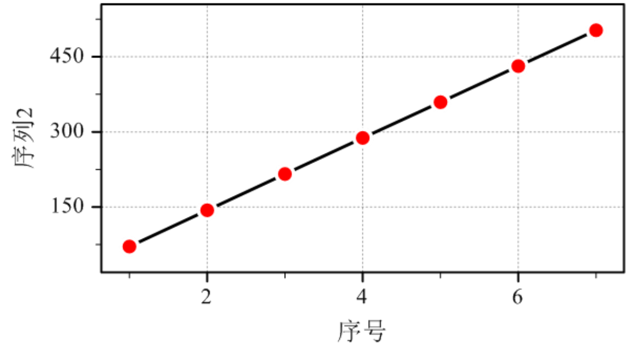


- 累加生成序列：$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$
- 弱化其随机性，显现其规律性

GM(1,1)灰色预测

❑问题转化

- ❑ 如果一个东西长得像鸭子，叫声像鸭子，走路也像鸭子，那它就是一只鸭子
- ❑ 生成的新序列$x^{(1)}$，看起来像一个指数曲线（直线）
  - 因此可用一个**指数曲线**的表达式来逼近这个新序列
  - 相应可构建**一阶常微分方程**来求解拟合**指数曲线**的**函数表达式**



- ❑ 关于一阶常微分方程，假设$x^{(1)}$满足形式：$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=u$
  - 要预测下一年数值，就需要新序列$x^{(1)}$的表达式，那就要解出微分方程(高数基本知识)
  - 要解微分方程，就要先知道参数a和u
- ❑ **当前问题转化为**：如何求微分方程中的参数a和u

序号	1	2	3	4	5	6	7
年份	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
$x^{(0)}$	71.1	72.4	72.4	72.1	71.4	72.0	71.6
$x^{(1)}$	71.1	143.5	215.9	288	359.4	431.4	503

GM(1,1)灰色预测

❑表达式处理

- ❑ 但已知的$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=u$中的数据是离散的，所以$\frac{dx^{(1)}}{dt}$写成$\frac{\Delta x^{(1)}}{\Delta t}$
  - 注意！ $\Delta t=t-(t-1)=1$，始终为1；而$\Delta x^{(1)}=x^{(1)}(t)-x^{(1)}(t-1)=x^{(0)}(t)$
  - 得到方程$x^{(0)}(t)+ax^{(1)}(t)=u$
  - 即$x^{(0)}(t)=-ax^{(1)}(t)+u$
  - 已知$x^{(0)}(t)$和$x^{(1)}(t)$的实际数据，以及二者的函数关系式，此时就可用**最小二乘法**求参数
- ❑ 为了进一步消除数据随机性， $x^{(1)}(t)$修正为$z^{(1)}(t)$
  - 考虑原方程中有$\frac{\Delta x^{(1)}}{\Delta t}$，因此将$x^{(1)}(t)$改为取**前后两个时刻的均值**更合理
  - 对$x^{(1)}$进行**均值生成**： $z^{(1)}(t)=0.5x^{(1)}(t)+0.5x^{(1)}(t-1)$，t = 2,…n
  - 即方程改为$x^{(0)}(t)=-az^{(1)}(t)+u$
  - 等号左边$x^{(0)}(t)$有7个**已知数据**，等号右边$z^{(1)}(t)$也有7个**已知数据**，**函数还**有两个**未知参数**
  - 就可用**最小二乘法**求未知参数

GM(1,1)灰色预测

❑模型求解

❑ 最小二乘法求解

- 当前方程（函数）为$x^{(0)}(t) = -az^{(1)}(t) + u$
- 最小二乘法就是求出当**拟合函数**求的值与**已知数据**的**平方差最小**时，未知参数该取几
- 方程矩阵形式Y=BU
- $$\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(\mathrm{N}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)\right] & 1 \\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)\right] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(N) + x^{(1)}(N-1)\right] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}$$
- 最小二乘法也就是求 $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{BU})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{BU})$取最小值时的U
- 求解U的**估计值**为$\hat{\boldsymbol{U}} = [\hat{a}, \hat{b}]^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0.0023 \\ 72.6573 \end{bmatrix}$，即求出参数$\hat{a}, \hat{b}$
- （注意：高数课本就有最小二乘法；数模资料上大多在“插值与拟合”章节讲最小二乘法）

GM(1,1)灰色预测

❑模型求解

❑ 参数已求出，代入原微分方程，求出 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + \hat{a}x^{(1)} = \hat{b}$的解

- $\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)\mathrm{e}^{-\hat{b}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} = -30929e^{-0.0023k} + 31000$
- 当式中的k=0,1,2…6时求得的为拟合值，大于等于7时为预测值
- 分别取k=7和6，得$\hat{x}^{(1)}(8)$和$\hat{x}^{(1)}(7)$；
- 就能预测下一年的道路噪声平均声级$\hat{x}^{(0)}(8) = \hat{x}^{(1)}(8) - \hat{x}^{(1)}(7)$

❑ 拟合值与预测值

- 因为第1到7年的噪声数据是已知的，那么通过微分方程的函数解求出的值就是拟合值
- 拟合值与实际值的偏差，代表了模型的优劣
- 偏差越小，模型越好。偏差过大说明有问题，所以下一步需要拟合值进行模型检验

GM(1,1)灰色预测

❑模型求解

❑ 模型靠不靠谱，需要进行模型检验

- 模型检验就是看按照$\hat{x}^{(1)}(k+1)$求得的拟合值和实际值相差大不大
- **相对误差检验**：$\varepsilon(k)=\frac{|x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)}$
- 如果$\varepsilon(k)<0.2$，可认为达到一般要求；如果 $\varepsilon(k)<0.1$，即达到较高要求
- **级比偏差检验**：$\rho(k)=1-\frac{1-0.5a}{1+0.5a}\lambda(k)$，其中级比$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}$
- 如果$|\rho(k)|<0.2$，可认为达到一般要求；如果 $|\rho(k)|<0.1$，即达到较高要求
- 如果大于0.2怎么办？换模型吧....灰色预测不适合本题

GM(1,1)灰色预测

❑原始数据的级比检验

❑ 在建模**最开始**，需要进行数据的级比检验

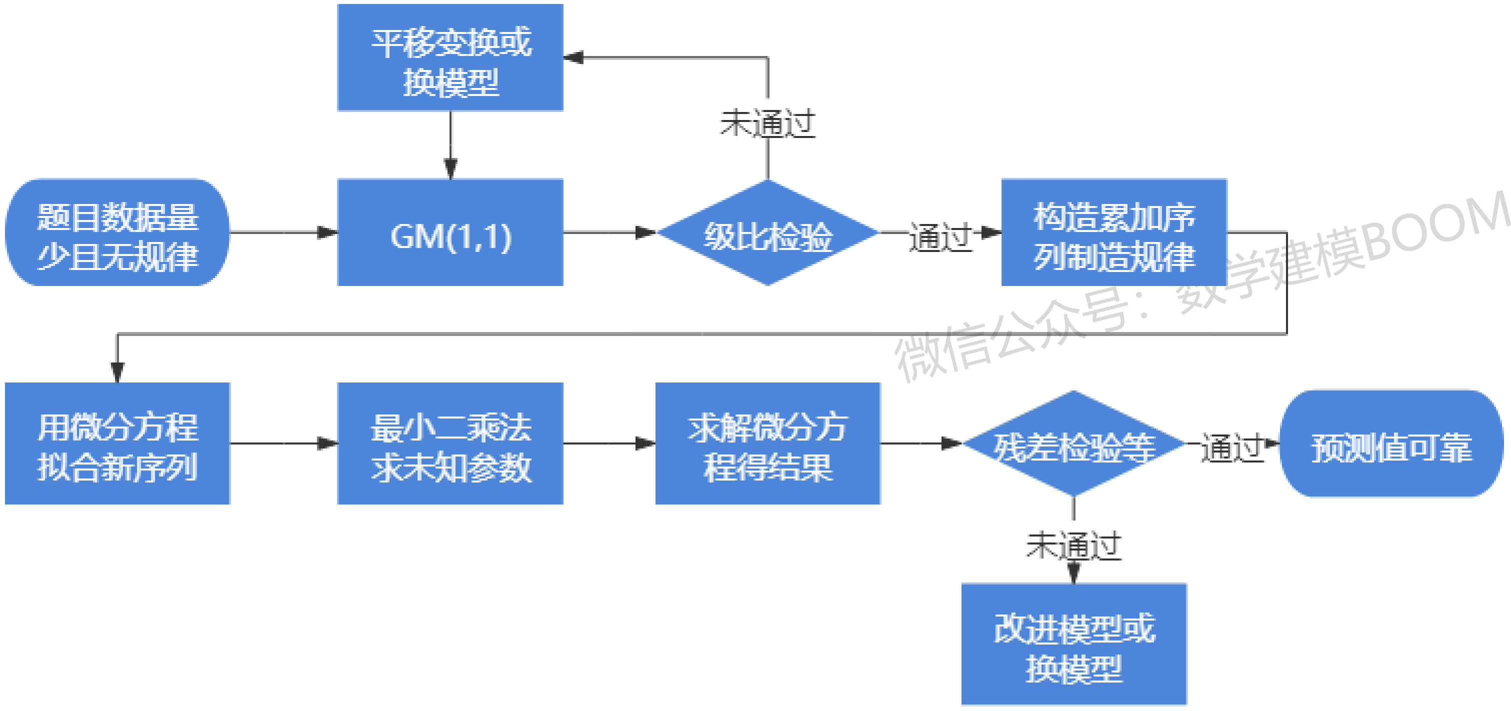
- 为了确定**原始数据**使用GM(1,1)模型的**可行性**，避免白忙活，需要对原始数据进行级比检验：
- 计算$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},k=2,3,\cdots,n$
- 如果$\lambda(k)$在区间$\left(\mathrm{e}^{-\frac{2}{n+1}},\mathrm{e}^{\frac{2}{n+2}}\right)$内，说明可用GM(1,1)模型；
- 如果在区间外，可尝试平移变换
- 也就是给每个数据都加上任意常数c后看是否在区间内；求解后再减去c
- 如果尝试多次平移变换后始终无法在区间内，说明题目不适合灰色预测

GM(1,1)灰色预测

❑整体思路

❑ 流程

- 核心就是最小二乘法求参数，再求微分方程
- 在最开始要对原始数据进行检验，在最后要对结果进行检验



GM(1,1)灰色预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

GM(1,1)灰色预测

❑代码求解

❑ 结果分析

- 本课程接下来到文件GM11.mlx中讲解代码
- 求解出预测下一年的噪声值为71.4 dB
- 模型检验结果见下表，可见该模型的精确较高，可用于本题预测。

序号	年份	原始值	拟合值	相对误差	级比偏差
1	1986	71.1	71.1	0	
2	1987	72.4	72.4057	0.01%	0.0203
3	1988	72.4	72.2362	0.23%	0.0023
4	1989	72.1	72.0671	0.05%	-0.0018
5	1990	71.4	71.8984	0.7%	-0.0074
6	1991	72.0	71.7301	0.37%	0.0107
7	1992	71.6	71.5622	0.05%	-0.0032

GM(1,1)灰色预测

❑写出你的笔记

❑ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

❑ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305 ）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

- “从零开始学数学建模”系列课程
  - 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
  - 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复“课程”

END