北京大学学报(自然科学版),第 42 卷,第 1 期,2006 年 1 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol.42, No.1 (Jan. 2006)

多柱汉诺塔问题研究[1)]

刘 铎[2)] 戴一奇
(清华大学计算机科学与技术系,北京,100084;[2)] E-mail:bat 01@mails.tsinghua.edu.cn)

摘 要 对多柱汉诺塔问题进行了研究。采用动态规划的想法,给出了多柱汉诺塔问题最少移动步数的递推公式和具体表达式,并使用 3 层数学归纳和纯组合的方法对其进行了证明。

关键词 多柱汉诺塔;数学归纳法;动态规划
中图分类号 O 224

Study of Hanoi Tower Problem with Multi-Pegs

LIU Duo DAI Yiqi
(*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing, 100084*)

Abstract The authors investigate the Hanoi Tower problem with multi-pegs more than three. Based on the idea of dynamic programming, the recursion formula of the least number of movements necessary for this problem is presented. The direct formula of the least number of movements necessary for this problem is given and proved by triple mathematical induction and pure combinatorics.

Key words Hanoi Tower Problem with Multi-Pegs; mathematical induction; dynamic programming

0 引 言

汉诺塔问题是由法国数学家 Edouard Lucas 于 1883 年提出的:有 3 根柱,第 1 根柱上有 n 个大小各异的圆盘,自底向上渐小。每次只能移动一个圆盘从 1 根柱到另 1 根柱上,且不能将大的圆盘置于小的圆盘之上,其目标是将所有的圆盘移到第 3 根柱上。这是一个著名的问题,特别是在计算机数据结构、算法设计与分析的教材中几乎都无一例外地引入(例如文献[1,2]),究其原因主要是它的解决使用了数学归纳和递归函数的方法。

百余年来,很多研究者和数学爱好者对于汉诺塔进行了扩展[3],其中最自然的一种即是对于柱的数目进行扩展。文献[3]给出了 4 柱汉诺塔的一个迭代算法;2004 年,文献[4]对于 4 柱汉诺塔进行了一些研究,给出了 4 柱汉诺塔最少步数的具体公式,采用数学归纳法和微积分的方法进行了证明。

而在本文中,笔者对于具有多根柱的汉诺塔进行了进一步的研究,给出了一般情况下最少步数的具体表达式,并采用三重数学归纳的方法对其进行了证明,且仅用到基本的组合知识。

用 $f_k(n)$ 表示在有 $k+3$ 根柱的汉诺塔中挪动 n 个盘子从一柱(记为 1 号柱)到另一柱(记为 $k+3$ 号柱)的最少挪动次数。应用动态规划的思想[5],该问题的解一定是如下所述形式:先将 1 号柱最上面的 r 个圆盘通过其他 $k+2$ 根柱移到某个不同于 $k+3$ 号柱的柱(不妨记之为 2 号柱)上,而后将 1 号柱上面的 $n-r$ 个圆盘通过 3 号至 $k+3$ 号这 $k+1$ 根柱移到 $k+3$ 号柱上,最后将 2 号柱上的 r 个圆盘移到 $k+3$ 号柱上。则明显地有:

$$f_{k+1}(n) = \min\{2f_{k+1}(n-s) + f_k(s): 1 \leqslant s < n\}。\tag{1}$$

1 准备工作

首先叙述一些 $f_k(n)$ 的基本性质,并引入一些记号(如不加特殊说明,本文中所有变量均取值于整数环):

引理 1 固定 $k \geqslant 0$,则 $f_k(n)$ 关于 n 是严格递增的。

证明 假设存在 $m > 0$,使得 $f_k(m) \geqslant f_k(m+$

1) 国家自然科学基金(90304014)和国家 863 计划(AA114160)资助项目
收稿日期:2004-12-13

1)。在 $m+1$ 个圆盘的 $k+3$ 柱汉诺塔问题的最优解法中将所有涉及到最大圆盘的移动均不进行,则所有移动结束时,即是一个 m 个盘子的 $k+3$ 柱汉诺塔问题的解,且其移动次数严格小于 $f_k(m+1)$,与假设矛盾。

引理 2 $N(k,t)=C_{k+t}^{k+1}$,$k\geqslant 0$,$t\geqslant 1$,则有:

$$N(k+1,t)+N(k,t+1)=N(k+1,t+1)。\quad (2)$$

证明 $N(k+1,t)+N(k,t+1)=C_{k+t+1}^{k+2}+C_{k+t+1}^{k+1}=C_{k+t+2}^{k+2}=N(k+1,t+1)$。

引理 3 $N(k,t)\leqslant n\leqslant N(k,t+1)$,$t\geqslant 1$,则可以定义

$$F_k(n)=F_k(N(k,t))+2^t\cdot(n-N(k,t)),\quad (3)$$

其中
$$F_k(N(k,t))=\sum_{i=0}^{t-1}C_{k+i}^{k}\cdot 2^i。\quad (4)$$

证明 要证明该定义是良性的,即在两个相邻分段的重合处(所有形如 $N(k,t+1)$ 处)按照 2 段的不同的定义方法其数值是相同的。换言之,即:固定 k,对于所有 $t\geqslant 1$,均要有:

$$F_k(N(k,t))+2^t\cdot(N(k,t+1)-N(k,t))=F_k(N(k,t+1))。$$

而这只需要注意到

$$F_k(N(k,t+1))=\sum_{i=0}^{t+1-1}C_{k+i}^{k}\cdot 2^i=\sum_{i=0}^{t-1}C_{k+i}^{k}\cdot 2^i+2^t\cdot C_{k+t}^{k}$$
$$=F_k(N(k,t))+2^t(N(k,t+1)-N(k,t))$$ 即可。

有了如上的 3 个引理和记号,在此可以给出 $f_k(n)$ 的具体表达式:$f_k(n)=F_k(n)$。下面给出一些引理,为第二节中该具体表达式的证明作准备。

引理 4 $F_k(n)$ 具有以下性质:

① 对于任意 $n>0$,$k\geqslant 0$,总存在正整数 m,使得 $F_k(n+1)-F_k(n)=2^m$;

② $\Delta F_k(n)=F_k(n+1)-F_k(n)$ 关于 n 单调不减;

③ 对于任意正整数 t,使得 $F_k(n+1)-F_k(n)=2^t$ 的 n 共有 C_{k+t}^{k} 个;

④ $$\min\{n:F_k(n+1)-F_k(n)=2^t\}=N(k,t);\quad (5)$$

⑤ k 固定,任意的 $a,b>0$,假设对某个 $t\geqslant 1$ 有 $a\geqslant N(k,t)$,则

$$F_k(a+b)\geqslant F_k(a)+2^t b;\quad (6)$$

⑥ k 固定,任意的 $a>b>0$,假设对某个 $t\geqslant 1$ 有 $a\leqslant N(k,t+1)$,则

$$F_k(a-b)\geqslant F_k(a)-2^t b。\quad (7)$$

证明

① 由 $F(n)$ 的定义可见,对于任意的 $n>0$,总存在某 $t>0$,使得 $N(k,t)\leqslant n<n+1\leqslant N(k,t+1)$。于是 $F_k(n+1)-F_k(n)=2^t$;

② 假设 $m>n>0$,于是存在 $t_1,t_2>0$,使得 $N(k,t_1)\leqslant m<m+1\leqslant N(k,t_1+1)$,$N(k,t_2)\leqslant n<n+1\leqslant N(k,t_2+1)$,且 $t_1\geqslant t_2$,因而 $\Delta F_k(m)=2^{t_1}\geqslant 2^{t_2}=\Delta F_k(n)$;

③ 由 $F(n)$ 的定义可见,只有 $N(k,t)\leqslant n<N(k,1)$ 的 n 才满足 $\Delta F_k(n)=2^t$,共 $N(k,t+1)-N(k,t)=C_{k+t}^{k}$ 个;

④ 由③的讨论立得 $\min\{n:F_k(n+1)-F_k(n)=2^t\}=N(k,t)$;

⑤ 由性质②、④立得;

⑥ 由性质②、④,有:对任意 $a>s>0$,$\Delta F_k(a-s)\leqslant 2^t$,于是

$$F_k(a)-F_k(a-b)=\sum_{s=1}^{b}\Delta F_k(a-s)\leqslant b\cdot 2^t。$$

引理 5 定义 $X(k,t)=F_k(N(k,t))$,则:

$$X(k+1,t+1)=X(k,t+1)+2X(k+1,t);\quad (8)$$
$$X(k+1,t)+X(k,t)=2^t\cdot C_{k+t}^{k+1};\quad (9)$$
$$X(k+1,t+1)+X(k,t+2)=2^{t+1}\cdot N(k,t+2)。\quad (10)$$

证明

(8)的证明:

$$\begin{aligned}X(k,t+1)+2X(k+1,t)&=\sum_{i=0}^{t}C_{k+i}^{k}\cdot 2^i+2\sum_{i=0}^{t-1}C_{k+1+i}^{k+1}\cdot 2^i\\&=\sum_{i=0}^{t}C_{k+i}^{k}\cdot 2^i+\sum_{i=1}^{t}C_{k+i}^{k+1}\cdot 2^i\\&=\sum_{i=0}^{t}(C_{k+i}^{k}+C_{k+i}^{k+1})2^i\\&=\sum_{i=0}^{t}C_{k+i+1}^{k+1}2^i=X(k+1,t+1);\end{aligned}$$

(9)的证明:由引理 3 的证明以及(2)可得到:

$$\begin{aligned}X(k,t+1)-X(k,t)&=2^t\cdot(N(k,t+1)-N(k,t))\\&=2^tN(k-1,t+1)\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}X(k+1,t)+X(k,t)&=X(k+1,t+1)-X(k+1,t)\\&\quad-X(k,t+1)+X(k,t)\quad(由(8))\\&=2^tN(k,t+1)-2^tN(k-1,t+1)\\&=2^tN(k,t)=2^tC_{k+t}^{k+1};\end{aligned}$$

(10)的证明:

$$\begin{aligned}X(k+1,t+1)+X(k,t+2)&=X(k+1,t+1)+X(k,t+1)+X(k,t+2)\\&\quad-X(k,t+1)\\&=2^{t+1}N(k,t+1)-2^{t+1}N(k-1,t+2)\\&=2^{t+1}\cdot N(k,t+2)。\end{aligned}$$

引理 6　定义 $Y(k,t)=\frac{1}{2^t}(X(k,t)+(-1)^k)$，则有

$$Y(k+1,t)+Y(k,t)=C_{k+t}^{k+1}; \tag{11}$$

$$Y(k,t)=\sum_{j=0}^{k}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j}。\tag{12}$$

由此，$F_k(n)$的定义也可以写为：若 $N(k,t)\leqslant n\leqslant N(k,t+1)$，则

$$F_k(n)=2^t\cdot\left(\sum_{j=0}^{k+1}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j}+n\right)-(-1)^k \tag{13}$$

$$=2^t\left(n-\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}C_{k-2j+t-1}^{t-2}\right)-(-1)^k。\tag{14}$$

证明

(11)的证明：由(10)，立得；

(12)的证明：$k=0$ 时，$Y(0,t)=\frac{1}{2^t}(X(0,t)+(-1)^0)=1$；$k\geqslant1$ 时，

$$Y(k,t)=\sum_{i=0}^{k-2}(Y(k-i,t)+Y(k-i-1,t))\cdot(-1)^i-(-1)^{k-2}Y(1,t)$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}C_{k+t-i-1}^{k-i}\cdot(-1)^i-(-1)^k$$

(令 $j=k-i$)

$$=\sum_{j=0}^{k}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j};$$

(13)的证明：由 $F_k(n)=X(k,t)+2^t\cdot(n-N(k,t))$，将 $N(k,t)$的定义及(12)代入即得；

(14)的证明：在(13)中，考察 $\sum_{j=0}^{k+1}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j}$ 部分，

当 k 是偶数时，

$$\sum_{j=0}^{k+1}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j}=\sum_{j=0}^{k/2}(C_{t-1+2j}^{2j}-C_{t-1+2j+1}^{2j+1})=-\sum_{j=0}^{k/2}C_{t-1+2j}^{2j+1}=-\sum_{j=0}^{k/2}C_{t-1+2j}^{t-2};$$

当 k 是奇数时，

$$\sum_{j=0}^{k+1}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j}=-C_{t-1}^{0}+\sum_{j=1}^{(k+1)/2}(C_{t-1+2j-1}^{2j-1}-C_{t-1+2j}^{2j})=-1-\sum_{j=1}^{(k+1)/2}C_{t-1+2j-1}^{2j}=-\sum_{j=0}^{(k+1)/2}C_{t-1+2j-1}^{t-2}。$$

综合两者，得到

$$\sum_{j=0}^{k+1}C_{t-1+j}^{j}\cdot(-1)^{k-j}=-\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}C_{k-2j+t-1}^{t-2}。$$

2　多柱汉诺塔最少移动次数的计算

定理　对所有 $k\geqslant0,n\geqslant1$ 有：

$$f_k(n)=F_k(n)=2^t\left(n-\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}C_{k-2j+t-1}^{t-2}\right)-(-1)^k \tag{15}$$

其中，t 满足：$N(k,t)\leqslant n\leqslant N(k,t+1)$。

证明　采用 3 层归纳法：

Ⅰ　$k=0$ 时，即是经典的汉诺塔问题，易于验证 $f_0(n)=F_0(n)=2^n-1$。定理成立；

Ⅰ　假定 $k=K$ 时定理成立，即 $f_K(n)=F_K(n)$，下面证明在 $k=K+1$ 时定理也成立：

Ⅱ-ⅰ　明显地，$f_{K+1}(1)=1=F_{K+1}(1)$；

Ⅱ-ⅱ　当 $N(K+1,1)<n\leqslant N(K+1,2)$，即 $1<n\leqslant K+3$ 时，$F_{K+1}(n)=2n-1$，而另一方面，

$$f_{K+1}(n)=\min\{2f_{K+1}(n-s)+f_K(s):1\leqslant s<n\}=\min\{2f_{K+1}(n-s)+2s-1:1\leqslant s<n\},$$

对 n 进行归纳易于证明 $f_{K+1}(n)=F_{K+1}(n)=2n-1$。

Ⅱ-ⅲ　假定对于 $1\leqslant t\leqslant T$，及所有 n 满足 $N(K+1,T)\leqslant n\leqslant N(K+1,T+1)$，均有 $f_{K+1}(n)=F_{K+1}(n)$。现考察 $t=T+1$ 的情形。假定 $N(K+1,T+1)\leqslant n\leqslant N(K+1,T+2)$。

令 $r=n-N(K+1,T+1)$，则：

$$0\leqslant r\leqslant N(K+1,T+2)-N(K+1,T+1)=N(K,T+2)。$$

下面对于 s 进行归纳：

Ⅱ-ⅲ-a　$r=0$ 由归纳假设Ⅱ-ⅲ保证；

Ⅱ-ⅲ-b　假设对于 $0\leqslant r\leqslant R-1\leqslant N(K,T+2)$ 的 r，定理均成立。

当 $r=R$ 时，对于任意的 s_0 满足：

$$N(K,T+1)\leqslant s_0\leqslant N(K,T+2)，且 \tag{16}$$

$$n-N(K+1,T+1)\leqslant s_0\leqslant n-N(K+1,T), \tag{17}$$

(即 $N(K+1,T)\leqslant n-s_0\leqslant N(K+1,T+1)$)。

则 $2f_{K+1}(n-s_0)+f_K(s_0)$

$=2F_{K+1}(n-s_0)+F_K(s_0)$　(由归纳假设Ⅱ Ⅱ-ⅲ-b)

$=2(X(K+1,T)+2^T(n-s_0-N(K+1,T)))+(X(K,T+1)+2^{T+1}(s_0-N(K,T+1)))$

$=2X(K+1,T)+X(K,T+1)+2^{T+1}(n-N(K+1,T)-N(K,T+1))$

$=X(K+1,T+1)+2^{T+1}R$　(由(8))

$=F_{K+1}(n)$。

另外，由 $N(K,T+2)-[n-N(K+1,T+1)]=N(K+1,T+2)-n\geqslant0$，有：

$[N(K,T+1),N(K,T+2)]\cap$

$[n-N(K+1,T+1), n-N(K+1,T)] \neq \phi$。说明 $f_K(s)=2f_{K+1}(n-s)$ 是可以取到数值 $F_{K+1}(n)$ 的。

下面分4种情况讨论当 s 不在(16)和(17)所表示的区间内时,$f_K(s)+2f_{K+1}(n-s)$ 值的大小情况。

① $s<N(K,T+1)$ 时。假设 $s=N(K,T+1)-m, 0<m<N(K,T+1)$。则

$$n-s=N(K+1,T+1)+R-(N(K,T+1)-m)=R+N(K+1,T)+m。$$

因而

$$\begin{aligned}
&f_K(s)+2f_{K+1}(n-s)\\
&=f_K(N(K,T+1)-m)+2f_{K+1}(N(K+1,T)+R+m)\\
&=F_K(N(K,T+1)-m)+2F_{K+1}(N(K+1,T)+R+m)\\
&\quad(\text{由 II、II-iii-b})\\
&\geqslant F_K(N(K,T+1))-2^Tm+2F_{K+1}(N(K+1,T)+(R+m)2^T)\\
&\quad(\text{由性质⑤、⑥})\\
&=X(K,T+1)+2X(K+1,T)+2^{T+1}R+2^Tm\\
&=X(K+1,T+1)+2^{T+1}R+2^Tm\\
&=F_{K+1}(n)+2^Tm>F_{K+1}(n)。
\end{aligned}$$

② $s<n-N(K+1,T+1)=R$。假设 $s=R-m, R>m>0$。则 $n-s=N(K+1,T+1)+m$。由 $N(K,T+2)\geqslant R$,知 $N(K,T+2)-R+m>0$。于是

$$\begin{aligned}
&f_K(s)+2f_{K+1}(n-s)\\
&=f_K(R-m)+2f_{K+1}(N(K+1,T+1)+m)\\
&=F_K(R-m)+2F_{K+1}(N(K+1,T+1)+m)\\
&\quad(\text{由 II、II-iii-b})\\
&=F_K(N(K,T+2)-(N(K,T+2)-R+m))+2F_{K+1}(N(K+1,T+1)+m)\\
&\geqslant X(K,T+2)-2^{T+1}(N(K,T+2)-R+m)+2(X(K+1,T+1)+2^{T+1}m)\\
&=X(K+1,T+1)+2^{T+1}R+2^{T+1}m+X(K,T+2)-2^{T+1}N(K,T+2)+X(K+1,T+1)\quad(\text{由}(8))\\
&=F_{K+1}(n)+2^{T+1}m>F_{K+1}(n)。\quad(\text{由}(10))
\end{aligned}$$

③ $s>n-N(K+1,T)$ 时。假设

$$\begin{aligned}
s&=n-N(K+1,T)+m\\
&=N(K+1,T+1)+R-N(K+1,T)+m\\
&=N(K,T+1)+R+m, m>0,
\end{aligned}$$

则 $n-s=N(K+1,T)-m$。于是

$$\begin{aligned}
&f_K(s)+2f_{K+1}(n-s)\\
&=f_K(N(K,T+1)+R+m)+2f_{K+1}(N(K+1,T)-m)\\
&=F_K(N(K,T+1)+R+m)+2F_{K+1}(N(K+1,T)-m)\\
&\quad(\text{由 II、II-iii})\\
&\geqslant X(K,T+1)+2^{T+1}(R+m)+2(X(K+1,T)-m2^{T-1})\\
&=X(K,T+1)+2X(K+1,T)+2^{T+1}R+m2^T\\
&=F_{K+1}(n)+m2^T>F_{K+1}(n)。
\end{aligned}$$

④ $s>N(K,T+2)$ 时。假设 $s=N(K,T+2)+m, m>0$,则

$$\begin{aligned}
n-s&=N(K+1,T+1)+R-(N(K,T+2)+m)\\
&=N(K+1,T+1)-(N(K,T+2)-R+m),
\end{aligned}$$

由 $N(K,T+2)\geqslant R$,知 $N(K,T+2)-R+m>0$。于是

$$\begin{aligned}
&f_K(s)+2f_{K+1}(n-s)\\
&=f_K(N(K,T+2)+m)+2f_{K+1}(N(K+1,T+1)-(N(K,T+2)-R+m))\\
&=F_K(N(K,T+2)+m)+2F_{K+1}(N(K+1,T+1)-(N(K,T+2)-R+m))\\
&\quad(\text{由 II-iii、II-iii-b})\\
&\geqslant X(K,T+2)+m2^{T+2}+2X(K+1,T+1)-2^{T+1}(N(K,T+2)-R+m)\\
&=X(K+1,T+1)+2^{T+1}R+m2^{T+1}+X(K,T+2)+2X(K+1,T+1)-2^{T+1}N(K,T+2)\\
&=F_{K+1}(n)+m2^{T+1}>F_{K+1}(n)。(\text{由}(10))
\end{aligned}$$

综上所述,说明 $f_{K+1}(n)=F_{K+1}(n)$ 对 $n=R+N(K+1,T+1)$ 成立。由此3层归纳得到结论:$f_k(n)=F_k(n)$ 对所有 $k\geqslant 0, n\geqslant 1$ 成立。

3　结　论

上面给出了多柱汉诺塔最少移动次数的计算公式,特别地:

当 $k=0$ 时,$N(0,t)=C_t^1=t, n=N(0,n)\leqslant n\leqslant N(0,n+1)=n+1, f_0(n)=2^n-1$,即是经典汉诺塔问题的解;

当 $k=1$ 时,$N(1,t)=C_{t+1}^2$,$f_1(n)=2^t(n-C_{t-1}^{t-2}-C_{t+1}^{t-2})+1$,即是文献[4]中结果($R_0$ 即是 t)。

参　考　文　献

1　Aho A V, Hopcroft J E, Ullman J D. Data Structures and Algorithms. Reading, Mass: Addison-Wesley, c1983

2　Graham R L, Knuth D E, Patashnik O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, c1994

3　http://hanoitower.mkolar.org/HTonWebE.html

4　Hinz A M. An Iterative Algorithm for the Tower of Hanoi with Four Pegs. Computing, 1989, 42: 133-140

5　杨楷,徐川. 四柱汉诺塔之初步探究. 北京大学学报(自然科学版),2004,40(1):99—106

6　卢开澄. 计算机算法导引——设计与分析. 第2版. 北京:清华大学出版社,1996

多柱汉诺塔问题研究

作者： 刘铎， 戴一奇， LIU Duo， DAI Yiqi
作者单位： 清华大学计算机科学与技术系,北京,100084
刊名： 北京大学学报（自然科学版） ISTIC PKU
英文刊名： ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS PEKINENSIS
年，卷(期)： 2006,42(1)

参考文献(6条)

1. Aho A V;Hopcroft J E;Ullman J D Data Structures and Algorithms 1983

2. Graham R L;Knuth D E;Patashnik O Concrete Mathematics:A Foundation for Computer Science 1994

3. 查看详情

4. Hinz A M An Iterative Algorithm for the Tower of Hanoi with Four Pegs[外文期刊] 1989

5. 杨楷;徐川 四柱汉诺塔之初步探究[期刊论文]-北京大学学报(自然科学版) 2004(01)

6. 卢开澄 计算机算法导引--设计与分析 1996

本文读者也读过(9条)